東北大学 土木系 院試 基礎科目

鈴木 *

目次

* https://github.com/suzuyuyuyu

2023 秋

微分積分

問 1

> 次のように x, y が変数 t の関数として与えられるとき、x, y を用いて $\dfrac{dy}{dx}$ を表せ。
>
> $$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} \tag{1.1}$$

解答. 与式より $x^2 + y^2 = 1$ であるので両辺を x で微分して

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ -\dfrac{x}{y} & \text{o/w} \end{cases} \tag{1.3}$$

問 2

> 以下の問いに答えよ。
>
> (1) 次に示す関数 $f(t)$ および $g(t)$ を $t=0$ のまわりでそれぞれテイラー展開せよ。
>
> $$f(t)=\sin t, \quad g(t)=\cos t \tag{1.4}$$
>
> (2) 次に示す 2 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ と単位行列 $\boldsymbol{E}$ を考える。n をゼロ以上の整数とし、$n, t, \boldsymbol{E}$ を用いて $\boldsymbol{A}^2$ および $\boldsymbol{A}^{2n}$ を表せ。なお、$\boldsymbol{A}^0$ は $\boldsymbol{E}$ と定義される。
>
> $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.5}$$
>
> (3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の指数関数 $\exp\boldsymbol{A}$ は次のように定義される。$\sin t$ と $\cos t$ を用いて $\exp\boldsymbol{A}$ のすべての成分を表せ。
>
> $$\exp\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}+\frac{1}{1!}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\cdots \tag{1.6}$$

解答.

(1) $t=0$ まわりのテイラー展開はそれぞれ

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n \tag{1.7}$$

$$=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots \tag{1.8}$$

$$g(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots \tag{1.9}$$

(2) 与えられた行列について、$\boldsymbol{A}^2$ は

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{bmatrix} \tag{1.10}$$

$$=-t^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$=-t^2\boldsymbol{E} \tag{1.12}$$

また、$\boldsymbol{A}^{2n}$ は

$$\boldsymbol{A}^{2n}=\begin{cases}(-t^2)^n\boldsymbol{E} & \text{if } n\geq 1\\ \boldsymbol{E} & \text{if } n=0\end{cases} \tag{1.13}$$

$$=(-t^2)^n\boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

(3) (2) より

$$\exp \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 + \frac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6 + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5 + \cdots \tag{1.15}$$

$$= \boldsymbol{E} - \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{E} + \frac{t^4}{4!}\boldsymbol{E} - \frac{t^6}{6!}\boldsymbol{E} + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} - \frac{t^2}{3!}\boldsymbol{A} + \frac{t^4}{5!}\boldsymbol{A} - \cdots \tag{1.16}$$

$$= \boldsymbol{E} - \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{E} + \frac{t^4}{4!}\boldsymbol{E} - \frac{t^6}{6!}\boldsymbol{E} + \cdots + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} - \frac{t^2}{3!}\boldsymbol{A} + \frac{t^4}{5!}\boldsymbol{A} - \cdots \tag{1.17}$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right)\boldsymbol{E} + \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

問 3

次の重積分について、以下の問いに答えよ。

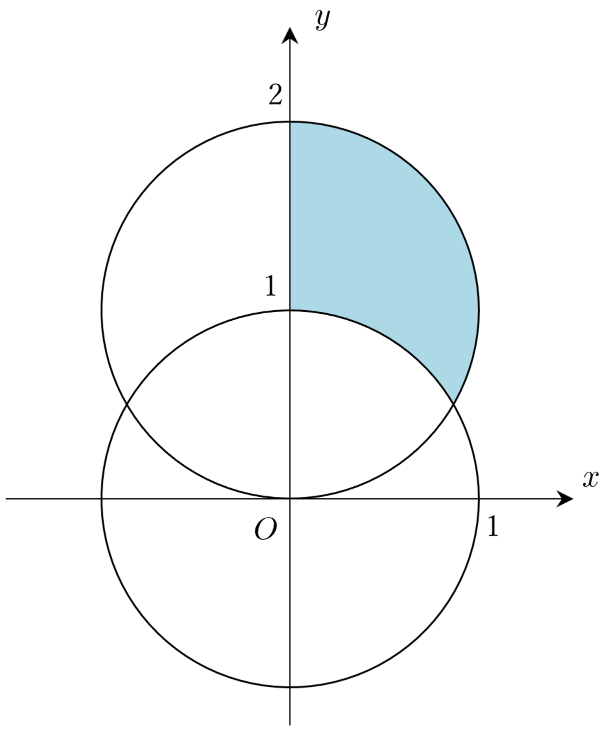
$$I = \iint_D x\,dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\right\} \tag{1.21}$$

(1) 積分領域 D を図示せよ。

(2) 重積分 I を計算せよ。

解答.

(1) 積分領域 D は下図



(2) 与えられた積分について極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考えると、領域 D は

$$D = \left\{(r, \theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r^2 \leq 2r\sin\theta\right\} \tag{1.22}$$

$$= \left\{(r, \theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \tag{1.23}$$

$$= \left\{(r, \theta) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \tag{1.24}$$

$$= \left\{(r, \theta) \;\middle|\; \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\sin\theta\right\} \quad (\because 1 \leq 2\sin\theta) \tag{1.25}$$

である。$dxdy = r\,drd\theta$ も考えて、

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1}^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\,drd\theta \tag{1.26}$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_1^{2\sin\theta} \tag{1.27}$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta \tag{1.28}$$
$$= \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}(8t^3-1)\,dt \tag{1.29}$$
$$= \frac{1}{3}\left[2t^4 - t\right]_{1/2}^{1} \tag{1.30}$$
$$= \frac{11}{24} \tag{1.31}$$

別解. 領域 D は

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2y\right\} \tag{1.32}$$
$$\begin{aligned} &= \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}+1\right\} \\ &\qquad \vee \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2}+1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}+1\right\} \end{aligned} \tag{1.33}$$

とも表せるので、重積分 I は

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/2}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}+1} x\,dydx + \int_{\sqrt{3}}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{\sqrt{1-x^2}+1} x\,dydx \tag{1.34}$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}/2} x\,dx + \int_{\sqrt{3}/2}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,dx \tag{1.35}$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}/2} + \int_{3/4}^{1}\sqrt{1-t}\,dt \quad (t = x^2) \tag{1.36}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_{3/4}^{1} \tag{1.37}$$
$$= \frac{11}{24} \tag{1.38}$$

線形代数

問 1

ベクトル $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を、$\boldsymbol{a}$ を通る直線へ射影せよ。

(2) $\boldsymbol{a}$ を通る直線への射影行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ。

解答.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とし、ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} &= \frac{\|\boldsymbol{p}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} && (1.40)\\
&= \frac{\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} && (1.41)\\
&= \frac{\|\boldsymbol{b}\|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{a} && (1.42)\\
&= \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\,\boldsymbol{a} && (1.43)\\
&= 4\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} && (1.44)
\end{aligned}$$

(2) 射影行列は任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{a}$ への射影に変換する線形写像である。すなわち (1) より $\boldsymbol{a}$ への射影ベクトル $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ と等しいとき

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} \tag{1.45}$$

ここで、$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ であるので、

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} &= \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}} && (1.46)\\
&= \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top}{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} && (1.47)
\end{aligned}$$

である。これが $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ と等しいので

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top}{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}} \tag{1.48}$$

として射影行列 $\boldsymbol{P}$ を得る。

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

問 2

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ とする下三角行列 $\boldsymbol{L}$ と上三角行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ。ただし、下三角行列 $\boldsymbol{L}$ の対角成分は 1 とする。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

解答. 行列 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ の未知の i 行 j 列の要素を l_{ij}, u_{ij} と表すとき、$\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 分解は

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} \tag{1.51}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

とできるので、

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix} \tag{1.55}$$

問 3

行列 $\boldsymbol{B}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値をすべて求めよ。
(2) $\boldsymbol{B}^2$ の固有値をすべて求めよ。
(3) $\boldsymbol{B}^\infty$ を求めよ。

解答.

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有方程式 $\det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$ より

$$\det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}) = \left(\lambda - \frac{5}{6}\right)\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{18} \tag{1.57}$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda - 1)(2\lambda - 1) = 0 \tag{1.58}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, 1 \tag{1.59}$$

(2) $\boldsymbol{B}^2$ は

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

であるので、$\boldsymbol{B}^2$ の固有方程式 $\det(\boldsymbol{B}^2 - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$ より

$$\det(\boldsymbol{B}^2 - \lambda\boldsymbol{E}) = \left(\lambda - \frac{3}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \tag{1.61}$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda - 1)(4\lambda - 1) = 0 \tag{1.62}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, 1 \tag{1.63}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ は対角化行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.64}$$

と対角化される。このとき対角化行列 $\boldsymbol{P}$ について

(i) $\lambda = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1.65}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{1.66}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1.67}$$

であるので、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{1.68}$$

(ii) $\lambda = 1$ のとき

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1.69}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{1.70}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1.71}$$

であるので、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.72}$$

(i)、(ii) より、対角化行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.74}$$

ゆえに

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})^{\infty} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\infty}\boldsymbol{P} \tag{1.75}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.76}$$

左から $\boldsymbol{P}$、右から $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけて

$$\boldsymbol{B}^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.77}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.78}$$

2023 春

微分積分

問 1

> 次の極限値を求めよ。ただし、$a > 0, b > 0$ とする。
>
> $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \tag{2.1}$$

解答. $\dfrac{a^x + b^x}{2} > 0$ より与えられた極限に対数をとった次の極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \dfrac{a^x + b^x}{2}}{x} \tag{2.2}$$

を考える。この分子 $f(x) = \log \dfrac{a^x + b^x}{2}$ と分母 $g(x) = x$ は微分可能でこれを微分した極限は

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\left(a^x \log a + b^x \log b\right)}{\dfrac{a^x + b^x}{2}} \tag{2.3}$$

$$= \frac{\log a + \log b}{2} = \log \sqrt{ab} \tag{2.4}$$

と得られる。ここに、$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 \neq 0$ と $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ であることから L'Hôpital の定理[*1]より極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ は存在して

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \dfrac{a^x + b^x}{2}}{x} = \log \sqrt{ab} \tag{2.5}$$

ゆえに、求める極限は

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \sqrt{ab} \tag{2.6}$$

である。

[*1] appendix

問 2

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき、以下の問いに答えよ。

(1) dx および dy を求めよ。

(2) r, dr, θ, $d\theta$ を用いて次式を表せ。

$$x\,dy - y\,dx \tag{2.7}$$

解答.

