東北大学 土木系 院試 基礎科目

2023 秋

微分積分

問 1

次のように x, y が変数 t の関数として与えられるとき，x, y を用いて $\dfrac{dy}{dx}$ を表せ。

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} \tag{1.1}$$

解答. 与式より $x^2 + y^2 = 1$ であるので両辺を x で微分して

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.3}$$

問 2

以下の問いに答えよ。

(1) 次に示す関数 $f(t)$ および $g(t)$ を $t = 0$ のまわりでそれぞれテイラー展開せよ。

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t \tag{1.4}$$

(2) 次に示す 2 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ と単位行列 $\boldsymbol{E}$ を考える。n をゼロ以上の整数とし，$n, t, \boldsymbol{E}$ を用いて $\boldsymbol{A}^2$ および $\boldsymbol{A}^{2n}$ を表せ。なお，$\boldsymbol{A}^0$ は $\boldsymbol{E}$ と定義される。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の指数関数 $\exp \boldsymbol{A}$ は次のように定義される。$\sin t$ と $\cos t$ を用いて $\exp \boldsymbol{A}$ のすべての成分を表せ。

$$\exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots \tag{1.6}$$

解答.

(1) テイラー展開はそれぞれ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \tag{1.7}$$

$$= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \tag{1.8}$$

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \tag{1.9}$$

(2) 与えられた行列について，$\boldsymbol{A}^2$ は

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$$= -t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$= -t^2 \boldsymbol{E} \tag{1.12}$$

また，$\boldsymbol{A}^{2n}$ は

$$\boldsymbol{A}^{2n} = \begin{cases} (-t^2)^n \boldsymbol{E} & \text{if } n \geq 1 \\ \boldsymbol{E} & \text{if } n = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$= (-t^2)^n \boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

(3) (2) より

$$\exp \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 + \frac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6 + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5 + \cdots \tag{1.15}$$

$$= \boldsymbol{E} - \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{E} + \frac{t^4}{4!}\boldsymbol{E} - \frac{t^6}{6!}\boldsymbol{E} + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} - \frac{t^2}{3!}\boldsymbol{A} + \frac{t^4}{5!}\boldsymbol{A} - \cdots \tag{1.16}$$

$$= \boldsymbol{E} - \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{E} + \frac{t^4}{4!}\boldsymbol{E} - \frac{t^6}{6!}\boldsymbol{E} + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} - \frac{t^2}{3!}\boldsymbol{A} + \frac{t^4}{5!}\boldsymbol{A} - \cdots \tag{1.17}$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right)\boldsymbol{E} + \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

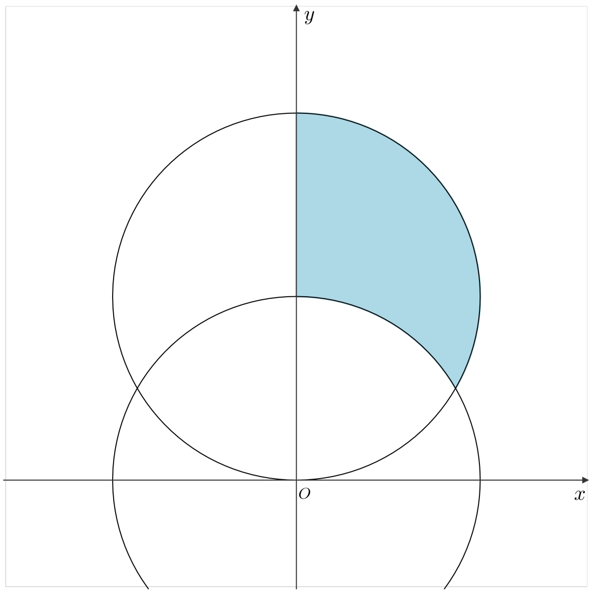
$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

問 3

> 次の重積分について，以下の問いに答えよ。
>
> $$I = \iint_D x \, dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\right\} \tag{1.21}$$
>
> (1) 積分領域 D を図示せよ。
>
> (2) 重積分 I を計算せよ。

解答.

