12 Zaporedja, 1. del

Zaporedje u je preslikava, ki ima za domeno kakšno podmnožico naravnih števil. Sliko števila n, $u(n)$, običajno označimo z u_n in ji rečemo *člen* zaporedja. n imenujemo *indeks* člena u_n. Zaporedje imenujemo *končno*, če je preslikava u definirana na končni podmnožici naravnih števil; sicer je zaporedje *neskončno*. Zaporedje s splošnim členom u_n bomo označili z $\{u_n\}$, (včasih pa kar z u_n ali u). Če ne bo posebej drugače rečeno, bomo z zaporedjem mislili neskončno zaporedje, ki ima za indekse vsa naravna števila. Zaporedje lahko podamo na različne načine: s formulo za splošni člen (in množico indeksov, če ta ni enaka $\mathbb{N}$), z rekurzijo (in s potrebnim številom začetnih členov) ali s končnim zaporedjem prvih nekaj členov zaporedja. V prvih dveh primerih je zaporedje natanko določeno, tretji način pa ni vedno povsem natančen, zato ga smemo uporabiti samo takrat, ko smo prepričani, da je jasno, katero zaporedje mislimo (glej nalogo 2.2). Če je zaloga vrednosti u podmnožica realnih števil, je zaporedje *realno*. Tu bomo obravnavali samo realna zaporedja.

Primeri: 1. 2,7,12,17,...,32 je končno zaporedje; splošni člen zaporedja lahko izrazimo s formulo $u_n = u(n) = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$, $n = 1, 2, \ldots, 7$.

2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ je neskončno zaporedje s splošnim členom $u_n = u(n) = \frac{1}{n}$.

3. 1, 4, 1, 5, 9, 2, 7, ... so prvi členi zaporedja, ki ga natančno definiramo takole: u_n je n–ta decimalka v decimalnem zapisu števila π.

4. Fibonaccijevo zaporedje je definirano rekurzivno z: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ in $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Prvih nekaj členov zaporedja je 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...

Podzaporedje zaporedja x_n je zaporedje x_{n_j}, kjer je n_j strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Če ne bo posebej drugače rečeno, bodo vsa obravnavana zaporedja preslikave $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, torej bodo definirane na vsej množici naravnih števil.

Število L je *limita* zaporedja u_n, če za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ obstaja tako naravno število N, da je $|u_n - L| < \varepsilon$ za vsak indeks $n > N$. To na kratko zapišemo z $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$.

Primer: Če je $u_n = 3+1/n = (3n+1)/n$ ($n \in \mathbb{N}$), je prvih nekaj členov zaporedja enako 4,7/2,10/3,13/4,.. lahko pokažemo, da je $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

Če obstaja limita zaporedja, pravimo, da je zaporedje *konvergentno*. Sicer je zaporedje *divergentno*. Konvergentno zaporedje ima natanko eno limito

V vsaki okolici limite ležijo vsi razen končno mnogo členov zaporedja

Pogosti sta naslednji dve intuitivni predstavi o limiti, ki nista vedno pravilni:

Primeri: 1. Ni res, da se "členi konvergentnega zaporedja se približujejo limiti, vendar je nikoli ne doseže jo". Protiprimera:

$3, 3, 3, 3, 3, \ldots$ konvergira k 3

$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \ldots$ konvergira k 0

2. Ni res, da "členi zaporedja rastejo (padajo) proti limiti". Protiprimera:

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \ldots$ konvergira k 0

$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}, \frac{3}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{2}{10000}, \frac{3}{10000}, \frac{4}{10000}, \ldots$ konvergira k 0, čeprav se nekatera (končna) podzaporedja, na primer $\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}, \frac{3}{1000}$, "oddaljujejo" od 0

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ zapišemo, če lahko za poljubno število M najdemo tako število N, da je $a_n > M$ za vse $n > N$. Podobno $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pomeni, da lahko za poljubno število M najdemo tako število N, da je $a_n < M$ za vse $n > N$. Ker ∞ in $-\infty$ nista realni števili, takih zaporedij ne štejemo za konvergentna.

