東北大学 土木系 院試 基礎科目

鈴木 *

目次

* https://github.com/suzuyuyuyu

2023 秋

微分積分

問 1

次のように x, y が変数 t の関数として与えられるとき，x, y を用いて $\dfrac{dy}{dx}$ を表せ。

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} \tag{1.1}$$

解答. 与式より $x^2 + y^2 = 1$ であるので両辺を x で微分して

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.3}$$

問 2

以下の問いに答えよ。

(1) 次に示す関数 $f(t)$ および $g(t)$ を $t = 0$ のまわりでそれぞれテイラー展開せよ。

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t \tag{1.4}$$

(2) 次に示す 2 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ と単位行列 $\boldsymbol{E}$ を考える。n をゼロ以上の整数とし，$n, t, \boldsymbol{E}$ を用いて $\boldsymbol{A}^2$ および $\boldsymbol{A}^{2n}$ を表せ。なお，$\boldsymbol{A}^0$ は $\boldsymbol{E}$ と定義される。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の指数関数 $\exp \boldsymbol{A}$ は次のように定義される。$\sin t$ と $\cos t$ を用いて $\exp \boldsymbol{A}$ のすべての成分を表せ。

$$\exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots \tag{1.6}$$

解答.

(1) テイラー展開はそれぞれ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \tag{1.7}$$

$$= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \tag{1.8}$$

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \tag{1.9}$$

(2) 与えられた行列について，$\boldsymbol{A}^2$ は

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$$= -t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$= -t^2 \boldsymbol{E} \tag{1.12}$$

また，$\boldsymbol{A}^{2n}$ は

$$\boldsymbol{A}^{2n} = \begin{cases} (-t^2)^n \boldsymbol{E} & \text{if } n \geq 1 \\ \boldsymbol{E} & \text{if } n = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$= (-t^2)^n \boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

(3) (2) より

$$\exp \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 + \frac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6 + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5 + \cdots \tag{1.15}$$

$$= \boldsymbol{E} - \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{E} + \frac{t^4}{4!}\boldsymbol{E} - \frac{t^6}{6!}\boldsymbol{E} + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} - \frac{t^2}{3!}\boldsymbol{A} + \frac{t^4}{5!}\boldsymbol{A} - \cdots \tag{1.16}$$

$$= \boldsymbol{E} - \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{E} + \frac{t^4}{4!}\boldsymbol{E} - \frac{t^6}{6!}\boldsymbol{E} + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} - \frac{t^2}{3!}\boldsymbol{A} + \frac{t^4}{5!}\boldsymbol{A} - \cdots \tag{1.17}$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right)\boldsymbol{E} + \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

問 3

次の重積分について，以下の問いに答えよ。

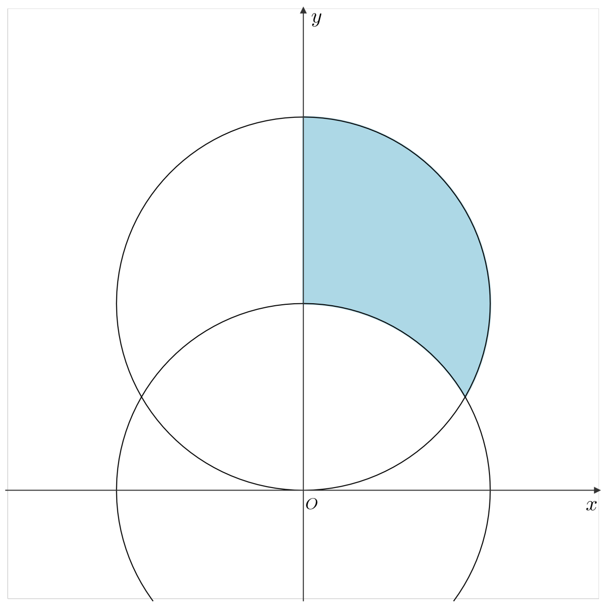
$$I = \iint_D x \, dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\right\} \tag{1.21}$$

(1) 積分領域 D を図示せよ。

(2) 重積分 I を計算せよ。

解答.

