```
> restart:
```

Musterlösung Aufgabe 7

Numerische Differentiation

Es soll die erste Ableitung der Funktion $f := x \to \sin(x)\ \ln(x)$ **an der Stelle** $x_0 = 0.5$ **mit der zentralen Differenzenformel**

```
> Dfz:=(f(x[0]+h)-f(x[0]-h))/(2*h);
```

$$Dfz := \frac{1}{2}\ \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} \tag{1}$$

und der Differenzenformel

```
> Df3 := 1/6*1/h*(-9*f(x[0]+2*h)+2*f(x[0]+3*h)-11*f(x[0])+18*f(x[0]
  +h));
```

$$Df3 := \frac{1}{6}\ \frac{-9 f(x_0+2h) + 2 f(x_0+3h) - 11 f(x_0) + 18 f(x_0+h)}{h} \tag{2}$$

bei 40 **signifikanten Dezimalstellen berechnet werden.**

a) Berechnen Sie die logarithmierten absoluten Fehler von `Dfz` und `Df3` bei den Schrittweiten $h_i = 10^{-i}, i = 1\,..10$**. Nutzen Sie seq für die Generierung der Punktepaare** $[i, \log10(|D(f)(x_0) - Dfz|)]$ **und** $[i, \log10(|D(f)(x_0) - Df3|)]$**. Berechnen Sie die linearen Ausgleichsgeraden für diese Punktefolgen mit LeastSquares aus dem Paket CurveFitting und ermitteln Sie damit die Fehlerordnungen der Differenzenformeln. Plotten Sie die Geraden in ein Schaubild.**

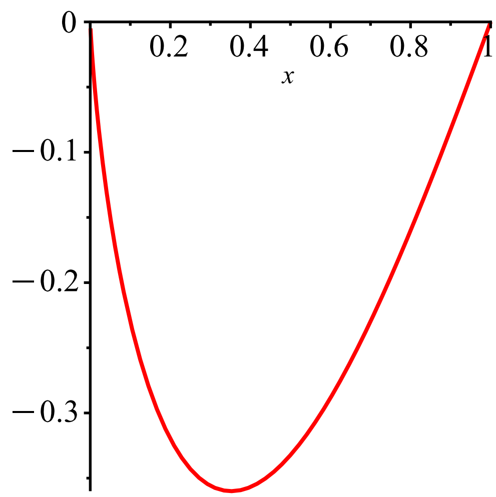
b) Listen Sie die absoluten Fehler für die Schrittweiten $h_i = 10^{-i}, i = 1\,..20$**, auf. Erzeugen Sie eine Tabelle mit Spalten für die Schrittweite** h_i **und die absoluten Fehler von `Dfz` und `Df3`. Nutzen Sie printf für die formatierte Ausgabe. Interpretieren Sie das Ergebnis.**

Lösung a):

```
> f:=x -> sin(x)*ln(x);
```

$$f := x \to \sin(x)\ \ln(x) \tag{3}$$

```
> plot(f(x),x=0..1);
```




```
> x[0]:=0.5;
```

$$x_0 := 0.5 \tag{4}$$

```
> Digits:=40;
```

$$Digits := 40 \tag{5}$$

Berechnung der absoluten Fehler:

```
> h:=10.0^(-i):
  d1:=abs(D(f)(x[0])-Dfz):
  d2:=abs(D(f)(x[0])-Df3):
```

Punktepaare $\left[i, \log10\left(\left|\mathrm{D}(f)\left(x_0\right)-Dfz\right|\right)\right]$ **und** $\left[i, \log10\left(\left|\mathrm{D}(f)\left(x_0\right)-Df3\right|\right)\right]$**:**

```
> P1:=[seq([i,log10(d1)],i=1..10)]:
> P2:=[seq([i,log10(d2)],i=1..10)]:
```

Bestimmung der linearen Ausgleichsgeraden:

```
> with(CurveFitting):
> E1:=unapply(LeastSquares(P1,n),n);
```

$$E1 := n \rightarrow -0.06659653518379777419892186238840070836657 - 2.000213878534159259568251370640478589762\, n \tag{6}$$