Naloge za začetnike

1. Zapiši nekaj prvih členov naslednjih zaporedij.

(a) $\left\{\dfrac{2n-1}{3n+2}\right\}$.

(b) $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$.

(c) $a_{n+1} = a_n + 5$, $a_0 = -3$.

(d) $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$, $a_0 = 8$.

(e) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}$.

2. Dva študenta sta dobila nalogo, da poiščeta pravilo za nadaljevanje zaporedja 1, 16, 81, 256,... in zapišeta 5-ti člen zaporedja. Prvi študent je našel pravilo $u_n = n^4$. Drugi študent, ki je spregledal to enostavno rešitev, pa je po premisleku predlagal $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$. Kateri študent je imel prav?

Običajne naloge

1. Zaporedje je dano s predpisom $u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$.

(a) Zapiši prvi, peti, deseti, stoti in tisoči člen zaporedja in poskusi uganiti limito.

(b) Uporabi definicijo limite in preveri, ali si uganil pravilno.

2. Dokaži, da zaporedje $u_n = 3 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ konvergira k 3.

3. Pojasni, kaj natančno pomeni zapis $\lim_{n\to\infty}(-2^{3n}) = -\infty$.

Naloge z izpita

1. Dokaži, da $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{2}$ ne obstaja.

2. Dokaži, da velja trditev: v vsaki okolici limite so vsi členi razen končno mnogo členov zaporedja.

3. Neskončno podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in ima isto limito.

12.1 Stekališča in o limitah zaporedij

Število S je *stekališče* zaporedja u_n, če za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ in za vsako naravno število N obstaja tak indeks $n > N$, da je $|u_n - S| < \varepsilon$. Zaporedje ima lahko več stekališč. Limita zaporedja je tudi stekališče tega zaporedja. Če ima omejeno zaporedje natanko eno stekališče, potem je zaporedje konvergentno in v tem primeru je stekališče tudi limita zaporedja.

Primeri: 1. Zaporedje $u_n = (-1)^n$, katerega prvi členi so -1,1,-1,1,-1,1,... ima stekališči 1 in -1.

2. Zaporedje $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, 8, \ldots$, ima splošni člen $u_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ liho} \\ n & n \text{ sodo} \end{cases}$. Edino stekališče zaporedja je 0. (Zaporedje pa ni konvergentno, saj ni omejeno.)

3. Število 1 je stekališče zaporedja s splošnim členom $u_n = \frac{n}{n+1}$. (Prvih nekaj členov zaporedja je $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$) Ker je zaporedje konvergentno, je 1 tudi limita.

4. Zaporedje 1,2,1,3,1,4,1,5,1,6,... ima stekališče 1, vendar 1 ni limita tega zaporedja.

V vsaki okolici stekališča leži neskončno mnogo členov zaporedja

Če sta a in b konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, potem je

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = AB$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$ če je $B \neq 0$.

   Če je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potem $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ ne obstaja.

   Če je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ lahko obstaja ali pa ne.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^p = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^p = A^p$ za poljubno realno število p, če le obstaja A^p.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} p^{a_n} = p^{\lim_{n\to\infty} a_n} = p^A$ za poljubno pozitivno realno število p.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

Naloge za začetnike

1. Določi stekališča zaporedja $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

2. Izračunaj naslednje limite

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n}{6n^2 - 2n - 6}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{n(n+1)}{n-1} - \dfrac{n^2}{n+1} \right\}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 4n}{2n - 1}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{3n+7} \right)^4$.

Naloge z izpita

1. Dokaži, da velja trditev: v vsaki okolici stekališča je neskončno mnogo členov zaporedja.

2. Dokaži trditev: Če limita zaporedja obstaja, potem je natanko določena.

3. Dokaži: Če je $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, potem od nekega indeksa naprej vsi členi zaporedja po absolutni vrednosti večji od $\frac{|B|}{2}$.

