15 Vrste, 2. del

1. Z uporabo razcepa na delne ulomke seštej vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$$

kjer je $k \geq 0$.

2. Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$

3. Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, $a > 0$, $s \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$, $a > 0$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

4. Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$.

5. Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje pozitivnih realnih števil z limito $a > 0$. Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$$

kjer je $x > 0$.

6. Dokaži: če vrsta s pozitivnimi členi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. S primerom pokaži, da obratno v splošnem ni res.

Absolutna in pogojna konvergenca vrst

Do sedaj smo se ukvarjali z vrstami s pozitivnimi členi in spoznali definicijo vsote takšne vrste. Ta vsota je bodisi neko pozitivno realno število, ali pa je neskončna. Če vsi členi v vrsti niso pozitivni, pa se stvari malce zakomplicirajo. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z ne nujno pozitivnimi členi rečemo, da:

- konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- konvergira pogojno, če konvergira, a ne konvergira absolutno.

Absolutno konvergentne vrste imajo lastnosti, na katere smo navajeni pri seštevanju števil. Tako je na primer vsota absolutno konvergentne vrste neodvisna od vrstnega reda členov. Vsota pogojno konvergentne vrste pa je po drugi strani odvisna od vrstnega reda členov. Če primerno zamenjamo vrstni red, lahko dobimo celo poljubno vsoto. Če ima vrsta pozitivne člene, je konvergenca ekvivalentna absolutni konvergenci.

1. Obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

2. Obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+\frac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$,

(d)

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots,$$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $|a| \neq 1$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$, $a > 0$.

3. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $a_n \neq -1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da sta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ absolutno konvergentni.

16 Limita funkcije in zveznost

Teoretične naloge - zveznost

1. Po definiciji preveri, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ zvezna v točkah $a = 0$ in $a = 2$.

2. Po definiciji preveri, da je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ zvezna povsod, kjer je definirana.

Limita funkcije

1. Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

2. Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$, $a > 0$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

3. Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

4. Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ in $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^5+5x+1)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

5. Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^2(x+\sqrt[3]{1-x^3})$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (x-\ln\operatorname{ch} x)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

16.1 Rešitve

Vrste, 2. del

(1) Z uporabo razcepa na delne ulomke seštej vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)},$$

kjer je $k \geq 0$.

Rešitev: Številska vrsta je zaporedje števil (a_n), ki ga zapišemo kot formalno vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Za poljubno vrsto lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

in rečemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (s_n).$$

Ulomek $\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$ lahko poenostavimo na naslednji način. Izkaže se, da je

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1}$$

za neki konstanti A in B (ulomkom na desni rečemo parcialni ulomki). Ti konstanti izračunamo tako, da damo desno stran na skupni imenovalec in primerjamo koeficiente.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} &= \frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1}, \\
&= \frac{A(n+k+1) + B(n+k)}{(n+k)(n+k+1)}, \\
&= \frac{An + Ak + A + Bn + Bk}{(n+k)(n+k+1)}, \\
&= \frac{(A+B)n + (Ak + A + Bk)}{(n+k)(n+k+1)}
\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned}
A + B &= 0, \\
Ak + B + Bk &= 1,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$ in $B = -1$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ torej velja enakost

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}.$$

Torej je

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{2+k}\right) + \left(\frac{1}{2+k} - \frac{1}{3+k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) = \frac{1}{1+k} - \frac{1}{n+k+1}.$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \lim_{n\to\infty} (s_n) = \frac{1}{1+k}.$$

□

Vsoto vrste je praviloma težko natančno izračunati. Zato se moramo pogosto zadovoljiti s tem, da ugotovimo, ali dana vrsta sploh konvergira. Če vemo, da konvergira, lahko njeno vsoto aproksimiramo s končnimi vsotami.

Za testiranje vrst s pozitivnimi členi (oziroma absolutne konvergence v splošnem) imamo na razpolago naslednje kriterije:

· primerjalni kriterij,
· kvocientni kriterij,
· korenski kriterij,
· Raabejev kriterij.

Uporaben je tudi integralski kriterij, ki pa ga zaenkrat ne bomo obravnavali.

