

25. Метод линейной и расширенной фильтрации Калмана

Рассмотрим дискретный случай. Динамическая система представляет собой математический объект, задаваемый уравнением системы (1) и уравнением наблюдения (2).

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}(k)$ – состояние системы на k -ом шаге, которое в общем случае представляет собой вектор параметров;

$\mathbf{u}(k)$ – управляющее воздействие, так же являющееся вектором;

$\mathbf{y}(k)$ – выход системы или т. н. наблюдение, в общем случае векторная величина, отражающая параметры системы, которые мы наблюдаем и по которым можем косвенно делать выводы о состоянии системы;

\mathbf{F} – оператор, воздействующий на состояние системы при дискретном переходе с шага k на шаг $k+1$, описывающий изменение состояния системы во времени

\mathbf{B} – оператор, описывающий влияние управляющего воздействия на состояние системы

\mathbf{H} – оператор, описывающий связь между наблюдаемыми параметрами и состоянием системы;

$\mathbf{w}(k)$ – шум системы; $\mathbf{n}(k)$ – шум наблюдения;

Линейная фильтрация Калмана (Linear Kalman Filter) состоит из двух этапов:

1. Предсказание состояния системы

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k)$$

и матрицы ковариаций

$$\mathbf{R}(k+1) = \mathbf{F} \mathbf{R}(k) \mathbf{F}^T + \mathbf{R}_w$$

2. Коррекция состояния

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K} (\mathbf{y}(k) - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}(k))$$

где $\bar{\mathbf{x}}(k)$ – оценка состояния системы по Калману;

\mathbf{R}_w – матрица ковариаций шума системы;

\mathbf{R}_n – матрица ковариаций шума наблюдений;

\mathbf{K} – коэффициент усиления, который рассчитывается как

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}(k) \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}(k) \mathbf{H} + \mathbf{R}_n)^{-1}$$

Коррекция матрицы ковариаций

$$\mathbf{R}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{R}(k)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица соответствующей размерности.

Расширенная фильтрация Калмана (Extended Kalman Filter) состоит из тех же двух этапов, однако отличаются методы расчета матриц \mathbf{F} и \mathbf{H} . Они рассчитываются при помощи аппроксимации нелинейных функций \mathbf{f} и \mathbf{h} рядами Тейлора и учетом только членов этих рядов, содержащих первые производные нелинейных уравнений по параметрам. Эти функции должны быть дифференцируемы!

Уравнения системы и наблюдения в нелинейном случае модифицируются следующим образом:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}(k),$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{n}(k).$$

Матрицы \mathbf{F} и \mathbf{H} рассчитываются следующим образом:

$$\mathbf{F} = \frac{d \mathbf{f}}{d \mathbf{x}(k)}$$

$$\mathbf{H} = \frac{d \mathbf{h}}{d \hat{\mathbf{x}}(k)}$$

В уравнении предсказания вместо оператора \mathbf{F} используется функция \mathbf{f} , воздействующая на априорную оценку состояния.

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

В уравнении коррекции вместо оператора \mathbf{H} используется функция \mathbf{h} , воздействующая на априорную оценку состояния.

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k)))$$

Остальные уравнения такие же.