12.2 Omejena in monotona zaporedja, Cauchyjev konvergenčni kriterij in število e

Bodi M neka konstanta. Če je $u_n \leq M$ za vse indekse n, rečemo, da je zaporedje $\{u_n\}$ *navzgor omejeno*, M pa je *zgornja meja* zaporedja. Podobno je konstanta m *spodnja meja*, zaporedje $\{u_n\}$ pa *navzdol omejeno*, če je $u_n \geq m$ za vse indekse n.

Zaporedje je *omejeno*, če je navzgor in navzdol omejeno. Drugače zapisano, zaporedje $\{u_n\}$ je omejeno, če lahko najdemo števili m in M, tako da velja $m \leq u_n \leq M$. Zaporedje je omejeno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno zaporedje absolutnih vrednosti zaporedja, $|u_n| \leq P$. Vsako konvergentno zaporedje je omejeno. Omejeno zaporedje pa ni nujno konvergentno.

Zaporedje je *naraščajoče*, če velja $u_{n+1} \geq u_n$ za vsak n. Zaporedje je *strogo naraščajoče*, če velja $u_{n+1} > u_n$ za vsak n. Zaporedje je *padajoče*, če velja $u_{n+1} \leq u_n$ za vsak n. Zaporedje je *strogo padajoče*, če velja $u_{n+1} < u_n$ za vsak n. Naraščajoča in padajoča zaporedja imenujemo z enotnim izrazom *monotona*.

Primeri: 1. Zaporedje 1,1.1,1.11,1.111,1.1111,... je naraščajoče. Je tudi strogo naraščajoče.

2. Zaporedje 1,-1,1,-1,1,-1,... je omejeno, vendar ni ne naraščajoče ne padajoče, torej ni monotono.

3. Zaporedje 0,-1,-2,-3,-4,... je strogo padajoče in ni navzdol omejeno. Zaporedje je navzgor omejeno.

Vsako omejeno monotono zaporedje je konvergentno.

Natančna zgornja meja (supremum) zaporedja u_n je natančna zgornja meja zaloge vrednosti funkcije u $\quad \sup u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Natančna spodnja meja (infimum) zaporedja u_n je natančna spodnja meja zaloge vrednosti funkcije u. $\inf u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zaporedje $\{u_n\}$ je konvergentno, če in samo če za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ lahko najdemo tako število N, da je $|u_p - u_q| < \varepsilon$ za vsak par indeksov $p, q > N$. S Cauchyjevim kriterijem lahko dokažemo konvergenco zaporedja tudi, če ne poznamo limite. (Zaporedja, ki ustrezajo temu kriteriju, imenujemo *Cauchyjeva*.)

Izkaže se, da sta zaporedji $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ in $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$ konvergentni in imata isto limito. Ker se to število na naraven način pojavi še večkrat, ima posebno ime, število e.

Naloge za začetnike

1. Zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (a) je omejeno in (b) ni konvergentno.

2. Pokaži, da zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ni Cauchyjevo.

Običajne naloge

1. Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$ (a) naraščajoče (b) navzgor omejeno (c) navzdol omejeno (d) omejeno (e) konvergentno.

Naloge z izpita

1. Omejeno in monotono zaporedje je konvergentno.

2. Bodita a_n in b_n konvergentni zaporedji z isto limito, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$. Naj za vsak člen zaporedja u_n velja $a_n \leq u_n \leq b_n$. Dokaži, da je $\lim_{n\to\infty} u_n = L$.

12.3 Rešitve nalog

Zapiši nekaj prvih členov naslednjih zaporedij.