(1)

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \tag{2.8}$$

$$dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta \tag{2.9}$$

(2)

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= r\cos\theta(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) \\ &\quad - r\sin\theta(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$= r^2\cos^2\theta\,d\theta + r^2\sin\theta\,d\theta = r^2\,d\theta \tag{2.11}$$

問 3

次に示す xyz 空間の領域 D を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

$$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; y \geq 0,\, z \geq 0,\, z^2 \leq 4x,\, y^2 \leq x - x^2\right\} \tag{2.12}$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D の体積を求めよ。

解答.

(1) 略

(2) $C = \left\{(x, y) \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$ として、求める体積 V_{D} は

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{D}} &= \iint_C z\,dxdy && (2.13)\\
&= \iint_C 2\sqrt{x}\,dxdy && (2.14)\\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} 2\sqrt{x}\,dydx && (2.15)\\
&= \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x - x^2}\,dx && (2.16)\\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx && (2.17)\\
&= \int_0^1 2\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 2(1-x)\sqrt{1-x}\,dx && (2.18)\\
&= \frac{8}{15} && (2.19)
\end{aligned}$$

問 4

> 次の微分方程式を解け。ここで、e は自然対数の底である。
>
> $$y'' - 2y' + 2y - e^x - 2x = 0 \tag{2.20}$$

解答. 斉次の微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解は特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1 \pm i$ より

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x) \tag{2.21}$$

ここで、与えられた微分方程式について特解を $y_{\mathrm{p}} = ke^x + ax + b$ と仮定する[*2]と

$$\begin{cases} y_{\mathrm{p}}' = ke^x + a \\ y_{\mathrm{p}}'' = ke^x \end{cases} \tag{2.22}$$

であるので、

$$ke^x - 2(ke^x + a) + 2(ke^x + ax + b) = e^x + 2x \tag{2.23}$$

$$\therefore k = a = b = 1 \tag{2.24}$$

ゆえに与えられた微分方程式の一般解は

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x + x + 1 \tag{2.25}$$

[*2] appendix

線形代数

問 1

> 以下の線形方程式の基本解を求めよ。
>
> $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

解答.

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} := \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \tag{2.27}$$

とおくと与えられた方程式は

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \tag{2.28}$$

このとき、$\boldsymbol{A}$ の行基本変形によって

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

とできるので、

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

よって、基本解は $\dim \boldsymbol{x} - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$ から 2 つあって $x_1, x_2 = s, t \in \mathbb{R}$ として解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

と表せる。基本解は

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

問 2

> 行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ。
>
> $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$
>
> (1) $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ。
> (2) $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ。
> (3) $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値を求めよ。
> (4) $\boldsymbol{A}$ の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
> (5) 行列 $\boldsymbol{A}$ は対角化可能か否かを調べよ。

解答.

(1) 行基本変形によって

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

とできるので $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$

(2) 余因子展開から

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \tag{2.35}$$

(3) 固有方程式 $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 0$ より

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \lambda - 2 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.36}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)\lambda - 2(\lambda - 2) \tag{2.37}$$

$$= (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \tag{2.38}$$

$$\therefore \lambda = -1, 2 \tag{2.39}$$

(4) 固有ベクトルを $\boldsymbol{u} = \{x,\, y,\, z\}^\top$ とする。

(i) $\lambda = -1$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{2.40}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.41}$$

よって、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{2.43}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.44}$$

よって、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.45}$$

(5) 固有方程式の解のうち重解 $\lambda = 2$ において固有ベクトルが 1 つなので対角化可能でない。

2022 秋

微分積分

問 1

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \tag{3.1}$$

解答.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) \tag{3.2}$$

$-1 \leq \sin \dfrac{1}{x} \leq 1$ より

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{\sin x} \cdot x \leq \dfrac{x}{\sin x} \cdot x \sin \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{x}{\sin x} \cdot x & \left(\text{if } \dfrac{x^2}{\sin x} > 0\right) \\ \dfrac{x}{\sin x} \cdot x \leq \dfrac{x}{\sin x} \cdot x \sin \dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{x}{\sin x} \cdot x & \left(\text{if } \dfrac{x^2}{\sin x} < 0\right) \end{cases} \tag{3.3}$$

いずれについても $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ より最左辺、最右辺 $\longrightarrow 0 \ (x \to 0)$ であるのではさみうちの原理から

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x} = 0 \tag{3.4}$$

問 2

> 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ。
>
> $$f(x,y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y} \quad (x \neq 0,\, y \neq 0) \tag{3.5}$$

解答. 停留点であるためには

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.7}$$

かつ、この点でヘッシアン[*3] $\det \boldsymbol{H}$ は

$$\det \boldsymbol{H} = \det \left. \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \right|_{(x,y)=(4,1/2)} \tag{3.8}$$

$$= \begin{vmatrix} 1/4 & 1 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 3 > 0 \tag{3.9}$$

より $\boldsymbol{H} \succ 0$ なので $(x,y) = (4, 1/2)$ で極小値 6 をとる。

[*3] appendix

問 3

次に示す xyz 空間の領域 D を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

$$D = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 2x\right\} \tag{3.10}$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D の体積を求めよ。

解答.

(1) 略

(2) ある座標 (x, y) における領域の上限は $x^2 + y^2 = z$ 上の点であるので、高さを $z = x^2 + y^2$、積分領域を $C = \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$ として求める体積 V_{D} は

$$V_{\mathrm{D}} = \iint_C z \, dxdy \tag{3.11}$$

と求められる。まず、この積分領域は極座標系 (r, θ) に変換すれば

$$\begin{aligned} C &= \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\} &(3.12)\\ &= \left\{(r, \theta) \mid r^2 - 2r\cos\theta \leq 1\right\} &(3.13)\\ &= \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2\cos\theta, 0 \leq \theta < 2\pi\} &(3.14)\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{D}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \, drd\theta &(3.15)\\ &= \int_0^{2\pi} 4\cos^4\theta \, d\theta &(3.16)\\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta &(3.17)\\ &= 3\pi &(3.18)\end{aligned}$$

問 4

> 次の微分方程式を解け。ここで e は自然対数の底である。
>
> $$y'' + 4y' + 4y - e^{-2x} = 0 \tag{3.19}$$

解答. 与えられた微分方程式の斉次形である $y'' + 4y' + 4y = 0$ について、特性方程式より

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \tag{3.20}$$

斉次解は $y = (A + Bx)e^{-2x}$

また、特解を $y_{\mathrm{p}} = Cx^2 e^{-2x}$ とおく[*4]と

$$\begin{cases} y_{\mathrm{p}}' = 2C(x - x^2)e^{-2x} \\ y_{\mathrm{p}}'' = 2C(2x^2 - 4x + 1)e^{-2x} \end{cases} \tag{3.21}$$

であるので与えられた微分方程式に代入して

$$2C(2x^2 - 4x + 1) + 8C(x - x^2) + 4Cx^2 = 1 \tag{3.22}$$

$$C = \frac{1}{2} \tag{3.23}$$

よって、求める一般解は斉次解と特解の足し合わせで

$$y = \left(A + Bx + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x} \tag{3.24}$$

[*4] appendix

線形代数

問 1

以下の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

解答.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 42 \tag{3.26}$$

問 2

以下の行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

は固有値 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ を持つ。この行列について以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ の正規化された固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$ となる行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

解答.

(1) 固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ で表す。

(i) $\lambda = \lambda_1$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

(ii) $\lambda = \lambda_2$ のとき

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

(2) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$ となるので $\boldsymbol{B}$ は 2×2 の正方行列である。ここで、$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)b & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\begin{cases} \frac{13}{2} = a^2 + bc \\ \frac{5}{2} = (a+d)b \\ \frac{5}{2} = (a+d)c \\ \frac{13}{2} = bc + d^2 \end{cases} \tag{3.33}$$

整理して

$$a = d, b = c \tag{3.34}$$

$$\begin{cases} \dfrac{13}{2} = a^2 + b^2 \\ \dfrac{5}{2} = 2ab \end{cases} \tag{3.35}$$

$$\therefore a + b = \pm 3,\ a - b = \pm 2 \quad (\text{複号任意}) \tag{3.36}$$

を得る。よって、

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \pm\dfrac{1}{2} & \pm\dfrac{5}{2} \\ \pm\dfrac{5}{2} & \pm\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm\dfrac{5}{2} & \pm\dfrac{1}{2} \\ \pm\dfrac{1}{2} & \pm\dfrac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{行列内は複号同順}) \tag{3.37}$$

問 3

Π を以下のベクトルで張られる $\mathbb{R}^3$（三次元空間）の平面とする。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

以下の問いに答えよ。

(1) Π の正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を求めよ。ただし $\boldsymbol{a}_1 // \boldsymbol{b}_1$ とする。

(2) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となるような $\boldsymbol{b}_3$ を求めよ。

解答.

(1) Gram-Schmidt の直交化法を用いて得た 2 つのベクトルはもとのベクトルと同じ部分空間を張る。

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

$\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{a}_1$ への射影ベクトルは

$$(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 \tag{3.40}$$

であるので、$\boldsymbol{a}_2$ はこの射影ベクトルと $\boldsymbol{a}_1$ と直交するベクトル $\boldsymbol{b}'_2$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_2 = (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}'_2 \tag{3.41}$$

よって、$\boldsymbol{b}_2$ は

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{b}'_2}{\|\boldsymbol{b}'_2\|} \tag{3.42}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

(2) あらたな $\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の両者に直交するので外積として得られる。

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \tag{3.44}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

別解. $\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ について、平面 Π の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ から得ることを考える。法線ベクトルを

$$\boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

とおくと法線ベクトルは $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ であるので

$$\begin{cases} -p + r = 0 \\ \quad p + q = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

$$\therefore \boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

$\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ であるので、正規化されていない $\boldsymbol{b}_2$ と平行なベクトル $\boldsymbol{b}_2' = \{x, y, z\}^T$ は

$$\begin{cases} \quad -x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

$$\therefore \boldsymbol{b}_2' = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.50}$$

これを正規化して

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

$\boldsymbol{b}_3$ は法線ベクトルと等しい方向で、

$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \tag{3.52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.53}$$

2022 春

微分積分

問 1

> 次の級数が収束するか、発散するかを判定せよ。
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \tag{4.1}$$

解答.　$a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\{(n+1)!\}^3}{\{3(n+1)\}!} \times \frac{(n!)^3}{(3n)!} && (4.2)\\
&= \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} && (4.3)\\
&= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{3\left(3+\dfrac{2}{n}\right)\left(3+\dfrac{1}{n}\right)} && (4.4)\\
&\to \frac{1}{27} < 1 \quad (n \to \infty) && (4.5)
\end{aligned}$$

より収束する。[*5]

[*5] appendix

問 2

> 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ において微分可能であるか否かを調べよ。ここで、e は自然対数の底である。
>
> $$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0 \tag{4.6}$$

解答. 関数 f についての $x=0$ 周辺での次の極限を考えるとき

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 \tag{4.7}$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1 \tag{4.8}$$

であり、両側極限が一致せず極限が存在しないので微分可能でない。

問 3

次の重積分について、以下の問いに答えよ。

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0,\, y \geq 0,\, x \leq x^2+y^2 \leq 1\right\} \tag{4.9}$$

(1) 積分領域 D を図示せよ。

(2) この重積分を計算せよ。

解答.

