1 Dkazy

matematicke vety $\Rightarrow a \Leftrightarrow$ Ekvivalence implikace a implikace
Typy dukazu

1.1 Primy

chci $a \Rightarrow B$ $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$

Example 1.1. $(2|x \wedge 3|x \Rightarrow 6|x)$

$$
\begin{gathered}
2|x \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k \Rightarrow 3|x \\
\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : x = 3l \Rightarrow 2k = 3k \Rightarrow 3|k \\
\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : k = 3m \Rightarrow x = 2k = 2 \cdot 3 \cdot m \Rightarrow x = 6m \Rightarrow 6|x
\end{gathered}
$$

1.2 Neprimy

misto $A \Rightarrow B$ dokazujeme $B' \Rightarrow A'$

1.3 Sporem

dokazeme, ze negace neplati $\Rightarrow$ vyrok plati
zkousim dokazat negaci $(A \wedge B') \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ spor
spor = zjevne nepravdive tvrzeni

- popreni predpokladu
- obecny nesmysl

1.4 Dukazy prirozenych cisel

1.4.1 Matematicka indukce

$\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$

1. dokazeme pro $n = 1 \ldots V(1)$ plati
2. dokazujeme, ze $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

1.4.2 Dukaz existencnim tvrzenim

$\exists x : \ldots$ staci jedno x najit / sestrojit a hotovo

1.4.3 Vyvrcen

$\forall x \ldots$ najdeme protipriklad

Example 1.2. dokazte, ze $\forall n \in \mathbb{N} : 2|(n^2 + m)$ $n^2 + n = n(n+1)$ rozdelime na suda a licha

1. $n = 2k$ $2|n \Rightarrow 2k(n+1)$
2. $n = 2k+1$ $n(2k+1+1) = n(2(k+1)) = 2n(k+1)$

Example 1.3. vyslovte hypotezu o nejvetsim spolecnem deliteli vyrazu $n^4 - n^2$ a dokazte ji

n	$n^4 - n^2$
0	0
1	0
2	12
3	72
4	240

$\forall n \in \mathbb{N} : 12|n^4 - n^2$

$$n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n \pm 1) = (n-1)n^2 \ldots (n+1)$$

$$12|n \Rightarrow 3|n \wedge 4|n$$

a) $3|n$

- $n = 3k$ $3|n^2$
- $n = 3k+1$ $3|(n-1)$
- $n = 3k+2$ $3|(n+1)$

b) $4|n$

- $n = 2k$ $4|n^2$
- $n = 2k+1$ $4|(n-1)(n+1)$

□

Example 1.4. kdyz je ciferny soucet delitelny, pak je n delitelne 3 $n = a_n * 10^n + a_n - 1 * 10^n - 1 + \cdots + a_1 * 10 + a_0$ $s = a_n + a_n - 1 + \cdots + a_1 + a_0$ $n = a_n(1 + (10^n - 1)) + \cdots + a_1(1+9) + 1_0 = (a_n + a_n - a \cdots + a_1 + a_0) + a_n(10^n - 1) + \ldots 99a_2 + 9a_1$ 3 i 9 deli druhou cast a ze zadani vime, ze i prvni soucet dvou delitelu trema je taky delitelny trema cislo minus jeho ciferny soucet je delitelne trema

Example 1.5. Dokazte sporem, ze $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ predpokladame negaci, tj. $\sqrt{3} = \frac{p}{q} | \cdot p$ p q nesoudelna $\sqrt{3} \cdot q = p|^2$ $3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p^2 \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3k$ $3q^2 = (3k)^2 = 9k^2| : 3$ $q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|q^2 \Rightarrow 3|q$ spor s predpokladem

Example 1.6. Dokazte, ze prvocisel je nekonecne predpokladam konecny pocet $P = 2, 3, 5, 7, \ldots, p_{n-1}, p_n$ $x = velkypi_{i=1}^{n} p_i$ $y = x + 1$ y neni delitelne zadnym prvocislem a pritom $y > p_n$ spor $y \notin P$

Example 1.7. $\forall n \in \mathbb{N} : 3|2^{2n} - 7$ MI

1. $n = 1$ $2^2 n - 7 = -3 \ldots 3| - 3$
2. $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ $2^{2(n+1)} - 7 = 2^{2n+2} - 7 = 4 \cdot 2^{2n} - 7 = (3+1)2^{2n} - 7 = 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 7$ druha cast delitelna 3 podle predpokladu; 3—prvni cast Q.E.D.

Example 1.8.

$$\forall n \in \mathbb{N} : 100| \sum_{i=1}^{4n} 7^i$$

1. n = 1 . . . 100|2800
2. $n + 1 \ldots 7^4 n + +7^{4n+1} + 7^{4n+2} + 7^{4n+3} + 7^{4n+4} = 7^{4n}(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7^{4n} + 2800$

Example 1.9. MI $2|5n^2 - n \Leftrightarrow 2|n(5n - 1)$

1. $n = 1 \Rightarrow 2|4$ pravda
2. $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$

$$(n + 1)(5[n + 1] - 1) = (n + 1)(5n)$$

$\forall n \in \mathbb{N} : (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$