- $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$ **Rešitev:** $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \ldots$
- $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ **Rešitev:** $\frac{2}{1}, 0, \frac{2}{3^3}, 0, \frac{2}{5^3}, \ldots$
- $a_{n+1} = a_n + 5, \quad a_0 = -3$ **Rešitev:** $-3, 2, 7, 12, 17, \ldots$

  Zaporedje je primer *aritmetičnega zaporedja.*
- $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}, \quad a_0 = 8$ **Rešitev:** $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

  Zaporedje je primer *geometrijskega zaporedja.*
- $\left\{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}$ **Rešitev:** $\frac{x}{1!}, -\frac{x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, -\frac{x^7}{7!}, -\frac{x^9}{9!}, \ldots$

  Izraz $n!$ imenujemo n-*fakulteta* ali n-*faktoriala* in definiramo za nenegativna cela števila induktivno z: $0! = 1$ in $(n+1)! = (n+1)n!$. Torej je $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2! = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 24$, $5! = 120$, itd.

Dva študenta sta dobila nalogo, da poiščeta pravilo za nadaljevanje zaporedja $1, 16, 81, 256, \ldots$ in zapišeta 5–ti člen zaporedja. Prvi študent je našel pravilo $u_n = n^4$. Drugi študent, ki je spregledal to enostavno rešitev, pa je po premisleku predlagal $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$. Kateri študent je imel prav?

Prvi štirje členi zaporedja $u_n = n^4$ so $1^4 = 1, 2^4 = 16, 3^4 = 81, 4^4 = 256$, kar se ujema z zgoraj zapisanim. Po tem pravilu je peti člen enak $5^4 = 625$.

Za zaporedje $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$ pa dobimo $u_1 = 1$, $u_2 = 16$, $u_3 = 81$ in $u_4 = 256$. Po tem pravilu je $u_5 = 601$.

Oba študenta sta torej imela prav. V splošnem velja, da zaporedje ni določeno s končno mnogo začetnimi členi in se ga da nadaljevati na neskončno mnogo načinov.

Zaporedje je dano s predpisom $u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$. (a) Zapiši prvi, peti, deseti, stoti in tisoči člen zaporedja in poskusi uganiti limito. (b) Uporabi definicijo limite in preveri, ali si uganil pravilno.

(a)

$n=1$	$n=5$	$n=10$	$n=100$	$n=1000$	$n=10000$	$n=100000$
0.22222...	0.56000...	0.64444...	0.73827	0.74881...	0.74988...	0.74998...

Iz tabele uganemo, da utegne biti limita enaka $0.7500... = \frac{3}{4}$.

(b) Pokazati moramo, da za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo tako število N, da je $|u_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon$ za vse $n > N$.

$|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}| = |\frac{-19}{4(4n+5)}| < \varepsilon$ velja natanko takrat, ko je $\frac{19}{4(4n+5)} < \varepsilon$. Odtod pa izračunamo $\frac{4(4n+5)}{19} > \frac{1}{\varepsilon}$, $4(4n+5) > \frac{19}{\varepsilon}$, $4n > \frac{19}{4\varepsilon} - 5$ in $n > \frac{19/(4\varepsilon)-5}{4}$.

Če pri danem ε izberemo $N := \left\lceil \frac{19/(4\varepsilon)-5}{4} \right\rceil$, vidimo, da za vse $n > N$ velja $|u_n - \frac{3}{4}| < \varepsilon$.

(Funkcija $\lceil x \rceil$ nam da najmanjše celo število, ki je večje ali enako realnemu številu x. Glej tudi nalogo 3.4.)

Na primer pri $\varepsilon = 0.001$ dobimo $N = \left\lceil \frac{19/(4\cdot 0.001)-5}{4} \right\rceil = \lceil 1186\frac{1}{4} \rceil = 1187$. Vsi členi zaporedja od 1187-tega dalje se od limitne vrednosti $\frac{3}{4}$ razlikujejo za manj kot 0.001.

Dokaži, da zaporedje $u_n = 3 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, , 3, \ldots$ konvergira k 3.