(2) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Primerjalni kriterij: Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \leq b_n$ za vse n od nekod dalje. Potem velja:

· če je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna,

· če je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna.

Tipično bomo vrste primerjali z:

· vrstami oblike $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ za $\alpha > 0$,

· geometrijskimi vrstami oblike $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ za $q > 0$.

Pri tem bomo uporabili dejstvo, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$, geometrijska vrsta pa natanko tedaj, ko je $q < 1$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$:

Uporabimo oceno

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$:

Uporabili bomo neenakost $\sin x < x$, ki velja za vse $x > 0$. Sledi

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Velja torej $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Geometrijska vrsta na desni konvergira, zato je tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ konvergentna.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$:

Sedaj lahko ocenimo

$$\frac{n+1}{n^2+3n} > \frac{n}{n^2+3n} = \frac{1}{n+3}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}.$$

Ker vrsta na desni divergira, je tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$ divergentna. $\square$

(3) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, $a > 0$, $s \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$, $a > 0$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Kvocientni kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potem velja:

· če je $D < 1$, je vrsta konvergentna,
· če je $D > 1$, je vrsta divergentna,
· če je $D = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$:

V tem primeru je $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Od tod sledi

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Ker je $D < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergira za vsak $a > 0$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$:

Sedaj je $a_n = \frac{a^n}{n^s}$. Torej je

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^s} = a.$$

Z uporabo kvocientnega kriterija tako dobimo:

· če je $a < 1$, vrsta konvergira za vsak s,
· če je $a > 1$, vrsta divergira za vsak s.

V primeru, ko je $a = 1$, imamo opravka z vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Za to vrsto pa vemo, da konvergira natanko takrat, ko je $s > 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$:

Tokrat imamo $a_n = \frac{n!}{(an)^n}$. Sledi

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(a(n+1))^{n+1}}}{\frac{n!}{(an)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!a^n n^n}{n!a^{n+1}(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{ae}.$$

Velja torej naslednje:

· če je $a > \frac{1}{e}$, vrsta konvergira,
· če je $a < \frac{1}{e}$, vrsta divergira.

Posebej moramo obravnavati še primer, ko je $a = \frac{1}{e}$. Tedaj je

$$a_n = \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Če primerjamo dva zaporedna člena, dobimo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Za zaporedje $(1+\frac{1}{n})^n$ vemo, da je naraščajoče in da ima limito e. Ker so vsi členi tega zaporedja strogo manjši od e, je

$$a_{n+1} > a_n,$$

kar pomeni, da členi vrste naraščajo. Vrsta torej divergira, saj je potreben pogoj za konvergenco vrste, da členi limitirajo proti nič.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$:

Najprej opomnimo, da je dvojna fakulteta oznaka za naslednji števili:

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2,$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.$$

Namesto produkta vseh števil torej vzamemo samo vsako drugo število. Računajmo

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!(2n)!!(2n+1)}{(2n+2)!!(2n-1)!!(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 1.$$

Pri računanju limite smo uporabili naslednji enakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} &= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1} = 2n+1,\\
\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} &= \frac{2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+2)2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2n+2}.
\end{aligned}$$

Ker pride limita enaka $D = 1$, nam kvocientni kriterij nič ne pove o konvergenci vrste. V takšnih primerih nam včasih pomaga:

Raabejev kriterij: Naj bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Potem velja:

· če je $R > 1$, je vrsta konvergentna,
· če je $R < 1$, je vrsta divergentna,
· če je $R = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

V našem primeru je

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6-(4n^2+4n+1)}{4n^2+4n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ker je $R = \frac{3}{2} > 1$, vrsta konvergira. □

(4) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$.

Rešitev: Tokrat imamo vrste, ki jih lahko obravnavamo z uporabo korenskega kriterija.

