9 Številski sistemi

Ko vnesemo v računalnik nekaj črk ali besed ali števil, jih računalnik prevede v dvojiški zapis, saj lahko računalniki razumejo samo tako kodiranje. Dvojiški sistem je le eden od številskih sistemov. V vsakdanji praksi največkrat uporabljamo desetiški sistem. Računalniški programer ali strokovnjak za IT mora razumeti naslednje številske sisteme, ki se pogosto uporabljajo v računalnikih.

(i) Dvojiški številski sistem

(ii) Osmiški številski sistem

(iii) Desetiški številski sistem

(iv) Šestnajstiški številski sistem

DESETIŠKI	HEXADEC	OSMIŠKI	DVOJIŠKI	DESETIŠKI	HEXADEC	OSMIŠKI	DVOJIŠKI
0	0	000	00000000	26	1A	032	00011010
1	1	001	00000001	27	1B	033	00011011
2	2	002	00000010	28	1C	034	00011100
3	3	003	00000011	29	1D	035	00011101
4	4	004	00000100	30	1E	036	00011110
5	5	005	00000101	31	1F	037	00011111
6	6	006	00000110	32	20	040	00100000
7	7	007	00000111	33	21	041	00100001
8	8	010	00001000	34	22	042	00100010
9	9	011	00001001	35	23	043	00100011
10	A	012	00001010	36	24	044	00100100
11	B	013	00001011	37	25	045	00100101
12	C	014	00001100	38	26	046	00100110
13	D	015	00001101	39	27	047	00100111
14	E	016	00001110	40	28	050	00101000
15	F	017	00001111	41	29	051	00101001
16	10	020	00010000	42	2A	052	00101010
17	11	021	00010001	43	2B	053	00101011
18	12	022	00010010	44	2C	054	00101100
19	13	023	00010011	45	2D	055	00101101
20	14	024	00010100	46	2E	056	00101110
21	15	025	00010101	47	2F	057	00101111
22	16	026	00010110	48	30	060	00110000
23	17	027	00010111	49	31	061	00110001
24	18	030	00011000	50	32	062	00110010
25	19	031	00011001	51	33	063	00110011

Vsi ti sistemi imajo neka skupna pravila. In včasih moramo zapis števil znati tudi pretvarjati iz enega sistema v drugi. Vsi navedeni številski sistemi temeljijo na pozicijskih številih, kjer je le nekaj simbolov, imenovanih števke, ti simboli pa predstavljajo različne vrednosti, odvisno od položaja, ki ga imajo v številu. Vrednost vsake števke v številu določimo s:

- Števko
- Položajem števke v številu
- Osnovo b številskega sistema (pri čemer je osnova b določena s številom vseh števk v številskem sistemu)

Naloge za začetnike

Vsako realno število lahko zapišemo v decimalni obliki, na primer $17/10 = 1,7$; $9/100 = 0,09$; $1/3 = 0,33333\ldots$. Decimalni zapis racionalnega števila je bodisi končen ali pa se začne neko zaporedje cifer v decimalnem zapisu ponavljati. Na primer $1/7 = 0.142857\ 142857\ 142\ldots$. V decimalnem zapisu iracionalnega števila takega ponavljanja ne more biti. Včasih je bolj enostavno vzeti, da so vsi decimalni zapisi brez konca. Če ima število samo končno mnogo decimalnih mest, ga lahko vedno podaljšamo s samimi ničlami, na primer 2.345 je isto kot $2.345000000\ldots$. Če se ena decimalka ali neko zaporedje decimalk ponavlja, to označimo s piko ali črto nad ponavljajočimi se ciframi, na primer $1/3 = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$, $\frac{19}{6} = 3.16666\ldots = 3.1\dot{6}$ in $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.

V decimalnem sistemu zapisa števil uporabljamo 10 cifer (ali števk) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vsa realna števila se da zapisati tudi v drugih številskih sistemih, ki uporabljajo več ali manj cifer. V računalništvu, na primer, se veliko uporablja dvojiški ali binarni številski sistem, ki uporablja samo cifri 0 in 1 (glej običajne nalogi 1 in 2).