Za dani ε izberimo $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Za poljubni $n > N$ je potem

$$|u_n - L| = |3 + \frac{1}{n} - 3| < \frac{1}{N} \le \varepsilon,$$

torej zaporedje konvergira k $L = 3$. Krajše zapisano $\lim_{n\to\infty}(3 + \frac{1}{n}) = 3$.

Pojasni, kaj natančno pomeni zapis $\lim_{n\to\infty}\left(-2^{3n}\right) = -\infty$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pomeni, da lahko za poljubno število m najdemo tak indeks N, da je $a_n < m$ za vse $n > N$.

V našem primeru iz $-2^{3n} < m = -M$ dobimo $2^{3n} > M$ in $3n > \log_2 M$. Če je torej $n > N := \left\lceil \frac{\log_2 M}{3} \right\rceil$, potem je $a_n < m$.

$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ ne obstaja.

Prvi členi zaporedja $\sin \frac{n\pi}{2}$ so $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ Zaporedje ima stekališča -1, 0 in 1, zato nima limite.

Dokaži, da velja trditev: v vsaki okolici limite so vsi členi razen končno mnogo členov zaporedja.

Bodi L limita zaporedja u_n. Izberimo si okolico stekališča L, na primer $U = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ za neko število $\varepsilon > 0$. Pokazali bomo, da so v U vsi členi zaporedja od nekega indeksa dalje.

Po definiciji limite obstaja tak indeks N, da za vse $n > N$ velja $|u_n - L| < \varepsilon$. u_n je torej element U za $n > N$, to pa smo želeli dokazati.

Neskončno podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in ima isto limito.

Bodi u_n zaporedje z limito L. v_n naj bo podzaporedje zaporedja u_n, definirano z zaporedjem indeksov $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Torej je $v_1 = u_{n_1}$, $v_2 = u_{n_2}$, $v_3 = u_{n_3}$, in tako naprej.

Po definiciji limite za vsak pozitiven ε obstaja tako število N, da za vse indekse $n > N$ velja $|u_n - L| < \varepsilon$. Za zaporedje v_n je trditev 'še bolj res'. Vzemimo ista ε in N. Vzemimo poljuben $i > N$. Ker je $v_i = u_{n_i}$ in je $n_i \geq i$, je $|v_i - L| = |u_{n_i} - L| < \varepsilon$. L je torej tudi limita zaporedja v_n.

Določi stekališča zaporedja $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Zaporedje ima stekališči -1 in 1.

Dokaži, da velja trditev: v vsaki okolici stekališča je neskončno mnogo členov zaporedja.

Bodi S stekališče zaporedja u_n. Izberimo si okolico stekališča S, na primer $U = (S - \delta, S + \delta)$ za neko število $\delta > 0$. Pokazali bomo, da je v U neskončno mnogo členov zaporedja. Postavimo N:=1. Po definiciji stekališča obstaja tak indeks $n_1 > N$, da je $|u_{n_1} - S| < \delta$ in u_{n_1} je element U. Sedaj izberimo za N novo vrednost, in sicer kar indeks pravkar poiskanega člena zaporedja $N = n_1$. K temu novemu N (in δ) spet obstaja indeks $n_2 > N$, da velja $|u_{n_2} - S| < \delta$, saj je S stekališče zaporedja u_n. Tako smo našli že drugi člen zaporedja, ki je v U. Podobno najdemo tretji, četrti, ... člen zaporedja, ki je v U.

Dokaži trditev: Če limita zaporedja obstaja, potem je natanko določena.

Dokazali bomo: če je $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ in $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$, potem mora biti $l_1 = l_2$.