Korenski kriterij: Naj bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Potem velja:

· če je $C < 1$, je vrsta konvergentna,
· če je $C > 1$, je vrsta divergentna,
· če je $C = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$:

Splošni člen je $a_n = \frac{1}{\ln^n n}$. Torej je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Ker je $C = 0 < 1$, vrsta $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$:

Tokrat je $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$. Sledi

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$ torej konvergira za vsak $a > 0$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$:

Sedaj je $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, od koder dobimo $C = 1$. To pomeni, da korenski kriterij nič ne pove o konvergenci vrste. Opazimo pa lahko, da je

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e,$$

kar pomeni, da vrsta divergira.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na^n$:

Imamo $a_n = na^n$. Torej je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{na^n} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{n} = a.$$

Z uporabo korenskega kriterija tako dobimo:

· če je $a < 1$, vrsta konvergira,
· če je $a > 1$, vrsta divergira.

Če je $a = 1$, imamo vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$, ki pa divergira. □

(5) Naj bo (a_n) konvergentno zaporedje pozitivnih realnih stevil z limito $a > 0$. Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n,$$

kjer je $x > 0$.

Rešitev: Z uporabo korenskega kriterija dobimo

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a_n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{a_n} = \frac{x}{a}.$$

Torej velja:

· če je $x < a$, vrsta konvergira,

· če je $x > a$, vrsta divergira.

V primeru, ko je $x = a$, pa se lahko zgodi oboje, odvisno od zaporedja (a_n). Če izberemo na primer $a_n = \sqrt[n]{n}$, je $a = x = 1$, vrsta pa je enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

V tem primeru torej vrsta divergira.

Če izberemo $a_n = \sqrt[n]{n^2}$, pa dobimo konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$\square$

(6) Dokaži: če vrsta s pozitivnimi členi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$. S primerom pokaži, da obratno v splošnem ni res.

Rešitev: Denimo, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Potem mora veljati $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$, kar pomeni, da je $0 < a_n \leq 1$ za vse n od nekega N dalje. Ker je $x^2 \leq x$ za $x \in [0,1]$, imamo torej oceno

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n.$$

Po primerjalnem kriteriju torej vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergira.

Implikacija v obratno smer ne drži vedno. Če vzamemo na primer zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$, potem vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pa ne. $\square$

(1) Obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$.

Rešitev: Alternirajoča vrsta je vrsta, pri kateri se predznaki členov izmenjujejo. To pomeni, da je $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za alternirajoče vrste lahko pogosto uporabimo:
Leibnizev kriterij: Če absolutne vrednosti

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > \cdots$$

členov alternirajoče vrste monotono padajo proti nič, je vrsta konvergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$:

Vrsta je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \ldots$$

pa monotono pada proti nič, saj je funkcija $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha > 0$ naraščajoča, zvezna na $[0, \infty)$ in $f(0) = 0$. Sklepamo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ konvergentna za vsak $\alpha > 0$.

Vemo že, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Za $0 < \alpha \leq 1$ je vrsta pogojno konvergentna.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$:

Vrsta je alternirajoča. Zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \ldots$$

monotono pada proti nič, saj je funkcija tg naraščajoča in zvezna na $[0, 1]$ ter $\operatorname{tg}(0) = 0$. Torej je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ konvergentna.

Pokažimo sedaj, da vrsta ne konvergira absolutno. Za $x \in [0, 1]$ velja ocena $\operatorname{tg} x \geq x$, od koder sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = \infty.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ je torej pogojno konvergentna. □

(2) Obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\tfrac{1}{n})$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+\tfrac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg}\tfrac{1}{n}$,

(d) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $|a| \neq 1$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$, $a > 0$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$:

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ nima niti pozitivnih členov, niti ni alternirajoča. Zato lahko najprej poskusimo ugotoviti, če konvergira absolutno. Iz ocene $|\sin x| \leq 1$, dobimo oceno

$$\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Od tod sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Po primerjalnem kriteriju tako dobimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ absolutno konvergentna.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\tfrac{1}{n})$:

Sedaj imamo vrsto s splošnim členom $a_n = \ln(1+\frac{1}{n})$, kar pomeni, da so vsi njeni členi pozitivni. S primerno oceno bi lahko pokazali, da vrsta divergira, lahko pa to pokažemo tudi eksplicitno.

