

Cavendishforsøket for bestemmelse av gravitasjonskonstanten

Magnus N. Malmquist, Svein Åmdal

Sammendrag

I dette forsøket skulle en verdi for gravitasjonskonstanten bestemmes. Den ble målt ved å bruke metoden fra det velkjente Cavendish-eksperimentet. Måledataene baserer seg på utslaget av en torsjonspendel som blir utsatt for gravitasjonskraften mellom legemer med kjente masser. Den målte verdien i dette forsøket er $(6,294 \pm 0,155) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

1. Innledning

Rapportens hensikt er å dokumentere en utførelse av Cavendish-forsøket for å bestemme en verdi for gravitasjonskonstanten. I 1797-98 var Henry Cavendish den første til å finne en god approksimasjon for gravitasjonskonstanten [1], over 100 år etter Newton formulerte sin gravitasjonslov. Denne tidsdifferansen kan forklares ved at gravitasjonen er en svak kraft sammenlignet med elektromagnetismen og forsøket var vanskelig å gjennomføre med datidens teknologi, få instrumenter kunne måle presist nok.

Rapporten beskriver en versjon av Cavendishes forsøk som benytter seg av laser som måleredskap, noe Cavendish selv ikke hadde tilgang til. De grunnleggende prinsippene er likevel ivarettatt.

2. Teori

2.1. Newtons gravitasjonslov

Newtons gravitasjonslov sier at den gravitasjonelle tiltrekningen mellom to legemer med masser M , m og avstand r mellom massesentrene er

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

der G er gravitasjonskonstanten. Dagens tabellverdi for G er $G = (6,67428 \pm 0,00067) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ [2].

2.2. Måling av G

Metoden for å finne G baserer seg, som Cavendishes originalforsøk, på torsjon. Proporsjonalitetsloven for torsjon sier at $\tau = D\theta$, der torsjonsstivheten D er en konstant bestemt av gjenstandens sammensetning og geometri. Under forsøket vil en torsjonspendel benyttes. To små kuler, forbundet av en stang, roterer om en tråd med en viss torsjonsstivhet. To større kuler på hver sin siden av denne vil gi en gravitasjonskraft som fører til et utslag i torsjonspendelen. Grunnet definisjonen av kraftmomentet gjelder

$$F = \frac{D}{r}\theta, \quad (2)$$

for tilstrekkelig små vinkelutslag av θ . Her er r halve avstanden mellom de små kulene, altså armen hvor kraftmomentet virker. F er summen av kreftene på en av kulene i torsjonspendelen, og gir opphav til kraftmomentet. Mesteparten av F er gravitasjonskraften mellom et enkelt kulepar (gravitasjonskraften på kula fra jorda står normalt på retningen F måles i, og vil ikke ha noen innvirkning på resultatet).

Kraften motvirkes av torsjonen, og pendelen vil starte en enkel oscillasjon om en likevektsposisjon. Denne vil dempes over tid grunnet motstand i systemet. En laserstråle blir rettet mot et speil på stangen mellom kulene, og laserstrålens refleksjon vil følge oscillasjonen.

Geometriske tilnærminger tilsier at rotasjonen θ kan uttrykkes som

$$\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{S}{L}$$

(ref. figur 2), som av likning (2) gir at F er

$$F = \frac{D}{8r} \cdot \frac{S}{L}. \quad (3)$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir et uttrykk for å finne torsjonsstivheten for en torsjonstråd. D kan gis ved

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot I}{T^2},$$

der treghetsmomentet I er gitt ved $I = 2mr^2$ og T er svingeperioden. Ved å sette dette inn i (3), så sette resultatet inn i (1), og la avstanden mellom hvert kulepars massesentre være gitt ved b , fås

$$G = F \cdot \frac{b^2}{Mm} = \frac{4\pi^2 \cdot 2mr^2}{T^2} \cdot \frac{S}{8r \cdot L} \cdot \frac{b^2}{Mm}.$$

Dette kan forenkles til

$$G = \pi^2 \frac{Sb^2r}{T^2LM}, \quad (4)$$

et uttrykk hvor alle størrelser er målbare med oppsettet.