(1) 積分領域 D は下図



(2) 与えられた積分について極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を考えると，領域 D は

$$D = \left\{(r,\theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r^2 \leq 2r\sin\theta\right\} \tag{1.22}$$
$$= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \tag{1.23}$$
$$= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \tag{1.24}$$
$$= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \quad (\because 1 \leq 2\sin\theta) \tag{1.25}$$

である。$dxdy = r\,drd\theta$ も考えて，

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1}^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\,drd\theta \tag{1.26}$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_1^{2\sin\theta} \tag{1.27}$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta \tag{1.28}$$
$$= \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1} (8t^3 - 1)\,dt \tag{1.29}$$
$$= \frac{1}{3}\left[2t^4 - t\right]_{1/2}^{1} \tag{1.30}$$
$$= \frac{11}{24} \tag{1.31}$$

別解. 領域 D は

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2y\right\} && (1.32) \\ &= \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}+1\right\} \\ &\qquad \vee \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2}+1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}+1\right\} && (1.33) \end{aligned}$$

とも表せるので，重積分 I は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}+1} x\, dydx + \int_{\sqrt{3}}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} x\, dydx && (1.34) \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/2} x\, dx + \int_{\sqrt{3}/2}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\, dx && (1.35) \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}/2} + \int_{3/4}^{1} \sqrt{1-t}\, dt \quad (t = x^2) && (1.36) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_{3/4}^{1} && (1.37) \\ &= \frac{11}{24} && (1.38) \end{aligned}$$

線形代数

問 1

ベクトル $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を，$\boldsymbol{a}$ を通る直線へ射影せよ。

(2) $\boldsymbol{a}$ を通る直線への射影行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ。

解答.

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ より

$$\boldsymbol{p} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

(2) $\boldsymbol{P} = \dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$ は

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

問 2

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ とする下三角行列 $\boldsymbol{L}$ と上三角行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ。ただし，下三角行列 $\boldsymbol{L}$ の対角成分は 1 とする。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

解答. 行列 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ の未知の i 行 j 列の要素を l_{ij}, u_{ij} と表すとき，$\boldsymbol{LU}$ 分解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{LU} \quad (1.43) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.44) \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.45) \end{aligned}$$

とできるので，

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

問 3

行列 $\boldsymbol{B}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値をすべて求めよ。
(2) $\boldsymbol{B}^2$ の固有値をすべて求めよ。
(3) $\boldsymbol{B}^\infty$ を求めよ。

解答.

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有方程式 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})=0$ より

$$\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}) = \left(\lambda-\frac{5}{6}\right)\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{18} \tag{1.49}$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda-1)(2\lambda-1) \tag{1.50}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, 1 \tag{1.51}$$

(2) $\boldsymbol{B}^2$ は

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

であるので，$\boldsymbol{B}^2$ の固有方程式 $\det(\boldsymbol{B}^2-\lambda\boldsymbol{E})=0$ より

$$\det(\boldsymbol{B}^2-\lambda\boldsymbol{E}) = \left(\lambda-\frac{3}{4}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8} \tag{1.53}$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda-1)(4\lambda-1) \tag{1.54}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, 1 \tag{1.55}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ は対角化行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

と対角化される。このとき対角化行列 $\boldsymbol{P}$ について

(i) $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき

$$(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1.57}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1.59}$$

であるので，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

(ii) $\lambda = 1$ のとき

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1.61}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1.63}$$

であるので，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

(i)，(ii) より，対角化行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.65}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

$$\tag{1.67}$$

ゆえに

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})^{\infty} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\infty}\boldsymbol{P} \tag{1.68}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