Najprej opazimo, da je $a_n = \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. To nam omogoča, da natančno izračunamo delne vsote

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \ln\left(\tfrac{2}{1}\right) + \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + \ln\left(\tfrac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Zaporedje delnih vsot narašča čez vse meje, kar pomeni, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ divergira.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{-n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$:

Ta vrsta je alternirajoča, absolutne vrednosti členov pa so

$$|a_n| = (1+\tfrac{1}{n})^{-n}\operatorname{tg}\tfrac{1}{n} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Zaporedje $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ je padajoče z limito 0, zaporedje $(1+\frac{1}{n})^n$ pa naraščajoče z limito e. Od tod sledi, da je zaporedje $|a_n|$ padajoče z limito 0. Po Leibnizevem kriteriju je torej dana vrsta konvergentna.

Ker je $(1+\frac{1}{n})^n < 3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, imamo oceno

$$|a_n| = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^n} > \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{n}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| > \tfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\tfrac{1}{n}.$$

Pri prejšnji nalogi smo že pokazali, da vrsta na desni divergira, od koder sledi, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{-n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ pogojno konvergentna.

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$:

Vrsta je alternirajoča, vendar pa absolutne vrednosti njenih členov ne padajo monotono proti nič, zato Leibnizevega kriterija ne moremo uporabiti. Pokazali bomo celo, da vrsta divergira.

Razdelimo vrsto tako, da vzamemo skupaj po dva zaporedna člena. Za vsak $n > 1$ tako dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1}.$$

Od tod sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \sum_{n=2}^{n+1}\frac{2}{n-1}.$$

Vemo, da harmonična vrsta divergira, zato sode delne vsote naraščajo proti neskončnosti. To pa pomeni, da je dana vrsta divergentna.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$:

Imamo vrsto s splošnim členom $a_n = \frac{a^n}{1-a^n}$, ki v splošnem nima samo pozitivnih členov, niti ni alternirajoča. Če je $|a| > 1$, je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n} - 1} = -1,$$

od koder sledi, da vrsta divergira.

Če je $|a| < 1$, pa je vrsta absolutno konvergentna. To lahko na primer dokažemo z uporabo korenskega kriterija, saj je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{1-a^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{|1-a^n|}} = |a|.$$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$:

Vrsta je alternirajoča. Zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\frac{1}{2a^2}, \frac{1}{3a^4}, \frac{1}{4a^6}, \frac{1}{5a^8}, \ldots$$

monotono pada proti nič, če je $a \geq 1$. V primeru $a < 1$ pa členi zaporedja $|a_n|$ rastejo čez vse meje. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$ je torej po Leibnizevem kriteriju konvergentna za $a \geq 1$ in divergentna za $a < 1$.

Vrsta iz absolutnih vrednosti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)a^n}$ konvergira, če je $a > 1$, pri $a = 1$ pa dobimo harmonično vrsto, ki divergira.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$ je torej absolutno konvergentna za $a > 1$, pogojno konvergentna pri $a = 1$ ter divergentna za $a < 1$. □

(3) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $a_n \neq -1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da sta potem tudi vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ absolutno konvergentni.

Rešitev: Denimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna.

Najprej bomo pokazali, da je potem tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ absolutno konvergentna. Ker je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$, je $|1 + a_n| > \frac{1}{2}$ za vse n od nekega N dalje. Od tod dobimo oceno

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{a_n}{1+a_n} \right| < 2 \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|.$$

Ker vrsta na desni konvergira, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ absolutno konvergentna.

Podobno lahko dokažemo, da je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ absolutno konvergentna. V tem primeru to sledi iz ocene $1 + a_n^2 \geq 1$. $\square$

(1) Po definiciji preveri, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ zvezna v točkah $a = 0$ in $a = 2$.