(1) 略

(2) 極座標変換を考える。

$$\begin{aligned} D &= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; \cos\theta \geq 0,\, \sin\theta \geq 0,\, r\cos\theta \leq r^2,\, r^2 \leq 1\right\} &(4.10)\\ &= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, r \leq 1,\, \cos\theta \leq r\right\} &(4.11)\end{aligned}$$

よって、与えられた積分は

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{1} drd\theta[r^2] &(4.12)\\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{\cos\theta}^{1} &(4.13)\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3} - \cos^3\theta\right)d\theta &(4.14)\\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} &(4.15)\end{aligned}$$

問 4

> 次の初期値問題を解け。
>
> $$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{4.16}$$

解答. 補助方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ より、基本解 $y = e^{-x}$, xe^{-x} の線形結合で、任意定数 A, B を用いて一般解を

$$y = (A + Bx)e^{-x} \tag{4.17}$$

と得る。ここに、初期条件を考慮して $A = 1$, $B = 1$ と決定するのでこの解は

$$y = (1 + x)e^{-x} \tag{4.18}$$

である。

線形代数

問 1

行列 $\boldsymbol{A}$、ベクトル $\boldsymbol{x}, bb$ に関する以下の問いに答えよ。ここに、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

であり、$x_i\ (i = 1, \cdots, 4)$ および c は実数である。

(1) $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ を求めよ。

(2) $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ。

(3) 連立方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないときの c を求めよ。

解答.

(1)

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -7 \\ 0 & 6 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

より $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = 3$

(2)

$$\det \boldsymbol{A} = 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$= 18 + 6 - 24 = 0 \tag{4.23}$$

(3) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないことの必要十分条件は $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} \neq \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ である。

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & c \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \tag{4.24}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & -7 & 13 \\ 0 & 6 & 4 & -7 & c+9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right] \tag{4.25}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-4 \end{array}\right] \tag{4.26}$$

ゆえに

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{cases} 3 & (\mathrm{c} = 4) \\ 4 & (\mathrm{c} \neq 4) \end{cases} \tag{4.27}$$

よって、$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないような c は $c \neq 4$ である。

問 2

次の 2 次形式について以下の問いに答えよ。

$$f(x,y,z) = \frac{1}{16}\left(13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 + 16z^2\right) \tag{4.28}$$

(1) $f(x,y,z)$ の標準形を求めよ。

(2) $f(x,y,0) = 1$ の概形を描け。

解答.

(1) 標準形 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} (= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle)$ に直す。

$$f(x,y,z) = \frac{1}{16}\begin{Bmatrix} x & y & z \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

(2) $f(x,y,0) = 1$ は

$$\begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix}\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 1 \tag{4.30}$$

と変形できる。このとき、行列をあらたに

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

とおく。このとき、$\boldsymbol{B}$ の固有値は補助方程式

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0 \tag{4.32}$$

より、$\lambda = 1, \frac{1}{4}$ $(=: \lambda_1, \lambda_2)$ である。

(i) $\lambda = \lambda_1$ のとき、固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{3\sqrt{3}}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.33}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

(ii) $\lambda = \lambda_2$ のとき、固有ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ は

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{3\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.35}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \tag{4.36}$$

ここでこれらの固有ベクトルを横に並べた行列 $\boldsymbol{P} := [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ を考える。この行列は

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

であるので、$\frac{\pi}{6}$ 方向の回転行列である。$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ の座標変換によって

$$f(x, y, 0) = 1 \tag{4.38}$$

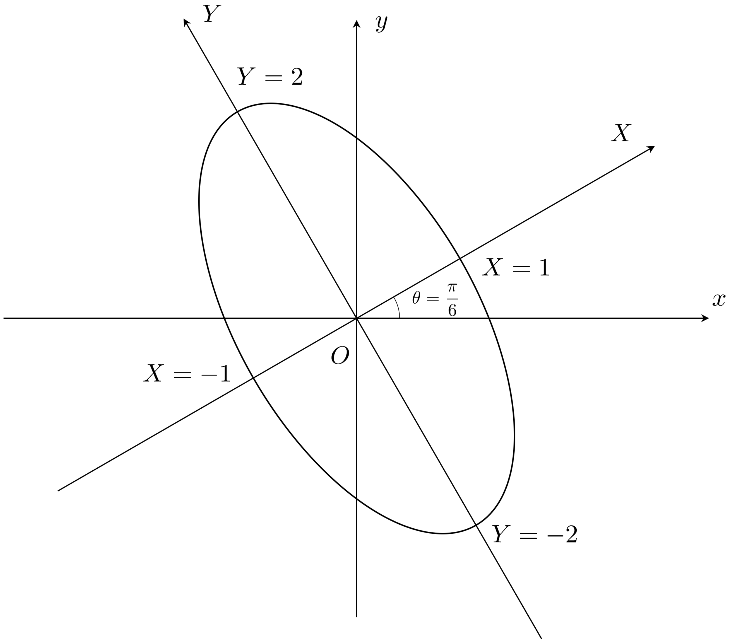
$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{4.39}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{4.40}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{4.41}$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1 \tag{4.42}$$

に移るので楕円を表す。



Y
y
$Y=2$
X
$X=1$
$\theta=\frac{\pi}{6}$
x
O
$X=-1$
$Y=-2$

2021 秋

微分積分

問 1

以下の極限値をそれぞれ求めよ。$\tan^{-1} x$ は $\tan x$ の逆関数である（$\tan^{-1} x = \arctan x$）。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-x-1}{x^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$

解答.

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left\{\sqrt{2x+1}-(x+1)\right\}\left\{\sqrt{2x+1}+(x+1)\right\}}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(x+1)\right)} \tag{5.1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{2x+1}+x+1} \tag{5.2}$$

$$= -\frac{1}{2} \tag{5.3}$$

(2) $L = \left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$ および、$\hat{L} = \log L = \dfrac{\log\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{x}$ として、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \hat{L}$ を考える。

$\log\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right) > 0$ より L の分子と分母を $f(x) = \log\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$, $g(x) = x$ とおいて極限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(= \lim_{x\to\infty} \hat{L}\right) \tag{5.4}$$

を求める。

ここに、ある極限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{\pi}{2} - \arctan x} \tag{5.5}$$

を考える。さらにこの極限の分子と分母を $u(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$, $v(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ とおけば、次の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ は

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{2x}{x^2+1} = 0 \tag{5.6}$$

である。ここで $\forall x \in \mathbb{R},\, v'(x) \neq 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} v(x) = 0$ であることから L'Hôpital の定理より極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は存在して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{\pi}{2} - \arctan x} = 0 \tag{5.7}$$

さらに、$\forall x \in \mathbb{R},\, g'(x) = 1 \neq 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ であることから L'Hôpital の定理より極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ は存在して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{x} = 0 \tag{5.8}$$

である。
ゆえに求める極限は $L = e^{\hat{L}}$ を用いて

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{1/x} = e^0 = 1 \tag{5.9}$$

問 2

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \sqrt{x - [x]} \quad (0 \leq x \leq 3) \tag{5.10}$$

ここで、ガウス記号 $[x]$ は床関数を表す。その値は実数 x に対して x 以下である最大の整数で与えられる。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 次の極限値をそれぞれ求めよ。

$$\lim_{x \to 1-0} f(x), \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) \tag{5.11}$$

(2) 関数 $f(x)$ のグラフを描け。

解答.

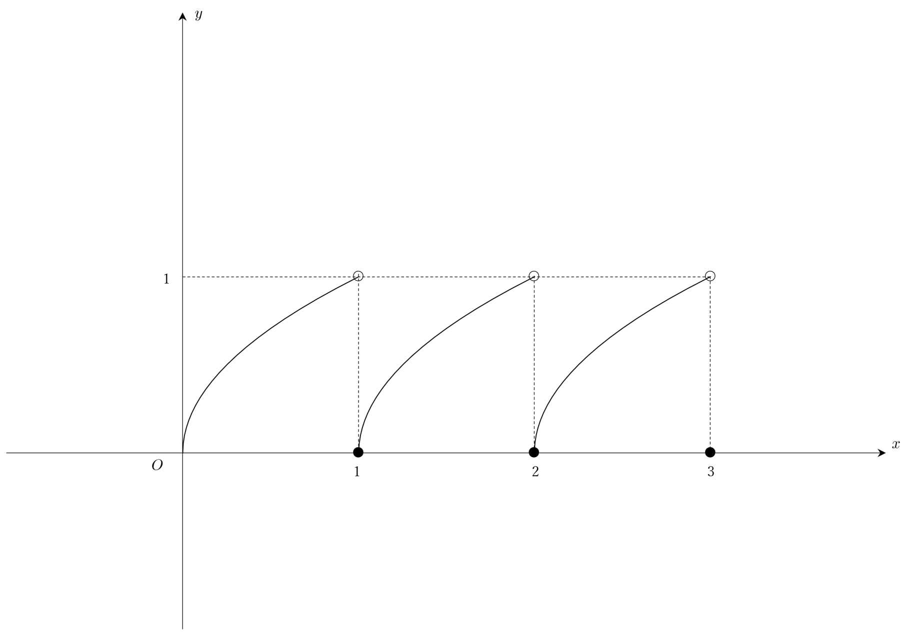
(1)

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1 \tag{5.12}$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 0 \tag{5.13}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \leq x < 1) \\ \sqrt{x-1} & (1 \leq x < 2) \\ \sqrt{x-2} & (2 \leq x < 3) \end{cases} \tag{5.14}$$



問 3

> 次式で定められる x の関数 y について、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。$\tan^{-1} x$ は $\tan x$ の逆関数である ($\tan^{-1} x = \arctan x$)。
>
> $$\tan^{-1}\frac{2x}{y} = \log\sqrt{4x^2+y^2} \tag{5.15}$$

解答. 左辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{2x}{y}\right) = \frac{d\left(\arctan\frac{2x}{y}\right)}{d\left(\frac{2x}{y}\right)}\frac{d\left(\frac{2x}{y}\right)}{dx} \tag{5.16}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2x}{y}\right)^2+1} \times \frac{2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}{y^2} \tag{5.17}$$

$$= \frac{2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}{4x^2+y^2} \tag{5.18}$$