(1) 積分領域 D は下図



(2) 与えられた積分について極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を考えると，領域 D は

$$D = \left\{(r,\theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r^2 \leq 2r\sin\theta\right\} \tag{1.22}$$

$$= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \tag{1.23}$$

$$= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \tag{1.24}$$

$$= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \quad (\because 1 \leq 2\sin\theta) \tag{1.25}$$

である。$dxdy = r\,drd\theta$ も考えて，

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{1}^{2\sin\theta} r^2 \cos\theta\, drd\theta \tag{1.26}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_1^{2\sin\theta} \tag{1.27}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta \tag{1.28}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1} (8t^3 - 1)\, dt \tag{1.29}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2t^4 - t\right]_{1/2}^{1} \tag{1.30}$$

$$= \frac{11}{24} \tag{1.31}$$

別解. 領域 D は

$$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\right\} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}+1\right\} \\ &\qquad \vee \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2}+1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}+1\right\} \end{aligned} \tag{1.33}$$

とも表せるので，重積分 I は

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}+1} x\, dydx + \int_{\sqrt{3}}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} x\, dydx \tag{1.34}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}/2} x\, dx + \int_{\sqrt{3}/2}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\, dx \tag{1.35}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}/2} + \int_{3/4}^{1} \sqrt{1-t}\, dt \quad (t = x^2) \tag{1.36}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_{3/4}^{1} \tag{1.37}$$

$$= \frac{11}{24} \tag{1.38}$$

線形代数

問 1

ベクトル $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を，$\boldsymbol{a}$ を通る直線へ射影せよ。

(2) $\boldsymbol{a}$ を通る直線への射影行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ。

解答.

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ より

$$\boldsymbol{p} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\, \boldsymbol{a} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

(2) $\boldsymbol{P} = \dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$ は

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

問 2

> $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ とする下三角行列 $\boldsymbol{L}$ と上三角行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ。ただし，下三角行列 $\boldsymbol{L}$ の対角成分は 1 とする。
>
> $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

解答. 行列 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ の未知の i 行 j 列の要素を l_{ij}, u_{ij} と表すとき，$\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 分解は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} && (1.43)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} && (1.44)\\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} && (1.45)
\end{aligned}$$

とできるので，

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

問 3

> 行列 $\boldsymbol{B}$ に関する以下の問いに答えよ。
>
> $$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$
>
> (1) $\boldsymbol{B}$ の固有値をすべて求めよ。
>
> (2) $\boldsymbol{B}^2$ の固有値をすべて求めよ。

(3) $\boldsymbol{B}^\infty$ を求めよ。

解答.

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有方程式 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})=0$ より

$$\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}) = \left(\lambda-\frac{5}{6}\right)\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{18} \tag{1.49}$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda-1)(2\lambda-1) \tag{1.50}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, 1 \tag{1.51}$$

(2) $\boldsymbol{B}^2$ は

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

であるので，$\boldsymbol{B}^2$ の固有方程式 $\det(\boldsymbol{B}^2-\lambda\boldsymbol{E})=0$ より

$$\det(\boldsymbol{B}^2-\lambda\boldsymbol{E}) = \left(\lambda-\frac{3}{4}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8} \tag{1.53}$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda-1)(4\lambda-1) \tag{1.54}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, 1 \tag{1.55}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ は対角化行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

と対角化される。このとき対角化行列 $\boldsymbol{P}$ について
(i) $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき

$$(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1.57}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1.59}$$

であるので，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

(ii) $\lambda = 1$ のとき

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1.61}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1.63}$$

であるので，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

(i)，(ii) より，対角化行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.65}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

$$\tag{1.67}$$

ゆえに

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})^{\infty} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\infty}\boldsymbol{P} \tag{1.68}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

左から $\boldsymbol{P}$，右から $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけて

$$\boldsymbol{B}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.71}$$