左から $\boldsymbol{P}$，右から $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけて

$$\boldsymbol{B}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

2023 春

微分積分

問 1

次の極限値を求めよ。ただし，$a > 0, b > 0$ とする。

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \tag{2.1}$$

解答. 与えられた極限に対数をとった次の極限は

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \dfrac{a^x + b^x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{2} \left(a^x \log a + b^x \log b \right)}{\dfrac{a^x + b^x}{2}} \quad \text{(L'Hôpital の定理)} \tag{2.2}$$

$$= \frac{\log a + \log b}{2} = \log \sqrt{ab} \tag{2.3}$$

と得られるので，

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \sqrt{ab} \tag{2.4}$$

問 2

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) dx および dy を求めよ。

(2) $r, dr, \theta, d\theta$ を用いて次式を表せ。

$$x\, dy - y\, dx \tag{2.5}$$

解答.

(1)

$$dx = \cos \theta\, dr - r \sin \theta\, d\theta \tag{2.6}$$

$$dy = \sin \theta\, dr + r \cos \theta\, d\theta \tag{2.7}$$

(2)

$$\begin{aligned} x\, dy - y\, dx &= r \cos \theta (\sin \theta\, dr + r \cos \theta\, d\theta) \\ &\quad - r \sin \theta (\cos \theta\, dr - r \sin \theta\, d\theta) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$= r^2 \cos^2 \theta\, d\theta + r^2 \sin \theta\, d\theta = r^2\, d\theta \tag{2.9}$$

問 3

次に示す xyz 空間の領域 D を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

$$D = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; y \geq 0, z \geq 0, z^2 \leq 4x, y^2 \leq x - x^2\right\} \tag{2.10}$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D の体積を求めよ。

解答. (1) 略

(2) $C = \left\{(x,y) \;\middle|\; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$ として，求める体積 V_{D} は

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{D}} &= \iint_C z\,dxdy && (2.11)\\
&= \iint_C 2\sqrt{x}\,dxdy && (2.12)\\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} 2\sqrt{x}\,dydx && (2.13)\\
&= \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx && (2.14)\\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx && (2.15)\\
&= \int_0^1 2\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 2(1-x)\sqrt{1-x}\,dx && (2.16)\\
&= \frac{8}{15} && (2.17)
\end{aligned}$$

問 4

次の微分方程式を解け。ここで，e は自然対数の底である。

$$y'' - 2y' + 2y - e^x - 2x = 0 \tag{2.18}$$

解答. 斉次の微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解は特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \pm i$ より

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x) \tag{2.19}$$

ここで，与えられた微分方程式について特解を $y_{\mathrm{p}} = ke^x + ax + b$ と仮定すると

$$\begin{cases} y_{\mathrm{p}}' = ke^x + a \\ y_{\mathrm{p}}'' = ke^x \end{cases} \tag{2.20}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
ke^x - 2(ke^x + a) + 2(ke^x + ax + b) &= e^x + 2x && (2.21)\\
\therefore k = a = b &= 1 && (2.22)
\end{aligned}$$

ゆえに与えられた微分方程式の一般解は

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x + x + 1 \tag{2.23}$$

線形代数

問 1

> 以下の線形方程式の基本解を求めよ。
>
> $$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \tag{2.24}$$
> $$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \tag{2.25}$$
> $$x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \tag{2.26}$$

解答. 行列で表すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ とおく}) \tag{2.27}$$

このとき，$\boldsymbol{A}$ の行基本変形によって

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

とできるので，

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

よって，基本解は $\dim \boldsymbol{x} - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$ から 2 つあって $x_1, x_2 = s, t \in \mathbb{R}$ として解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

と表せる。基本解は

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

問 2

> 行列 A について以下の問いに答えよ。
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$
>
> (1) A の階数を求めよ。
> (2) A の行列式を求めよ。
> (3) A のすべての固有値を求めよ。
> (4) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
> (5) 行列 A は対角化可能か否かを調べよ。

解答.

