IZJAVNI RAČUN

Osnova matematične logike so **izjave** oz. **trditve**. To so stavki, ki so bodisi resnični bodisi neresnični. Iz danih izjav s pomočjo **logičnih** oz. **izjavnih veznikov** tvorimo **sestavljene izjave**. Izjava, ki se ne da zapisati kot sestavljena izjava, je **elementarna** oz. **osnovna izjava**.

Izjavni račun preučuje **logično vrednost**, to je resničnost oz. neresničnost, sestavljenih izjav v odvisnosti od logičnih vrednosti, iz katerih je ta izjava sestavljena. Za izračun logičnih vrednosti izjave v praksi uporabljamo **resničnostno tabelo**.

Osnovni logični vezniki so:

- **Negacija** izjave A je izjava $\neg A$, ki je resnična natanko tedaj, ko je izjava A neresnična; preberemo jo " **ne** A " oz. " **ni res, da (velja)** A ".
- **Konjunkcija** izjav A in B je izjava $A \wedge B$, ki je resnična natanko tedaj, ko sta hkrati resnični izjavi A in B; preberemo " A **in** B ".
- **Disjunkcija** izjav A in B je izjava $A \vee B$, ki je neresnična natanko tedaj, ko sta hkrati neresnični izjavi A in B; preberemo " A **ali** B ".
- **Ekskluzivna disjunkcija** izjav A in B je izjava $A \veebar B$, ki je resnična natanko tedaj, ko je resnična natanko ena od izjav A ali B; preberemo " **bodisi** A **bodisi** B ".
- **Implikacija** izjav A in B je izjava $A \Rightarrow B$, ki je neresnična natanko tedaj, ko je izjava A resnična, izjava B pa neresnična; preberemo " **iz** A **sledi** B " ali " **če** A**, potem** B ".
- **Ekvivalenca** izjav A in B je izjava $A \Leftrightarrow B$, ki je resnična natanko tedaj, ko sta izjavi A in B bodisi obe resnični bodisi obe neresnični; preberemo " A **natanko tedaj, ko** B " ali " A**, če in samo, če** B ".

Če ni z oklepaji nakazano drugače, potem si logični vezniki "po moči" vezave sledijo tako kot so zgoraj našteti.

Sestavljeni izjavi sta **logično enakovredni** oz. **ekvivalentni**, če zavzameta enako logično vrednost pri vseh logičnih vrednostih izjav, ki jih sestavljajo (med taki izjavi postavimo znak $\equiv$ ali pa $\sim$).

Izjavo, ki je resnična pri vseh logičnih vrednostih elementarnih izjav, imenujemo **tavtologija** in jo označimo z 1, izjavo, ki je vedno neresnična, imenujemo **protislovje** in jo označimo z 0, sicer pa je izjava **faktična** oz. **nevtralna**.

Osnovni zakoni izjavnega računa

- **Združevanje (asociativnost):**

  $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

  $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \equiv A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

- **Zamenjava (komutativnost):**

  $A \wedge B \equiv B \wedge A$

  $A \vee B \equiv B \vee A$

  $A \Leftrightarrow B \equiv B \Leftrightarrow A$

- **Porazdelitev (distributivnost):**

  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- **De Morganova zakona:**

  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

  $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

- **Idempotentnost:**

  $A \wedge A \equiv A, \qquad A \vee A \equiv A$

  $A \Rightarrow A \equiv 1, \qquad A \Leftrightarrow A \equiv 1$

- **Lastnosti 0 in 1:**

  $A \wedge 1 \equiv A, \qquad A \vee 1 \equiv 1$

  $A \wedge 0 \equiv 0, \qquad A \vee 0 \equiv A$

  $A \wedge \neg A \equiv 0, \qquad A \vee \neg A \equiv 1$

  $\neg 1 \equiv 0, \qquad \neg 0 \equiv 1$

- **Implikacija:**

  $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

- **Ekvivalenca:**

  $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Pravila sklepanja

Zaporedje izjav $P_1, P_2, \ldots, P_n, Z$ je **pravilen sklep** s **predpostavkami** $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in **zaključkom** Z, če je zaključek resničen pri vseh tistih naborih vrednosti enostavnih izjav, pri katerih so resnične vse predpostavke. Pišemo

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Z$$

in beremo **" iz predpostavk $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sledi zaključek Z "**.

Torej je sklepanje pravilno natanko tedaj, ko je

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Z$$

tavtologija.

