MNOŽICE

Množica je temeljni pojem matematike in ni definiran. Vse kar potrebujemo za opredelitev poljubne množice, je obstoj (nedvoumnega, smiselnega) kriterija, s katerim presodimo, ali ji reč (element) pripada ali ne:

$a \in A$ (a je element množice A oz. a pripada množici A),

$a \notin A$ (a ni element množice A oz. a ne pripada množici A).

Množico lahko opišemo tako, da v zavitih oklepajih naštejemo vse njene elemente, ali pa tako, da navedemo lastnost, ki točno določa elemente množice.

Če so vse množice, ki jih obravnavamo, podmnožice neke fiksirane množice, potem to množico imenujemo **univerzalna množica** in jo označimo z $\mathcal{U}$.

Podmnožica: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U} : (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Enakost množic: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Prazna množica $\emptyset$ (oz. $\{\}$) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa in je podmnožica vsake druge množice.

Potenčna množica množice A je množica vseh njenih podmnožic in jo označimo s $\mathcal{P}(A)$.

Za ponazarjanje množic in operacij z množicami uporabljamo **Vennove diagrame.**

Operacije z množicami

- **Unija množic:** $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$
- **Presek množic:** $A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$
- **Disjunktni množici:** $A \cap B = \emptyset$
- **Komplement množice:** $A^{\complement} = \{x \,|\, x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$
- **Razlika množic:** $A \setminus B = A - B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Vsota množic:** $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- **Kartezični produkt:** $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$
- **Potenčna množica:** $\mathcal{P}(A) = \{B \,|\, B \subseteq A\}$

Naj bo $\mathcal{U}$ univerzalna množica in Λ neka **družina množic** (torej Λ je množica, katere elementi so množice).

- **Unija družine** Λ je množica
$$\bigcup_{A \in \Lambda} A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ za vsaj en } A \in \Lambda\}$$

- **Presek družine** Λ je množica
$$\bigcap_{A \in \Lambda} A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ za vsak } A \in \Lambda\}$$

Osnovni zakoni teorije množic

- **Združevanje (asociativnost):**
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- **Zamenjava (komutativnost):**
  $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$
- **Porazdelitev (distributivnost):**
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- **De Morganova zakona:**
  $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$
  $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
- **Poenostavitev (simplifikacija):**
  $A \cap A = A, \qquad A \cup A = A$
  $A \cap \mathcal{U} = A, \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
  $A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A$
  $(A^{\complement})^{\complement} = A, \qquad \mathcal{U}^{\complement} = \emptyset, \qquad \emptyset^{\complement} = \mathcal{U}$
  $A \cap A^{\complement} = \emptyset, \qquad A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$

Naloge

1. Utemelji, ali opis (zapis) pravilno določa neko množico.

   (a) $\{2, 4\}$
   (b) $\{2, 4, \ldots\}$
   (c) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   (d) $\{|x| \mid x \in \mathbb{R}\}$
   (e) $\{x \mid |x| = 1\}$

2. Naj bodo podane množice:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{3, 4, 5\}, \qquad C = \{\{1\}\}, \qquad D = \{\{1\}, 1\}, \qquad E = \{1\}.$$

   Preveri pravilnost naslednjih izjav:

   (a) $E \in C$
   (b) $E \in D$
   (c) $E \subseteq D$
   (d) $C \subseteq D$
   (e) $E \cup \{1\} \subseteq C$
   (f) $E \cup C = D$
   (g) $E \subseteq A$
   (h) $E \in A$
   (i) $E \subseteq C$
   (j) $C \in D$

   Glede na podane množice, določi še množice:

   (i) $A \cup B$
   (ii) $A \cap B$
   (iii) $A \setminus B$
   (iv) $B \setminus A$
   (v) $\mathcal{P}(B)$
   (vi) $A \times B$

3. Z relacijama $=$ in $\subseteq$ paroma primerjaj množice:

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$, $C = \{1, 2, 1\}$, $D = \{x \mid x = 1 \land x = 2\}$,
$E = \{x \mid x = 1 \lor x = 2\}$, $F = (1, 2)$.

