**27. Сигма-точечный фильтр Калмана. Понятие сигма-точечного преобразования**

Для линейного фильтра Калмана должны выполнятся некоторые ограничения, например, шум является белым и распределен по нормальному закону, матожидание шумов равно нулю, отсутствуют корреляции между шумами и перекрестные связи между фазовыми координатами. Эти ограничения довольно серьезные и на практике часто гипотезы нарушаются. Существуют методики, позволяющие обойти данные ограничения (например, добавление в фазовый вектор фильтра координат для генератора цветного шума и ввода фиктивного возмущения для «смещенного» шума). Все они приводят к увеличению вычислительной сложности (растет размерность задачи) и трудностям синтеза фильтра, устойчивого к нарушению описанных ограничений.

Существует также «Extended Kalman filter», который по структуре своей похож на линейную версию, отличаясь тем, что уравнения динамики и наблюдений содержат нелинейные (степенные, тригонометрические и пр.) функции от фазовых координат (см. уравнения ниже). Это отличие также предполагает наличие перекрестных связей между фазовыми координатами (например, произведение двух координат).
При использовании EKF необходимо на каждом шаге итераций вычислять Якобиан — матрицу частных производных от фазовых координат. Из-за этого сильно возрастает вычислительная сложность и еще острее встает вопрос об устойчивости дискретизированных дифференциальных уравнений. По сути EKF реализует в себе прослойку линеаризации нелинейной динамической системы. В этом заключается главная причина, по которой EKF может оказаться неэффективным. Использование сильно нелинейной модели динамической системы приводит к очень плохой обусловленности задачи, т.е. малая погрешность задания параметров мат. модели будет приводить к большим вычислительным погрешностям. В результате алгоритм утратит робастность (устойчивость к погрешностям).

Альтернативным походом является сигма-точечный фильтр Калмана (Unscented Kalman Filter, UKF). Данный метод основан на выборе набора точек (сигма-точек) в пространстве параметров, который с достаточной точностью характеризует математическое ожидание, дисперсию и другие моменты случайной величины искомого вектора. Количество выбираемых сигма точек равняется $2\mathrm{n}+1$, где $n$ – размерность вектора параметров. Их расположение формируется следующим образом:

$$\mathbf{x_0}=\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x_j}=\mathbf{x}(k)+[\sqrt{(n+K)R}]_j,\ j=1..\mathrm{n}$$

$$\mathbf{x_j}=\mathbf{x}(k)-[\sqrt{(n+K)R}]_j,\ j=n+1..2\mathrm{n}$$

где $\mathbf{R}$ – ковариационная матрица, $[\sqrt{(n+K)R}]_j$ — $j$-ый столбец матрицы $\sqrt{(n+K)R}$, которая может быть найдена с использованием разложения Холецкого, $K$ – коэффициент, зависящий от вида распределения.
Веса сигма-точек определяются как

$$W_0=\frac{K}{n+K}\ ,\quad W_j=\frac{1}{2n+2K}$$

Далее для всех сигма векторов осуществляется предсказание (как в расширенном фильтре Калмана)

$$\mathbf{\hat{x}_j}=\mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))\ .$$

Прогноз математического ожидания и ковариации расчитывается по средним значениям полученных сигма-точек.

$$\mathbf{\hat{x}}(k)=\sum_{j=0}^{2n} W_j\,\mathbf{x_j}$$

$$\mathbf{R}(k+1)=\sum_{j=0}^{2n} W_j[\mathbf{x_j}-\hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x_j}-\hat{\mathbf{x}}(k)]^T$$

Оценка наблюдения по полученным сигма точкам осуществляется в соответсвии с нелинейной функцией наблюдения **h**

$$\hat{\mathbf{y}}(k)=\sum_{j=0}^{2n} W_j\mathbf{h}(\mathbf{x_j})$$

Это значение используется для расчета предсказания ковариации наблюдениями

$$\mathbf{R_n}=\sum_{j=0}^{2n} W_j[\mathbf{h}(\mathbf{x_j})-\hat{\mathbf{y}}(k)][\mathbf{h}(\mathbf{x_j})-\hat{\mathbf{y}}(k)]^T \quad ,$$

Коэффициент усиления расчитывается как

$$\mathbf{K}=\frac{\sum_{j=0}^{2n} W_j[\mathbf{h}(\mathbf{x_j})-\hat{\mathbf{y}}(k)][\mathbf{h}(\mathbf{x_j})-\hat{\mathbf{y}}(k)]^T}{\sum_{j=0}^{2n} W_j[\mathbf{x_j}-\hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{h}(\mathbf{x_j})-\hat{\mathbf{y}}(k)]^T}$$

Далее полученные значения используются для получения оценок способом, аналогичным линейному фильтру Калмана.