

# 東北大学 土木系 院試 基礎科目

鈴木 \*

## 目次

---

|     |                |    |
|-----|----------------|----|
| 1   | 2023 秋         | 2  |
| 1.1 | 微分積分 . . . . . | 2  |
| 1.2 | 線形代数 . . . . . | 5  |
| 2   | 2023 春         | 9  |
| 2.1 | 微分積分 . . . . . | 9  |
| 2.2 | 線形代数 . . . . . | 11 |
| 3   | 2022 秋         | 14 |
| 3.1 | 微分積分 . . . . . | 14 |
| 3.2 | 線形代数 . . . . . | 16 |

---

\* <https://github.com/suzuyuyuyu>

## 2023 秋

### 微分積分

#### 問 1

次のように  $x, y$  が変数  $t$  の関数として与えられるとき,  $x, y$  を用いて  $\frac{dy}{dx}$  を表せ。

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases} \quad (1.1)$$

解答. 与式より  $x^2 + y^2 = 1$  であるので両辺を  $x$  で微分して

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (1.3)$$

#### 問 2

以下の問いに答えよ。

- (1) 次に示す関数  $f(t)$  および  $g(t)$  を  $t = 0$  のまわりでそれぞれテイラー展開せよ。

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t \quad (1.4)$$

- (2) 次に示す 2 次の正方行列  $\mathbf{A}$  と単位行列  $\mathbf{E}$  を考える。 $n$  をゼロ以上の整数とし,  $n, t, \mathbf{E}$  を用いて  $\mathbf{A}^2$  および  $\mathbf{A}^{2n}$  を表せ。なお,  $\mathbf{A}^0$  は  $\mathbf{E}$  と定義される。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

- (3) 行列  $\mathbf{A}$  の指数関数  $\exp \mathbf{A}$  は次のように定義される。 $\sin t$  と  $\cos t$  を用いて  $\exp \mathbf{A}$  のすべての成分を表せ。

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k = \mathbf{E} + \frac{1}{1!} \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \cdots \quad (1.6)$$

解答.

(1) テイラー展開はそれぞれ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad (1.7)$$

$$= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \quad (1.8)$$

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \quad (1.9)$$

(2) 与えられた行列について,  $\mathbf{A}^2$  は

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$= -t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$= -t^2 \mathbf{E} \quad (1.12)$$

また,  $\mathbf{A}^{2n}$  は

$$\mathbf{A}^{2n} = \begin{cases} (-t^2)^n \mathbf{E} & \text{if } n \geq 1 \\ \mathbf{E} & \text{if } n = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$= (-t^2)^n \mathbf{E} \quad (1.14)$$

(3) (2) より

$$\exp \mathbf{A} = \mathbf{E} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 + \frac{1}{6!} \mathbf{A}^6 + \cdots + \frac{1}{1!} \mathbf{A} + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{1}{5!} \mathbf{A}^5 + \cdots \quad (1.15)$$

$$= \mathbf{E} - \frac{t^2}{2!} \mathbf{E} + \frac{t^4}{4!} \mathbf{E} - \frac{t^6}{6!} \mathbf{E} + \cdots + \frac{1}{1!} \mathbf{A} - \frac{t^2}{3!} \mathbf{A} + \frac{t^4}{5!} \mathbf{A} - \cdots \quad (1.16)$$

$$= \mathbf{E} - \frac{t^2}{2!} \mathbf{E} + \frac{t^4}{4!} \mathbf{E} - \frac{t^6}{6!} \mathbf{E} + \cdots + \frac{1}{1!} \mathbf{A} - \frac{t^2}{3!} \mathbf{A} + \frac{t^4}{5!} \mathbf{A} - \cdots \quad (1.17)$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) \mathbf{E} + \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