1. Dokaži: Naravno število m je deljivo z 9 natanko tedaj, ko 9 deli vsoto cifer v decimalnem zapisu števila m.

2. Dokaži, da ima vsaka končna množica realnih števil maksimum.

3. Dokaži, da velja trikotniška neenakost: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

4. Dokaži, da velja $|a - b| \geq |a| - |b|$.

5. Izračunaj: (a) $\frac{3^5 3^7}{3^{14}}$; (b) $\sqrt{\frac{(5 \cdot 10^{-4})(4 \cdot 10^3)}{8 \cdot 10^6}}$; (c) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = x$; (d) $(\log_a b)(\log_b a)$.

6. Dokaži: če je $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ in $a \neq 1$, potem je $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$!

Običajne naloge

1. Zapiši število 23 v obliki $a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0$.

2. Naj bosta $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$. Dokaži, da se da poljubno pozitivno celo število P na en sam način zapisat i v obliki

$$P = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0.$$

3. Pretvori $15732_{[8]} = x_{[6]}$! (Zapiši število, dano v osmiškem številskem sistemu, v šestiškem številskem sistemu.)

4. Desetiško število 2657 pretvori v šestiško število.

5. Šestiško število 20145 pretvori v desetiško število.

6. Pretvori osmiško število $3546_{(8)}$ v petiško število.

7. Pretvori desetiško število 77 v dvojiško število.

8. Pretvori dvojiško število $10110100011_{(2)}$ v desetiško število.

Naloge z izpita

1. Pretvori desetiško število $1789_{[10]}$ v: (a) dvojiški številski sistem, (b) osmiški številski sistem in (c) šestnajstiški številski sistem.

2. Pretvori dvojiško število $1011110111_{[2]}$ v: (a) osmiški številski sistem (b) desetiški številski sistem in (c) šestnajstiški številski sistem.

3. Pretvori osmiško število $3037_{[8]}$ v: (a) dvojiški številski sistem, (b) desetiški številski sistem in (c) šestnajstiški številski sistem.

4. Pretvori šestnajstiško število $3AE_{[16]}$ v (a) dvojiški številski sistem, (b) desetiški številski sistem in (c) osmiški številski sistem.

5. Pretvori dano dvojiško število v osmiško oz. šestnajstiško število in obratno (brez, da bi ga vmes pretvarjal v desetiško število).

1. $10110100011_{(2)} = x_{(8)}$
2. $623_{(8)} = x_{(2)}$
3. $10110100011_{(2)} = x_{(16)}$
4. $9A5_{(16)} = x_{(2)}$

Rešitve nalog

Naloge za začetnike

1.

Dokaži: Naravno število m je deljivo z 9 natanko tedaj, ko 9 deli vsoto cifer v decimalnem zapisu števila m.

Recimo, da je $m = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. Potem je $m - (a_k + a_{k-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0) = a_k(10^k - 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + \ldots + a_2(10^2 - 1) + a_1(10 - 1)$. Ker je vsako od števil $a_i(10^i - 1)$ deljivo z 9, je z 9 deljiva tudi njihova vsota. Torej je število m deljivo z 9 če in samo če je $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ deljivo z 9.

2.

Dokaži, da ima vsaka končna množica realnih števil maksimum.

V množici z enim elementom je edini element tudi maksimalen.

Recimo, da ima vsaka množica s k elementi maksimum in naj ima množica A $n = k + 1$ elementov. Izberimo poljubni element $a \in A$. Množica $A \setminus a$ ima k elementov, zato ima maksimum po indukcijski predpostavki. Označimo ta maksimum z m. Potem pa je večje od števil a in m maksimum množice A.

3.

Dokaži, da velja *trikotniška neenakost*: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Ločimo dva primera. Najprej privzemimo, da sta a in b istega predznaka. Če je $a, b > 0$, potem je $|a + b| = a + b$, $|a| = a$ in $|b| = b$, torej $|a + b| = |a| + |b|$ in trditev velja. Če je $a, b < 0$, potem je $|a + b| = -a - b$, $|a| = -a$ in $|b| = -b$ in spet je $|a + b| = |a| + |b|$.

