

■ 2023 春

|| 微分積分

問 1

次の極限值を求めよ。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \quad (1.1)$$

解答. 与えられた極限に対数をとった次の極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{a^x + b^x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (a^x \log a + b^x \log b)}{\frac{a^x + b^x}{2}} \quad (\text{L'Hôpital の定理}) \quad (1.2)$$

$$= \frac{\log a + \log b}{2} = \log \sqrt{ab} \quad (1.3)$$

と得られるので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \sqrt{ab} \quad (1.4)$$