(1) 行基本変形によって

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

とできるので $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$

(2) 余因子展開から

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.34}$$

$$= -4 \tag{2.35}$$

(3) 固有方程式 $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 0$ より

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \lambda - 2 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.36}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)\lambda - 2(\lambda - 2) \tag{2.37}$$

$$= (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \tag{2.38}$$

$$\tag{2.39}$$

$$\therefore \lambda = -1, 2 \tag{2.40}$$

(4) 固有ベクトルを $\boldsymbol{u} = (x, y, z)^T$ とする。

(i) $\lambda = -1$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{2.41}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.42}$$

$$\tag{2.43}$$

よって，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{2.45}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.46}$$

$$\tag{2.47}$$

よって，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

(5) 固有方程式の解のうち重解 $\lambda = 2$ において固有ベクトルが 1 つなので対角化可能でない。

2022 秋

微分積分

問 1

> 次の極限値を求めよ。
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x} \tag{3.1}$$

解答.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right) \tag{3.2}$$

$-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ より

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sin x}\cdot x\leq\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\leq\frac{x}{\sin x}\cdot x & \left(\text{if } \frac{x}{\sin x}>0\right) \\ \frac{x}{\sin x}\cdot x\leq\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\leq-\frac{x}{\sin x}\cdot x & \left(\text{if } \frac{x}{\sin x}<0\right) \end{cases} \tag{3.3}$$

いずれについても $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ より最左辺，最右辺 $\longrightarrow 0\ (x\to 0)$ であるのではさみうちの原理から

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0 \tag{3.4}$$

問 2

> 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ。
>
> $$f(x,y)=xy+\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\quad(x\neq 0,y\neq 0) \tag{3.5}$$

解答. 停留点であるためには

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=y-\frac{8}{x^2}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=x-\frac{1}{y^2}=0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.7}$$

かつ，この点でヘッシアン $\det \boldsymbol{H}$ は

$$\det \boldsymbol{H} = \det \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}\right|_{(x,y)=(4,1/2)} \tag{3.8}$$

$$= \begin{vmatrix} 1/4 & 1 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 3 > 0 \tag{3.9}$$

より $(x, y) = (4, 1/2)$ で極小値 6 をとる。

問 3

次に示す xyz 空間の領域 D を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

$$D = \left\{(x, y, z) \mid 0 \le z \le x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 2x\right\} \tag{3.10}$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D の体積を求めよ。

解答.

(1) 略

(2) ある座標 (x, y) における領域の上限は $x^2 + y^2 = z$ 上の点であるので，高さを $z = x^2 + y^2$，積分領域を $C = \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\}$ として求める体積 V_{D} は

$$V_{\mathrm{D}} = \iint_C z \, dxdy \tag{3.11}$$

と求められる。まず，この積分領域は極座標系 (r, θ) に変換すれば

$$C = \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\} \tag{3.12}$$

$$= \left\{(r, \theta) \mid r^2 - 2r\cos\theta \le 1\right\} \tag{3.13}$$

$$= \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2\cos\theta, 0 \le \theta < 2\pi\} \tag{3.14}$$

であるので，

$$V_{\mathrm{D}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \, drd\theta \tag{3.15}$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos^4\theta \, d\theta \tag{3.16}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta \tag{3.17}$$

$$= 3\pi \tag{3.18}$$

問 4

> 次の微分方程式を解け。ここで e は自然対数の底である。
>
> $$y'' + 4y' + 4y - e^{-2x} = 0 \tag{3.19}$$

解答. 与えられた微分方程式の斉次形である $y''+4y'+4y=0$ について，特性方程式 $\lambda^2+4\lambda+4=0 \iff \lambda=-2$ であるので，斉次解は $y=(A+Bx)e^{-2x}$

