Métodos de Simulación Física: Segundo Parcial

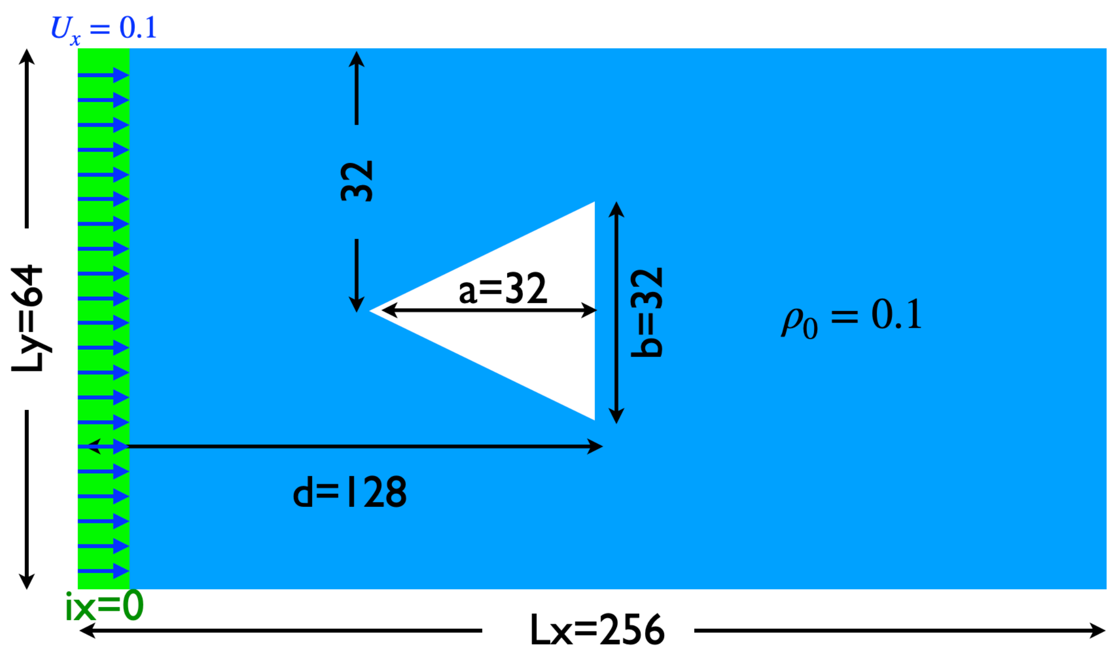
Nombre____ Cédula ________________________

Instrucciones generales

El parcial está diseñado para desarrollarse en máximo 4 horas. Pasado ese tiempo, debe hacerse un primer envío al correo jdmunozcsimulacion@gmail.com colocando el subject "Segundo Parcial Simulación: [NOMBRE], [CÉDULA]", reemplazando los espacios de [NOMBRE] y [CÉDULA] con su nombre y su cédula, respectivamente. El envío debe contener todos los códigos .cpp, las gráficas en .jpg como attachments, y los datos que se le pidan como parte del texto. Luego, pueden hacer un segundo envío antes de las 11:59pm del día domingo 15 de septiembre. El primer envío tiene en la nota un peso del 80%, y el segundo, del 20%.
Buena suerte y buen pulso!!

Problema a desarrollar: Fuerza sobre una flecha

Considere un dominio de simulación de $Lx = 512$, $Ly = 64$, y en él una flecha triangular de 16 x 16 celdas, como muestra la figura, imponiendo que la velocidad del fluido es cero en cada una de las celdas del obstáculo. Las celdas con $ix = 0$ son ventiladores en las que se impone una velocidad $U_x = 0.1$, $U_y = 0$, y el fluido tiene en todas partes una densidad inicial $\rho_{\text{inicial}} = 1.0$
.



a) (16pts) Implemente con un lattice Boltzmann LBGK para fluidos la simulación del flujo viscoso alrededor de la flecha. Utilice $\tau = 1.5$.