### 問 3

次の重積分について, 以下の問いに答えよ。

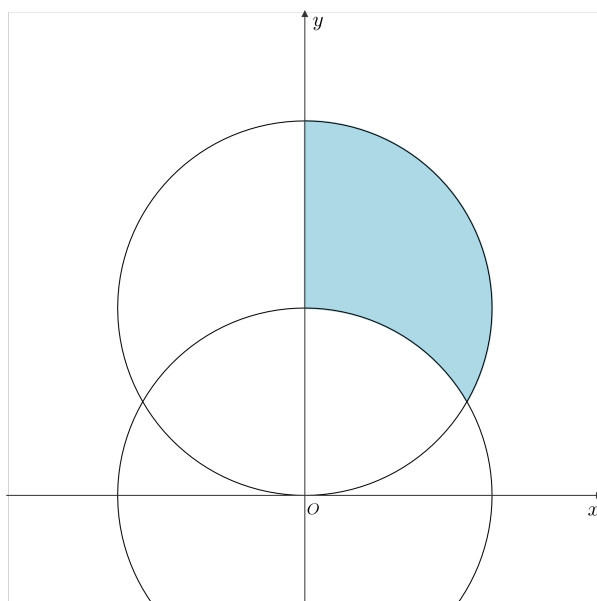
$$I = \iint_D x \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\} \quad (1.21)$$

(1) 積分領域  $D$  を図示せよ。

(2) 重積分  $I$  を計算せよ。

解答.

(1) 積分領域  $D$  は下図



(2) 与えられた積分について極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  を考えると, 領域  $D$  は

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r^2 \leq 2r \sin \theta \right\} \quad (1.22)$$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\} \quad (1.23)$$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\} \quad (1.24)$$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\} \quad (\because 1 \leq 2 \sin \theta) \quad (1.25)$$

である。  $dx dy = r dr d\theta$  も考えて,

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_1^{2 \sin \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (1.26)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \left[ \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_1^{2 \sin \theta} \quad (1.27)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left( \frac{8}{3} \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \right) d\theta \quad (1.28)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^1 (8t^3 - 1) dt \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{3} [2t^4 - t]_{1/2}^1 \quad (1.30)$$

$$= \frac{11}{24} \quad (1.31)$$

別解. 領域  $D$  は

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\} \quad (1.32)$$

$$= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} + 1 \right\} \quad (1.33)$$

$$\vee \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} + 1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} + 1 \right\}$$

とも表せるので, 重積分  $I$  は

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}+1} x \, dy \, dx + \int_{\sqrt{3}/2}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} x \, dy \, dx \quad (1.34)$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}/2} x \, dx + \int_{\sqrt{3}/2}^1 2x\sqrt{1-x^2} \, dx \quad (1.35)$$

$$= \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}/2} + \int_{3/4}^1 \sqrt{1-t} \, dt \quad (t = x^2) \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \left[ -\frac{2}{3}(1-t)^{3/2} \right]_{3/4}^1 \quad (1.37)$$

$$= \frac{11}{24} \quad (1.38)$$

## 線形代数

### 問 1

ベクトル  $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{b}$  に関する以下の問いに答えよ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

(1) ベクトル  $\mathbf{b}$  を,  $\mathbf{a}$  を通る直線へ射影せよ。

(2)  $\mathbf{a}$  を通る直線への射影行列  $\mathbf{P}$  を求めよ。

解答.

(1) ベクトル  $\mathbf{b}$  の  $\mathbf{a}$  への射影  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{b}| \cos \theta$  より

$$\mathbf{p} = \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

(2)  $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$  は

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

## 問 2

$A = LU$  とする下三角行列  $L$  と上三角行列  $U$  を求めよ。ただし、下三角行列  $L$  の対角成分は 1 とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

解答. 行列  $L, U$  の未知の  $i$  行  $j$  列の要素を  $l_{ij}, u_{ij}$  と表すとき,  $LU$  分解は

$$A = LU \quad (1.43)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

とできるので,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$U = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

## 問 3

行列  $B$  に関する以下の問いに答えよ。

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

- (1)  $B$  の固有値をすべて求めよ。
- (2)  $B^2$  の固有値をすべて求めよ。
- (3)  $B^\infty$  を求めよ。

解答.

