Univerza na Primorskem
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije
Koper, 16.06.2020.

IME: ____________________ VPISNA ŠTEVILKA: ______________________________

PRIIMEK: ____________________ PODPIS: ______________________________

Analiza I, izpit - praktični del

1. V množici realnih števil $\mathbb{R}$ rešite enačbo

$$-2|x+1|+3=0.$$

2. Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, ki sta podani s predpisoma

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geq 1 \\ x^2+1, & x<1 \end{cases} \qquad \text{in} \qquad g(x)=x+3.$$

Določite kompozitum $f\circ g$.

3. Izračunaj limito funkcije

$$\lim_{x\to -3}\frac{-3x^2-6x+9}{x^2-4x-21}$$

(brez uporabe L'Hospitalovega pravila).

4. Utemeljite, ali podana vrsta konvergira, ali ne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\cdot 3^n}.$$

Navodila: Izpit rešujte izključno z nalivnim peresom ali kemičnim svičnikom v modri ali črni barvi. Ta list priložite in oddajte skupaj z listi z rešitvami! Vse liste z rešitvami oštevilčite na naslednji način: številka-trenutne-strani/skupno-število-strani.

\# V množici realnih števil $\mathbb{R}$ rešite enačbo

$$-2|x+1|+3=0.$$

$$|x+1|=\frac{3}{2}$$

1° $x+1\geq 0$

2° $x+1<0$

Re.

1° $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

$$-2|x+1|+3=0 \Rightarrow -2(x+1)+3=0$$

$$-2x-2+3=0$$

$$-2x=-1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

2° $x+1<0 \Rightarrow x<-1$

$$-2|x+1|+3=0 \Rightarrow -2\cdot\left[-(x+1)\right]+3=0$$

$$2x+2+3=0$$

$$2x=-5$$

$$x=-\frac{5}{2}$$

Rešitve enačbe sta $x=\frac{1}{2}$ in $x=-\frac{5}{2}$.

Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, ki sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & \boxed{x \geq 1} \\ x^2+1, & x < 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = x+3$$

Določite kompozitum $f \circ g$.

Re

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} e^{g(x)}, & \boxed{g(x) \geq 1} \\ (g(x))^2+1, & g(x) < 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{x+3}, & x+3 \geq 1 \\ \underbrace{(x+3)^2}_{x^2+6x+9}+1, & x+3 < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{x+3}, & x \geq -2 \\ x^2+6x+10, & x < -2 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} e^{x+3}, & x \geq -2 \\ x^2+6x+10, & x < -2 \end{cases}$$

Izračunaj limito funkcije

$$\lim_{x \to -3} \frac{-3x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x - 21}$$

(brez uporabe L'Hospitalovega pravila)

Navodila:

$$-3x^2 - 6x + 9 = (-3)(x+3)(x-1)$$

$$x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7)$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{-3x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x - 21} = \lim_{x \to -3} \frac{(-3)\cancel{(x+3)}(x-1)}{\cancel{(x+3)}(x-7)} = (-3) \lim_{x \to -3} \frac{x-1}{x-7} =$$

$$= (-3) \cdot \frac{-3-1}{-3-7} = (-3) \cdot \frac{-4}{-10} = (-3) \cdot \frac{2}{5} = -\frac{6}{5}$$

(#) Utemeljite, ali podana vrsta konvergira, ali ne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n\,3^n}$$

Re.

Nalogo bomo rešili na tri različne načine.

Spomnimo se: D'Alembertov - kvocientni kriterij

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje števil $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Če obstaja $\lim_{n\to\infty} D_n = D$ potem velja

- Če je $D<1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- Če je $D>1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n\,3^n} \Rightarrow a_n = \frac{4^n}{n\,3^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} = \frac{4^n \cdot 4}{(n+1)\,3^n \cdot 3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^n\cdot 4}{(n+1)3^n\cdot 3}}{\frac{4^n}{n\cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n}\cdot 4\cdot n\cdot \cancel{3^n}}{(n+1)\cdot \cancel{3^n}\cdot 3\cdot \cancel{4^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n \quad /:n}{3n+3 \quad /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3+\underbrace{\frac{3}{n}}_{0,\ n\to\infty}} = \frac{4}{3} > 1 \xRightarrow{\text{D'Al.-kv. kriterij}} \text{vrsta divergira}$$

Spomnimo se: Raabejev kriterij

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Tedaj velja:

- Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $R_n \geq r > 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $R_n \leq 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n 3^n}, \quad a_n = \frac{4^n}{n 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{\cancel{4^n}}{n \cancel{3^n}}}{\frac{\cancel{4^n} \cdot 4}{(n+1)\cancel{3^n} \cdot 3}} = \frac{3(n+1)}{4n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{3(n+1)}{4n} - 1 = \frac{3n+3-4n}{4n} = \frac{-n+3}{4n}$$

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{3-n}{4n} = \frac{3-n}{4}$$

$$\forall n \geq 4 \quad R_n < 1 \overset{\text{Raabejev kriterij}}{\Longrightarrow} \text{vrsta divergira}$$

Spomnimo se: Korenski kriterij

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Naj bo

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tedaj velja:

- Če obstaja $q < 1$, da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \leq q$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n > 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n 3^n}, \quad a_n = \frac{4^n}{n 3^n}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{n 3^n}} = \frac{\sqrt[n]{4^n}}{\sqrt[n]{n 3^n}} = \frac{4}{\sqrt[n]{n}\, 3} = \frac{4}{3} \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} \sqrt[n]{n} = \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n 3^n} \text{ divergira.}$$