2.3. Bruk av Gauss' feilforplantningslov

Gauss' feilforplantningslov sier for en størrelse q , kan usikkerheten Δq skrives som

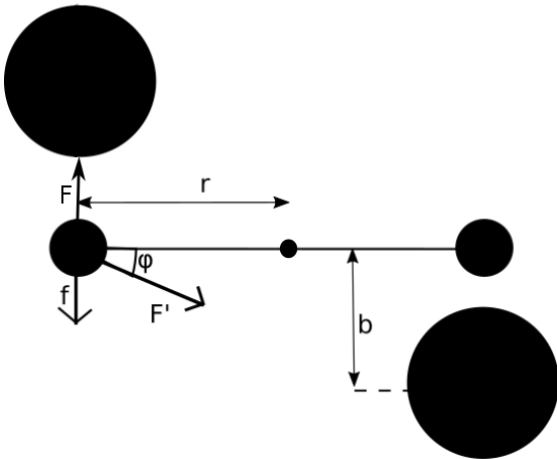
$$(\Delta q)^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + \dots$$

Kan forenkle slik at det er relativ feil som inngår i leddene. Da kan feilen regnes som dimensjonsløs. Feilen i likning (4) vil etter partiell derivasjon av uttrykket, skrevet på formen av Gauss' feilforplantningslov, kunne skrives som

$$\left(\frac{\Delta G}{G} \right)^2 = \left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta b}{b} \right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M} \right)^2. \quad (5)$$

2.4. Korrigering for andre krefter

Verdien for G som blir funnet på måten beskrevet ovenfor tar kun hensyn til kraften mellom de to nærmest liggende kulene, og utelater gravitasjonskraften på en liten kule fra den store som ligger lengst unna. Dette er skissert i figur 1



Figur 1: Kraften F' virker mellom en liten kule og den store kula som er lengst unna den. F er den kraften mellom den samme lille kula og den nærmest liggende store. f er komponenten av F som motvirker F . b er avstanden mellom massesentrene til hvert nærmest liggende kulepar. $F \gg F' > f$.

Kraften fra den store kula lengst unna, F' , vil ha en motvirkende effekt på den målte kraften, F_0 , som gjør at $F_0 \neq F$. Den motvirkende komponenten av F' , f , kan beskrives som

$$f = F' \cdot \sin \varphi = G \frac{Mm}{b^2 + 4r^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} = G \frac{Mm}{b^2} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}}.$$

Innfører

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}},$$

slik at f kan skrives som

$$f = F_0 \cdot \beta.$$

Kan nå finne et uttrykk for F (kraften som ønskes målt), nemlig

$$F = F_0 - f = F_0(1 - \beta),$$

Den korrigerte verdien for G blir da

$$G_{\text{kor}} = \frac{G}{1 - \beta}, \quad (6)$$

der G beregnes ut i fra likning (4).

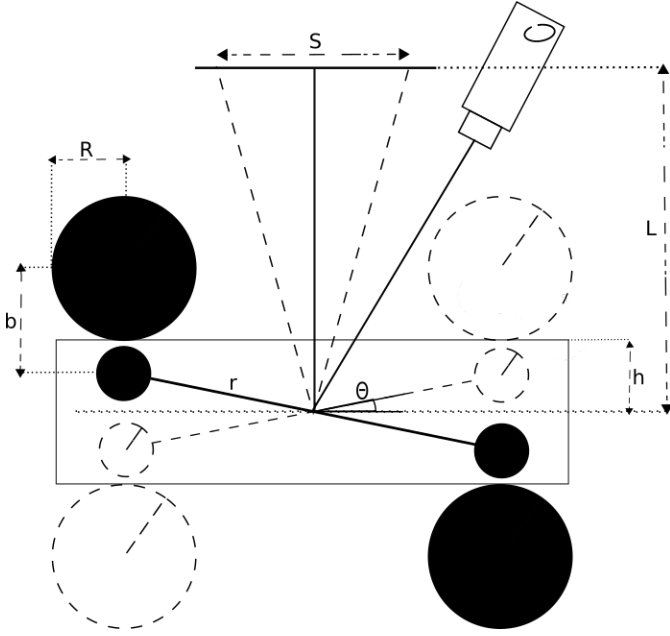
3. Metode og apparatur

En torsjonspendel der endepunktene består av blykuler, hver med masse $m = 0,015$ g, fører med seg speilet som reflekterer en laser i utslag langs en linjal på S . Utenfor torsjonspendelen er de større blykulene montert på et stativ som kan roteres slik at kulenes plassering parvis kan være lik de heltrukne eller stiplede kulenes. Ref figur 2.