右辺も同様に

$$\frac{d}{dx}\log\sqrt{4x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}}\frac{d}{dx}\sqrt{4x^2+y^2} \tag{5.19}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}} \times \frac{8x+2y\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{4x^2+y^2}} \tag{5.20}$$

$$= \frac{4x+y\frac{dy}{dx}}{4x^2+y^2} \tag{5.21}$$

よって、

$$2y - 2x\frac{dy}{dx} = 4x + y\frac{dy}{dx} \tag{5.22}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -2 & y = -2x \\ \dfrac{-4x+2y}{2x+y} & y \neq -2x \end{cases} \tag{5.23}$$

問 4

> 次に示す xyz 空間の領域 D を考える。このとき、以下の問いに答えよ。
>
> $$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; 0 \le x \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\, y \ge 0\right\} \tag{5.24}$$
>
> (1) 領域 D を図示せよ。
>
> (2) 領域 D の体積を求めよ。

(1) 略

(2) 円錐を $z = x$ で切断したうち、上側の体積である。$0 \le z < 1/2,\, 1/2 \le z \le 1$ に分割して考える。
$0 \le z < 1/2$ の体積を V_1 $1/2 \le z \le 1$ の体積を V_2 とし、求める体積を $V = V_1 + V_2$ とすると

$$V_1 = \int_0^{1/2} \int_0^z \sqrt{(1-z)^2 - x^2}\, dxdz \tag{5.25}$$

$$V_2 = \int_{1/2}^0 \int_0^{1-z} \sqrt{(1-z)^2 - x^2}\, dxdz \tag{5.26}$$

である。

$$I = \int_0^z \sqrt{(1-z)^2 - x^2}\, dx \tag{5.27}$$

とおくと、次の不定積分

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \tag{5.28}$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left(\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx \tag{5.29}$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \tag{5.30}$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C \tag{5.31}$$

を用いて

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{(1-z)^2 - x^2} + (1-z)^2 \arcsin \frac{x}{1-x} \right]_0^z \tag{5.32}$$

$$= \frac{1}{2} z\sqrt{1 - 2z} + \frac{1}{2}(1-z)^2 \arcsin \frac{z}{1-z} \tag{5.33}$$

と計算できるので V_1 の積分は

$$V_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} z\sqrt{1-2z}\, dz + \int_0^{1/2} \frac{1}{2}(1-z)^2 \arcsin \frac{z}{1-z}\, dz \tag{5.34}$$

と表せる。第一項の積分を I_1、第二項を I_2 とする。

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} z\sqrt{1-2z}\, dz \tag{5.35}$$
$$= \int_1^0 \frac{1-t^2}{4} \cdot t \cdot (-t) dt \quad (\sqrt{1-2z} = t) \tag{5.36}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{4}(t^2 - t^4) dt \tag{5.37}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 \tag{5.38}$$
$$= \frac{1}{30} \tag{5.39}$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}(1-z)^2 \arcsin\frac{z}{1-z}\, dz \tag{5.40}$$
$$= -\frac{1}{6}\left[(1-z)^3 \arcsin\frac{z}{1-z}\right]_0^{1/2} + \frac{1}{6}\int_0^{1/2} (1-z)^3 \cdot \frac{1}{(1-z)\sqrt{1-2z}} dz \tag{5.41}$$
$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \arcsin 1 + 0 + \frac{1}{6}\int_0^{1/2} \frac{(1-z)^2}{\sqrt{1-2z}} dz \tag{5.42}$$
$$= -\frac{\pi}{96} + \frac{1}{6}\int_1^0 \frac{1}{t}\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 (-t) dt \quad (\sqrt{1-2z} = t) \tag{5.43}$$
$$= -\frac{\pi}{96} + \frac{1}{24}\int_0^1 (t^2+1)^2\, dt \tag{5.44}$$
$$= -\frac{\pi}{96} + \frac{1}{24}\left[\frac{1}{5} + \frac{2}{3}t^3 + t\right]_0^1 \tag{5.45}$$
$$= -\frac{\pi}{96} + \frac{7}{90} \tag{5.46}$$

ゆえに、

$$V_1 = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{96} + \frac{1}{9} \tag{5.47}$$

V_2 は半径と高さが $\dfrac{1}{2}$ の円錐の 1/4 であるので、

$$V_2 = \frac{\pi}{96} \tag{5.48}$$

以上より、求める体積 V は

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{\pi}{96} + \frac{1}{9} + \frac{\pi}{96} = \frac{1}{9} \tag{5.49}$$

線形代数

問 1

正方行列 $\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} \dfrac{21}{4} & \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{5\sqrt{3}}{4} & \dfrac{31}{4} \end{Bmatrix}$

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ と、それら固有値に対する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{n}_1 = \begin{Bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{n}_2 = \begin{Bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{Bmatrix}$ を求めよ。

(2) 平方根行列 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ を求めよ。

解答.

(1) 固有方程式より

$$\left(\frac{21}{4} - \lambda\right)\left(\frac{31}{4} - \lambda\right) - \frac{75}{16} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \tag{5.50}$$

$$\therefore \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 4 \tag{5.51}$$

(i) $\lambda = \lambda_1$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ は

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{15}{4} & \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{5\sqrt{3}}{4} & -\dfrac{5}{4} \end{bmatrix} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{5.52}$$

より、

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \tag{5.53}$$

(ii) $\lambda = \lambda_2$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{n}_2$ は

$$\boldsymbol{n}_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.54}$$

(2) 平方根行列は $(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}})^2 = \boldsymbol{A}$ を満たす行列である。
また、行列 $\boldsymbol{P}_1 := [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$, $\boldsymbol{P}_2 := [\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_1]$ と固有ベクトルを横に並べた行列を用いて、$\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 \tag{5.55}$$

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 \tag{5.56}$$

と対角化できる。また、

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_1 = (\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_1)^2 \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_2 = (\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_2)^2 \tag{5.58}$$

であるので、

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_1 = \pm\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{5.59}$$

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_2 = \pm\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \tag{5.60}$$

が成り立つ。よって、$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ は 4 つ得られて

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}} = \pm\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_1^{-1},\ \pm\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_2^{-1} \tag{5.61}$$

$$= \begin{bmatrix}\pm\dfrac{9}{4} & \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \pm\dfrac{11}{4}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \pm\dfrac{9}{4}\\ \pm\dfrac{11}{4} & \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}\quad\text{(行列内は複号同順)} \tag{5.62}$$

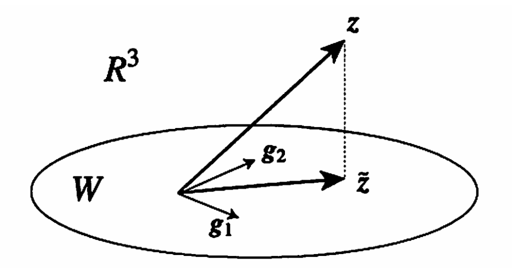
問 2

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \in R^3$ を、正方行列 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ を用いた R^3 上の線形変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Bx}$ によって別のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$ に移すと、$\boldsymbol{y}$ は 2 次元の部分空間 $W \subset R^3$ に属する。
この事に関して以下の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Bx}$ から部分空間 W を張る一組の基底 $[\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2]$ は明らかである。$\boldsymbol{g}_1 = \begin{Bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{g}_2 = \begin{Bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \end{Bmatrix}$ を示せ。

(2) $[\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2]$ を利用して W を張る一組の正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ を作れ。

(3) ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \notin W$ が与えられたとする。$\boldsymbol{z}$ の W における最良近似 $\tilde{\boldsymbol{z}} \in W$ を求めよ。



解答.

(1) $\boldsymbol{g}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{g}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

(2) シュミットの直交化法を用いる。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{5.63}$$

$\boldsymbol{g}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ への射影ベクトルは $(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2)\boldsymbol{e}_1$ として得られるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2' &= \boldsymbol{g}_2 - (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2)\boldsymbol{e}_1 && (5.64) \\ &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} && (5.65) \\ &= \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} && (5.66) \end{aligned}$$

これを正規化して $\boldsymbol{e}_2$ を得る。

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{e}_2'}{|\boldsymbol{e}_2'|} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.67}$$

(3) 最良近似ベクトル $\tilde{\boldsymbol{z}} \in W$ は $\boldsymbol{z}$ の W への射影ベクトルと等しいので

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{z}} &= (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 && (5.68) \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 10 \end{Bmatrix} && (5.69) \end{aligned}$$

2021 春

微分積分

問 1

以下の問いに答えよ。

(1) 次の関数 $f(x)$ を微分せよ。

$$f(x) = x^{x^x} \quad (x > 0) \tag{6.1}$$

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to +0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} \tag{6.2}$$

解答.

(1)

$$g(x) = x^x \quad (x > 0) \tag{6.3}$$

は $\log g(x) = x \log x$ より

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + 1 \tag{6.4}$$

$$\Rightarrow g'(x) = x^x(\log x + 1) \tag{6.5}$$

$f(x)$ の自然対数をとったものの微分は

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) \log x + \frac{g(x)}{x} \tag{6.6}$$

$$= x^x(\log x + 1) + x^{x-1} \tag{6.7}$$

$$\therefore f'(x) = x^{x^x} \left(x^x(\log x + 1) + x^{x-1} \right) \tag{6.8}$$

(2)

$$\lim_{x \to +0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} = \lim_{x \to +0} \frac{x - \log(1+x)}{x \log(1+x)} \tag{6.9}$$

より $f(x) = x - \log(1+x)$, $g(x) = x \log(1+x)$ とおくと求める極限は

$$\lim_{x \to +0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\} = \lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.10}$$

である。このとき導関数は

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \tag{6.11}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \tag{6.12}$$

$$g'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x} \tag{6.13}$$

$$g''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} \tag{6.14}$$

のように得られる。
この二階導関数の極限は

$$\lim_{x\to+0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x^2}} \tag{6.15}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{6.16}$$

であり、$x = 0$ の除外近傍で $g''(x) \neq 0$ かつ $\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to+0} g'(x) = 0$ であるので L'Hôpital の定理より

$$\lim_{x\to+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} \tag{6.17}$$

同様に、$x = 0$ の除外近傍で $g'(x) \neq 0$ かつ $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} g(x) = 0$ であるので L'Hôpital の定理より

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \tag{6.18}$$

問 2

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \frac{[x]}{x} \quad (0 < x < 3) \tag{6.19}$$

ガウス記号 $[x]$ は床関数を表す。その値は実数 x に対して x 以下である最大の整数で与えられる。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f(1/2)$, $f(1)$, $f(3/2)$ の値を求めよ。
(2) 関数 $f(x)$ のグラフを描け。