(1)  $\mathbf{B}$  の固有方程式  $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$  より

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = \left(\lambda - \frac{5}{6}\right)\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{18} \quad (1.49)$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda - 1)(2\lambda - 1) \quad (1.50)$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, 1 \quad (1.51)$$

(2)  $\mathbf{B}^2$  は

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

であるので,  $\mathbf{B}^2$  の固有方程式  $\det(\mathbf{B}^2 - \lambda \mathbf{E}) = 0$  より

$$\det(\mathbf{B}^2 - \lambda \mathbf{E}) = \left(\lambda - \frac{3}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \quad (1.53)$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda - 1)(4\lambda - 1) \quad (1.54)$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, 1 \quad (1.55)$$

(3)  $\mathbf{B}$  は対角化行列  $\mathbf{P}$  を用いて

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

と対角化される。このとき対角化行列  $\mathbf{P}$  について

(i)  $\lambda = \frac{1}{2}$  のとき

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.59)$$

であるので, 固有ベクトルは

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

(ii)  $\lambda = 1$  のとき

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.63)$$

であるので, 固有ベクトルは

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

(i), (ii) より, 対角化行列  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

$$(1.67)$$

ゆえに

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^\infty = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^\infty\mathbf{P} \quad (1.68)$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

左から  $\mathbf{P}$ , 右から  $\mathbf{P}^{-1}$  をかけて

$$\mathbf{B}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.71)$$



## 2023 春

### 微分積分

#### 問 1

次の極限值を求めよ。ただし,  $a > 0, b > 0$  とする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \quad (2.1)$$

解答. 与えられた極限に対数をとった次の極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{a^x + b^x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (a^x \log a + b^x \log b)}{\frac{a^x + b^x}{2}} \quad (\text{L'Hôpital の定理}) \quad (2.2)$$

$$= \frac{\log a + \log b}{2} = \log \sqrt{ab} \quad (2.3)$$

と得られるので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \sqrt{ab} \quad (2.4)$$

#### 問 2

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  のとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $dx$  および  $dy$  を求めよ。
- (2)  $r, dr, \theta, d\theta$  を用いて次式を表せ。

$$x dy - y dx \quad (2.5)$$

解答.

(1)

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad (2.6)$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (2.7)$$

(2)

$$x dy - y dx = r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \quad (2.8)$$

$$= r^2 \cos^2 \theta d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta = r^2 d\theta \quad (2.9)$$

## 問 3

次に示す  $xyz$  空間の領域  $D$  を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

$$D = \{(x, y, z) \mid y \geq 0, z \geq 0, z^2 \leq 4x, y^2 \leq x - x^2\} \quad (2.10)$$

- (1) 領域  $D$  を図示せよ。  
 (2) 領域  $D$  の体積を求めよ。

解答. (1) 略

(2)  $C = \left\{ (x, y) \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$  として、求める体積  $V_D$  は

$$V_D = \iiint_C z \, dx dy \quad (2.11)$$

$$= \iint_C 2\sqrt{x} \, dx dy \quad (2.12)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} 2\sqrt{x} \, dy dx \quad (2.13)$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{x} \sqrt{x-x^2} \, dx \quad (2.14)$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x} \, dx \quad (2.15)$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{1-x} \, dx - \int_0^1 2(1-x)\sqrt{1-x} \, dx \quad (2.16)$$

$$= \frac{8}{15} \quad (2.17)$$

## 問 4

次の微分方程式を解け。ここで、 $e$  は自然対数の底である。

$$y'' - 2y' + 2y - e^x - 2x = 0 \quad (2.18)$$

解答. 斉次の微分方程式  $y'' - 2y' + 2y = 0$  の解は特性方程式  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1 \pm i$  より

$$y = e^x(A \cos x + B \sin x) \quad (2.19)$$

ここで、与えられた微分方程式について特解を  $y_p = ke^x + ax + b$  と仮定すると

$$\begin{cases} y_p' = ke^x + a \\ y_p'' = ke^x \end{cases} \quad (2.20)$$

であるので、

$$ke^x - 2(ke^x + a) + 2(ke^x + ax + b) = e^x + 2x \quad (2.21)$$

$$\therefore k = a = b = 1 \quad (2.22)$$

ゆえに与えられた微分方程式の一般解は

$$y = e^x(A \cos x + B \sin x) + e^x + x + 1 \quad (2.23)$$

## 線形代数

### 問 1

以下の線形方程式の基本解を求めよ。

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \quad (2.24)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \quad (2.25)$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \quad (2.26)$$