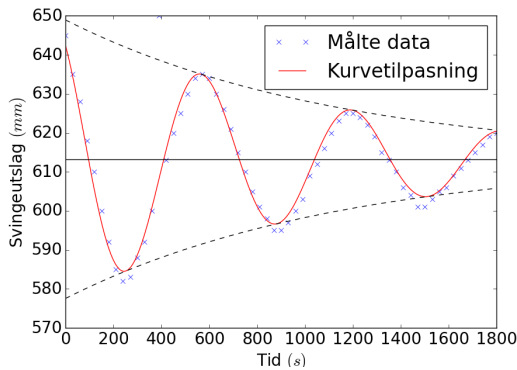
Kulene ble rotert fra en posisjon til den andre. Da startet torsjonspendelens oscillasjon. Ved første antatte ekstremalpunkt av utslaget startet målingen av posisjon på S hvert 30. sekund i 30 minutter. Kulene ble så rotert tilbake, og tilsvarende måling ble foretatt.

Måledataene ble analysert av et script i Python [3], som gav likevektsposisjonene S_1 og S_2 for oscillasjonene. Beregner ut i fra dette $S = |S_1 - S_2|$. Scriptet returnerte også periodene, T_1 og T_2 for periodene. Beregner dermed $T = (T_1 + T_2)/2$.

b ble så bestemt som en sammensetning av målinger for h og R . M og L ble også målt. Størrelsene fra Python-scriptet ble hentet med beregnet usikkerhet. For de andre størrelsene er en rimelig usikkerhet lagt til med hensyn på målingenes antatte nøyaktighet. For sammensatte størrelser er usikkerheten beregnet med standard metoder. Alle størrelsene og usikkerhetene er oppgitt i tabell 1.



Figur 2: Oversikt over oppsettet. De store, stiplete kulene er en annen mulig parvis plassering av de store blykulene. Torsjonspendelen er avgrenset av rektangelet. Når store og små kuler tiltrekkes vil torsjonspendelen svinge et maksimalt utslag θ . R er radien i de store kulene, b er avstanden mellom massesentrene til hvert kulepar, h er halve kortsiden til torsjonspendelens boks, L er avstanden fra torsjonspendelen til laserens refleksjonspunkt, og S er laserens utslag.



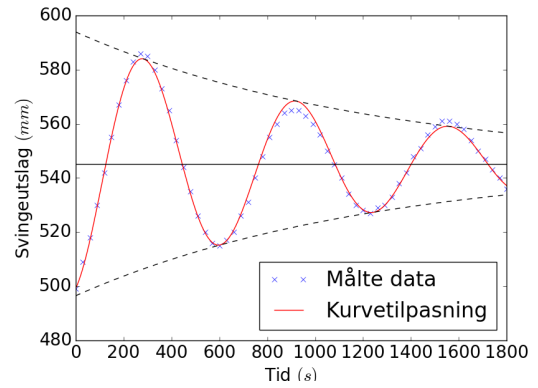
Figur 3: Regresjon av måleserie 1, laserprikkens posisjon på linjalen er plottet som funksjon av tid. Posisjonen til likevektslinja angir S_1 . Alle enkeltmålepunkt er også marktert.

4. Resultat og diskusjon

De målte posisjonene for de to målingene er representert grafisk i figur 3 og figur 4 som tydeliggjør torsjonspendelen er en dempet oscillator.

Tabell 1 gir resultatene av målinger og sammensetning av størrelsene.