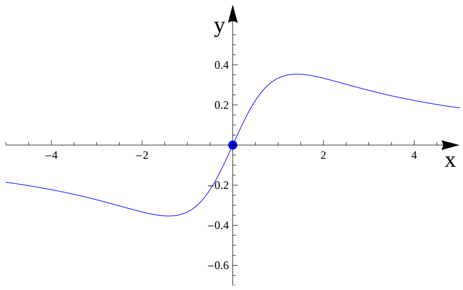
Rešitev: Pri tej nalogi se bomo spoznali z zveznostjo, ki je ena izmed ključnih pojmov matematične analize. Večina funkcij, ki jih podajamo s predpisi, je zveznih povsod, kjer so definirane. Naš cilj pri tej nalogi pa bo, da spoznamo, kaj to v resnici pomeni.

Funkcija f je zvezna v točki a, če so za vrednosti x blizu a tudi vrednosti $f(x)$ blizu $f(a)$. Če hočemo to isto trditev povedati bolj precizno, lahko podamo naslednjo definicijo. Funkcija f je zvezna v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse x, ki zadoščajo pogoju $|x - a| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Pri tem moramo biti pozorni na to, da jemljemo samo vrednosti iz definicijskega območja dane funkcije.

Poglejmo si najprej graf racionalne funkcije f.



Da bi dokazali, da je funkcija f zvezna v točki $a = 0$, si najprej izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Radi bi našli tak $\delta > 0$, da bo za vse x, ki zadoščajo pogoju $|x| < \delta$, veljalo

$$|f(x) - f(0)| < \epsilon.$$

Ker je $f(0) = 0$, lahko ta pogoj prepišemo v obliko

$$\left|\frac{x}{x^2+2}\right| < \epsilon.$$

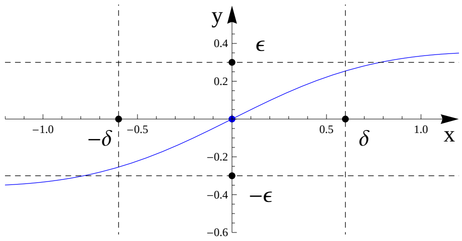
Strategija dokazovanja zveznosti po definiciji bo sedaj naslednja. S pomočjo ocen bomo poskusili levo stran navzgor oceniti z izrazom, ki bo vseboval konstante in pa izraz $|x|$. Iz konstant bomo na koncu lahko prebrali vrednost δ. Ker je $x^2 + 2 \geq 2$, imamo oceno

$$\left|\frac{x}{x^2+2}\right| = \frac{|x|}{x^2+2} \leq \frac{|x|}{2}.$$

Če sedaj vzamemo $\delta = 2\epsilon$, bo iz neenakosti $|x| < \delta$ sledilo

$$\left|\frac{x}{x^2+2}\right| \leq \frac{|x|}{2} < \frac{\delta}{2} = \epsilon.$$

V točki $a = 0$ je torej za poljuben ϵ dober $\delta = 2\epsilon$. Poglejmo si na skici, kako lahko interpretiramo ta rezultat.



Če si izberemo poljuben vodoraven pas $(-\epsilon, \epsilon)$, bo graf funkcije f na intervalu $(-\delta, \delta)$ ležal znotraj tega pasu. Na sliki je prikazan primer, ko je $\epsilon = 0.3$. Naš račun je pokazal, da je v tem primeru dober $\delta = 0.6$, čeprav vidimo, da bi dejansko lahko izbrali še malo večji δ, če bi napravili boljšo oceno. Ko dokazujemo zveznost funkcije f, ni toliko pomembno, da δ najdemo čim bolj optimalno, važno je le, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja δ, ki zadošča pogoju iz definicije zveznosti.

Pokažimo sedaj še, da je funkcija f zvezna v točki $a = 2$. Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Najti moramo tak $\delta > 0$, da za vsak x, ki zadošča pogoju $|x-2| < \delta$, velja $|f(x)-f(2)| < \epsilon$ oziroma

$$\left|\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon.$$

Izraz na levi lahko preoblikujemo v

$$\left|\frac{3x - x^2 - 2}{3(x^2+2)}\right| = \frac{|x^2-3x+2|}{3(x^2+2)} = \frac{|(x-2)(x-1)|}{3(x^2+2)} \le \frac{|(x-2)(x-1)|}{6}.$$

