SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Osnovne operacije:

(a) zamenjava vrstnega reda enačb

(b) množenje z neničelnim številom

(c) pridobitev nove enačbe s seštevanjem dveh obstoječih enačb

Primer: 1)

$$y + 2z = 1 \quad | \cdot 3 \Rightarrow 3y + 6z = 3$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$3y - 4z = 23 \quad - \quad \Rightarrow -10z = 20$$

$$z = -2$$

$$y + 2z = 1$$
$$y + 2(-2) = 1$$
$$y = 1 + 4$$
$$y = 5$$

$$x - 2y + z = 0$$
$$x - 2 \cdot 5 - 2 = 0$$
$$x = 12$$

2)

$$x - 2y - 4z = 0$$
$$-2x + 4y + 3z = 1 \quad + \quad \Rightarrow -x + 2y - z = 1$$
$$-x + 2y - z = 1 \quad \Leftarrow \text{odveč!}$$

Imamo torej 2 enačbi in 3 neznanke!

$$x - 2y - 4z = 0 \quad | \cdot 2$$
$$-2x + 4y + 3z = 1 \quad +$$
$$-5z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{5}$$

$$x - 2y - 4z = 0$$
$$x - 2y + \frac{4}{5} = 0$$
$$x = 2y - \frac{4}{5}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

3.)

$$x + y + z + t = 1$$
$$x - y - z + t = 3 \quad + \Rightarrow 2x + 2t = 4 \quad /:2$$
$$\boxed{x + t = 2}$$
$$-x - y + z - t = 1 \quad + \Rightarrow 2z = 2 \quad /:2$$
$$z = 1$$
$$-3x + y - 3z - 3t = 4$$

$$\cancel{x} + y + z + \cancel{t} = 1$$
$$y + z + 2 = 1$$
$$y + z = -1$$

$$y + 1 = -1$$
$$y = -2$$

$$-3x + y - 3z - 3t = 4$$
$$-3x - 2 - 3 \cdot 1 - 3t = 4$$
$$-3x - 3t = 4 + 5$$
$$-3x - 3t = 9 \quad | : (-3)$$
$$\boxed{x + t = -3}$$

protislovje

sistem nima rešitve.

$$\begin{aligned} y+2z &= 1 \\ x-2y+z &= 0 \\ 3y-4z &= 23 \end{aligned} \xrightarrow[\text{obliki}]{\text{v matrični}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot s = b$$

št. enačb → $m \times n$ ← št. neznank

Ali obstaja sistematična metoda reševanja SLE, s katero

- se izognemo naključni manipulaciji enačb
- dobimo vse rešitve (če te obstajajo)
- jasno vemo, kdaj rešitve ne obstajajo.

OSNOVNE OPERACIJE:

(a) zamenjava vrstic

(b) množenje vrstice z (neničelnim) številom

(c) eni vrstici prištejemo drugo vrstico

Osnovne operacije NE vplivajo na rešitev (če ta obstaja)

Def: Matrika A je ekvivalentna matriki B, če lahko matriko B dobimo iz matrike A s pomočjo osnovnih operacij.

IZREK: Naj bo P $n \times n$ matrika, ki smo jo dobili iz identične matrike I_n tako, da smo zamenjali vrstni red vrstic. Potem je za poljubno $n \times m$ matriko A matrika PA enaka matriki A, ki ima enako zamenjane vrstice.

Primer:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix}$$

IZREK: Naj bo A poljubna $n \times m$ matrika in D diagonalna $n \times n$ matrika

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \emptyset \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Potem je DA enaka matriki A ki jo dobimo tako, da i-to vrstico pomnožimo z α_i (za $i=1,\dots,n$).

Primer:
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ \beta a_3 & \beta b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix}$$

Primer:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{V_1+V_3} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_3 & b_1+b_3 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

IZREK: Naj bo M $n \times n$ matrika, ki smo jo dobili tako, da smo v I_n eni vrstici prišteli neko drugo vrstico. Potem je za poljubno matriko A velikosti $n \times m$ matrika MA matrika, ki jo iz A dobimo z enako operacijo.

Def: ELEMENTARNA MATRIKA velikosti $n \times n$ je matrika, ki jo dobimo iz I_n z uporabo natanko ene od elementarnih operacij.

Primer: glej matrike P, D, M zgoraj.

$$A x = b \rightsquigarrow E A x = E b$$ E elementarna matrika

$$\underbrace{E_k \dots E_2 E_1 A}_{B} \, x = \underbrace{E_k \dots E_2 E_1 b}_{c}$$

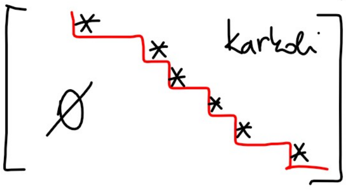
$$B \, x = c$$

Iščemo torej "lepo" matriko B.

