Спектральное представление данных

Поскольку многие явления в природе имеют циклический характер, широкое практическое применение получила аппроксимация дискретных периодических функций тригонометрическими полиномами вида:

$$T(x) = \sum_k \left(a_k \cos(\alpha_k x) + b_k \sin(\alpha_k x)\right),$$

где $\alpha_k = \dfrac{2\pi k}{L}$ - частота k-ой гармоники, L - период, a_k, b_k - коэффициенты разложения.

Такой подход позволяет представить сложную циклическую структуру в виде суперпозиции простых периодических функций (элементарных гармоник).

Рассмотрим таблично заданную на периоде L функцию $y_i(x_i)$ с равномерным распределением узлов ($x_i = x_0 + ih$, $h = L/n$, $i = 0, n$).

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

Тогда, если n - четно ($n = 2m$), существует единственный интерполяционный тригонометрический полином $T_m(x)$ степени $m = n/2$, удовлетворяющий условиям $T_m(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$:

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}(x - x_0)\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}(x - x_0)\right).$$

Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \,,$$

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos(2\pi k \frac{i}{n}), \quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin(2\pi k \frac{i}{n}), \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos(i\pi).$$

Отметим, что периодичность исходной функции $y_i(x_i)$ предполагает, что $y_0 = y_n$. Если это условие не выполнено, то построенный тригонометрический полином будет удовлетворять условиям интерполяции во всех узлах, кроме последнего, т.е. $T_m(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n-1}$. В последнем узле будет выполняться условие периодичности $T_m(x_n) = T_m(x_0)$.