Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики.

Лабораторная работа №6 по информатике
1972 год, 1 номер | Вариант 21
1970 год, 1 номер | Вариант 1

Берелехис Светлана

Группа P3112

Преподователь: Рудникова Тамара Владимировна

Санкт-Петербург
2021

уравнений: сначала решается уравнение (4), корнями которого являются суммы $\epsilon_1 + \epsilon_4$ и $\epsilon_2 + \epsilon_3$ симметричных (см. рис. 6!) корней уравнения (3), а затем из уравнений (5) находятся и сами корни уравнения (3). Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти "хорошие"группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

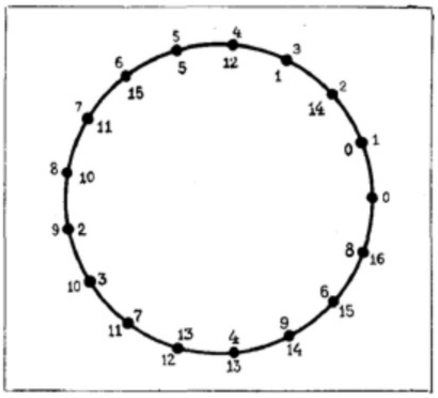


Рис. 7. Старые номера корней даны черным цветом, новые - красным.

Построение правильного 17-угольника

30 марта 1796 года наступает для него (Гаусса) день творческого крещения... Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из еденицы на основании своей теории "первообразных"корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника... Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике.

Ф. Клейн

Чтобы выявить найденные Гауссом скрытые "симметрии"в множестве корней 17-й степени из еденицы и, пользуясь ими, разбить корни на нужные группы, введем новую нумерацию корней. Будем возводить 3 в последовательные степени $0, 1, 2, \ldots$ и каждый раз брать остаток от деления полученного числа на 17. Избавим читателя от проведения этих выкладок и в таблице приведем окончательные результаты. В первой строке стоят показатели k, а под ними остатки от деления 3^k на 17.

Обратите внимание, что в нижней строке содержатся все числа от 1 до 16; затем 3^16 дает остаток 1 и далее остатки повторяются (докажите!)

Закономерность, подмеченная Гауссом, является частным случем следующей теоремы: *для всякого простого p существует такое число l, называемое первообразным корнем, что среди остатков от деления l^k на p встречаются все числа $1, 2, \ldots, p-1$.* Этот факт впервые отметил Эйлер (1707-1783), но смог доказать лишь Лежандр (1752-1833); другое доказательство получил Гаусс, но, вероятно, в 1796 году он еще не обладал теоремой, а обраружил приведенный факт эмпиричиски, проводя вычисления для конкретных чисел. Это очень важное обстоятельство, не учитывая которого, трудно правильно понять природу ранних работ Гаусса. Присвоим корню $\epsilon_k, k = 3^k$, новый номер, а именно l, который мы

Таблица

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Используя неравенство $xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, напишем следующую цепочку неравенств: $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{AB} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B}\right) \le$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_i}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{B}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A^2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{B^2} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) = 1$$

Отсюда следует неравенство $(*)$. Как известно, равенство в нем достигается при

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B}, \dots, \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B}$$

то есть при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Покажем теперь, как применяется неравенство $(*)$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье
"Рассказ о кванте"
(стр. 6-15)

1. $9,8 \cdot 10^{-7}$ *дж/см*^{2}
2. $2,3 \cdot 10^{-12}$ эрг $\sim 1,5$ электрон-вольта. Максимум числа квантов: $1,7 \cdot 10^{-12}$ эрг ~ 1 электрон-вольт.
3. $4.4 \cdot 10^{12}$ квантов в оном кубическом сантиметре.
4.Энергия кванта: $9,6$ килоэлектрон-вольта, энергия электрона: $0,1$ килоэлектрон-вольта

"К статье Цепные дроби"(стр. 16-26)

1. $\lambda = 5215,5$.
2. $[0; 1, 2, 3, 4, 5]$.
3. $\frac{5777}{1875}$

a) $[1; 1212 \cdots]$,

b) $[2; 444 \cdots]$,

c) $[2; 2424 \cdots]$.

5. б) $\frac{\sqrt{ab(ab-4)}-ab}{2a}$*).

