

# 東北大学 土木系 院試 基礎科目

鈴木 \*

## ■ 目次

---

1	2023 秋	2
1.1	微分積分 . . . . .	2
1.2	線形代数 . . . . .	5

---

\* <https://github.com/suzuyuyuyu>

## 2023 秋

### 微分積分

#### 問 1

次のように  $x, y$  が変数  $t$  の関数として与えられるとき,  $x, y$  を用いて  $\frac{dy}{dx}$  を表せ。

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases} \quad (1.1)$$

解答. 与式より  $x^2 + y^2 = 1$  であるので両辺を  $x$  で微分して

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (1.3)$$

#### 問 2

以下の問いに答えよ。

- (1) 次に示す関数  $f(t)$  および  $g(t)$  を  $t = 0$  のまわりでそれぞれテイラー展開せよ。

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t \quad (1.4)$$

- (2) 次に示す 2 次の正方行列  $\mathbf{A}$  と単位行列  $\mathbf{E}$  を考える。 $n$  をゼロ以上の整数とし,  $n, t, \mathbf{E}$  を用いて  $\mathbf{A}^2$  および  $\mathbf{A}^{2n}$  を表せ。なお,  $\mathbf{A}^0$  は  $\mathbf{E}$  と定義される。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

- (3) 行列  $\mathbf{A}$  の指数関数  $\exp \mathbf{A}$  は次のように定義される。 $\sin t$  と  $\cos t$  を用いて  $\exp \mathbf{A}$  のすべての成分を表せ。

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k = \mathbf{E} + \frac{1}{1!} \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \cdots \quad (1.6)$$

解答.

(1) テイラー展開はそれぞれ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad (1.7)$$

$$= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \quad (1.8)$$

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \quad (1.9)$$

(2) 与えられた行列について,  $\mathbf{A}^2$  は

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$= -t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$= -t^2 \mathbf{E} \quad (1.12)$$

また,  $\mathbf{A}^{2n}$  は

$$\mathbf{A}^{2n} = \begin{cases} (-t^2)^n \mathbf{E} & \text{if } n \geq 1 \\ \mathbf{E} & \text{if } n = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$= (-t^2)^n \mathbf{E} \quad (1.14)$$

(3) (2) より

$$\exp \mathbf{A} = \mathbf{E} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 + \frac{1}{6!} \mathbf{A}^6 + \cdots + \frac{1}{1!} \mathbf{A} + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{1}{5!} \mathbf{A}^5 + \cdots \quad (1.15)$$

$$= \mathbf{E} - \frac{t^2}{2!} \mathbf{E} + \frac{t^4}{4!} \mathbf{E} - \frac{t^6}{6!} \mathbf{E} + \cdots + \frac{1}{1!} \mathbf{A} - \frac{t^2}{3!} \mathbf{A} + \frac{t^4}{5!} \mathbf{A} - \cdots \quad (1.16)$$

$$= \mathbf{E} - \frac{t^2}{2!} \mathbf{E} + \frac{t^4}{4!} \mathbf{E} - \frac{t^6}{6!} \mathbf{E} + \cdots + \frac{1}{1!} \mathbf{A} - \frac{t^2}{3!} \mathbf{A} + \frac{t^4}{5!} \mathbf{A} - \cdots \quad (1.17)$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) \mathbf{E} + \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

### 問 3

次の重積分について, 以下の問いに答えよ。

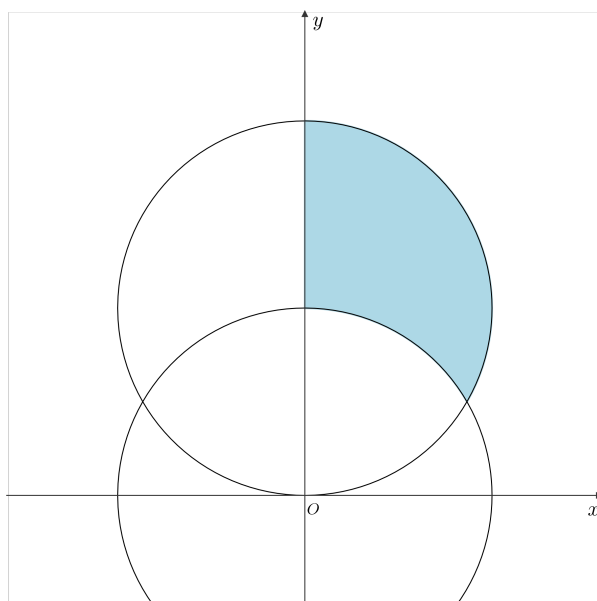
$$I = \iint_D x \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\} \quad (1.21)$$

(1) 積分領域  $D$  を図示せよ。

(2) 重積分  $I$  を計算せよ。

解答.