Como recordará del taller, la fuerza de contacto por unidad de longitud ejercida por un medio sobre un elemento de superficie $d\vec{A}$ en el punto P viene dado por

$$d\vec{F} = \sigma(P) \cdot d\vec{A} \quad ,$$

donde $\sigma(P)$ es el tensor de esfuerzos en el punto (P). Para el caso de un fluido newtoniano y aproximadamente incompresible, este tensor de esfuerzos tiene dos componentes: una parte hidrostática $\sigma_{\alpha\beta}^{(h)} = -p\delta_{\alpha\beta}$ y una parte viscosa $\sigma_{\alpha\beta}^{(v)} = \eta\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$, con p la presión, U_α la componente α-ésima de la velocidad y η la viscosidad. Resumiendo, en dos dimensiones,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = -p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial U_x}{\partial x} & \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} & 2\dfrac{\partial U_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad .$$

Por lo tanto, para calcular la fuerza ejercida sobre un objeto inmerso en el fluido se requiere calcular derivadas parciales espaciales de la velocidad. De acuerdo con [1], estas derivadas espaciales se pueden calcular a segundo orden como

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{3}{\Delta t}\sum_i w_i v_{i\beta}\, U_\alpha(\vec{x} + \vec{v_i}\Delta t) \quad . \tag{1}$$

b) (7pts) Implemente funciones `sigmaxx`, `sigmayy` y `sigmaxy` en la clase LatticeBoltzmann que calculen las componentes del tensor de esfuerzos para cada celda (es decir, para el punto central de cada celda). Use $p = \rho/3$.

c) (7pts) Construya en la clase LatticeBoltzmann una función tal que, dado un punto P en el dominio de simulación y un vector de área $d\vec{A}$ en ese punto, interpole las componentes del tensor de esfuerzos de las cuatro celdas aledañas al punto P de interés y calcule con los valores interpolados la fuerza por unidad de longitud $d\vec{F}$ ejercida sobre el elemento representado por el vector de área $d\vec{A}$. Para la interpolación use la expresión bilineal [2]

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = {} & \phi_{ix,iy}(1-u)(1-v) + \phi_{ix+1,iy}u(1-v) \\ + & \quad \phi_{ix,iy+1}(1-u)v + \phi_{ix+1,iy+1}uv \quad ,\end{aligned}$$

donde (x, y) son las coordenadas del punto P, $\phi_{a,b}$ es el valor del campo ϕ (que puede ser σ_{xx}, σ_{yy} ó σ_{xy}) en el centro de la celda de coordenadas (a, b), $u = (x - ix)/\Delta x$ y $v = (y - iy)/\Delta x$, y Δx es el tamaño de la celda.

d) (10pts) Divida cada línea del borde de la flecha en 16 pedazos, y para cada uno de ellos calcule el vector de área $d\vec{A}$ que representa al elemento y su punto central. Utilizando la función del punto c) y sumando las fuerzas ejercidas sobre todos los elementos, construya una subrutina que calcule las componentes F_x, F_y de la fuerza total ejercida sobre la fleca. Comprueba que $F_y \approx 0$ (algo que se puede deducir por simetría).

e) (10pts) Cambie la longitud b y calcule la fuerza F_x para cada longitud. Utilice b=32, 28, 24, 16 y 12. Grafique F_x vs b y trate de encontrar una relación entre ellas.

El envío debe contener:

a) El programa que implementa los puntos a)-d).
b) El valor de la fuerza F_x para $b = 32$.
c) La gráfica de F_x en función de b.

Bibliografía

[1] Thampi, S. P., Ansumali, S., Adhikari, R., and Succi, S. "Isotropic discrete laplacian operators from lattice hydrodynamics". *Journal of Computational Physics*, **234(1)**:1-7 (2013).

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_bilineal .