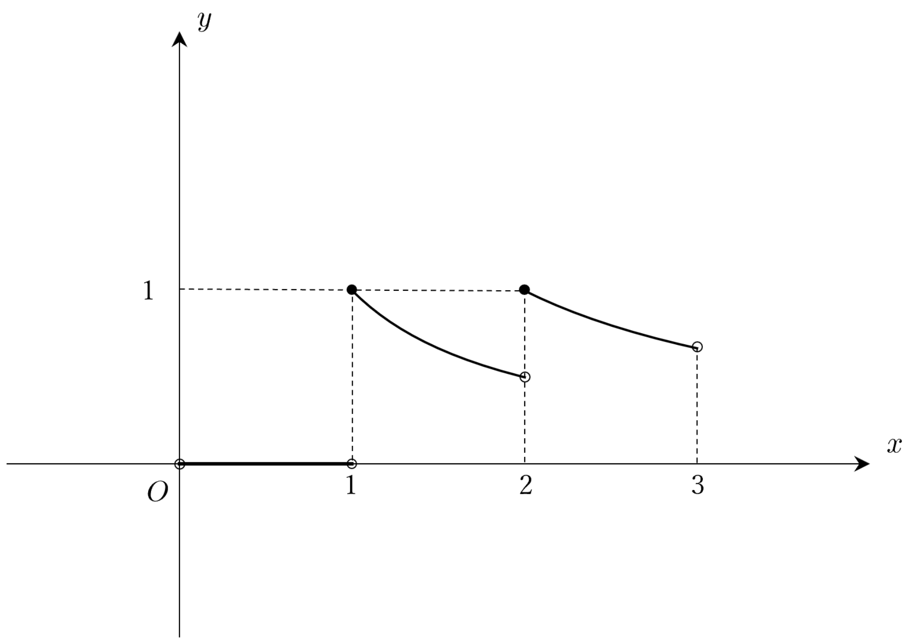
解答.

(1)

$$f(1/2) = 0 \tag{6.20}$$
$$f(1) = 1 \tag{6.21}$$
$$f(3/2) = \frac{4}{3} \tag{6.22}$$

(2) $[x] = n \, (n \leq x < n+1)$ より

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ \dfrac{1}{x} & (1 \leq x < 2) \\ \dfrac{2}{x} & (2 \leq x < 3) \end{cases} \tag{6.23}$$



問 3

次の重積分について、以下の問いに答えよ。

$$\iiint_D dxdydz, \quad D = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, x^2+y^2 \leq x\right\} \tag{6.24}$$

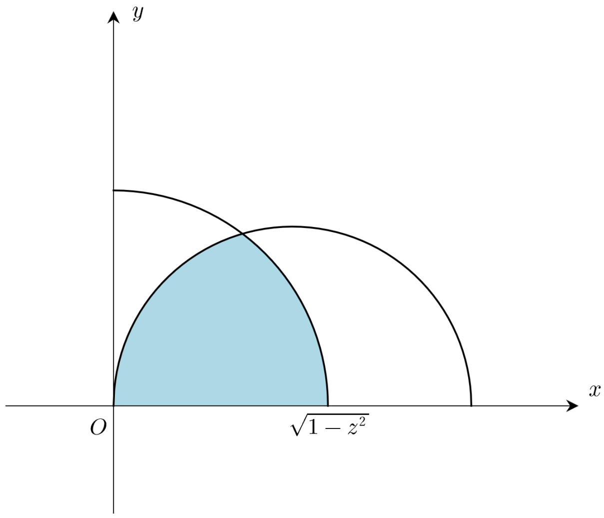
(1) 積分領域 D を図示せよ。

(2) この重積分を計算せよ。

解答.

(1) 略

(2) 与えられた領域 D は xy 平面を底面として球面までを高さとする立体であるので、
積分領域 $D' = \left\{(x,y) \;\middle|\; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$ において $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ を積分すれば良い。



求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{D'} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy && (6.25)\\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1-r^2}\, drd\theta && (6.26)\\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2}\right]_0^{\cos\theta} && (6.27)\\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2}-1\right) d\theta && (6.28)\\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\sin^3\theta-1\right) d\theta && (6.29)\\
&= -\frac{1}{3}\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta-\theta\right]_0^{\pi/2} && (6.30)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) && (6.31)
\end{aligned}
$$

問 4

> 次の微分方程式を解け。
>
> $$(x+y)dx-(x-y)dy=0 \tag{6.32}$$

解答. $x-y=0$ は $x+y=0$ を得るので $y=x=0$ である。

$x-y\neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y} \tag{6.33}$$

$x=0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-1\Rightarrow y=-x+C=C \tag{6.34}$$

$x\neq 0$ のとき、$u=\dfrac{y}{x}$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u \tag{6.35}$$

であるので、微分方程式は

$$\frac{du}{dx}x+u=\frac{1+u}{1-u} \tag{6.36}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2+1}{1-u} \tag{6.37}$$

とできる。変数分離形として両辺を積分して

$$\int\frac{1-u}{u^2+1}du=\int\frac{dx}{x} \tag{6.38}$$

$$\arctan u-\frac{1}{2}\log(u^2+1)=\log|x|+C \tag{6.39}$$

$$\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=\log|x|+C \tag{6.40}$$

線形代数

問 1

正方行列 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

a) $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2\ (\lambda_1>\lambda_2)$ と、それら固有値に対する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{n}_1=\begin{Bmatrix}n_{1x}\\ n_{1y}\end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{n}_2=\begin{Bmatrix}n_{2x}\\ n_{2y}\end{Bmatrix}$ を求めよ。

b) 次の多項式を計算せよ。ただし、$\boldsymbol{I}=\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Bmatrix}$ である。

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^5-6\boldsymbol{A}^4+3\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+54\boldsymbol{A}+18\boldsymbol{I} \tag{6.41}$$

解答.

a) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有方程式より

$$\left(\frac{9}{2}-\lambda\right)\left(\frac{7}{2}-\lambda\right)-\frac{3}{4}=\lambda^2-8\lambda+15 \tag{6.42}$$

$$=(\lambda-5)(\lambda-3)=0 \tag{6.43}$$

$$\tag{6.44}$$

$$\therefore \lambda=5,\ 3\ (=\lambda_1,\ \lambda_2) \tag{6.45}$$

(i) $\lambda=\lambda_1$ のとき、

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_{1x}\\ n_{1y}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{6.46}$$

$$\boldsymbol{n}_1=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{Bmatrix} \tag{6.47}$$

(ii) $\lambda=\lambda_2$ のとき、

$$\boldsymbol{A}=\begin{Bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}n_{2x}\\ n_{2y}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{6.48}$$

$$\boldsymbol{n}_2=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} \tag{6.49}$$

b) 与えられた多項式は

$$f(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}^2 - 8\boldsymbol{A} + 15\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^3 + 2\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) + 2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} \tag{6.50}$$

とできて、ケーリーハミルトンの定理より $\boldsymbol{A}^2 - 8\boldsymbol{A} + 15\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ から

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{0}(\boldsymbol{A}^3 + 2\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) + 2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} && (6.51) \\ &= 2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} && (6.52) \\ &= \begin{bmatrix} 12 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 10 \end{bmatrix} && (6.53) \end{aligned}$$

問 2

> $\boldsymbol{D} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{E} = \begin{Bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \kappa \end{Bmatrix}$ とする。
>
> いま、あるベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ を満たしている。以下の問に答えよ。
>
> (1) p, q, r の関係を示せ。
>
> (2) $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ が存在するとき、α, β, γ が満たすべき必要条件を示せ。
>
> (3) $\boldsymbol{E}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$ が存在するとき、α, β, γ が満たすべき必要条件を示せ。

必要条件ではなく（必要）十分条件を問われているものと解釈しました。必要条件なら適当に「$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ である」でもよい気がします。

また、(3) は α, β, γ ではなく ξ, η, κ の条件を問われているものと解釈しました。

解答.

(1) $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{6.54}$$

$$\begin{cases} p + 2q + 3r = 0 \\ 4p + 5q + 6r = 0 \end{cases} \tag{6.55}$$

(2) $\boldsymbol{x}$ が解を持つためには $\operatorname{rank} \boldsymbol{D} = \operatorname{rank}[\boldsymbol{D}|\boldsymbol{a}]$

$$\boldsymbol{D} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{6.56}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

$$\therefore \operatorname{rank} \boldsymbol{D} = 2 \tag{6.59}$$

また、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \alpha \\ 2 & 5 & \beta \\ 3 & 6 & \gamma \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & -3 & -2\alpha+\beta \\ 0 & -6 & -3\alpha+\gamma \end{array}\right] \tag{6.60}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & -3 & -2\alpha+\beta \\ 0 & 0 & \alpha-2\beta+\gamma \end{array}\right] \tag{6.61}$$

$$\therefore \operatorname{rank}[\boldsymbol{D}|\boldsymbol{a}] = \begin{cases} 2 & (\ \alpha-2\beta+\gamma=0\ ) \\ 3 & (\ \alpha-2\beta+\gamma\neq 0\ ) \end{cases} \tag{6.62}$$

ゆえに、解を持つ必要条件は $\alpha-2\beta+\gamma=0$

(3) $\boldsymbol{y}$ が解を持つためには $\operatorname{rank}\boldsymbol{E} = \operatorname{rank}[\boldsymbol{E}|\boldsymbol{b}]$

$$\boldsymbol{E} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.65}$$

$$\therefore \operatorname{rank}\boldsymbol{E} = 2 \tag{6.66}$$

また、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & \xi \\ 5 & 6 & \eta \\ 6 & 9 & \kappa \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & \xi \\ 0 & \dfrac{9}{4} & \dfrac{-5\xi+4\eta}{4} \\ 0 & \dfrac{9}{2} & \dfrac{-3\xi+2\kappa}{2} \end{array}\right] \tag{6.67}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & \xi \\ 0 & \dfrac{9}{4} & \dfrac{-5\xi+4\eta}{4} \\ 0 & 0 & \xi-2\eta+\kappa \end{array}\right] \tag{6.68}$$

$$\therefore \operatorname{rank}[\boldsymbol{E}|\boldsymbol{a}] = \begin{cases} 2 & (\ \xi-2\eta+\kappa=0\ ) \\ 3 & (\ \xi-2\eta+\kappa\neq 0\ ) \end{cases} \tag{6.69}$$

ゆえに、解を持つ必要条件は $\xi-2\eta+\kappa=0$

2020 秋

微分積分

問 1

以下の問いに答えなさい。

(a) 次の極限値を調べよ。

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x - \cos x}{\sin x} \tag{7.1}$$

(b) 次の関数を微分しなさい。

$$y = x^{\cos x} \tag{7.2}$$

(c) 以下の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\cos x)^2} \tag{7.3}$$

解答.