また，特解を $y_{\mathrm{p}}=Cx^2e^{-2x}$ とおくと

$$\begin{cases} y_{\mathrm{p}}' = 2C(x-x^2)e^{-2x} \\ y_{\mathrm{p}}'' = 2C(2x^2-4x+1)e^{-2x} \end{cases} \tag{3.20}$$

であるので与えられた微分方程式に代入して

$$2C(2x^2-4x+1)+8C(x-x^2)+4Cx^2=1 \tag{3.21}$$

$$C=\frac{1}{2} \tag{3.22}$$

よって，求める一般解は斉次解と特解の足し合わせで

$$y=\left(A+Bx+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x} \tag{3.23}$$

$$\tag{3.24}$$

線形代数

問 1

> 以下の行列の行列式を求めよ。
>
> $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

解答.

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 42 \tag{3.26}$$

問 2

> 以下の行列
>
> $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

> は固有値 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ を持つ。この行列について以下の問いに答えよ。
>
> (1) $\boldsymbol{A}$ の正規化された固有ベクトルをすべて求めよ。
>
> (2) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$ となる行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

解答.

(1) 固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ で表す。

(i) $\lambda = \lambda_1$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

(ii) $\lambda = \lambda_2$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

(2) $\boldsymbol{B}^2$ を計算して $\boldsymbol{A}$ となるので $\boldsymbol{B}$ は 2×2 の正方行列である。ここで，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)b & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\begin{cases} \frac{13}{2} = a^2 + bc \\ \frac{5}{2} = (a+d)b \\ \frac{5}{2} = (a+d)c \\ \frac{13}{2} = bc + d^2 \end{cases} \tag{3.33}$$

整理して

$$a = d, b = c \tag{3.34}$$

$$\begin{cases} \frac{13}{2} = a^2 + b^2 \\ \frac{5}{2} = 2ab \end{cases} \tag{3.35}$$

$$\therefore a + b = \pm 3, a - b = \pm 2 \quad \text{(複号任意)} \tag{3.36}$$

を得る。よって，

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{2} & \pm\frac{5}{2} \\ \pm\frac{5}{2} & \pm\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm\frac{5}{2} & \pm\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} & \pm\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(行列内は複号同順)} \tag{3.37}$$

問 3

> Π を以下のベクトルで張られる $\mathbb{R}^3$（三次元空間）の平面とする。
>
> $$\boldsymbol{a}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.38}$$
>
> 以下の問いに答えよ。
>
> (1) Π の正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を求めよ。ただし $\boldsymbol{a}_1 // \boldsymbol{b}_1$ とする。
>
> (2) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となるような $\boldsymbol{b}_3$ を求めよ。

解答.

(1) Gram-Schmidt の直交化法を用いて得た 2 つのベクトルはもとのベクトルと同じ部分空間を張る。

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

$\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{a}_1$ への射影ベクトルは

$$(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 \tag{3.40}$$

であるので，$\boldsymbol{a}_2$ はこの射影ベクトルと $\boldsymbol{a}_1$ と直交するベクトル $\boldsymbol{b}'_2$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_2 = (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}'_2 \tag{3.41}$$

よって，$\boldsymbol{b}_2$ は

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{b}'_2}{|\boldsymbol{b}'_2|} \tag{3.42}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

(2) あらたな $\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の両者に直交するので外積として得られる。

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \tag{3.44}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

別解. $\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ について，平面 Π の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ から得ることを考える。法線ベクトルを

$$\boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

とおくと法線ベクトルは $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ であるので

$$\begin{cases} -p + r = 0 \\ \quad p + q = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

$$\therefore \boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

$\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ であるので，正規化されていない $\boldsymbol{b}_2$ と平行なベクトル $\boldsymbol{b}_2' = \{x, y, z\}^T$ は

$$\begin{cases} \quad -x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

$$\therefore \boldsymbol{b}_2' = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.50}$$

これを正規化して

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

$\boldsymbol{b}_3$ は法線ベクトルと等しい方向で,

$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \tag{3.52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.53}$$