圏論

sumi

12022-76

Definition 0 (圏) 圏 A は次からなる.

- 對象が集まり obj A
- 射が集まり mor A
- 各 $a \in \operatorname{obj} A$ につき、恆等射 $\operatorname{id}_A a \in \operatorname{obj} A$
- 各 $f\in \operatorname{mor} A$ につき、域 $\operatorname{dom}_A a\in \operatorname{obj} A$ と餘域 $\operatorname{\underline{dom}}_A b\in \operatorname{obj} A$
- 各 $f,g \operatorname{mor} A$, 但し $\operatorname{\underline{dom}}_A f = \operatorname{dom}_A g$ につき, 合成射 $f\mid_A g$

但し次を滿たす.

$$\operatorname{dom}_A(\operatorname{id}_A a) = \underline{\operatorname{dom}}_A(\operatorname{id}_A a) = a \tag{0}$$

$$dom_A(f|_A g) = dom_A f \tag{1}$$

$$\underline{\operatorname{dom}}_{A}(f\mid_{A}g) = \underline{\operatorname{dom}}_{A}g \tag{2}$$

$$\operatorname{dom}_A f = a \Rightarrow \operatorname{id}_A a \mid_A f = f$$
 (左單位律)

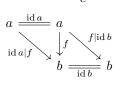
$$\underline{\operatorname{dom}}_{A} f = b \Rightarrow f \mid_{A} \operatorname{id}_{A} b = f \tag{右單位律}$$

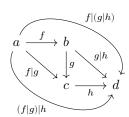
$$(f\mid_{A}g)\mid_{A}h=f\mid_{A}(g\mid_{A}h) \tag{結合律}$$

Aの明らかなる時に $\mathrm{id}_A,\mathrm{dom}_A,\dots$ 等の添へ字を省略す.

definition 0 が條件を圖にせば次となる.







次なる略記を使ふ.

$$a \in A \Leftrightarrow a \in \text{obj } A$$
 (3)

$$f \in A \Leftrightarrow f \in \operatorname{mor} A \tag{4}$$

$$f: a \to b \Leftrightarrow a \xrightarrow{f} b \Leftrightarrow \operatorname{dom} f = a \wedge \operatorname{dom} f = b$$
 (5)

$$f \in A(a,b) \Leftrightarrow f \in A \land f : a \to b \tag{6}$$

Definition 1 (同型) 對象 a, b が同型なる \Leftrightarrow

$$\exists (f \in A(a,b), g \in A(b,a)), \ f \mid g = \operatorname{id} a \land g \mid f = \operatorname{id} b$$
 (7)

Definition 2 (函手) 圏 A, B につき, 函手 F は次からなる.

- obj A から obj B が寫像 F_{obj}
- mor A から mor B が寫像 F_{mor}

但し次を滿たす.

$$F_{\text{mor}}(\mathrm{id}_A a) = \mathrm{id}_B(F_{\text{obj}} a) \tag{8}$$

$$F_{\text{mor}}(f \mid_A g) = (F_{\text{mor}} f) \mid_B (F_{\text{mor}} g)$$

$$\tag{9}$$

次なる略記を使ふ.

$$Fa = F_{\text{obj}}a \tag{10}$$

$$Ff = F_{\text{mor}}f \tag{11}$$

(12)

Definition 3 (終對象) 次を滿たす對象 1 は A が終對象なり.

$$\forall a \in A, \ \exists_1 u, \ u : a \to 1 \tag{13}$$

$$\forall a \, \stackrel{u}{-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-} 1$$

Definition 4 (餘終對象) 次を滿たす對象 0 は A が餘終對象 (始對象) なり.

$$\forall a \in A, \ \exists_1 u, \ u : 0 \to a \tag{14}$$

$$\forall a \hookleftarrow _{u} \cdots 0$$

Definition 5 (雙對圏) 圏 A が雙對圏 <u>A</u> を次にて定義す.

$$obj \underline{A} = obj A \tag{15}$$

$$mor \underline{A} = mor A \tag{16}$$

$$\underline{\mathrm{dom}}_{A} = \mathrm{dom}_{A} \tag{17}$$

$$dom_{\underline{A}} = \underline{dom}_{\underline{A}} \tag{18}$$

$$g\mid_A f = f\mid_A g \tag{19}$$

Example 1 圏 A は終對象 1 を持てば、 $\forall a, \exists_1 u, u : 1 \rightarrow a$. 從ひて \underline{A} にて $\forall a, \exists_1 u, u : a \rightarrow 1$. 終對象は雙對圏にて餘終對象なり、以ちて餘終對象は終對象が雙對なると言ふ。逆も真なり.

Definition 6 (積) $a_0, a_1, a_0 \times a_1 \in A, \pi_0: a_0 \times a_1 \rightarrow a_0, \pi_1: a_0 \times a_1 \rightarrow a_1$ とす. 次を滿たす $(a_0 \times a_1, \pi_0, \pi_1)$ は a_0, a_1 が積なり.

$$(\forall i \in \{0, 1\}, \ \forall f_i : b \to a_i), \ \exists_1 f_0 \times f_1, \ f_i = g \mid \pi_i$$
 (20)

$$a_0 \xleftarrow{f_0} \underbrace{a_0 \times f_1}_{f_0 \times f_1} \xrightarrow{f_1} a_1$$

Definition 7 (餘積) 餘積 (和) $(a_0 + a_1, \underline{\pi}_0, \underline{\pi}_1)$ は積が雙對なり.