解答. 行列で表すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ とおく}) \quad (2.27)$$

このとき,  $\mathbf{A}$  の行基本変形によって

$$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

とできるので,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

よって, 基本解は  $\dim \mathbf{x} - \text{rank } \mathbf{A} = 2$  から 2 つあって  $x_1, x_2 = s, t \in \mathbb{R}$  として解は

$$\mathbf{x} = s \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

と表せる。基本解は

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

### 問 2

行列  $A$  について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

- (1)  $A$  の階数を求めよ。
- (2)  $A$  の行列式を求めよ。
- (3)  $A$  のすべての固有値を求めよ。
- (4)  $A$  の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
- (5) 行列  $A$  は対角化可能か否かを調べよ。

解答.

- (1) 行基本変形によって

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

とできるので  $\text{rank } A = 3$

- (2) 余因子展開から

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

$$= -4 \quad (2.35)$$

- (3) 固有方程式  $\det(\lambda E - A) = 0$  より

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \lambda - 2 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)\lambda - 2(\lambda - 2) \quad (2.37)$$

$$= (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \quad (2.38)$$

$$(2.39)$$

$$\therefore \lambda = -1, 2 \quad (2.40)$$

- (4) 固有ベクトルを  $\mathbf{u} = (x, y, z)^T$  とする。

- (i)  $\lambda = -1$  のとき

$$(\lambda E - A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

よって、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

(ii)  $\lambda = 2$  のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (2.46)$$

$$(2.47)$$

よって、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

(5) 固有方程式の解のうち重解  $\lambda = 2$  において固有ベクトルが 1 つなので対角化可能でない。

## 2022 秋

### 微分積分

#### 問 1

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \quad (3.1)$$

解答.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) \quad (3.2)$$

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  より

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sin x} \cdot x \leq \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \leq \frac{x}{\sin x} \cdot x & (\text{if } \frac{x}{\sin x} > 0) \\ \frac{x}{\sin x} \cdot x \leq \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \leq -\frac{x}{\sin x} \cdot x & (\text{if } \frac{x}{\sin x} < 0) \end{cases} \quad (3.3)$$

いずれについても  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  より最左辺, 最右辺  $\rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) であるのではさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0 \quad (3.4)$$

#### 問 2

次の関数  $f(x, y)$  の極値を求めよ。

$$f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0) \quad (3.5)$$

解答. 停留点であるためには

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.7)$$

かつ、この点でヘッシアン  $\det \mathbf{H}$  は

$$\det \mathbf{H} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \bigg|_{(x,y)=(4,1/2)} \quad (3.8)$$

$$= \begin{vmatrix} 1/4 & 1 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad (3.9)$$

より  $(x, y) = (4, 1/2)$  で極小値 6 をとる。

### 問 3

次に示す  $xyz$  空間の領域  $D$  を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 2x\} \quad (3.10)$$

- (1) 領域  $D$  を図示せよ。
- (2) 領域  $D$  の体積を求めよ。

解答.

(1) 略

(2) ある座標  $(x, y)$  における領域の上限は  $x^2 + y^2 = z$  上の点であるので、高さを  $z = x^2 + y^2$ 、積分領域を  $C = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$  として求める体積  $V_D$  は

$$V_D = \iiint_C z \, dx dy \quad (3.11)$$

と求められる。まず、この積分領域は極座標系  $(r, \theta)$  に変換すれば

$$C = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \quad (3.12)$$

$$= \{(r, \theta) \mid r^2 - 2r \cos \theta \leq 1\} \quad (3.13)$$

$$= \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (3.14)$$

であるので、

$$V_D = \int_0^{2\pi} \int_0^{2 \cos \theta} r^3 \, dr d\theta \quad (3.15)$$

$$= \int_0^{2\pi} 4 \cos^4 \theta \, d\theta \quad (3.16)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \quad (3.17)$$

$$= 3\pi \quad (3.18)$$

### 問 4

次の微分方程式を解け。ここで  $e$  は自然対数の底である。

$$y'' + 4y' + 4y - e^{-2x} = 0 \quad (3.19)$$

**解答.** 与えられた微分方程式の斉次形である  $y'' + 4y' + 4y = 0$  について, 特性方程式  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = -2$  であるので, 斉次解は  $y = (A + Bx)e^{-2x}$