Benyttes likningene (4) og (5), kan verdien av G regnes ut til å være



Figur 4: Regresjon av måleserie 2, laserprikkens posisjon på linjalen er plottet som funksjon av tid. Posisjonen til likevektslinja angir S_2 . Alle enkeltmålepunkt er også marktert.

Tabell 1: Samling av størrelser. S , T og deres usikkerheter er beregnet ut i fra Python-scriptet. r er beregnet ut i fra oppgitt verdi på torsjonspendel. b , L og M er målt som beskrevet tidligere. Usikkerhetene til disse er beregnet ved standard metoder for usikkerhetsregning.

	Størrelse	Usikkerhet	Enhet
S	$68,05 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0,92 \cdot 10^{-3}$	m
b	$45,96 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0,35 \cdot 10^{-3}$	m
r	$50,0 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0,05 \cdot 10^{-3}$	m
T	633,4	$\pm 4,1$	s
L	2,02	$\pm 0,01$	m
M	$1499,9 \cdot 10^{-3}$	$\pm 1,0 \cdot 10^{-3}$	kg

$$G = (5,836 \pm 0,144) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}.$$

G_{kor} er følgelig etter (6) gitt ved

$$G_{kor} = (6,294 \pm 0,155) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, \quad (7)$$

der usikkerheten i G_{kor} er antatt å ha den samme relative usikkerheten som i G .

4.1. Feilkilder og diskusjon av resultat

Ser av (5) at b og T gir størst relativ usikkerhet. ΔT er regnet ut av Python-scriptet, Δb ble anslått under målingen. Tykkelsen på kammeret til torsjonspendelen er noe større enn diameter på den lille kula, og det lar seg ikke gjøre ved å øyemål å plassere de store kulene helt inntil kammeret uten å berøre det. Disse momentene gjør at b antas å være kilden til den største usikkerheten.

En annen kilde til usikkerhet er knyttet til avlesning av laserens. Dette fordi det var vanskelig å lese av med jevne tidsintervaller, og fordi det var noe vibrasjon i apparaturene. Målingen etter 6 minutter i måleserie 2 ble ikke foretatt, men middelverdien av måleverdien før og etter ble i stedet brukt i Python-scriptet. Usikkerheten i avlest posisjon

fremkommer av grafene 3 og 4, da det er noe forskjell mellom regresjonen av posisjonen og de enkelte måledata.

I størrelsen b er det mulig usikkerheten er undervurdert. Dette kan være med på å forklare en usikkerhet i resultatet som er noe mindre enn forventet, når vi sammenligner vårt resultat med tabellverdier for gravitasjonskonstanten. Usikkerheten i L kan også ha blitt undervurdert.

For å forbedre resultatet kan man benytte en torsjonspendel og et apparatur som gjør det mulig å bestemme b mer nøyaktig. I tillegg kunne laborantene utvist større forsiktighet med hensyn på å skape vibrasjoner i bordet apparatet stod på. Rutinene for registrering av laserens posisjon kunne vært forbedret eller overlatt til en automatisk anordning.

5. Konklusjon

Ved å gjenskape Cavendishes forsøk med moderne hjelpemidler målte vi en verdi for gravitasjonskonstanten til å være $(6,294 \pm 0,155) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, noe lavere enn den gjeldende tabellverdien for G . Verdien til b betraktes som den største usikkerhetskilden, og kan være en av årsakene til avviket sammen med andre usikkerhetskildene diskutert over. Den reelle tabellverdien var ikke innenfor usikkerheten, som kan tyde på feil i usikkerhetsberegningen, da serlig usikkerheten til størrelsene Δb og ΔL . Resultatet for G_{korrt} fra (7) er rimelig hvis en tar i betraktning presisjonen involvert i forsøket og feilkildene beskrevet ovenfor.

5.1. Kildeliste

- [1] Cavendish Experiment - Wikipedia. Hentet 10.10.2016 fra https://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment.
- [2] Herland, E. et. al. Laboratorium i emne FY1001 mekanisk fysikk. NTNU. s.40
- [3] Programmeringsspråket Python: <https://www.python.org/>