(a) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ より

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0} \frac{\sec x - \cos x}{\sin x} &(7.4)\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\cos x \sin x} &(7.5)\\ &= \lim_{x \to 0} \tan x &(7.6)\\ &= 0 &(7.7) \end{aligned}$$

(b) 与式の両辺に自然対数をとって

$$\begin{aligned} \log y &= \cos x \log x &(7.8)\\ \frac{y'}{y} &= -\sin x \log x + \frac{\cos x}{x} &(7.9)\\ \therefore y' &= x^{\cos x}\left(-\sin x \log x + \frac{\cos x}{x}\right) &(7.10) \end{aligned}$$

(c) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ とおくことで

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\cos x)^2} &= \int_0^1 \frac{2}{\left\{1+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right\}^2}(1+t^2)\,dt &(7.11)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1+t^2)\,dt &(7.12)\\ &= \frac{2}{3} &(7.13) \end{aligned}$$

問 2

> 以下の積分方程式について次の問いに答えなさい。ただし、$G(t)$ は微分可能な関数である。
>
> $$I = \int_0^t G(z)e^{t-z}\,dz + 2G(t) = 2 \tag{7.14}$$
>
> (a) $G(0)$ を求めよ。
> (b) $G'(0)$ を求めよ。
> (c) $G(t)$ を求めよ。

解答.

(a) I に $t=0$ として、

$$2G(0) = 2 \Leftrightarrow G(0) = 1 \tag{7.15}$$

(b) I の両辺を t で微分してから $t=0$ とすれば

$$e^t\int_0^t G(z)e^{-z}\,dz + G(t) + 2G'(t) = 0 \tag{7.16}$$

$$G(0) + 2G'(0) = 0 \tag{7.17}$$

$$G'(0) = -\frac{1}{2} \tag{7.18}$$

(c) I は

$$\int_0^t G(z)e^{t-z}\,dz + 2G(t) - 2 = 0 \tag{7.19}$$

であるので、(7.16) 式と (7.19) 式の差をとって

$$G(t) - 2G'(t) - 2 = 0 \tag{7.20}$$

$$2G'(t) - G(t) = -2 \tag{7.21}$$

となり、この微分方程式を $G(0)=1,\ G'(0)=\dfrac{1}{2}$ を初期条件として解けば良い。
斉次形 $2G'(t) - G(t) = 0$ は $G(t) \neq 0$ のとき

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{1}{2} \tag{7.22}$$

$$\log|G(t)| = \frac{1}{2}t + C \tag{7.23}$$

であるので、任意定数 A を用いて一般解が

$$G(t) = Ae^{\frac{t}{2}} \tag{7.24}$$

と得られる。$G(t)=0$ は $A=0$ のときである。よって、非斉次形の一般解は特解 $G_{\mathrm{p}} = k$ を仮定すれば (7.21) 式より $k=2$ であるので一般解は

$$G(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + 2 \tag{7.25}$$

である。ここに、初期条件 $G(0)=1$ より任意定数は $A=-1$ と決まり求める関数 $G(t)$ は

$$G(t)=-e^{\frac{t}{2}}+2 \tag{7.26}$$

である。（これは $G'(0)=-\dfrac{1}{2}$ を満たす。）

問 3

> 次の微分方程式を解きなさい。
>
> $$(1+\sin y)dx = [2y\cos y - x(\sec y + \tan y)]dy \tag{7.27}$$

解答. 与えられた微分方程式は

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{\cos y}x = \frac{2y\cos y}{1+\sin y} \tag{7.28}$$

であるのでこれは一階線形微分方程式[*6]である。

ここに積分因子 $\lambda(y)$ を考える。可積分条件を満たす、すなわち

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dy} = P(y) = \frac{1}{\cos y} \tag{7.29}$$

となるように λ を決定する。

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{dy}{\cos y} \tag{7.30}$$

$$\log|\lambda| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin y}{1-\sin y}\right| + C \tag{7.31}$$

$C=0$ として得る次の式

$$\lambda(y) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin y}{1-\sin y}} = \pm\frac{1+\sin y}{|\cos y|} \tag{7.32}$$

より、

$$\lambda(y) := \frac{1+\sin y}{\cos y} \tag{7.33}$$

を積分因子としてとる。(7.28) 式に積分因子 $\lambda(y)$ をかけて

$$\frac{d}{dy}\big(\lambda(y)x\big) = \lambda(y)\frac{2y\cos y}{1+\sin y} \tag{7.34}$$

$$\frac{d\left(\dfrac{1+\sin y}{\cos y}x\right)}{dy} = 2y \tag{7.35}$$

$$d\left(\frac{1+\sin y}{\cos y}x\right) = 2y\,dy \tag{7.36}$$

よって、求める解は

$$\frac{1+\sin y}{\cos y}x = y^2 + C \quad (C\text{ は任意定数}) \tag{7.37}$$

[*6] appendix

線形代数

問 1

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を線形写像 f とする。ここに

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

(1) 線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めなさい。

(2) 線形写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めなさい。

解答.

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ より $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たす解の集合である。
以下、$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^\top \in \mathbb{R}^3$ とする。$\boldsymbol{A}$ の行基本変形によって

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.40}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.41}$$

とできるから

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 3x_2 + 2x_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{7.42}$$

よって $\mathrm{Ker}\, f$ の基底は

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{7.43}$$

(2) $\mathrm{Im}\, f = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^3 \right\}$ より $x \in \mathbb{R}^3$ に対する写像 f の終域である。

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{7.44}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} x_1 + \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} x_3 \tag{7.45}$$

より終域は $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$ の張る部分空間と等しい。ここで、(1) の $\boldsymbol{A}$ の行基本変形より

$$-\frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.46}$$

であるので、$\mathrm{Im}\, f$ の次元は 2 で基底は

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{7.47}$$

問 2

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$ とする。

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値と対応する正規化された固有ベクトルをすべて求めなさい。

(2) $\boldsymbol{B}^2 - 5\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{I}$ を計算しなさい。ただし、$\boldsymbol{I}$ は 2×2 の単位行列である。

(3) $\boldsymbol{B}^5 - 5\boldsymbol{B}^4 + 4\boldsymbol{B}^3 - \boldsymbol{B}^2 + 5\boldsymbol{B}$ を計算しなさい。

(4) $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{B}$ を満たす $\boldsymbol{C}$ を求めなさい。

解答.

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有方程式より

$$\left(\frac{5}{2} - \lambda\right)\left(\frac{5}{2} - \lambda\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0 \tag{7.48}$$

$$\therefore \lambda = 4,\ 1\ (=: \lambda_1,\ \lambda_2) \tag{7.49}$$

(i) $\lambda = \lambda_1$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1 (= \{u,\ v\}^\top)$ は

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{7.50}$$

より、

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{7.51}$$

(ii) $\lambda = \lambda_2$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ は

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{7.52}$$

(2) 固有方程式が $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ であるからケーリーハミルトンの定理より $\boldsymbol{B}^2 - 5\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$

(3)

$$\boldsymbol{B}^5 - 5\boldsymbol{B}^4 + 4\boldsymbol{B}^3 - \boldsymbol{B}^2 + 5\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}^2 - 5\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}^3 - \boldsymbol{I}) + 4\boldsymbol{I} \tag{7.53}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

(4) 行列 $\boldsymbol{C}$ を

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{7.55}$$

とおく。このとき、$\boldsymbol{C}^2$ は

$$\boldsymbol{C}^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix} \tag{7.56}$$

であるので

$$\begin{cases} a^2+bc = \dfrac{5}{2} \\ (a+d)b = -\dfrac{3}{2} \\ (a+d)c = -\dfrac{3}{2} \\ d^2+bc = \dfrac{5}{2} \end{cases} \tag{7.57}$$

これを解いて、$\boldsymbol{C}$ は 4 つ得られる。

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \pm\dfrac{3}{2} & \mp\dfrac{1}{2} \\ \mp\dfrac{1}{2} & \pm\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm\dfrac{1}{2} & \mp\dfrac{3}{2} \\ \mp\dfrac{3}{2} & \pm\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(行列内は複号同順)} \tag{7.58}$$

2020 春

微分積分

問 1

以下の問いに答えなさい。

(a) 次の関数の微分を求めなさい。ただし、a は正の定数とする。

$$f(x) = a^x \tag{8.1}$$

(b) 次の関数の第 n 次導関数を求めなさい。

$$f(x) = e^x \sin x \tag{8.2}$$

解答.

(a)

$$f'(x) = a^x \log a \tag{8.3}$$

(b) $f(x)$ の n 次導関数が

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \tag{8.4}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(\sin x + \cos x) && (8.5)\\ &= \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) && (8.6)\\ &= (\sqrt{2})^1 e^x \sin\left(x + \frac{1 \cdot \pi}{4}\right) && (8.7) \end{aligned}$$

より $n = 1$ で (8.4) 式は成り立つ。

(ii) $n = k\ (\in \mathbb{N})$ で (8.4) 式が成立すると仮定すると

$$f^{(k)}(x) = (\sqrt{2})^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) \tag{8.8}$$

であり、これを微分した $k + 1$ 階の導関数は

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (\sqrt{2})^k e^x \left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right)\right) && (8.9)\\ &= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) && (8.10)\\ &= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4}\right) && (8.11) \end{aligned}$$

より $n = k + 1$ でも成り立つ。

(i),(ii) と数学的帰納法より任意の自然数 n に対して n 次導関数が得られて、

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \tag{8.12}$$

である。

問 2

以下の式は閉曲線を極座標 (ρ, ϕ) で表示している。ただし、a と b は定数とする。

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\phi}{a^2} + \frac{\sin^2\phi}{b^2} \tag{8.13}$$

(a) x-y 座標系でこの式を表し、y について解きなさい。この曲線のグラフを描きなさい。
(b) 曲線内の面積を求めなさい。

解答.

(a) 両辺を ρ 倍して、$x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ として直交座標系に変換すると

$$\frac{(\rho\cos\phi)^2}{a^2} + \frac{(\rho\sin\phi)^2}{b^2} = 1 \tag{8.14}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.15}$$

より、これは楕円を表す。また、y について解くと、

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{8.16}$$

概形は下図。

(b) 面積 S は $x, y \geq 0$ の領域 D の面積の 4 倍として、この領域の境界は $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ だから

$$S = 4\int_D dxdy \tag{8.17}$$

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \tag{8.18}$$

$$= \pi ab \tag{8.19}$$

問 3

> 次の微分方程式を解きなさい。
>
> (a) $x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) - y + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$
> (b) $y\cos x\,dx + (2y + \sin x)dy = 0$

解答.