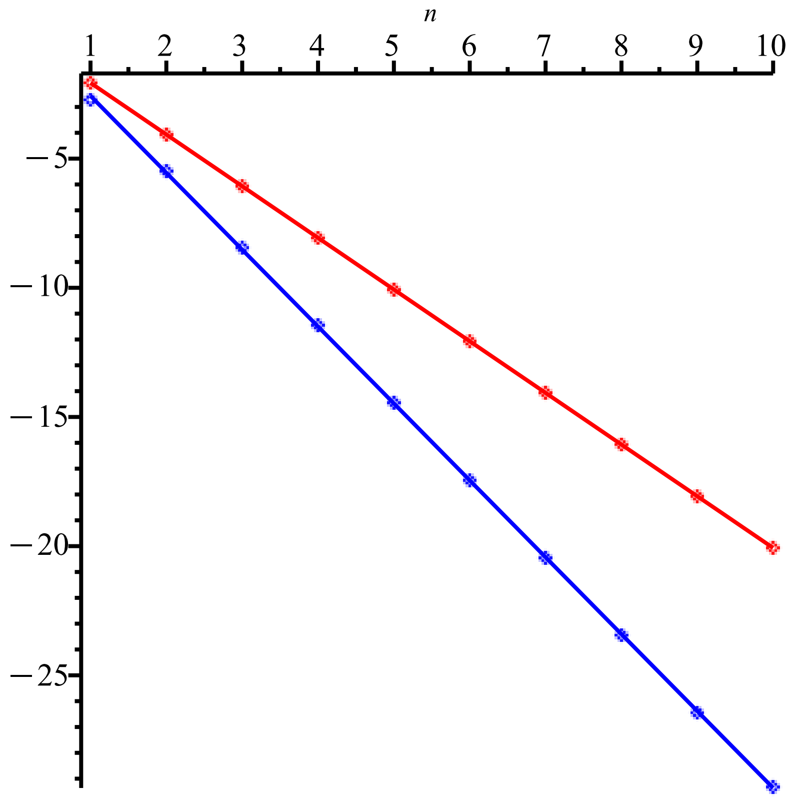
```
> E2:=unapply(LeastSquares(P2,n),n);
```

$$E2 := n \rightarrow 0.4057122113765992282882990810271145277061 - 2.976626384853102257938648870485535959881\, n \tag{7}$$

Der lineare Koeffizient bestimmt die Fehlerordnung der Differenzenformel, d.h. Dfz **hat die Fehlerordnung** 2 **und** $Df3$ **die Fehlerordnung** 3**. Plotten der Ausgleichsgeraden:**

```
> p1:=plot([E1(n),P1],n=1..10,style=[line,point],color=[red,red]):
```

```
> p2:=plot([E2(n),P2],n=1..10,style=[line,point],color=[blue,blue])
  :
> with(plots):
> display([p1,p2]);
```



Die Steigung der Ausgleichsgeraden gibt die Fehlerordnung der Differenzenformel an.

Lösung b):

Tabelle mit formatierter Ausgabe der Gleitkommazahlen:

```
> seq(printf("%10.2e %10.2e %10.2e\n",h,d1,d2),i=1..20);
  1.00e-01   8.62e-03   1.89e-03
  1.00e-02   8.55e-05   3.32e-06
  1.00e-03   8.55e-07   3.55e-09
  1.00e-04   8.55e-09   3.57e-12
  1.00e-05   8.55e-11   3.57e-15
  1.00e-06   8.55e-13   3.57e-18
  1.00e-07   8.55e-15   3.57e-21
  1.00e-08   8.55e-17   3.57e-24
  1.00e-09   8.55e-19   3.57e-27
  1.00e-10   8.55e-21   4.76e-30
  1.00e-11   8.55e-23   2.69e-29
  1.00e-12   8.55e-25   6.43e-30
  1.00e-13   8.16e-27   2.67e-27
  1.00e-14   6.60e-28   1.40e-26
  1.00e-15   3.07e-26   6.40e-26
```

```
1.00e-16   2.69e-25   6.03e-25
1.00e-17   2.73e-24   1.27e-23
1.00e-18   1.27e-23   9.61e-23
1.00e-19   2.37e-22   2.37e-22
1.00e-20   2.37e-22   1.48e-20
```

Die Differenzbildung mit anschliessender Division durch sehr kleine Schrittweiten verursacht Auslöschung signifikanter Dezimalstellen bei Gleitpunktoperationen mit endlicher Mantisse (hier 40). Die Genauigkeit nimmt bei der Differenzenformel `Df3` für $i \geq 10$ und bei der Differenzenformel `Dfz` für $i \geq 14$ kontinuierlich ab.