$$a_0 \xrightarrow[]{f_0} b \\ \downarrow f_0 + f_1 \\ \downarrow f_0 + f_1 \\ \downarrow f_0 + f_1 \\ \downarrow f_1 \\ \downarrow$$

Definition 8 (自然變換) 圏 A, B, 函手 $F, G: A \to B$ につき, 自然變換 $\alpha: F \to G$ は射の集合 $\{\alpha_a\}_{a \in A}$ なり. 但し次を滿たす.

$$\forall f \in A(a,b), \ \alpha_{a} \mid_{B} Gf = Ff \mid_{B} \alpha_{b}$$

$$Fa \xrightarrow{Ff} Fb$$

$$\downarrow^{\alpha_{a}} \qquad \downarrow^{\alpha_{b}}$$

$$Ga \xrightarrow{Gf} Gb$$

$$(21)$$

Definition 9 (函手圏) 圏 A, B につき, 函手圏 B^A は次なる圏なり.

$$obj B^A = \{F; F: A \to B\} \tag{22}$$

$$\operatorname{mor} B^{A} = \{\alpha; \alpha : F \to G \land F, G : A \to B\}$$

$$(23)$$

$$\alpha \mid \beta = \{ \alpha_a \mid \beta_a; a \in A \} \tag{24}$$

Definition 10 (定函手) 圏 A につき $\Delta_a:A \to \{a\}$ は $a \in A$ が定函手なり. 但し次を滿たす.

$$\forall b, \ \Delta_a b = a \tag{25}$$

$$\forall f, \ \Delta_a f = \mathrm{id} \ a \tag{26}$$

Definition 11 (comma 圏) $B \stackrel{F}{\to} A \stackrel{G}{\leftarrow} C$ につき, comma 圏 F/G は次なる圏なり.

$$F/G \ni (b, c, f) \Leftrightarrow b \in \text{obj } B \land c \in \text{obj } C \land f : Fb \to Gc$$
 (27)

$$F/G \ni (b, c, f) \xrightarrow{(g, h)} (b', c', f') \Leftrightarrow b \xrightarrow{g} b' \in B \land c \xrightarrow{h} c' \in C \land f \mid_{A} Gh = Fg \mid_{A} f'$$
 (28)

Definition 12 (slice 圏) slice 圏 A/a は $A \stackrel{\text{id } A}{\rightarrow} A \stackrel{a}{\leftarrow} 1$ が comma 圏なり.

$$(b,f) \in F/G \Leftrightarrow f: b \to a \tag{29}$$

$$(b, f) \xrightarrow{g} (b', f') \in F/G \Leftrightarrow b \xrightarrow{g} b' \in B \land f = q \mid f'$$
(30)

$$b \xrightarrow{g} b'$$

$$\downarrow^{f'}$$

$$a$$

Definition 13 (錐) 圏 A, 函手 $F:I\to A$ につき, Fへの錐とは $(a\in A,\alpha:\Delta_a\to F)$ なり.

$$i \xrightarrow{f} j \qquad \begin{cases} a \\ \alpha_i \downarrow \\ Fi \xrightarrow{G_j} Fj \end{cases}$$

Definition 14 (極限) $F: I \stackrel{F}{\to} A$ につき, Fが極限とは錐 $(\lim F, \alpha)$ なり. 但し次を滿たす.

$$\forall (b,\beta), \ \exists_{1}u: b \to \lim F, \ \forall i, \ \beta_{i} = u \mid \alpha_{i}$$

$$\forall b \xrightarrow{u} \lim_{\beta_{i}} F$$

$$\downarrow^{\alpha_{i}}$$

$$F_{i}$$

$$(31)$$

Example 2 (終對象と積は極限) • 終對象は空圏 ∅ からの函手が極限なり.

• 積は2元離散圏 {*,*'} からの函手が極限なり.

Definition 15 (普遍射) 函手 $F:A\to B$ につき, F から b への普遍射は comma 圏 F/a が終對象 (a,f) なり. 即ち

$$\forall f': Fa \to b, \ \exists_1 g: a \to a', \ f' = Fg \mid f$$
(32)

$$a' \xrightarrow{g} a \qquad Fa' \xrightarrow{Fg} Fa \qquad \downarrow_f f$$

Example 3 (極限は普遍射)

$$\Delta: A \to A^I \tag{33}$$

$$\Delta a: I \to A \tag{34}$$

$$\Delta a = \Delta_a \tag{35}$$

$$\Delta f: A^I \to A^I \tag{36}$$

$$F:I \to A$$
 (37)

とせば (a, α) は Fへの錐なり.

 Δ から Fへの普遍射は極限 $(\lim F, \alpha)$ なり.

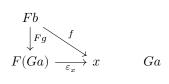
$$b \xrightarrow{f} \lim F \qquad \Delta b \xrightarrow{\Delta f} \Delta \lim F$$

$$\downarrow^{\alpha} \downarrow^{\alpha}$$

$$F$$

Definition 16 (隨伴) $F:A\to B$ は $G:A\leftarrow B$ が左隨伴なり $\Leftrightarrow \forall a\in A, \exists a$ から G への普遍射 \Leftrightarrow

$$\forall a \in A, \ \forall f : Fx \to a, \ \exists_1 g : a' \to a, \ f = Fg \mid \varepsilon_x$$
 (38)



索引

```
comma 圈, 2
slice 圈, 2
圈, 0
極 函雙, 3
優, 2
雙終積, 2
換, 2
數分, 2
數分, 2
數分, 3
數定同普左餘終, 3
對定同普左餘終積, 2
```