Pogojni sklep:

Sklep

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models R \Rightarrow S$$

velja natanko tedaj, ko velja sklep

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, R \models S.$$

Sklepanje s protislovjem:

Sklep

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Z$$

velja natanko tedaj, ko velja sklep

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \neg Z \models 0.$$

Naloge

1. Z resničnostno tabelo preveri resničnost izjave

$$(p \veebar \neg q) \wedge r \Leftrightarrow q \vee (r \Rightarrow p)$$

   in zapiši, ali je ta izjava tavtologija, protislovje ali nevtralna.

2. Ali sta izjavi $p \vee (p \wedge q)$ in $p \wedge (p \vee q)$ logično enakovredni?

3. Z uporabo osnovnih zakonov izjavnega računa (brez uporabe resničnostne tabele) pokaži, da je izjava

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r$$

   tavtologija.

4. Na dva načina, z resničnostno tabelo in osnovnimi zakoni izjavnega računa, pokažite, da sta izjava $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ in izjava $p \wedge (q \vee r)$ logično enakovredni oz. ekvivalentni.

5. Naj bosta podani sestavljeni izjavi:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \qquad \text{in} \qquad (p \Rightarrow q) \Rightarrow r.$$

   Utemelji, ali sta dani izjavi logično ekvivalentni.

6. Posamezno podano izjavo zapiši z matematičnimi simboli, sestavi resničnostno tabelo, presodi, ali je izjava tavtologija, protislovje ali nevtralna (faktična). Nato vsako izjavo zanikaj ter zanikano izjavo poenostavi, tako da bo vsebovala le logične veznike negacije, konjunkcije in disjunkcije ter bo negacija delovala neposredno na enostavne izjave. Elementarno izjavo " x je praštevilo " označi s črko p, elementarno izjavo " x je naravno število " pa s črko n.

   (a) x je praštevilo in x je naravno število.

   (b) x ni praštevilo ali x je naravno število.

   (c) x je naravno število in x ni naravno število.

   (d) x je naravno število natanko tedaj, ko je x praštevilo.

   (e) Če je x praštevilo, potem iz dejstva, da je x naravno število, sledi, da je x praštevilo.

   (f) Ali so med navedenimi izjavami kakšne logično ekvivalentne?

7. Naj bo n naravno število. Med izjavami

$P_2(n)$: naravno število n je deljivo z 2;
$P_3(n)$: naravno število n je deljivo z 3;
$P_4(n)$: naravno število n je deljivo z 4;
$P_6(n)$: naravno število n je deljivo z 6;

poišči pare, kjer je veljavnost prve zadostni pogoj za veljavnost druge. Poišči še pare, kjer je veljavnost prve potrebni pogoj za veljavnost druge.

Pojasnilo: Če je izjava $p \Rightarrow q$ resnična, rečemo, da je p **zadostni pogoj** za veljavnost izjave q, q pa je **potrebni pogoj** za veljavnost izjave p.

Z ustreznimi logičnimi vezniki poveži izjave $P_2(n)$, $P_3(n)$ in $P_6(n)$ tako, da dobiš sestavljeno izjavo, ki je tavtologija?

8. Naj bodo p, q in r poljubne izjave in naj bo podana sestavljena izjava

$$A \equiv (q \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge \neg((p \vee r) \Rightarrow q)$$

(a) Za sestavljeno izjavo A zapiši resničnostno tabelo.
(b) Kaj lahko poveš o resničnosti oz. neresničnosti izjav q in r, če veš, da sta izjavi A in p resnični?
(c) Sestavljeno izjavo A zanikaj in zanikano izjavo poenostavi, tako da bo vsebovala le logične veznike negacije, konjunkcije in disjunkcije ter bo negacija delovala neposredno na izjave p, q in r.

9. Naj bo n naravno število in naj bodo podane izjave

P_1 : n je praštevilo ali pa ni delitelj števila 2012;
P_2 : če je n večkratnik števila 3, potem je n delitelj števila 2012;
P_3 : n ni praštevilo;

ter sklep

S : n ni večkratnik števila 3.

Ali je sklepanje pravilno?

10. Pokaži, da naslednji sklep ni pravilen (to pomeni, da poiščemo nabor vrednosti enostavnih izjav, pri katerih so prepostavke resnične, zaključek pa ne; rečemo tudi, da poiščemo protiprimer).

$$p \vee \neg q, \quad q \Rightarrow r, \quad \neg p \quad \models \quad \neg r$$

11. Utemelji, ali je naslednji sklep pravilen.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), \quad (s \wedge q) \Rightarrow t, \quad \neg t \quad \models \quad (p \wedge r)$$

12. Vsako od danih sestavljenih izjav poenostavi v ekvivalentno izjavo, v kateri nastopata največ dva logična veznika ali konstanti $(1, 0, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$.

    (a) $\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg r)$
    (b) $\neg p \wedge q \Rightarrow 0$
    (c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$
    (d) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r$