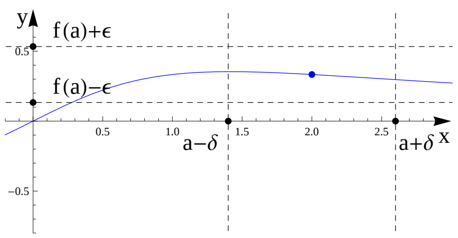
Člen $|x-2|$ bomo lahko ocenili navzgor z δ, medtem ko je člen $|x-1|$ v principu lahko velik, če je x velik. Ker nas pri obravnavi zveznosti zanimajo samo vrednosti blizu točke $a = 2$, se lahko omejimo na nek interval okoli te točke. Da ne bomo preveč komplicirali, vzemimo kar interval $(1, 3)$. Za $x \in (1, 3)$ imamo oceno $|x-1| \le 2$, zato je

$$\frac{|(x-2)(x-1)|}{6} \le \frac{|x-2|}{3}.$$

Če vzamemo $\delta = 3\epsilon$, bo torej iz neenakosti $|x-2| < \delta$ sledilo

$$\left|\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon.$$

Vidimo, da je za razliko od točke $a = 0$, kjer smo vzeli $\delta = 2\epsilon$, sedaj dober $\delta = 3\epsilon$. Razlog je v tem, da je graf funkcije f v okolici točke $a = 0$ bolj strm kot pa v okolici točke $a = 2$. Kot bomo videli v poglavju o odvodu, je kvocient $\frac{\epsilon}{\delta}$ povezan z vrednostjo odvoda v dani točki, če je funkcija odvedljiva. S slike je razvidno, da je bila naša ocena dokaj slaba, saj bi lahko vzeli še precej večji δ.



Opomnimo še, da zaradi omejitve $x \in (1, 3)$ vsi računi veljajo le za $\delta < 1$. □

(2) Po definiciji preveri, da je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ zvezna povsod, kjer je definirana.

Rešitev: Racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je definirana na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vzemimo torej $a \neq 0$ in poljuben $\epsilon > 0$. Radi bi našli tak $\delta > 0$, da bo iz $|x - a| < \delta$ sledilo $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Zadnji pogoj lahko prepišemo v obliko $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \epsilon$ oziroma

$$\frac{|x-a|}{|xa|} < \epsilon.$$

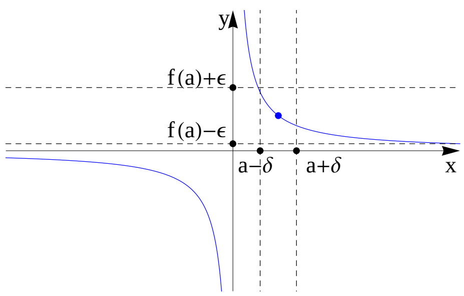
Podobno kot prej izraza na levi ne bomo mogli oceniti za vse x hkrati, zato se lahko omejimo na takšne vrednosti x, ki zadoščajo pogoju $|x| > \frac{|a|}{2}$. Če je a pozitiven, torej lahko vzamemo $x \in (\frac{a}{2}, \infty)$, če je a negativen, pa $x \in (-\infty, \frac{a}{2})$. Izraz na levi strani neenakosti lahko potem takole ocenimo

$$\frac{|x-a|}{|xa|} < \frac{2|x-a|}{a^2}.$$

Če izberemo $\delta = \frac{a^2\epsilon}{2}$, bo za vse x, ki zadoščajo pogojema $|x| > \frac{|a|}{2}$ in $|x - a| < \delta$, veljalo

$$|\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}| < \epsilon.$$

V naši oceni smo uspeli eksplicitno izraziti δ z ϵ. Pri majhnih vrednostih a bo δ zelo majhen, kar je posledica dejstva, da ima funkcija f v točki $x = 0$ pol in je posledično njen graf skoraj navpičen. Če je a velik, pa je graf položen, zato lahko tudi δ izberemo precej večji.