また, 特解を  $y_p = Cx^2e^{-2x}$  とおくと

$$\begin{cases} y_p' = 2C(x - x^2)e^{-2x} \\ y_p'' = 2C(2x^2 - 4x + 1)e^{-2x} \end{cases} \quad (3.20)$$

であるので与えられた微分方程式に代入して

$$2C(2x^2 - 4x + 1) + 8C(x - x^2) + 4Cx^2 = 1 \quad (3.21)$$

$$C = \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

よって, 求める一般解は斉次解と特解の足し合わせで

$$y = \left( A + Bx + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{-2x} \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

## 線形代数

### 問 1

以下の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

**解答.**

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 42 \quad (3.26)$$

### 問 2

以下の行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$



は固有値  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$  を持つ。この行列について以下の問いに答えよ。

(1)  $A$  の正規化された固有ベクトルをすべて求めよ。

(2)  $B^2 = A$  となる行列  $B$  を求めよ。

解答.

(1) 固有ベクトルを  $u$  で表す。

(i)  $\lambda = \lambda_1$  のとき

$$(\lambda E - A)u = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} u = 0 \quad (3.28)$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

(ii)  $\lambda = \lambda_2$  のとき

$$(\lambda E - A)u = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} u = 0 \quad (3.30)$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

(2)  $B^2$  を計算して  $A$  となるので  $B$  は  $2 \times 2$  の正方行列である。ここで、 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  とおくと

$$B^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)b & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \frac{13}{2} = a^2 + bc \\ \frac{5}{2} = (a+d)b \\ \frac{5}{2} = (a+d)c \\ \frac{13}{2} = bc + d^2 \end{cases} \quad (3.33)$$

整理して

$$a = d, b = c \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} \frac{13}{2} = a^2 + b^2 \\ \frac{5}{2} = 2ab \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\therefore a + b = \pm 3, a - b = \pm 2 \quad (\text{複号任意}) \quad (3.36)$$

を得る。よって,

$$B = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{5}{2} \\ \pm \frac{5}{2} & \pm \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm \frac{5}{2} & \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{行列内は複号同順}) \quad (3.37)$$

### 問 3

$\Pi$  を以下のベクトルで張られる  $\mathbb{R}^3$  (三次元空間) の平面とする。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $\Pi$  の正規直交基底  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  を求めよ。ただし  $\mathbf{a}_1 // \mathbf{b}_1$  とする。
- (2)  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  が  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底となるような  $\mathbf{b}_3$  を求めよ。

解答.

- (1) Gram-Schmidt の直交化法を用いて得た 2 つのベクトルはもとのベクトルと同じ部分空間を張る。

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$\mathbf{a}_2$  の  $\mathbf{a}_1$  への射影ベクトルは

$$(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 \quad (3.40)$$

であるので,  $\mathbf{a}_2$  はこの射影ベクトルと  $\mathbf{a}_1$  と直交するベクトル  $\mathbf{b}'_2$  を用いて

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}'_2 \quad (3.41)$$

よって,  $\mathbf{b}_2$  は

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{b}'_2}{|\mathbf{b}'_2|} \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

- (2) あらたな  $\mathbf{b}_3$  は  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  の両者に直交するので外積として得られる。

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

別解.  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  について, 平面  $\Pi$  の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  から得ることを考える。法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

とおくと法線ベクトルは  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$  であるので

$$\begin{cases} -p + r = 0 \\ p + q = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\therefore \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$  であるので, 正規化されていない  $\mathbf{b}_2$  と平行なベクトル  $\mathbf{b}'_2 = \{x, y, z\}^T$  は

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\therefore \mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

これを正規化して

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$\mathbf{b}_3$  は法線ベクトルと等しい方向で,

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \quad (3.52)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$