MATRIKE

Če imamo dani pozitivni celi števili m in n, je MATRIKA velikosti $m \times n$ pravokotno polje, ki vsebuje $m \cdot n$ števil razporejenih v m vrstic in n stolpcev.

Primer: matrika velikosti 1×5: $\begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ vrstična matrika (vrstica)

3×1: $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ stolpična matrika (stolpec)

4×3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Splošen zapis:

vrstica stolpec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

i j

Kje je element a_{ij}?

Primer: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \end{bmatrix}$ $X = [x_{ij}]_{3\times3}$, kjer je $x_{ij} = i^j$

Zapišimo 3×3 matriko z elementi $a_{ij} = (-1)^{i-j}$

$$a_{12} = (-1)^{1-2} \qquad A = \begin{bmatrix} (-1)^0 & (-1)^{-1} & (-1)^{-2} \\ (-1)^1 & (-1)^0 & (-1)^{-1} \\ (-1)^2 & (-1)^1 & (-1)^0 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posebne vrste matrik:

- vrstična matrika: matrika velikosti $1\times n$
- stolpična matrika: matrika velikosti $m\times1$
- kvadratna matrika: matrika velikosti $n\times n$ (enako število vrstic in stolpcev)

$\begin{bmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{bmatrix}_{n\times n}$

- diagonalna matrika: kvadratna matrika z $a_{ij}=0$ za vse $i\neq j$

zg. Δ $\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ 0 & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}$ sp. Δ $\begin{bmatrix} * & & & 0 \\ * & * & & \\ * & * & * & \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$

- zgornje (ali spodnje) trikotna matrika: kvadratna matrika z $a_{ij}=0$ za vse $i>j$ (oz. $i<j$)
- strogo trikotna matrika: zg. ali sp. trikotna matrika z ničlami tudi na diagonali: $a_{ij}=0$ za vse $i\geq j$ (oz. $i\leq j$)

Def: Če imamo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ potem sta A in B <u>ENAKI</u>, če in samo če:

a) $m = p$ in $n = q$

b) $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,j$

RAČUNSKE OPERACIJE:

-) SEŠTEVANJE DVEH MATRIK

Def.: Če imamo dani dve matriki velikosti $m\times n$, imenujmo ju $A = [a_{ij}]$ in $B = [b_{ij}]$ potem je VSOTA $A+B$ matrika velikosti $m\times n$ z ij-tim elementom $a_{ij}+b_{ij}$.

! matrike morata biti enako veliki !

Primer:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 0+2 \\ 2+(-1) & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

LASTNOSTI: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ in $C = [c_{ij}]$ matrike velikosti $m\times n$

- komutativnost: $A+B = B+A$
- asociativnost: $A+(B+C) = (A+B)+C$

$A + M = A$, kaj je lahko M?

Def.: Matrika velikosti $m\times n$ z vsemi koeficienti enakimi 0 je NIČELNA MATRIKA, običajno jo označimo z $0_{m\times n}$ (oz. samo 0, če je velikost jasna iz konteksta).

$A + 0 = A$

$0 = M$ je edina takšna matrika (identiteta za seštevanje).

$A + B = 0$, kaj je lahko B?

Def: Naj bo A poljubna $m\times n$ matrika. Potem $\exists!$ $m\times n$ matrika B za katero velja $A+B = 0$, pravimo aditivni inverz matrike A in jo označimo z $-A$. ($-A$ je edina takšna matrika).

$A = [a_{ij}] \qquad -A = [-a_{ij}]$

$A - A = A + (-A)$ ... odštevanje

-) MNOŽENJE MATRIKE S ŠTEVILOM

Def.: Če imamo poljubno matriko A in število α, potem je zmnožek označen z αA matrika, ki jo dobimo tako, da vsak element matrike A pomnožimo z α.