Recimo, da za neko zaporedje u_n velja $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ in $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$. Potem je po definiciji limite za vsak $\varepsilon > 0$ mogoče najti tako število N_1, da je $|u_n - l_1| < \frac{1}{2}\varepsilon$ za vse $n > N_1$ in tako število N_2, da je $|u_n - l_2| < \frac{1}{2}\varepsilon$ za vse $n > N_2$. Definirajmo $N = \max\{N_1, N_2\}$. Za poljuben $n > N$ potem velja $|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. (Uporabili smo trikotniško neenakost (2).) Absolutna vrednost razlike $|l_1 - l_2|$ je torej število, ki je manjše od katerega koli pozitivnega števila, torej mora biti enako nič. Potem pa mora biti $l_1 = l_2$.

Dokaži trditev: Če limita zaporedja obstaja, potem je natanko določena.

Dokazali bomo: če je $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ in $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$, potem mora biti $l_1 = l_2$.

Recimo, da za neko zaporedje u_n velja $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ in $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$. Potem je po definiciji limite za vsak $\varepsilon > 0$ mogoče najti tako število N_1, da je $|u_n - l_1| < \frac{1}{2}\varepsilon$ za vse $n > N_1$ in tako število N_2, da je $|u_n - l_2| < \frac{1}{2}\varepsilon$ za vse $n > N_2$. Definirajmo $N = \max\{N_1, N_2\}$. Za poljuben $n > N$ potem velja $|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. (Uporabili smo trikotniško neenakost (2).) Absolutna vrednost razlike $|l_1 - l_2|$ je torej število, ki je manjše od katerega koli pozitivnega števila, torej mora biti enako nič. Potem pa mora biti $l_1 = l_2$.

Dokaži: Konvergentno zaporedje je omejeno.

Če je $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, potem moramo pokazati, da obstaja neko število P, tako da je $|a_n| \le P$ za vse n. (Glej definicijo na strani 43.)

Po trikotniški neenakosti je $|a_n| = |a_n - A + A| \le |a_n - A| + |A|$. Izberimo si neko število ε. Ker je A limita zaporedja, obstaja tak indeks N, da je $|a_n - A| < \varepsilon$ in zato $|a_n| < \varepsilon + |A|$ za vse $n > N$. Če za P vzamemo največje od števil $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_N|, \varepsilon + |A|$, je očitno $|a_n| < P$ za vsak n.

Dokaži: Če je $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, potem so od nekega indeksa naprej vsi členi zaporedja po absolutni vrednosti večji od $\frac{|B|}{2}$.

Podobno kot v prejšnji nalogi ocenimo $|B| = |B - b_n + b_n| \le |B - b_n| + |b_n|$. Ker je B limita zaporedja, lahko najdemo tak indeks N, da bo $|B - b_n| < \frac{|B|}{2}$ za vse $n > N$. Za take n je potem $|B| < \frac{|B|}{2} + |b_n|$ in $|b_n| > \frac{|B|}{2}$.

Izračunaj naslednje limite

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n}{6n^2 - 2n - 6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 - 5/n}{6 - 2/n - 6/n^2} = \dfrac{3-0}{6-0-0} = \dfrac{3}{6}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{n(n+1)}{n-1} - \dfrac{n^2}{n+1} \right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)^2 - n^2(n-1)}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n}{1-1/n^2} = \frac{3+0}{1-0} = 3$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1}} = 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+4/n}{2/n - 1/n^2}$ Ker je limita imenovalca enaka 0, limita števca pa je različna od 0, limita kvocienta ne obstaja. Zaporedje je neomejeno. Res lahko za poljubno število M najdemo tak indeks N, da bo izraz $\frac{3n^2+4n}{2n-1} > \frac{3n}{2}$ večji od M za vse $n > N$. To pa lahko zapišemo tudi z

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{2n-1} = \infty$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{3n+7}\right)^4 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+4/n}{3+7/n}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

Zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (a) je omejeno in (b) ni konvergentno.

(a) $|a_n| = |(-1)^n \frac{n}{n+1}| = |\frac{n}{n+1}| < 1$.

(b) 1 in -1 sta stekališči zaporedja a_n.

