PR 2 SPSF K-01
Shalsabilla Varin Ramadhanti (10219062)

September 16, 2022

Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$ dalam ruang bermedan magnetik konstan $\vec{B} = -B_z\hat{k}$
Tentukan gerak partikel

a. Tuliskan hukum Newton nya

b. Tuliskan persamaan diferensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah

c. Selesaikan kedua persamaan diferensial sehingga dapat diperoleh $v_x(t), v_y(t), x(t)$, dan $y(t)$. Lakukan secara teori!

d. Perolehkan solusi numeriknya.

e. Bandingkan hasil kedua pendekatan: teori dan numerik!

Jawab

a.

$$\Sigma F = m.a$$
$$qv \times B = m\frac{dv}{dt}$$
$$q(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) \times -B_z\hat{k} = m\frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j})$$
$$q(v_x\hat{i} + v_y\hat{j})B_z = m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}\right)$$

b.

$$q(v_x\hat{i} + v_y\hat{j})B_z = m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}\right)$$
$$\frac{qB_z}{m}(v_x\hat{j} - v_y\hat{i}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}$$

Sumbu-x

$$\frac{qB_z}{m}(-v_y) = \frac{dv_x}{dt} \tag{1}$$

Sumbu-y

$$\frac{qB_z}{m}(v_x) = \frac{dv_y}{dt} \tag{2}$$

Misalkan, $\frac{qB_z}{m} = k$. Pada sumbu-x:

$$\begin{aligned} -kv_y &= \frac{dv_x}{dt} \\ v_y &= -\frac{1}{k}\frac{dv_x}{dt} \end{aligned} \tag{3}$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (2) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} kv_x &= \frac{1}{k}\frac{d^2v_x}{dt^2} \\ k^2v_x &= \frac{d^2v_x}{dt^2} \\ \frac{d^2v_x}{dt^2} - k^2v_x &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat diselesaikan persamaan osilator harmonik.
Misalkan $v_x = Ce^{rt}$ sehingga $\frac{d^2v_x}{dt^2} = r^2Ce^{rt}$

$$\begin{aligned} r^2Ce^{rt} - k^2Ce^{rt} &= 0 \\ r^2 - k^2 &= 0 \end{aligned}$$

Menggunakan rumus abc, diperoleh r:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r &= \frac{\pm\sqrt{4k^2}}{2} = \pm k \end{aligned}$$

Didapatkan solusi v_x dengan mensubstitusikan r:

$$v_x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$$

Lalu, dengan melakukan hal yang serupa pada sumbu-y diperoleh:

$$v_x = \frac{1}{k}\frac{dv_y}{dt}$$

Maka,

$$\begin{aligned} k(-v_y) &= \frac{1}{k}\frac{d^2v_y}{dt^2} \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} + k^2v_y &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan $v_y = Ce^{rt}$ sehingga:

$$\begin{aligned} r^2Ce^{rt} + k^2Ce^{rt} &= 0 \\ r^2 + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

Didapatkan solusi untuk r:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r &= \frac{\pm\sqrt{-4k^2}}{2} = \pm\frac{i\sqrt{4k^2}}{2} = \pm ik \end{aligned}$$

Subsitusikan r ke v_y, diperoleh solusi v_y:

$$\begin{aligned} v_y &= C_1e^{ik} + C_2e^{-ik} \\ v_y &= C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \end{aligned}$$

Jadi, solusi nya adalah untuk $v_x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$ dan $v_y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$

c. Untuk solusi numerik terdapat pada file notebook terlampir

d. Secara teori dan numerik serupa ketika nilai B_z dam m sama.