Če je $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, potem je $\alpha A=[\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

Primer: $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $\alpha=3$

$$\alpha A = 3\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1&3\cdot2\\3\cdot3&3\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\9&12\end{bmatrix}$$

Lastnosti: A,B $m\times n$ matriki, α,β števili

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

d) $(-1)A=-A$

e) $0\cdot A=0_{m\times n}$

Primer:

$$(3+2)\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=5\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}$$

$$3\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\9&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}$$

Za matriki A,B velikosti $m\times n$ rešite matrično enačbo:

$$3\left(X+\tfrac{1}{2}A\right)=5\left(X-\tfrac{3}{4}B\right)$$

$$3X+\tfrac{3}{2}A=5X-\tfrac{15}{4}B$$

$$\tfrac{3}{2}A+\tfrac{15}{4}B=5X-3X$$

$$\tfrac{3}{2}A+\tfrac{15}{4}B=2X \quad /:2$$

$$\boxed{\tfrac{3}{4}A+\tfrac{15}{8}B=X}$$

-) MNOŽENJE DVEH MATRIK

Def: Naj bosta $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ in $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ dve matriki.
Potem je produkt $A \cdot B$ matrika velikosti $m \times p$ (imenujmo jo C) z elementi
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Primer: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot 1 + 0\cdot 3 & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 1\cdot 3 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

! Množenje matrik v splošnem ni komutativno!

•) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

•) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = B \cdot A$$

Če velja $AB = BA$ pravimo, da matriki A in B komutirata.

Lastnosti: ! če so vsi potrebni produkti in vsote definirani!

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ asociativnost

b) $A(B+C) = AB + AC$

c) $(B+C)A = BA + CA$

$\Big\}$ distributivnost

d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ α število

Def: Kvadratni diagonalni matriki, ki ima vse elemente enake 1 pravimo IDENTIČNA MATRIKA (IDENTITETA) in jo označimo z I_n

primer $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Velja: A matrika vel. $m\times n$

a) $A \cdot I = A$

b) $I \cdot A = A$

-) SEŠTEVANJE MATRIKE S ŠTEVILOM

Def: Naj bo $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$, potem je vsota $A + \alpha$ matrika, ki jo dobimo tako, da diagonalnim elementom matrike A prištejemo α.

Primer:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\alpha = 3$

$A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

! NE prištevamo α k vsakemu koeficientu matrike A !

-) TRANSPONIRANJE MATRIK

Def: Naj bo $A = [a_{ij}]$ matrika velikosti $m\times m$. Potem je transponirana matrika A^T matrika velikosti $m\times m$, ki ima na ij-tem mestu element a_{ji}.

Če je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, potem je $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Primer:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $\qquad (A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} = A$

Lastnosti: A, B matriki, α število (in so vse vsote in zmnožki definirani)

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$

d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Def: Kvadratna matrika A je SIMETRIČNA, če $A = A^T$ in je POŠEVNO SIMETRIČNA, če $A = -A^T$.

Primer: A kvadratna matrika, potem je

$A + A^T$ simetrična matrika

$A - A^T$ poševno simetrična matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad (A+A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A - A^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -(A - A^T)$$

Trditev: Vsako kvadratno matriko lahko zapišemo kot vsoto neke simetrične matrike in neke poševno simetrične matrike.

Primer: Zapišimo matriko $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kot vsoto sim. in poš. sim. matrike.

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} \quad \text{simetrična matrika}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{poševno simetrična}$$

Želimo $A = \alpha(A + A^T) + \beta(A - A^T)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\alpha a & \alpha(b+c) + \beta(b-c) \\ \alpha(c+b) + \beta(c-b) & 2\alpha d \end{bmatrix}$$

$a = 2\alpha a$

$b = \alpha(b+c) + \beta(b-c)$

$c = \alpha(c+b) + \beta(c-b)$

$d = 2\alpha d$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \beta b - \beta c \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)}$$

Trditev: Če je A poljubna matrika potem je $A \cdot A^T$ simetrična matrika.

Dokaz: $(AA^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = AA^T$