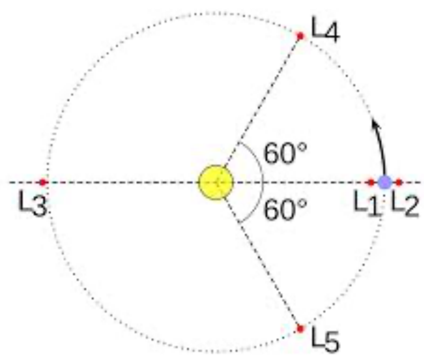
MÉTODOS DE SIMULACIÓN – FÍSICA   Taller 1, Ejercicio 3

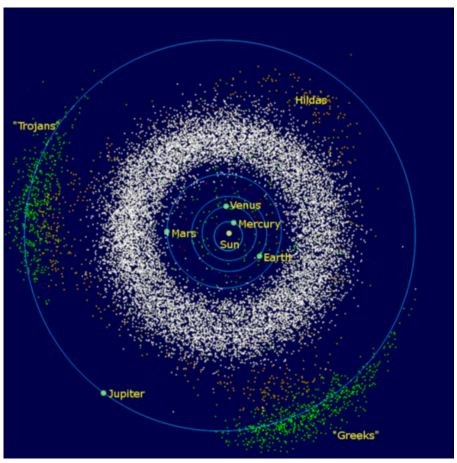
PLANETAS TROYANOS

a) Hemos simulado en clase el movimiento de dos cuerpos celestes. Considere que uno de ellos el Júpiter y el otro es El Sol, cuya masa es $m_0 = 1047$ veces la masa de Júpiter ($m_1 = 1$). Asuma que la distancia entre Júpiter y El Sol es $r = 1000$ y coloque las condiciones iniciales para que el movimiento de los dos cuerpos sea girar en círculos alrededor de su centro de masa con velocidad angular ω. Cuadre el paso de tiempo Δt para que un total de 20 órbitas cierren correctamente.

b) Ahora, en vez de imprimir las coordenadas *x,y* de Júpiter, imprima las coordenadas $x_{\text{rotado}}, y_{\text{rotado}}$ en un sistema que rota con Júpiter, de tal manera que tanto El Sol como Júpiter se ven quietos.



Si desde este sistema rotante se estudia el movimiento de un tercer cuerpo cualquiera, se observa sobre él el efecto de cuatro fuerzas: la atracción de El Sol, la atracción de Júpiter, la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis, pero ésta última no afecta a cuerpos que se vean en reposo desde el sistema rotante. Lagrange (en 1772) calculó los puntos en los que las tres fuerzas restantes se equilibran, que se conocen como ***puntos de libración***. De ellos, sólo dos son puntos estables (L4 y L5), y se encuentran sobre la órbita circular de Júpiter, 60º en adelanto y 60º en atraso (ver Figura). Un tercer planeta colocado en reposo en estos puntos (es decir, rotando con la misma órbita de Júpiter pero 60º en adelanto o en atraso), permanecería en reposo. De hecho, existe una infinidad de planetas, llamados troyanos, que orbitan alrededor del sol cerca de estos dos puntos.

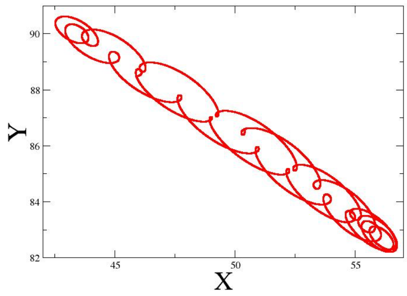


588 Achilles
624 Hektor
659 Nestor
911 Agamemnon
1143 Odysseus
1404 Ajax
1437 Diomedes
1583 Antilochus
1647 Menelaus
1749 Telamon
1868 Thersites

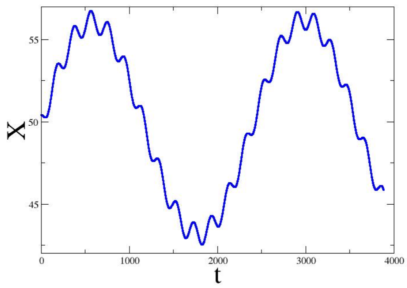
617 Patroclus
884 Priamus
1172 Äneas
1173 Anchises
1208 Troilus
1867 Deiphobus
1870 Glaukos
1871 Astyanax
1872 Helenos
1873 Agenor
2207 Antenor

c) Coloque un tercer planeta de masa $m_3 = 0.005$ en el punto de libración L4 girando con la misma rapidez que Júpiter, y compruebe que permanece aproximadamente quieto por 20 órbitas.

d) Perturbe un poco la posición o la velocidad inicial del planeta troyano (en unas cuantas partes por mil) y observe que el planeta dibuja en el sistema rotante una trayectoria en espiral, como la que muestra la figura. Esta espiral corresponde, aproximadamente, a una elipse moviéndose sobre otra elipse, como en los epiciclos de Ptolomeo. Los periodos de estos dos movimientos elípticos superpuestos se pueden calcular por teoría clásica de perturbaciones, y resultan ser:



$$T_1 = \frac{T}{\sqrt{\frac{27}{4}\frac{m_1}{m_0}}} \quad , \quad T_2 = \frac{T}{1 - \frac{27}{8}\frac{m_1}{m_0}} ,$$



donde $T = 2\pi/\omega$ es el período de rotación del sistema Sol-Júpiter.

e) Grafique la posición x del planeta troyano en el sistema rotante en función del tiempo y mida aproximadamente los dos periodos. Compare los valores obtenidos con los predichos por la teoría clásica de perturbaciones.

f) Sabiendo que en las unidades de trabajo de este problema la masa de Júpiter (1.898 × 10^27 kg) es 1, la distancia media de Júpiter al Sol (778'412,026 km) es 1000, y la constante gravitacional G ($6.67408(31)\times10^{-11}$ $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$) es 1, halle a cuántos segundos corresponde una unidad de tiempo, y dé los periodos del punto d) en años.

Para la entrega

El envío (.pdf de la presentación y programas .cpp o Python) debe contener:

a) El programa que resuelve el punto a), es decir que simula el sistema Sol-Júpiter en el sistema sin rotar, junto con la gráfica de las 20 órbitas.
b) El programa que resuelve el punto b), es decir que simula el sistema Sol-Júpiter en el sistema rotado, junto con la gráfica de las órbitas.
c) El programa que resuelve el punto c), es decir que muestra los tres cuerpos en el sistema rotado y comprueba que el planeta troyano prácticamente permanece inmóvil en dicho sistema. junto con la gráfica correspondiente.
d) El programa que resuelve el punto d), es decir que perturba la posición o la velocidad del planta troyano y grafica su órbita espiral en el sistema rotado, junto con la gráfica de esa órbita espiral.
e) El programa que resuelve el punto e), es decir que muestra la componente x de la trayectoria espiral del planeta troyano en el sistema rotado, en función del tiempo, junto con la gráfica correspondiente.
f) Además, el texto del correo debe tener los dos períodos, tanto con sus valores teóricos como con los obtenidos de la simulación, además de la deducción del punto f).

Referencias

[1] S.W. McCuskey and S.W. Reading , *Introduction to Celestial Mechanics*, (Addison Wesley, 1963).