К статье
"Что такое функция"
(стр. 27-36)

1.Естественная облась определения: а) $x \neq 0$; б) $x \leq -1; x \geq 1$
4. а) 9; б) 8; в) 6.
5. а) 9; б) 8; в) 9; г) 0.
6. $10^7 \cdot 4^7$
8. n^m
12. Обратимы f_1 и f_3.
13 и **14.** Отображение совпадает с обратным к нему.
16. а)1680; б)9240; в) $18150 = 3^9 - 3 \cdot 2^9 + 3$.
18. $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$, если $m \leq n$; $A_n^m = 0$, если $m > n$.
20. $\frac{28!}{(7!)^4}$

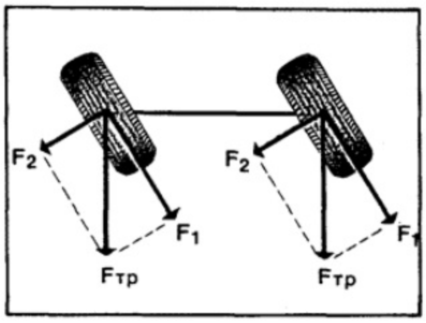
---

*) Это – положительный корень уравнения

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+x}} \qquad (1)$$

К статье
"Сухое трение"
(стр. 37-43)

1. Разложим силы трения, ействующие на передние колеса автомобиля, на две составляющие: F_1, лежащие в плоскости колес, и F_2, перпендикулярные колесам (см. рисунок). Силы F_1 заставляют колеса вращаться, а силы F_2 поворачивают автомобиль.



2. Если центр тяжести палки не находится посередине межу пальцами, но давление палки на кольцо различно. Различны и силы тяготения, действующие на палку со стороны пальцев. Палка смещается в ту сторону, где трение меньше.
3. Пока брусок не скользит по плоскости, сила трения равна по величине проекции веса бруска на наклонную плоскость $F_{TP} = P \sin\alpha$. Брусок начинает скользить, когда сила трения достигает максимальной величины трения покоя $F_{TP} = kN = kP\cos\alpha$. При этом выполняется условие $kP\cos\alpha = P\sin\alpha$. Поэтому соскальзывание бруска начинается при угле наклона плоскости к горизонту $\alpha = \arctan k$. После этого сила трения будет равна $F_{TP} = kN = kP\cos\alpha$.
Угол $\alpha = \arctan k$, при котором брусок начинает скользить, называют углом трения. Он имеет еще и другой геометрический смысл: если к бруску, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить силу, составляющую с вертикалью угол меньший, чем угол трения, то брусок нельзя сдвинуть с места, сколь велика ни была бы приложенна сила. Доказать это можно так. Посадим наблюдателя на наклонную плоскость, на которой лежит бру-

Например, про отображение

$$x \to |x|$$

можно сказать, что оно является отображением R в R, но нельзя сказать, что это "отображение R на R".

С чисто логической точки зрения наиболее простым является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Таки отображения являются одним из предметов изучения важной части математики - *комбинаторики* (см. задачи 8, 11, 18, 19)

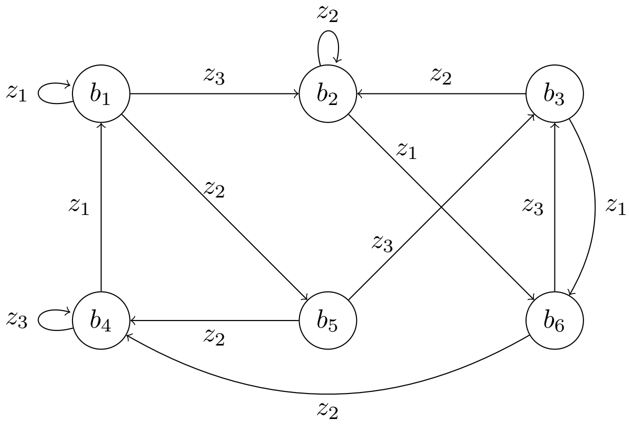
П р и м е р 4. Рассмотрим функции, область определения которых есть множество

$$M = \{A, B\}$$

из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т.е. отображения множества M в себя.

Таких функций существует всего ч е т ы р е. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A



z_2
z_1
b_1
z_3
b_2
z_2
b_3
z_1
z_2
z_1
z_3
z_1
z_3
z_3
b_4
z_2
b_5
b_6
z_2