(a) 同次形より $y = ux$ とおく。$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$ を用いて

$$\tan u + x\frac{du}{dx} = 0 \tag{8.20}$$

$$\frac{du}{\tan x} = \frac{dx}{x} \tag{8.21}$$

$$\log\left|\frac{y}{x}\right| = \log|x| + C \ \ (C \text{ は任意定数}) \tag{8.22}$$

(b)

$$\int y\cos x\,dx = y\sin x + f(y) \tag{8.23}$$

$$\int (2y + \sin x)\,dy = y^2 + y\sin x + g(x) \tag{8.24}$$

ただし、$f(y)$, $g(x)$ は任意に取れる関数である。
よって、関数 $U(x, y) = y^2 + y\sin x$ とおけば与えられた微分方程式は完全微分方程式で、

$$y\cos x\,dx + (2y + \sin x)dy = 0 \tag{8.25}$$

$$\Leftrightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0 \tag{8.26}$$

$$\therefore y^2 + y\sin x = C \ \ (C \text{ は任意定数}) \tag{8.27}$$

線形代数

問 1

$x^2+y^2=1$ を満たす点 $P=\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ の集合は円 Γ_0 である。点 $\boldsymbol{P}$ を以下の行列 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

を表現行列とする線形変換 $L_{\boldsymbol{A}}$ で変換すると、その集合は閉曲線 Γ_1 となる。

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と正規化された固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) x-y 平面上に円 Γ_0 と閉曲線 Γ_1 を描け。

解答.

(1) 固有方程式 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ より

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)-\frac{1}{4} \tag{8.29}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)=0 \tag{8.30}$$

$$\therefore \lambda=2,\ 1 \tag{8.31}$$

(i) $\lambda=2$ のとき、固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ は

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{0} \tag{8.32}$$

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{8.33}$$

(ii) $\lambda=2$ のとき、固有ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ は

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{0} \tag{8.34}$$

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{8.35}$$

(2) 線形変換 $L_{\boldsymbol{A}}$ によって点 $\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{Q}=\{X,Y\}^\top$ に移る、すなわち

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{8.36}$$

$$\tag{8.37}$$

が成り立つとき、

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{8.38}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{8.39}$$

$$\begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} (\boldsymbol{A}^{-1})^{\top} \tag{8.40}$$

$$= \begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{8.41}$$

また、Γ_0 の方程式は

$$\begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \boldsymbol{E} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 1 \tag{8.42}$$

であるのでここに線形変換 $L_{\boldsymbol{A}}$ を考えれば、

$$\begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} (\boldsymbol{A}^{-1})^{\top} \boldsymbol{A}^{-1} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 1 \tag{8.43}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} X & Y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 1 \tag{8.44}$$

を満たす。よって線形変換によって移る点の集合は次の方程式で表される。

$$\begin{Bmatrix} x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 1 \tag{8.45}$$

ここで、行列 $\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ は次のように対角化される。

$$\det(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}) = \left(\frac{5}{8} - \lambda\right)\left(\frac{5}{8} - \lambda\right) - \frac{9}{64} \tag{8.46}$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0 \tag{8.47}$$

$$\therefore \lambda = 1,\ \frac{1}{4} \tag{8.48}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は

$$\lambda = 1 \text{ のとき} \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{8.49}$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \text{ のとき} \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{8.50}$$

より $\Lambda := [\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2]$ とおくと $\Lambda \boldsymbol{B} \Lambda^{-1}$ は対角行列で

$$\Lambda \boldsymbol{B} \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{8.51}$$

である。また、$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{3}{4}\pi & -\sin\dfrac{3}{4}\pi \\ \\ \sin\dfrac{3}{4}\pi & \cos\dfrac{3}{4}\pi \end{bmatrix}$ から、これは $\dfrac{3}{4}\pi$ 方向の回転行列で x-y 座標から $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転した s-t 座標で

$$\begin{Bmatrix} s & t \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} = 1 \tag{8.52}$$

$$s^2 + \frac{t^2}{4} = 1 \tag{8.53}$$

より、楕円を表す。

問 2

連立方程式

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 3 \\ x + 3y + 7z &= 0 \\ x + y + z &= c \end{aligned} \tag{8.54}$$

に関する以下の問いに答えよ。ここに、c は実数である。

(1) 連立方程式が解を持つための必要十分条件を示せ。

(2) (1) の条件のもとで連立方程式の解を求めよ。

解答.

(1) 係数と右辺を取り出した行列を $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ とする。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ c \end{Bmatrix} \tag{8.55}$$

このとき、解を持つ必要十分条件は $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ が成り立つことである。

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & c-3 \end{array}\right] \tag{8.56}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & c-6 \end{array}\right] \tag{8.57}$$

ゆえに、求める条件は $c = 6$

(2) $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ について掃き出し法によって解を求める。

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{8.58}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ y + 3z = -3 \end{cases} \tag{8.59}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 - 6t \\ -3 - 3t \\ t \end{Bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{8.60}$$

2019 秋

微分積分

問 1

$y = x^2 e^{-x}$ のすべての臨界点（停留点）を求め、極値が最大値か最小値かを判定せよ。

解答.

$$\frac{dy}{dx} = x(2-x)e^{-x} \tag{9.1}$$

および

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \tag{9.2}$$

より増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$\frac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$(\to 0)$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$(\to 0)$

ゆえに極小値 $y(0)$ は最小値で、極大値 $y(2)$ は最大値ではない。

問 2

> 次の級数が収束するか発散するかを調べよ。
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\cdots \tag{9.3}$$

この与えられ方は一意に定まらないと思われます。ので、一般項を類推することで解答とします。

解答.　与えられた級数が

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \tag{9.4}$$

と等価であると推測する。ここに $a_n=\dfrac{n}{2^n}$ とおくと、

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{n+1}{2n}\right|\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(n\to\infty) \tag{9.5}$$

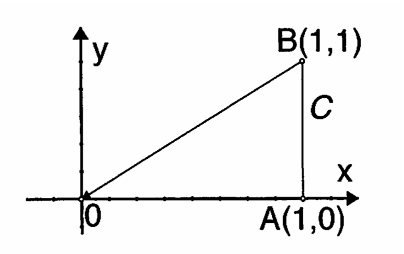
より、この級数は収束する。

問 3

次の線積分を求めよ。

$$L = \oint_C (2xy\,dy - x^2\,dx) \tag{9.6}$$

ここで、C は、図に示すように頂点が O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1) の三角形の 3 辺で構成される。



解答. 線分 OA, AB, BO はパラメーター t_1, t_2, t_3 を用いて表すと

$$\mathrm{OA}\colon \begin{cases} x = t_1 \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \le t_1 \le 1 \tag{9.7}$$

$$\mathrm{AB}\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = t_2 \end{cases} \quad 0 \le t_2 \le 1 \tag{9.8}$$

$$\mathrm{BO}\colon \begin{cases} x = 1 - t_3 \\ y = 1 - t_3 \end{cases} \quad 0 \le t_3 \le 1 \tag{9.9}$$

と表せる。ここに、与えられた周回積分は

$$\oint_C = \int_{\mathrm{OA}} + \int_{\mathrm{AB}} + \int_{\mathrm{BO}} \tag{9.10}$$

であるので、求める線積分 L は

$$L = \int_{\mathrm{OA}} (2xy\,dy - x^2\,dx) + \int_{\mathrm{AB}} (2xy\,dy - x^2\,dx) + \int_{\mathrm{BO}} (2xy\,dy - x^2\,dx) \tag{9.11}$$

$$= \int_0^1 -t^2\,dt + \int_0^1 2t\,dt + \int_0^1 \Big(2(1-t)^2 - (1-t)^2\Big)(-1)\,dt \tag{9.12}$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \tag{9.13}$$

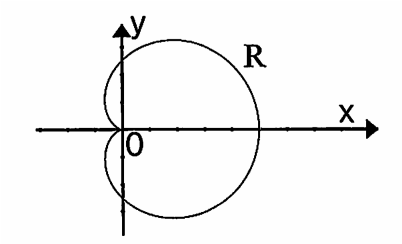
$$= \frac{1}{3} \tag{9.14}$$

問 4

次の定積分を求めよ。

$$I = \iint_R y \, dxdy \tag{9.15}$$

ここで、R は、図に示される曲線 $r = 2a(1 + \cos\theta)$ によって囲まれる領域とし、r, θ は極座標、a は定数とせよ。



解答. 与えられた積分は xyz 空間で R 上で $z = 0$ と $z = y$ で囲まれた部分の積分を表す。

ここで、$x = k \in \mathbb{R}$ での切断面について $z = y$ は原点 $(x, y, z) = (k, 0, 0)$ で対称であるので求める積分は

$$I = \iint_R y \, dxdy = 0 \tag{9.16}$$

別解. あるいは極座標変換によって

$$\begin{aligned}
I &= \iint_R y \, dxdy && (9.17)\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2a(1-\cos\theta)} \big(r^2 \sin\theta\big) dr d\theta && (9.18)\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{3} r^3 \sin\theta\right]_0^{2a(1+\cos\theta)} && (9.19)\\
&= \frac{4a^2}{3} \int_0^{2\pi} \sin\theta (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta && (9.20)\\
&= 0 && (9.21)
\end{aligned}$$

線形代数

問 1

ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{9.22}$$

が与えられるとき、以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{9.23}$$

が $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表されることを示せ。

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{w} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.24}$$

が $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表されないことを示せ。

解答.

(1)

$$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \tag{9.25}$$

と表せる。

(2) $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表されないので、ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{w}$ が一次独立である、すなわちこのベクトルを並べた行列 $\boldsymbol{P} := [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{w}]$ の階数について $\operatorname{rank}\boldsymbol{P} = 3$ となることを示す。$\boldsymbol{P}$ について次の行基本変形

$$\boldsymbol{P} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.26}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.27}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.28}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.29}$$

より、$\operatorname{rank}\boldsymbol{P} = 3$ であり、たしかに $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表されない。

ここで、ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{w}$ が一次独立であることと、$\boldsymbol{P} := [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{w}]$ の階数について $\operatorname{rank}\boldsymbol{P} = 3$ となることが同値であることを示しておきます。

Proof. 行列 $\boldsymbol{P}$ を、$\boldsymbol{P}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\colon \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ という線形写像とすると、

$$
\begin{aligned}
&\text{ベクトルの組}\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{w}\text{が一次独立である}\\
&\Leftrightarrow\text{「}\boldsymbol{v}_1x_1 + \boldsymbol{v}_2x_2 + \boldsymbol{w}x_3 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\text{」} && (9.30)\\
&\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\boldsymbol{P} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\right\} = \{\boldsymbol{0}\} && (9.31)\\
&\Leftrightarrow \dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{P} = 0 && (9.32)\\
&\Leftrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{P} = n = 3 \quad (\because\ \text{次元定理}) && (9.33)
\end{aligned}
$$

より、行列 $\boldsymbol{P}$ の列ベクトルが一次独立であることと $\operatorname{rank}\boldsymbol{P} = n$ であることは同値である。 □

問 2

行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.34}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 固有値と、それぞれの重複度を求めよ。
(2) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。
(3) $\boldsymbol{A}$ が対角化できることを示せ。
(4) 固有空間の次元を答えよ。

解答.

