4 Relacije

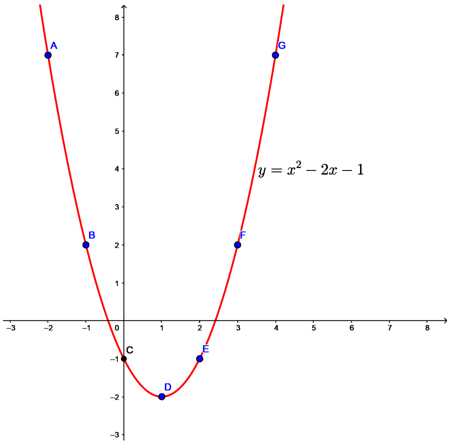
4.1 Načini dokazovanja

1. Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je n sodo število, potem je n^2 sodo.

2. Z direktnim dokazom implikacije pokaži: $a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$.

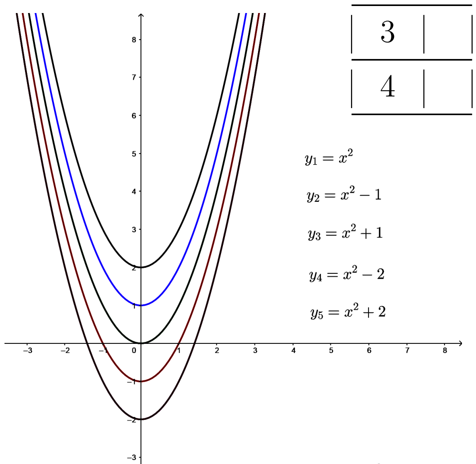
Direktni dokaz implikacije $A \Rightarrow B$
Dokaz:
Predpostavimo A.
$\vdots$
Torej, B.
Sledi $A \Rightarrow B$. $\square$

4.2 Graf funkcije

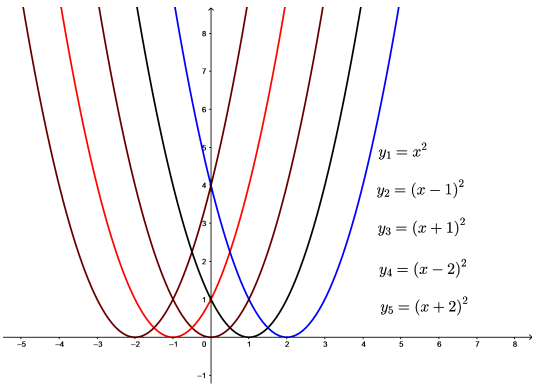


3. Graf funkcije je množica vseh urejenih parov $(x, f(x))$, kjer je $x \in D_f$. Njegove elemente predstavimo s točkami v koordinatnem sistemu. Za dani graf na levi strani izpolnite tabelo na desni strani. Opazite da je $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



4. Na desni strani je narisanih pet funkcij $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 - 1$, $y_3 = x^2 + 1$, $y_4 = x^2 - 2$ in $y_5 = x^2 + 2$. Pojasnite, katera od njih sta y_3 in y_4.



5. Na levi strani je narisanih pet funkcij $y_1 = x^2$, $y_2 = (x-1)^2$, $y_3 = (x+1)^2$, $y_4 = (x-2)^2$ in $y_5 = (x+2)^2$. Pojasnite, katera od njih sta y_3 in y_4.

4.3 Kviz

Ugotovite, ali so naslednje trditve resnične ali neresnične.

(i) Če je $X = \{1, 2, 3\}$ potem $X \times X = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ Da Ne

(ii) *Relacija* R na množici X je podmnožica $R \subseteq X \times X$. Da Ne

(iii) Če velja $(x, y) \in R$, rečemo, da je element x *v relaciji* R z elementom y; v rabi pogosteje srečamo zapisa xRy ali $R(x, y)$. Da Ne

(iv) Na množici $\mathbb{Z}$ dane so relacije
$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$, $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,
$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \vee a = -b\}$,
$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,
$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,
$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

$(1,1) \in R_1$ in $(1,1) \in R_3$ in $(1,1) \in R_4$ in $(1,1) \in R_6$. Da Ne $(1,1) \in R_2$. Da Ne $(1,2) \in R_1$ in $(1,2) \in R_6$. Da Ne $(1,2) \in R_5$. Da Ne $(2,1) \in R_2$ in $(2,1) \in R_5$ in $(2,1) \in R_6$. Da Ne $(2,1) \in R_3$. Da Ne $(1,-1) \in R_5$. Da Ne $(1,-1) \in R_2$ in $(1,-1) \in R_3$ in $(1,-1) \in R_6$. Da Ne $(2,2) \in R_1$. Da Ne $(2,2) \in R_3$ in $(2,2) \in R_4$. Da Ne