Druga metoda. (b) Zaporedje ni Cauchyjevo, zato ni konvergentno.

Omejeno in monotono zaporedje je konvergentno.

Predpostavimo, da je zaporedje u_n naraščajoče. Naj bo M supremum zaporedja u_n, $M = \sup\{u_n\}$. Dokazali bomo $\lim_{n\to\infty} u_n = M$. Iz definicije supremuma (glej stran 17) sledi, da je $M \geq u_i$ za vsak indeks i in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja element u_N, za katerega velja $u_N > M - \varepsilon$. Ker je zaporedje u_n naraščajoče, za vse $n > N$ velja $u_n > M - \varepsilon$. Torej $M - \varepsilon < u_n \leq M$ ali $|M - u_n| < \varepsilon$ za vse $n > N$, in M je limita zaporedja u_n.

Za primer, ko je u_n padajoče zaporedje, je dokaz podoben.

Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$ (a) naraščajoče (b) navzgor omejeno (c) navzdol omejeno (d) omejeno (e) konvergentno.

(a) Zaporedje je naraščajoče, če je $u_{n+1} \geq u_n$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$. V našem primeru je treba preveriti, ali velja neenakost

$$\frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} \geq \frac{2n-7}{3n+2}.$$

Množimo s $(3(n+1)+2)(3n+2)$, pa dobimo $2(n+1) - 73n + 2 \geq 2n - 73(n+1) + 2$ in $6n^2 - 11n - 10 \geq 6n^2 - 11n - 35$, kar očitno velja. Če računamo v nasprotnem vrstnem redu, vidimo, da je zaporedje res naraščajoče. Ker je $-10 > -35$, je zaporedje celo strogo naraščajoče.

(b) Če zapišemo nekaj členov zaporedja, lahko kakšno zgornjo mejo uganemo, na primer 2. Za dokaz omejenosti moramo dokazati $u_n \leq 2$ za vsak indeks n. $\frac{2n-7}{3n+2} \leq 2$ velja natanko tedaj kot $2n - 7 \leq 2(3n+2)$ ali $2n - 7 \leq 6n + 4$ ali $-4n \leq 11$, kar je očitno res.

(c) Ker je zaporedje naraščajoče, je spodnja meja kar prvi člen zaporedja $u_1 = -1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$.

(d) Zaporedje je omejeno, saj je navzgor in navzdol omejeno. (Ker velja $0 \leq u_n \leq 2$, lahko zapišemo $|u_n| \leq 2$.)

(e) Zaporedje je konvergentno, ker je monotono in omejeno. Res je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-7/n}{3+2/n} = \frac{2}{3}.$$

Bodita a_n in b_n konvergentni zaporedji z isto limito, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$. Naj za vsak člen zaporedja u_n velja $a_n \leq u_n \leq b_n$. Dokaži, da je $\lim_{n\to\infty} u_n = L$.

Naj bo dan $\varepsilon > 0$. Zaradi konvergentnosti zaporedij a_n in b_n obstajata taki naravni števili N_1 in N_2, da velja $|L - a_n| < \varepsilon$ za vse indekse $n > N_1$ in $|L - b_n| < \varepsilon$ za vse indekse $n > N_2$. Za vse $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ pa potem velja

$$L - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < L + \varepsilon \quad .$$

torej je $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$ za vse $n > N$ in

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \ .$$

Posledica: Če je $0 \leq u_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, potem je tudi $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ni Cauchyjevo.

Naj bo ε poljubno pozitivno število, manjše od 1. Ocenimo razliko $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - (-1)^n \frac{n}{n+1}| = |\frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{n+1}| = |\frac{(n+1)^2 + n(n+2)}{(n+1)(n+2)}| = |\frac{(n+1)^2 + n(n+2)}{(n+1)(n+2)}| = |\frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 3n + 2}| \geq 1 = \varepsilon$, za vse $n > 1$. Zaporedje torej ni Cauchyjevo.