(1) 積分領域  $D$  は下図



(2) 与えられた積分について極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  を考えると, 領域  $D$  は

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r^2 \leq 2r \sin \theta \right\} \quad (1.22)$$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\} \quad (1.23)$$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\} \quad (1.24)$$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\} \quad (\because 1 \leq 2 \sin \theta) \quad (1.25)$$

である。  $dx dy = r dr d\theta$  も考えて,

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_1^{2 \sin \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (1.26)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \left[ \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_1^{2 \sin \theta} \quad (1.27)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left( \frac{8}{3} \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \right) d\theta \quad (1.28)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^1 (8t^3 - 1) dt \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{3} [2t^4 - t]_{1/2}^1 \quad (1.30)$$

$$= \frac{11}{24} \quad (1.31)$$

別解. 領域  $D$  は

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\} \quad (1.32)$$

$$= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} + 1 \right\} \quad (1.33)$$

$$\vee \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} + 1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} + 1 \right\}$$

とも表せるので, 重積分  $I$  は

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}+1} x \, dy dx + \int_{\sqrt{3}/2}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} x \, dy dx \quad (1.34)$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}/2} x \, dx + \int_{\sqrt{3}/2}^1 2x\sqrt{1-x^2} \, dx \quad (1.35)$$

$$= \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}/2} + \int_{3/4}^1 \sqrt{1-t} \, dt \quad (t = x^2) \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \left[ -\frac{2}{3}(1-t)^{3/2} \right]_{3/4}^1 \quad (1.37)$$

$$= \frac{11}{24} \quad (1.38)$$

## 線形代数

### 問 1

ベクトル  $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{b}$  に関する以下の問いに答えよ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

(1) ベクトル  $\mathbf{b}$  を,  $\mathbf{a}$  を通る直線へ射影せよ。

(2)  $\mathbf{a}$  を通る直線への射影行列  $\mathbf{P}$  を求めよ。

解答.

(1) ベクトル  $\mathbf{b}$  の  $\mathbf{a}$  への射影  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{b}| \cos \theta$  より

$$\mathbf{p} = \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

(2)  $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$  は

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

## 問 2

$A = LU$  とする下三角行列  $L$  と上三角行列  $U$  を求めよ。ただし、下三角行列  $L$  の対角成分は 1 とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

解答. 行列  $L, U$  の未知の  $i$  行  $j$  列の要素を  $l_{ij}, u_{ij}$  と表すとき,  $LU$  分解は

$$A = LU \quad (1.43)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

とできるので,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$U = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

## 問 3

行列  $B$  に関する以下の問いに答えよ。

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

- (1)  $B$  の固有値をすべて求めよ。
- (2)  $B^2$  の固有値をすべて求めよ。
- (3)  $B^\infty$  を求めよ。

解答.

(1)  $\mathbf{B}$  の固有方程式  $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$  より

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = \left(\lambda - \frac{5}{6}\right)\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{18} \quad (1.49)$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda - 1)(2\lambda - 1) \quad (1.50)$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, 1 \quad (1.51)$$

(2)  $\mathbf{B}^2$  は

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

であるので,  $\mathbf{B}^2$  の固有方程式  $\det(\mathbf{B}^2 - \lambda \mathbf{E}) = 0$  より

$$\det(\mathbf{B}^2 - \lambda \mathbf{E}) = \left(\lambda - \frac{3}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \quad (1.53)$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda - 1)(4\lambda - 1) \quad (1.54)$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, 1 \quad (1.55)$$

(3)  $\mathbf{B}$  は対角化行列  $\mathbf{P}$  を用いて

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

と対角化される。このとき対角化行列  $\mathbf{P}$  について

(i)  $\lambda = \frac{1}{2}$  のとき

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.59)$$

であるので, 固有ベクトルは

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

(ii)  $\lambda = 1$  のとき

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.63)$$

であるので、固有ベクトルは

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

(i), (ii) より、対角化行列  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

$$(1.67)$$

ゆえに

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^\infty = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^\infty\mathbf{P} \quad (1.68)$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

左から  $\mathbf{P}$ , 右から  $\mathbf{P}^{-1}$  をかけて

$$\mathbf{B}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.71)$$