(1) 固有方程式 $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$ より

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda) + 8 + 8 - 3 \times (-1-\lambda) \times 4 = -(\lambda+3)^2(\lambda-3) = 0 \tag{9.35}$$

$$\lambda = 3,\ -3 \tag{9.36}$$

また、$\lambda = 3$ の重複度は 1、$\lambda = -3$ の重複度は 2 である。

(2) (i) $\lambda = 3$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \{x,\ y,\ z\}^\top$ は

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{9.37}$$

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \tag{9.38}$$

$$\boldsymbol{u} = t \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \tag{9.39}$$

よって、このときの正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ は

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{9.40}$$

(ii) $\lambda = -3$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \{x,\ y,\ z\}^\top$ は

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{9.41}$$

$$2x + 2y + 2z = 0 \tag{9.42}$$

$$\boldsymbol{u} = s \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R} \land (s,t) \neq (0,0)) \tag{9.43}$$

よって、正規化された固有ベクトルとしては $s=0$ と $t=0$ を考えれば一次独立である 2 つがとれて、それを正規化したものを $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ と表すと

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \tag{9.44}$$

(3) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ で、固有ベクトルは 3 つあるので対角化可能である。
実際、行列 $\boldsymbol{P} := [\sqrt{3}\boldsymbol{u}_1, \sqrt{2}\boldsymbol{u}_2, \sqrt{2}\boldsymbol{u}_3]$ について

$$[\boldsymbol{P}|\boldsymbol{E}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{9.45}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{9.46}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \tag{9.47}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \tag{9.48}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \tag{9.49}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \tag{9.50}$$

$$= [\boldsymbol{E}|\boldsymbol{P}^{-1}] \tag{9.51}$$

より $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} \tag{9.52}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{9.53}$$

であるので、たしかに対角化できる。

あるいは正規化されたままのベクトルを並べた行列 $\boldsymbol{Q} := [\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3]$ について

$$[\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{9.54}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{9.55}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3/2\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \tag{9.56}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{array}\right] \tag{9.57}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sqrt{3}/\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2}/3 & 2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{array}\right] \tag{9.58}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2}/3 & 2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{array}\right] \tag{9.59}$$

より $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ は

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q} \tag{9.60}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{9.61}$$

であるので、たしかに対角化できる。
行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ に対する固有空間 W_λ とは固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて

$$W_\lambda = \{t\boldsymbol{u} \mid\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \cup \{\boldsymbol{0}\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\} \tag{9.62}$$

を満たす $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。すなわち、$\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ を線形写像 $\boldsymbol{P}$ としたとき、固有空間は

$$W_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\right\} \tag{9.63}$$

$$= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\right\} \tag{9.64}$$

$$= \operatorname{Ker} \boldsymbol{P} \tag{9.65}$$

であるので $\boldsymbol{P}$ の核である。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$W_3 = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \left\{t\{1, 1, 1\}^\top \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} \tag{9.66}$$

よって、$\lambda = 3$ の固有空間 W_3 の次元は 1。

(ii) $\lambda = 3$ のとき、

$$W_{-3} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \left\{ s\{-1, 1, 0\}^\top + t\{-1, 0, 1\}^\top \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \tag{9.67}$$

ここで、$\{-1, 1, 0\}^\top$, $\{-1, 0, 1\}^\top$ は一次独立だから、$\lambda = 3$ の固有空間 W_{-3} の次元は 2。

問 3

> 3 次の正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の行列式が、それぞれ $\det \boldsymbol{A} = 3, \det \boldsymbol{B} = -2$ のとき、(a) $\det(\boldsymbol{AB})$、(b) $\det(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$、(c) $\det(2\boldsymbol{A})$ を求めよ。

解答.

(a) $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B} = -6$

(b) $\det(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = \dfrac{\det \boldsymbol{B}}{\det \boldsymbol{A}} = -\dfrac{2}{3}$

(c) $\det(2\boldsymbol{A}) = 2^3 \cdot 3 = 24$

2019 春

微分積分

問 1

以下の境界値問題を解きなさい。

(a)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \tag{10.1}$$

(b)

$$2x^2\frac{dy}{dx} + 3x\frac{dy}{dx} - y = 0 \qquad 0 \le x \le 1 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1 \tag{10.2}$$

解答.

(a)

$$\frac{1}{3-y}dy = \frac{1}{2}dx \tag{10.3}$$

$$-\log|3-y| = \frac{1}{2}x + C \tag{10.4}$$

$$y = Ae^{-\frac{x}{2}} + 3 \tag{10.5}$$

ただし、C, A は任意定数である。ここで、条件 $y(0) = 2$ より、

$$y(0) = A + 3 = 2 \tag{10.6}$$

$$\therefore A = -1 \tag{10.7}$$

ゆえに求める解は

$$y = -e^{-\frac{x}{2}} + 3 \tag{10.8}$$

(b) Euler 型より $x = e^t$ とおく。このとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \tag{10.9}$$

$$= \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \tag{10.10}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} \tag{10.11}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{10.12}$$

より、与えられた微分方程式は次のようになる。

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y = 0 \tag{10.13}$$

補助方程式の解は $\lambda = \dfrac{1}{2}, -1$ であるので、一般解は任意定数 A, B を用いて

$$y = Ae^{\frac{1}{2}t} + Be^{-t} \tag{10.14}$$

$$\therefore y = A\sqrt{x} + \frac{B}{x} \tag{10.15}$$

問 2

次の積分を求めなさい。

(a)

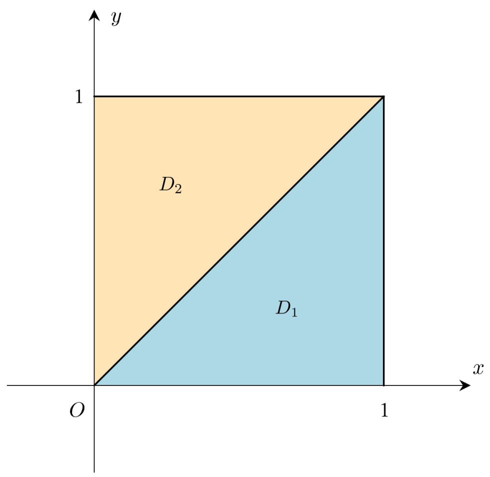
$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \max\{|x|,\,|y|\}\,dxdy \tag{10.16}$$

(b)

$$I_2 = \iint_D (x^2 + y)\,dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\} \tag{10.17}$$

解答.

(a) 下図のように領域 D_1, D_2 をおく。



このとき、与えられた積分は

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \max\{|x|,\,|y|\}\,dxdy = \iint_{D_1} x\,dxdy + \iint_{D_2} y\,dxdy \tag{10.18}$$

と計算できる。よって、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_0^x x\,dydx + \int_0^1 \int_0^y y\,dxdy & (10.19)\\ &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 y^2\,dy & (10.20)\\ &= \frac{2}{3} & (10.21) \end{aligned}$$

(b) 与えられた積分において $u = x + y$, $v = x - y$ とおくと、

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \tag{10.22}$$

$$y = \frac{1}{2}(u-v) \tag{10.23}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} \tag{10.24}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2} \tag{10.25}$$

より、ヤコビアン J は

$$J = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right| \tag{10.26}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{10.27}$$

である。よって、求める積分は

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{2}(u-v)\right) dudv \tag{10.28}$$

$$= \int_0^1 dv \left[\frac{1}{24}(u+v)^3 + \frac{1}{8}(u-v)^2\right]_{-1}^{1} \tag{10.29}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{24}(1+v)^3 + \frac{1}{8}(1-v)^2 - \frac{1}{24}(v-1)^3 - \frac{1}{8}(v+1)^2\right) dv \tag{10.30}$$

$$= \left[\frac{(1+v)^4}{96} - \frac{(1-v)^3}{24} - \frac{(v-1)^4}{96} - \frac{(v+1)^3}{24}\right]_{-1}^{1} \tag{10.31}$$

$$= \frac{1}{3} \tag{10.32}$$

線形代数

問 1

次の行列 $\boldsymbol{A}$ について、以下の問いに答えなさい。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tag{10.33}$$

ここで、$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ である。

(1) $\boldsymbol{A}$ は逆行列を持つことを証明しなさい。

(2) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めなさい。

解答.

(1) $\det \boldsymbol{A} = abc \neq 0$ より逆行列が存在する。

(2) $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}]$ の行基本変形を考える。

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{f}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right] \tag{10.34}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{f}{bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right] \tag{10.35}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{d}{ab} & \frac{df-be}{abc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{f}{bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right] \tag{10.36}$$

より、逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{d}{ab} & \dfrac{df-be}{abc} \\ 0 & \dfrac{1}{b} & -\dfrac{f}{bc} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} \end{bmatrix} \tag{10.37}$$

問 2

次の行列 $\boldsymbol{A}$ について、以下の問いに答えなさい。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{10.38}$$

(1) $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めなさい。
(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めなさい。
(3) (2) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めなさい。ただし、大きさ 1 に正規化して答えなさい。
(4) $\boldsymbol{A}$ の対角化行列を求めなさい。
(5) (4) で求めた対角化行列の逆行列を求めなさい。
(6) $\boldsymbol{A}$ を対角化しなさい。

解答.

(1) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$

(2) 固有方程式より固有値 λ は

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \tag{10.39}$$

$$\therefore \lambda = 3,\ 2,\ 1 \tag{10.40}$$

(3) 固有ベクトルを $\boldsymbol{u} = \{x,\ y,\ z\}^\top$ とする。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{10.41}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{10.42}$$

(ii) $\lambda = 2$ のとき、

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{10.43}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10.44}$$

(iii) $\lambda = 1$ のとき、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{10.45}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10.46}$$

(4) この固有ベクトルの定数倍を列ベクトルとして持つ行列 $\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{A}$ を対角化する。

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.47}$$

(5) 上の行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列は $[\boldsymbol{P}|\boldsymbol{E}]$ の行基本変形によって得る。

$$[\boldsymbol{P}|\boldsymbol{E}] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{10.48}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \tag{10.49}$$

よって逆行列は

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{10.50}$$

(6) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が求める行列であり次のように対角化される。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.51}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.52}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.53}$$