$\Downarrow$

- hitro preberemo rešitev
- nimamo odvečnih enačb

Def: Matrika stopničaste oblike je matrika oblike



$* =$ pivot (prvi neničelni element v vrstici)

v kateri so vsi koeficienti pod "stopničkami" enaki 0, vsi pivoti so različni od 0 in vsi ostali koeficienti so poljubni.

Primer: Diagonalna matrika z neničelnimi koeficienti na diagonali.

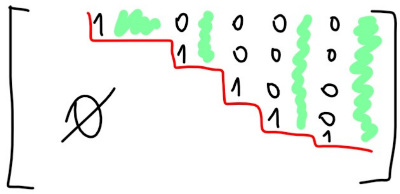
IZREK: Z uporabo osnovnih operacij lahko vsako neničelno matriko spremenimo v (ekvivalentno) matriko stopničaste oblike.

Gaussova (eliminacijska) metoda

Primer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \overset{v_1 \leftrightarrow v_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \overset{v_3 + v_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{v_3 + \frac{3}{2} v_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Def: Hermitska matrika je matrika stopničaste oblike v kateri je vsak pivot enak 1 in so vsi koeficienti nad pivoti enaki 0.



karkoli

IZREK: Z uporabo osnovnih operacij lahko vsako neničelno matriko spremenimo v ekvivalentno Hermitsko matriko.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{v_1 - v_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \overset{v_1 \leftrightarrow v_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{v_2 + v_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{v_3 + \frac{2}{3} v_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} :(-1) \\ :(-3) \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{v_1 - 4v_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vrstice matrike so linearno ODVISNE, če in samo če lahko eno vrstico dobimo iz ostalih s pomočjo elementarnih operacij.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vrstice so lin. odvisne, ker

$$v_3 = v_1 + 2v_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ v_2 - 2v_1 \\ v_3 - 5v_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ v_3 - 2v_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Def: RANG matrike A je število linearno NEODVISNIH vrstic v matriki A
oznaka $r(A)$.
ekvivalentno: rang = št. pivotov oz. neničelnih vrstic v matriki stopničaste oblike.

IZREK: Osnovne operacije ne vplivajo na rang.

IZREK: Če je A $m \times n$ matrika potem ima homogen SLE $Ax=0$ netrivialno rešitev če in samo če $r(A) < n$.

$$\begin{aligned} x+y&=0 \\ -2x+3y&=0 \end{aligned}$$

trivialna rešitev: $x=y=0$

IZREK: Nehomogen SLE $Ax=b$ je rešljiv če in samo če $r(A) = r(\underbrace{A|b}_{\text{razširjena matrika sistema}})$

Def: SLE je konsistenten, če ima rešitev, sicer je protisloven.

IZREK: Naj bo v konsistentnem SLE matrika sistema A velikosti $m \times n$. Če je $r(A) = p$ $(<n)$ potem lahko $(n-p)$ neznankam določimo poljubne vrednosti.
Pravimo, da je rešitev $(n-p)$ parametrična.

POVZETEK: A matrika sistema, velikosti $m \times n$

- če $r(A) < r(A|b) \Rightarrow$ protisloven sistem
- če $r(A) = r(A|b) \Rightarrow$ konsistenten sistem
  - če $r(A) = n \Rightarrow$ enolična rešitev
  - če $r(A) = p < n \Rightarrow$ neskončno mnogo rešitev (rešitev je $(n-p)$ parametrična)

Primer: 1)

$$\begin{aligned} y+2z &= 1 \\ x-2y+z &= 0 \\ 3y-4z &= 23 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 23 \end{array}\right] \overset{v_1 \leftrightarrow v_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 23 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ v_3 - 3v_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\quad}_{A}$, $\underbrace{\qquad}_{A|b}$ $\Rightarrow r(A) = 3 = r(A|b)$

$\Downarrow$

konsistenten sistem

$n = 3 = r(A) \Rightarrow$ enolična rešitev

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right] :(-10) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} v_1 + 2v_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} v_1 - 5v_3 \\ v_2 - 2v_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 5 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x-2y-4z &= 0 \\ -2x+4y+3z &= 1 \\ -x+2y-z &= 1 \end{aligned}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ v_2 + 2v_1 \\ v_3 + v_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ v_3 - v_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = 2 = r(A|b)$

$\hookrightarrow$ konsistenten sistem

$n = 3 > 2 = p$

$(n-p) = 1 \Rightarrow$ rešitev je 1-parametrična

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] :(-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} v_1 + 4v_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\longrightarrow x - 2y = -\frac{4}{5}$

$x = 2y - \frac{4}{5}$

$z = -\frac{1}{5}$

$y \in \mathbb{R}$

3.)

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= 1 \\ x-y-z+t &= 3 \\ -x-y+z-t &= 1 \\ -3x+y-3z-3t &= 4 \end{aligned}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ V_2 - V_1 \\ V_3 + V_1 \\ V_4 + 3V_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :2 \\ :2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ V_4 + 4V_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ V_4 + 4V_3 \end{array} \sim \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

$$r(A) = 3 < 4 = r(A|b)$$

$$\Downarrow$$

sistem je protisloven

$$0x + 0y + 0z + 0t = 15$$