Opomnimo še, da se v primeru, ko gre a proti nič, hkrati z njim tudi δ približuje nič. To pomeni, da ne moremo najti takšnega δ, ki bi bil pri danem ϵ dober za vse vrednosti a. Funkcija f torej ni enakomerno zvezna. Z enakomerno zveznostjo se bomo bolj podrobno spoznali na koncu poglavja. □

(1) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Rešitev: Začeli bomo z obravnavanjem limite funkcije v dani točki. Limito funkcije $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ računamo podobno kot limite zaporedij, upoštevamo pa naslednji splošni navodili:

· če predpis za funkcijo f ni definiran v točki a, poskušamo najti tak predpis g, ki je definiran in zvezen v a in da za $x \neq a$ velja $f(x) = g(x)$,

· če nam uspe najti tak predpis g, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(b) $$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a},\\ &= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}),\\ &= na^{n-1}.\end{aligned}$$

V tej limiti smo pravzaprav izračunali odvod funkcije $f(x) = x^n$ v točki $x = a$.

(c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-x-x+1}{x^{50}-x-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^{99}-1)-(x-1)}{x(x^{49}-1)-(x-1)},\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x^{98}+x^{97}+\ldots+x+1)-(x-1)}{x(x-1)(x^{48}+x^{47}+\ldots+x+1)-(x-1)},\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x^{98}+x^{97}+\ldots+x+1)-1}{x(x^{48}+x^{47}+\ldots+x+1)-1} = \frac{98}{48},\\ &= \frac{49}{24}.\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})},$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}},$$

$$= \frac{2}{3}.$$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})},$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})},$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}},$$

$$= 1.$$

□

(2) Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$, $a>0$,

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$,

(c) $\displaystyle \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

Rešitev: Dane limite bomo izračunali z uporabo limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(a) Najprej velja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin ax}{ax}.$$

Če uvedemo novo spremenljivko $t = ax$, bo pri $x\to 0$ veljalo tudi $t\to 0$. Torej je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin ax}{ax} = a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = a.$$

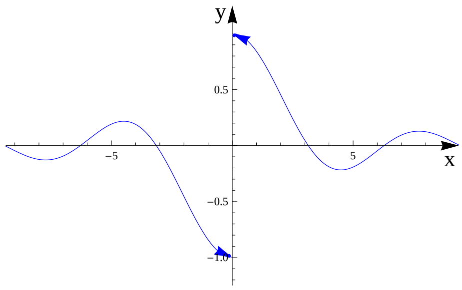
(b) Sedaj bomo upoštevali definicijo absolutne vrednosti in posebej izračunali levo in desno limito. Če je $x<0$, je $|x| = -x$, zato je leva limita enaka

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin x}{-x} = -1.$$

Za $x > 0$ pa je $|x| = x$, zato je desna limita enaka

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ker se leva in desna limita ne ujemata, limita dane funkcije ne obstaja. Poglejmo še graf funkcije v okolici točke $a = 0$.



(c) Dano limito bomo prevedli v standardno obliko z uvedbo nove spremenljivke $t = x - \frac{\pi}{2}$. Pri $x \to \frac{\pi}{2}$ potem velja $t \to 0$. Torej je

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \sin(t + \frac{\pi}{2})}{(-t)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}.$$

Sedaj definirajmo $u = \frac{t}{2}$. Pri $t \to 0$ gre potem $u \to 0$ in velja

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} = \lim_{u \to 0} \frac{2 \sin^2 u}{4u^2} = \frac{1}{2}.$$

□

(3) Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$,

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$,

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$,

(d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

Rešitev: (a) Pri tej limiti bomo izračunali odvod kosinusa. Z uporabo formule

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

tako dobimo

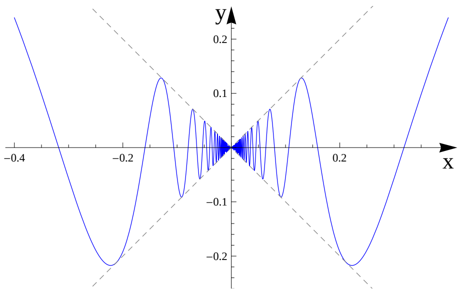
$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} = -\sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

(b) Tokrat bomo izračunali odvod eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ v točki $x = 0$. V ta namen najprej definirajmo $t = a^x - 1$ oziroma $x = \log_a(t+1)$. Pri $x \to 0$ potem velja $t \to 0$, zato je

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Od tod lahko izpeljemo tudi formulo za odvod eksponentne funkcije v poljubni točki.