(v) Relacije R na množici X je *refleksivna* če in samo če $\forall x \in X : xRx$. Relacije R na množici X je *simetrična* če in samo če $\forall x, y \in X : (xRy \Rightarrow yRx)$. Relacije R na množici X je *antisimetrična* če in samo če $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$. Relacije R na množici X je *tranzitivna* če in samo če $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$. Da Ne

(vi) Relacija je *ekvivalenčna*, natanko tedaj, ko je refleksivna, simetrična in tranzitivna. Da Ne

(vii) *Ekvivalenčni razred elementa* x (glede na ekvivalenčno relacijo R na množici X) je množica vseh takih elementov y množice X, ki so v relaciji z elementom x:

$$[x]_R = \{y \in X \mid yRx\}.$$

Da Ne

(viii) Ekvivalenčna relacija R razbije množico X na ekvivalenčne razrede, ki so med seboj paroma disjunktni, kar pomeni, da vsak element $x \in X$ leži v natanko enem ekvivalenčnem razredu ekvivalenčne relacije R. Unija vseh ekvivalenčnih razredov relacije R je enaka množici X. Da Ne

4.4 Naloge za začetnike

1. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4\}$ je definirana relacija R s predpisom:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ deli } y.$$

Napiši vse elemente relacije R.

2. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4\}$ so definirane relacije R_i $(1 \leq i \leq 6)$ na naslednji način: $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$, $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$, $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$, $R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$, $R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, $R_6 = \{(3,4)\}$. Katere od teh relacij so refleksivne? Katere od teh relacij so simetrične? Katere od teh relacij so antisimetrične? Katere od teh relacij so tranzitivne?

4.5 Običajne naloge

1. Naj bo $X = \{a, b, c, d, e\}$ in $R = \{(e,c), (b,c), (b,b), (e,b), (c,e)\}$. (a) Ali je R relacija na množici X? (b) Razišči naslednje lastnosti relacije R: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost in tranzitivnost. (c) Poišči najmanjšo refleksivno relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R. (d) Poišči najmanjšo simetrično relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R. (e) Poišči najmanjšo antisimetrično relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R. (f) Poišči najmanjšo tranzitivno relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R. (g) Ali obstaja taka ekvivalenčna relacija E na množici X, da je $R \subseteq E$?

2. V množico vseh celih števil $\mathbb{Z}$ vpeljemo relacijo kongruence po modulu m, kjer je m neko od nič različno celo število, s predpisom

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \text{ deljivo z } m.$$

Pokaži, da je ta relacija ekvivalenčna in poišči ekvivalenčni razred poljubnega celega števila a.

4.6 Naloge z izpita

1. Na množici $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 10\}$ je definirana relacija

$$R = \{(m,n) \,|\, b(m) = b(n)\},$$

kjer je $b(k)$ število enic v dvojiškem zapisu števila k. Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi njene ekvivalenčne razrede.

2. V potenčno množico $\mathcal{P}(N)$ množice $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ vpeljemo relacijo R s predpisom

$$ARB \Leftrightarrow A \cup \{1\} = B \cup \{10\}.$$

Razišči naslednje lastnosti relacije R: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost in tranzitivnost.

Navodila: [$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$]. [refleksivne: R_3 in R_5. simetrične: R_2 in R_3. antisimetrične: R_4, R_5 in R_6. tranzitivne: R_4, R_5 in R_6].

[1.](a) Da. [1.](b) Relacija nima nobene od naštetih lastnosti. [1.](c) $R \cup \{(a,a),(c,c),(d,d),(e,e)\}$. [1.](d) $R \cup \{(c,b),(b,e)\}$. [1.](e) Ne obstaja. [1.](f) $R \cup \{(e,e),(c,c),(c,b),(b,e)\}$. [1.](g) Obstaja. Npr.: unija množic pod točkami (c), (d) in (f). [2.] $[a] = \{b + km \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

[1.] $[1] = \{1,2,4,8\}$, $[3] = \{3,5,6,9,10\}$, $[7] = \{7\}$. [2.] Relacija R je antisimetrična in tranzitivna.