Naj bosta zdaj a in b različno predznačeni števili. Recimo, da je $a > 0$ in $b < 0$. Potem je $|a| = a$, $|b| = -b$, $|a + b|$ pa je enako $|a| - |b|$ ali $|b| - |a|$. V vsakem primeru dobimo na levi razliko, na desni pa vsoto istih dveh pozitivnih števil. Trditev torej velja tudi v tem primeru.

Podobno sklepamo v primeru, ko je $a < 0$ in $b > 0$.

4.

Dokaži, da velja $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Za števili $a - b$ in b uporabimo trikotniško neenakost:

$$|a - b| + |b| \geq |(a - b) + b| = |a|$$

torej je

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

5.

Izračunaj: (a) $\dfrac{3^5 3^7}{3^{14}}$, (b) $\sqrt{\dfrac{(5 \cdot 10^{-4})(4 \cdot 10^3)}{8 \cdot 10^6}}$, (c) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{27}{8} = x$, (d) $(\log_a b)(\log_b a)$.

(a) $\dfrac{3^5 3^7}{3^{14}} = \dfrac{3^{5+7}}{3^{14}} = 3^{5+7-14} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

(b) $\sqrt{\dfrac{(5 \cdot 10^{-4})(4 \cdot 10^3)}{8 \cdot 10^6}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 4}{8} \cdot \dfrac{10^{-4} \cdot 10^3}{10^6}} = \sqrt{2.5 \cdot 10^{-4+3-6}} = \sqrt{25 \cdot 10^{-8}} = 5 \cdot 10^{-4}$ ali 0.0005.

(c) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{27}{8} = x$ je isto kot $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$. Ker je $\frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, dobimo $x = -3$.

(d) $(\log_a b)(\log_b a) = u$. Privzemimo, da je $a, b > 0$ in $a, b \neq 1$, in definirajmo $x = \log_a b$ in $y = \log_b a$. Iz $a^x = b$ in $b^y = a$ dobimo $a = (a^x)^y = a^{xy}$, torej $u = xy = 1$.

6.

Dokaži: če je $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ in $a \neq 1$, potem je $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$!

Označimo $x = \log_a M$, $y = \log_a N$. Potem je $a^x = M$, $a^y = N$ in $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ali $\log_a \dfrac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$.

Običajne naloge

1.

Zapiši število 23 v obliki $a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0$.

Delimo 23 zaporedoma z 2 in si zapomnimo ostanke

23:2 = 11, ostanek 1

11:2 = 5, ostanek 1

5:2 = 2, ostanek 1

2:2 = 1, ostanek 0

1:2 = 0, ostanek 1

Prebrano nazaj dobimo 1 0 1 1 1. Preizkus: $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$. Številka 10111 je zapis števila 23 v dvojiškem ali binarnem številskem sistemu.

2.

Dokaži, da se da poljubno pozitivno celo **števi**lo P na en sam način zapisati v obliki $P = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0$.

Recimo, da je $P = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0$ in $P = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \ldots + b_1 2 + b_0$. Delimo P z 2. Ostanek pri deljenju je enak 0, če je P sodo število, ali 1, če je P lih. Torej $a_0 = b_0$. Celi del kvocienta $P/2$ pa je $a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \ldots + a_1$ oziroma $b_m 2^{m-1} + b_{m-1} 2^{m-2} + \ldots + b_1$. Delimo še enkrat z 2 in vidimo, da mora biti tudi $a_1 = b_1$. Če tako nadaljujemo, vidimo, da morajo biti vsi $a_i = b_i$ in da mora biti $m = n$.

3.

Pretvori $15732_{[8]} = x_{[6]}$! (Zapiši število, dano v osmiškem številskem sistemu, v šestiškem številskem sistemu.)

Zapišimo $15732_{[8]}$ v desetiškem zapisu: $1 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 2 = 7130_{[10]}$. Rezultat zaporedoma delimo s 6, $7130 : 6 = 1188$ z ostankom 2, $1188 : 6 = 198$ z ostankom 0, $198 : 6 = 33$ z ostankom 0, $33 : 6 = 5$ z ostankom 3, pa dobimo rezultat $7130 = 53002_{[6]}$ in $15732_{[8]} = 53002_{[6]}$.

