TAREA EDO

Simón Valdés, Mauricio Vivanco
MAT208 - Ecuaciones Diferenciales
Prof. Víctor Bravo, PhD.
Universidad Adolfo Ibáñez
Viña del Mar

25 oct. 2025

Índice general

CAPÍTULO 1

PARTE A

1.1. Introducción

En el capítulo 4 del libro *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, titulado **Propiedades cualitativas de las soluciones**, se estudian las características esenciales de las soluciones de la ecuacion diferencial de segundo orden lineal homogénea:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

por análisis de la propia ecuación, en ausencia de expresiones formales de dichas soluciones, es decir, de las soluciones explícitas.

1.1.1. Teorema de separación de Strum

Teorema 1 *Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, entonces los* ***ceros*** *de estas funciones son distintos y ocurren alternadamente, es decir, $y_1(x)$ se anula exactamente una vez entre dos ceros sucesivos de $y_2(x)$, y así recíprocamente.*

Demostración 1 *Cómo y_1 e y_2 son linealmente independientes, su Wronskiano*

$$W(y_1, y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

no se anula. Por tanto, al ser continuo, debe tener un signo constante. Luego, si x_1 y x_2 son puntos sucesivos donde se anula y_2, tenemos por demostrar que existe un $x \in]x_1, x_2[$ en el cuál se anula y_1.
Notemos que en x_1 y en x_2 el Wronskiano queda de la forma $W = y_1(x)y_2'(x)$, y ambos factores son distintos de cero en esos puntos. Además, $y_2'(x_1)$ e $y_2'(x_2)$ deben tener signos opuestos, ya que si y_2 es creciente en x_1, debe ser decreciente en x_2, o al revés. Como el Wronskiano tiene signo constante, $y_1(x_1)$ e $y_1(x_2)$ también deben tener signos opuestos.

Entonces, como el Wronskiano es continuo, podemos usar el ***Teorema del valor medio****, específicamente el de Bolzano, para argumentar que $y_1(x)$ debe anularse en un punto entre x_1 y x_2. Notar que y_1 no puede anularse más de una vez en ese intervalo. En tal caso, se podría ocupar el mismo argumento para plantear que y_2 se anula entre esos dos ceros de y_1, lo cual contradice la condición inicial de que x_1 y x_2 son ceros sucesivos de y_2.*

Teorema 2 *Si $q(x) < 0$ y $u(x)$ es una solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$, entonces $u(x)$ tiene a lo más un cero.*

Demostración 2 *Sea x_0 un cero de $u(x)$, $u(x_0) = 0$. Cómo $u(x)$ no es una función nula (no trivial), el Teorema 14-A implica que $u'(x_0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u'(x_0) > 0$, así que $u(x)$ es positiva sobre algún intervalo a la derecha de x_0. Puesto que $q(x) < 0$, $u''(x) = -q(x)u(x)$ es una función positiva sobre ese mismo intervalo. Esto implica que la pendiente $u'(x)$ es una función creciente, luego $u(x)$ no puede tener un cero a la derecha de x_0, y por idéntica razón tampoco a su izquierda. Un argumento análogo es válido cuando $u'(x_0) < 0$, y por tanto $u(x)$ o bien carece de ceros o tiene uno tan sólo.*

Teorema 3 *Sea $u(x)$ cualquier solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$, donde $q(x) > 0$ para todo $x > 0$. Si*

$$\int_1^\infty q(x)dx = \infty,$$

entonces $u(x)$ tiene infinitos ceros en el semieje x positivo.

Demostración 3 *Supongamos lo contrario, es decir, que $u(x)$ se anula a lo sumo un número finito de veces para $0 < x < \infty$, de manera que existe un punto $x_0 > 1$ tal que $u(x) \neq 0$ para todo $x \geq x_0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $u(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$. Si ponemos*

$$v(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$$

para $x \geq x_0$, entonces un sencillo cálculo muestra que

$$v'(x) = q(x) + v(x)^2,$$

e integrando desde x_0 hasta x, con $x > x_0$, obtenemos

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^x q(x)dx + \int_{x_0}^x v(x)^2 dx.$$

Usamos la hipótesis $\int_1^\infty q(x)dx = \infty$ para concluir que $v(x)$ es positiva si x se toma suficientemente grande. Esto demuestra que $u(x)$ y $u'(x)$ tienen signos opuestos si x es suficientemente grande, de modo que $u'(x)$ es negativa y por tanto $u(x)$ debe anularse para algún $x > x_0$, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Teorema 4 *Sea $y(x)$ una solución no trivial de la ecuación $y'' + q(x)y = 0$ sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces $y(x)$ tiene a lo sumo un número finito de ceros en ese intervalo.*

Demostración 4 *Supongamos lo contrario, o sea, que $y(x)$ tuviese infinitos ceros en $[a,b]$. En tal caso existiría en $[a,b]$ un punto x_0 y una sucesión de ceros $x_n \neq x_0$ tales que $x_n \to x_0$. Como $y(x)$ es continua y diferenciable en x_0, tenemos*

$$y(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} y(x_n) = 0$$

e

$$y'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Por el Teorema 14-A, esto significa que $y(x)$ es necesariamente la solución trivial, y esta contradicción demuestra el teorema.