(c) Sedaj obravnavamo funkcijo $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ v okolici točke $a = 0$. Poglejmo si najprej njen graf.



Z grafa lahko uganemo, da bo

$$\lim_{x\to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$

Formalno pa bomo morali to dokazati po definiciji. Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Potem moramo najti tak $\delta > 0$, da za vsak $x \neq 0$, ki ustreza pogoju $|x| < \delta$, velja $|f(x) - 0| < \epsilon$ oziroma

$$|x \sin \tfrac{1}{x}| < \epsilon.$$

Z uporabo ocene

$$|x \sin \tfrac{1}{x}| \leq |x|$$

hitro dobimo, da je dober kar $\delta = \epsilon$.

Opomba: Bolj splošno bi lahko pokazali naslednjo trditev.

Naj bo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ in naj bo g omejena funkcija v okolici točke a. Potem velja

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

(d) Naj bo $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Obravnavali bomo levo in desno limito funkcije f v točki $a = 0$. Ko gre x proti 0 z desne, gre $\frac{1}{x} \to \infty$, zato je

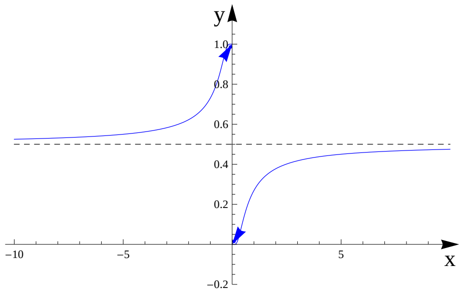
$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Ko pa gre x proti 0 z leve, gre $\frac{1}{x} \to -\infty$, kar pomeni, da je

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Ker se leva in desna limita ne ujemata, limita ne obstaja.

Poglejmo še graf funkcije f. Vidimo, da je f zvezna povsod, razen v točki $x = 0$, kjer ima skok.



$\square$

(4) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^5+5x+1)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Rešitev: Pri računanju limit, ko gre $x \to \pm\infty$, računamo vodoravne asimptote.

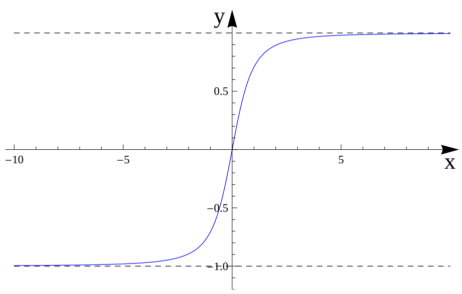
(a) Najprej bomo izračunali obe vodoravni asimptoti funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Ko gre $x \to \infty$, imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1.$$

Ko gre $x \to -\infty$, pa je $x = -\sqrt{x^2}$, zato je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -1.$$

Vidimo, da ima funkcija f dve različni vodoravni asimptoti.



(b) Sedaj je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^5+5x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^5 + \ln(1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^5})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{5\ln x} = \frac{2}{5}.$$

(c) Pri izračunu asimptote funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, bomo upoštevali, da za $x > 0$ velja

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Ker leva in desna stran neenakosti limitirata proti nič, je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

□

(5) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(x + \sqrt[3]{1-x^3})$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$.

Rešitev:

(a) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

(b) $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x^2(x + \sqrt[3]{1-x^3}) &= \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{(x + \sqrt[3]{1-x^3})(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2})}{(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2})}, \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{(x^3-1)^2}}, \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{x^3})^2}}, \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\ln e^x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}, \\ &= \ln \left(\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \right) = \ln \left(\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 + e^{-2x}} \right), \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$

(d) Pri tej limiti bomo uporabili faktorizacijsko formulo

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Najprej je:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right), \\
&= 2\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Levi faktor gre v limiti proti nič, desni pa je omejen. Torej je

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}) = 0.$$

□