Druga metoda. Direkten račun, brez uporabe desetiškega sistema. V našem primeru računanja ni nič manj. Če pa imamo veliko števil, ki jih moramo pretvoriti med dvema številskima sistemoma, se z direktnim pretvarjanjem prihrani nekaj časa. Osmiška številka $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ je zapis števila

$$a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \dots + a_2 8^2 + a_1 8 + a_0.$$

Torej je treba števila, ki v gornjem izrazu nastopajo, najprej zapisati v šestiškem zapisu, potem pa jih zmnožiti in sešteti v šestiškem sistemu.

Najprej si pripravimo zapise potenc osnove 8.

$$\begin{aligned} 8 &= 12_{[6]} \\ 8^2 &= 64_{[10]} = 144_{[6]} \\ 8^3 &= 512_{[10]} = 2212_{[6]} \\ 8^4 &= 4096_{[10]} = 30544_{[6]} \end{aligned}$$

Zdaj pa zapišimo v šestiškem zapisu še števke $a_0, a_1, \dots, a_4$: $a_0 = 2_{[8]} = 2_{[6]}, a_1 = 3_{[8]} = 3_{[6]}, a_2 = 7_{[8]} = 11_{[6]}, a_3 = 5_{[8]} = 5_{[6]}, a_4 = 1_{[8]} = 1_{[6]}$ in jih pomnožimo z ustreznimi potencami osnove 8.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2_{[6]} \\ a_1 8 &= 3_{[6]} 12_{[6]} = 40_{[6]} \\ a_2 8^2 &= 11_{[6]} 144_{[6]} = 2024_{[6]} \\ a_3 8^3 &= 5_{[6]} 2212_{[6]} = 15504_{[6]} \\ a_4 8^4 &= 1_{[6]} 30544_{[6]} = 30544_{[6]} \end{aligned}$$

Še seštejmo in dobimo rezultat:

$$2_{[6]} + 40_{[6]} + 2024_{[6]} + 15504_{[6]} + 30544_{[6]} = 53002_{[6]}.$$

Primeri pretvarjanja med različnimi številskimi sistemi so:

1. **Pretvori desetiško število 1789_{10} v:**

   a) dvojiški številski sistem,
   b) osmiški številski sistem in
   c) šestnajstiški številski sistem.

a) dvojiški številski sistem

1789 : 2 = 894 ost. 1
894 : 2 = 447 ost. 0
447 : 2 = 223 ost. 1
223 : 2 = 111 ost. 1
111 : 2 = 55 ost. 1
55 : 2 = 27 ost. 1
27 : 2 = 13 ost. 1
13 : 2 = 6 ost. 1
6 : 2 = 3 ost. 0
3 : 2 = 1 ost. 1
1 : 2 = 0 ost. 1 ↑ ➔ $1789_{10} = 11011111101_2$

Preizkus (pretvori dvojiško število 11011111101_2 v desetiško število)

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

$11011111101_2 = 1*2^{10} +1*2^9+0*2^8 +1*2^7 +1*2^6 +1*2^5 +1*2^4 +1*2^3 +1*2^2 +0*2^1 +1*2^0 = 1024 + 512 + 0 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 1789_{10}$

b) osmiški številski sistem

1789 : 8 = 223 + 5
223 : 8 = 27 + 7
27 : 8 = 3 + 3
3 : 8 = 0 + 3 ↑ ➔ $1789_{10} = 3375_8$

Preizkus (pretvori osmiško število 3375_8 v desetiško število):
$3375_8 = 5*8^0 + 7*8^1 + 3*8^2 + 3*8^3 = 5 + 56 + 192 + 1536 = 1789_{10}$

c) šestnajstiški številski sistem

1789 : 16 = 111 + 13
111 : 16 = 6 + 15
6 : 16 = 0 + 6 ↑ ➔ $6\ 15\ 13 = 6FD_{16}$

Preizkus (pretvori šestnajstiško število $6FD_{16}$ v desetiško število):
$6FD_{16} = 13*16^0 + 5*16^1 + 6*16^2 = 13 + 240 + 1536 = 1789_{10}$

2. **Pretvori dvojiško število 1011110111_2 v :**
   a) osmiški številski sistem,
   b) desetiški številski sistem in
   c) šestnajstiški številski sistem.