1.1.2. Teorema de comparación de Sturm

Teorema 5 *Sean $y(x)$, $z(x)$ soluciones no triviales de*

$$y'' + q(x)y = 0$$

y

$$z'' + r(x)z = 0,$$

donde $q(x)$ y $r(x)$ son funciones positivas tales que $q(x) > r(x)$. Entonces $y(x)$ se anula al menos una vez entre cada dos ceros sucesivos de $z(x)$.

Demostración 5 *Sean x_1 y x_2 dos ceros sucesivos de $z(x)$, de modo que $z(x_1) = z(x_2) = 0$ y $z(x)$ no se anula en el intervalo abierto (x_1, x_2). Supongamos que $y(x)$ no se anula en (x_1, x_2). Sin pérdida de generalidad, podemos admitir que tanto $y(x)$ como $z(x)$ son positivas sobre (x_1, x_2). Consideremos el wronskiano*

$$W(y,z) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x).$$

Derivando obtenemos:

$$\frac{dW(x)}{dx} = yz'' - zy'' = y(-rz) - z(-qy) = (q-r)yz > 0$$

sobre (x_1, x_2). Integrando ambos lados entre x_1 y x_2:

$$W(x_2) - W(x_1) > 0 \quad \text{o sea} \quad W(x_2) > W(x_1).$$

Pero el wronskiano se reduce a $y(x)z'(x)$ en x_1 y en x_2, luego

$$W(x_1) \geq 0 \quad \text{y} \quad W(x_2) \leq 0,$$

lo cual es una contradicción.

Teorema 6 *Sea $y_p(x)$ una solución no trivial de la ecuación de Bessel sobre el semieje x positivo. Si $0 \leq p < 1/2$, entonces todo intervalo de longitud π contiene al menos un cero de $y_p(x)$; si $p = 1/2$, la distancia entre ceros sucesivos de $y_p(x)$ es exactamente π, y si $p > 1/2$, entonces todo intervalo de longitud π contiene a lo sumo un cero de $y_p(x)$.*

Demostración 6 *La ecuación de Bessel en forma normal es*

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right) u = 0.$$

Comparando con $u'' + u = 0$ *y aplicando el teorema de comparación de Sturm, se obtienen los resultados según el valor de* p.

1.2. Ejercicios

A continuación

Problema 1 ***Probar que los ceros de las funciones*** $a\,\mathrm{sen}(x) + b\cos(x)$ ***y*** $c\,\mathrm{sen}(x) + d\cos(x)$ ***son distintos y alternados siempre que*** $ad - bc \neq 0$.

Consideramos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a\sin x + b\cos x = y_1(x) & (1) \\ c\sin x + d\cos x = y_2(x) & (2) \end{cases}$$

Sabemos que y_1, y_2 son soluciones de $y''+y = 0$. Entonces, sabemos que si las soluciones son linealmente independientes se cumple el *Teorema de Separación*, por tanto demostramos la hipótesis del enunciado. Entonces, debemos verificar las condiciones para que estas sean LI. Si nos fijamos en el Wronskiano:

$$W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

dónde $y_1' = a\cos(x) - b\,\mathrm{sen}(x), y_2' = c\cos(x) - d\,\mathrm{sen}(x)$, entonces:

$$W = (a\,\mathrm{sen}(x) + b\cos(x))(c\cos(x)) - (a\cos(x) - b\,\mathrm{sen}(x))(c\,\mathrm{sen}(x) + d\cos(x))$$

$$W = ac\,\mathrm{sen}\cos - ad\,\mathrm{sen}^2 + bc\cos^2 - bd\,\mathrm{sen}\cos - ac\,\mathrm{sen}\cos - ad\cos^2 + bc\,\mathrm{sen}^2 + bd\,\mathrm{sen}\cos$$

$$W = \mathrm{sen}\cos(ac - bd - ac + bd) + \mathrm{sen}^2(bd - ac) + \cos^2(bc - ad)$$

$$W = (bc - ad)(\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x))$$

$$W = bc - ad$$

Para que las soluciones sean linealmente independientes, el Wronskiano debe ser distinto de cero, por lo tanto se demuestra que los ceros de estas funciones son distintos y alternados, siempre y cuando $bc - ad \neq 0$.

CAPÍTULO 2

PARTE B

2.1. Introducción

BIBLIOGRAFÍA

[1] Simmons, G. F. (1991). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* (2ª ed.). McGraw-Hill.