4. Ali je med množicami $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{0\}$ kaj enakih?

5. Poišči potenčno množico: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

6. Določi naslednje množice:

   (a) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$
   (b) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$
   (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$
   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$
   (e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$

7. Poišči vse nabore množic A, B, C, za katere je

$$B \setminus A = A \cup C = C \cap B = \{1\}$$

8. Poišči primer množic A, B, C, D, ki hkrati zadoščajo danim pogojem.

   (a) $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$;
   (b) $A \in B$, $B \subset C$, $C \in D$;
   (c) $A = \{B\}$, $B \subset A$;

9. Naj bodo A, B in C poljubne množice. Če meniš, da je spodnja izjava resnična, jo dokaži, sicer pa navedi primer množic, za katere je izjava neresnična?

$$A \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus C \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

10. Utemelji, ali za vsako trojico množic A, B, C veljajo enakosti

   (a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$
   (b) $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
   (c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

11. Naj bodo A, B, C in D poljubne množice. V primeru, da enakosti veljata, jih dokaži, sicer pa navedi protiprimer.

    (a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
    (b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

12. Z uporabo osnovnih zakonov teorije množic dolokaži enakosti:

    (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
    (b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
    (c) $A + (A \cap B) = A \setminus B$
    (d) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

13. Dokaži, da za poljubne množice A, B, C veljajo naslednje izjave

    (a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
    (b) $(A \cup B) \setminus C \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq A \cup C$
    (c) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
    (d) $((A \cap C) \cup (B \cap C^{\complement}))^{\complement} = (A^{\complement} \cap C) \cup (B^{\complement} \cap C^{\complement})$

14. Z besedami opiši $\bigcup\limits_{X \in M} X$ in $\bigcap\limits_{X \in M} X$, če je

    (a) M množica vseh trikotnikov včrtanih danemu krogu (pri tem trikotnik obravnavamo kot množico točk znotraj trikotnika in na njegovih stranicah);
    (b) M množica vseh enakostraničnih trikotnikov včrtanih danemu krogu.

15. Za dano družino množic $\mathcal{A}$ določi množici $U = \bigcup\limits_{X \in \mathcal{A}} X$ in $P = \bigcap\limits_{X \in \mathcal{A}} X$, nato pa še množice $\bigcup\limits_{X \in U} X$, $\bigcap\limits_{X \in U} X$, $\bigcup\limits_{X \in P} X$ in $\bigcap\limits_{X \in P} X$, če je $\mathcal{A} = \{\{B, C\}, \{B, D\}\}$, kjer so B, C, D poljubne množice.

Rešitve nekaterih nalog

1. (a) Da, (b) Ne, (c) Da, (d) Da, (e) Ne.

2. (a) Da, (b) Da, (c) Da, (d) Da, (e) Ne, (f)Da, (g)Da, (h)Ne, (i)Ne, (j)Ne.

   (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   (ii) $A \cap B = \{3, 4\}$
   (iii) $A \setminus B = \{1, 2\}$
   (iv) $B \setminus A = \{5\}$
   (v) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$
   (vi) $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), \ldots, (4, 5)\}$

3. $A = B = C = E$, $D = \emptyset$ je podmnožica vsake od množic, F ni podmnožica nobene od naštetih množic.

4. Ne.

5. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

6. (a) $\emptyset$, (b) $\{\emptyset\}$, (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, (d) $\{\{\emptyset\}\}$, (e) $\{\emptyset\}$

7. $A = \emptyset$, $B = C = \{1\}$

8. (a) $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{\{1\}\}$, $D = \{1, \{1\}\}$

   (b) $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{\emptyset, 1\}$, $D = \{\{\emptyset, 1\}\}$

   (c) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$

9. Neresnična: $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$

10. (a) Ne velja. (b) Velja. (c) Velja.

11. (a) Ne velja: $A = C = \{1\}$, $B = D = \{2\}$. (b) Velja.

14. (a) Unija je množici točk na krožnici in znotraj nje. Presek je prazen.

    (b) Unija je množici točk na krožnici in znotraj nje. Presek je množici točk na krožnici s polmerom $\frac{1}{2}r$ in znotraj nje, kjer je r polmer prvotnega kroga.

15. $U = \{B, C, D\}$, $P = \{B\}$,

    $$\bigcup_{X \in U} X = B \cup C \cup D,$$

    $$\bigcap_{X \in U} X = B \cap C \cap D,$$

    $$\bigcup_{X \in P} X = \bigcap_{X \in P} X = B$$