a) osmiški številski sistem

$1011110111_2 = \underline{1}\ \underline{011}\ \underline{110}\ \underline{111} = 1(=1)\ 011(=3)\ 110(=6)\ 111(=7) = 1367_8$

b) desetiški številski sistem

$1011110111_2 = 1*2^0 + 1*2^1 + 1*2^2 + 0*2^3 + 1*2^4 + 1*2^5 + 1*2^6 + 1*2^7 + 0*2^8 + 1*2^9 = 1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64 + 128 + 512 = 759_{10}$

c) šestnajstiški številski sistem

$1011110111_2 = \underline{10}\ \underline{1111}\ \underline{0111} = 10(=2)\ 1111(=F)\ 0111(=7) = 2F7_{16}$

3. Pretvori osmiško število 3037_8 v :

a) dvojiški številski sistem,
b) desetiški številski sistem in
c) šestnajstiški številski sistem.

a) dvojiški številski sistem

$3037_8 = 011(=3)\ 000(=0)\ 011(=3)\ 111(=7) = 11000011111_2$

b) desetiški številski sistem

$3037_8 = 3*8^3 + 0*8^2 + 3*8^1 + 7*8^0 = 1536 + 24 + 7 = 1567_{10}$

c) šestnajstiški številski sistem

$3037_8 = 011(=3)\ 000(=0)\ 011(=3)\ 111(=7) = \underline{110}\ \underline{0001}\ \underline{1111}_2 = 61F_{16}$

4. Pretvori šestnajstiško število 3AE v

a) dvojiški številski sistem,
b) desetiški številski sistem in
c) osmiški številski sistem.

a) dvojiški številski sistem,

$3AE_{16} = \underline{11}\ \underline{1010}\ \underline{1110} = 1110101110_2$

b) desetiški številski sistem

$3AE_{16} = 14*16^0 + 10*16^1 + 3*16^2 = 14 + 160 + 768 = 942_{10}$

c) osmiški številski sistem

$3AE_{16} = 1110101110_2 = \underline{1}\ \underline{110}\ \underline{101}\ \underline{110} = 1656_8$

Pretvori dvojiško število 101,101$_2$ v desetiško število.
$101{,}102_2 = 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = 5.675_{10}$

Pretvori dvojiško število 1101101,11 v šestnajstiški številski sistem!
1101101,11 $_{[2]}$ =

<u>0110</u> <u>1101</u> , <u>1100</u> $_{[2]}$

6 D , C $_{[16]}$

1101101,11 $_{[2]}$ = 6D,C $_{[16]}$

Pretvori dvojiško število 1101101,11 v osmiški številski sistem!
1101101,11 $_{[2]}$ =

<u>001</u> <u>101</u> <u>101</u> , <u>110</u> $_{[2]}$

1 5 5 , 6 $_{[8]}$

1101101,11 $_{[2]}$ = 155,6 $_{[8]}$

Pretvori desetiško število 109,75 **v dvojiški številski sistem!**
109,75 $_{[10]}$ = ? $_{[2]}$

<u>Celi del</u>:
109 : 2 = 54, ostane 1
54 : 2 = 27, ostane 0
27 : 2 = 13, ostane 1
13 : 2 = 6, ostane 1
6 : 2 = 3, ostane 0
3 : 2 = 1, ostane 1
1 : 2 = 0, ostane 1 1101101

<u>Neceli del</u>:
0,75 × 2 = 1,5
0,50 × 2 = 1,0
0,00 × 2 = 0,0 0,11000...

<u>Rezultat</u>:
109,75 $_{[10]}$ = 1101101,11 $_{[2]}$

Pretvori desetiško število 6,5625$_{10}$ iz decimalnega sistema v dvojiški sistem.
pretvorba celoštevilčnega dela:
6=2*3+0
3=2*1+1
1=2*0+1 R:110
pretvorba decimalnega dela:
0,5625*2=1 ,1250
0,1250*2=0 ,2500
0,2500*2=0 ,5000
0,5000*2=1 ,0000 R:1001
R: 110,1001

Zanimive povezave:
[a] Pretvornik med številskimi sistemi
[b] Šestnajstiški zapis
[c] Microsoft Office Excel