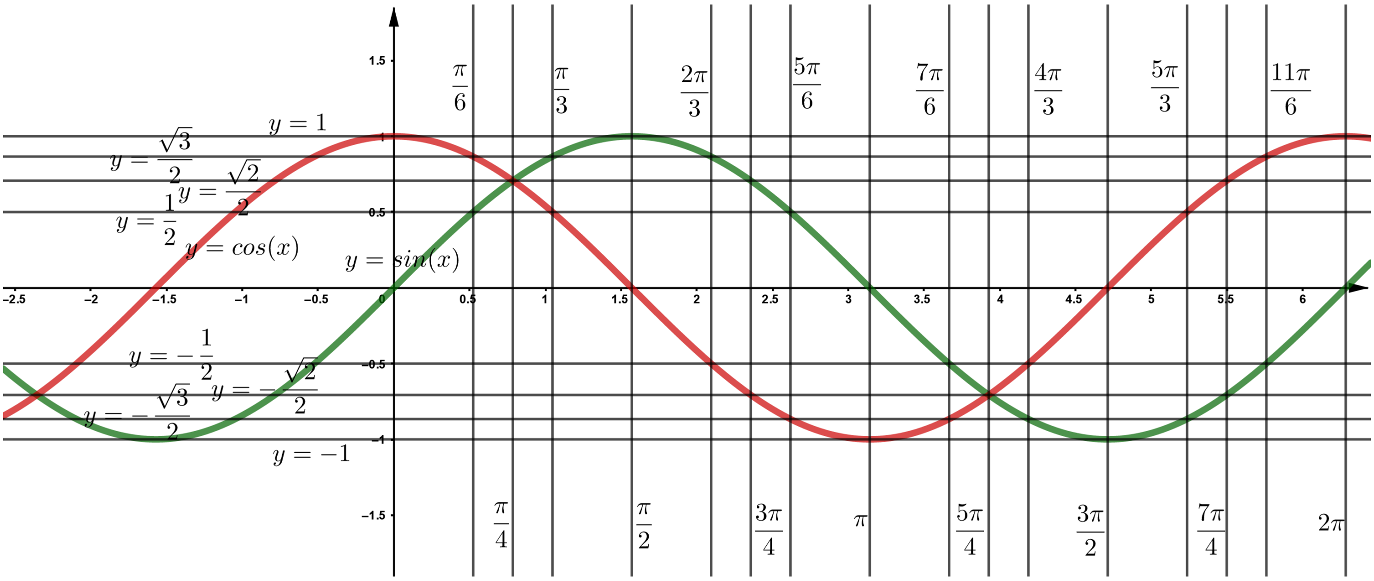
11 Moč množic

Množici imata isto moč, če med njima obstaja bijektivna preslikava. Moč končne množice dobimo tako, da preštejemo njene elemente. Enako močni končni množici imata isto število elementov. Za neskončne množice velja, da so lahko enako močne kot njihove prave podmnožice. Na primer, množica sodih naravnih števil je enako močna kot množica vseh naravnih števil (glej nalogo 1). Izkaže se, da niso vse neskončne množice enako močne (nalogi 3 in 4). Da se pokazati, da so številske množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ enako močne, množica realnih števil $\mathbb{R}$ pa je močnejša od njih. Množicam, ki so enako močne kot množica naravnih števil, rečemo *števne* množice. Za množico realnih števil rečemo, da ima moč *kontinuuma*.

Moč množice A označimo z $|A|$.

Naloge za začetnike



1. Izračunaj

(a) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ in $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

(b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ in $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

(c) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ in $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

(d) $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ in $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

(e) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ in $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(f) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ in $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Določi, kot φ če je:

(a) $\sin(\varphi) = 0$ in $\cos(\varphi) = 1$.

(b) $\sin(\varphi) = 1$ in $\cos(\varphi) = 0$.

(c) $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$ in $\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(e) $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}$.

(f) $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$ in $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Poišči, polarni in Eulerjev oblik zapisa kompleksnega števila z, če je:

(a) $z = 1$.

(b) $z = 2i$

(c) $z = \sqrt{3} + i$.

(d) $z = -1$

(e) $z = -4i$

(f) $z = -1 + i\sqrt{3}$.

(g) $z = -\sqrt{3} - i$.

(h) $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Običajne naloge

1. Dokaži, da je množica sodih števil enako močna kot množica naravnih števil.

2. Dokaži, da je množica racionalnih števil števna.

3. Dokaži, da je množica realnih števil iz intervala $[0,1]$ neštevna.

4. Dokaži $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

5. Dokaži, da so naslednje množice števno neskončne:

(a) množica sodih naravnih števil,

(b) množica celih števil $\mathbb{Z}$,

(c) množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$.

6. Poišči bijekcije:

(a) $f : (0,1) \to (a,b)$

(b) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

(c) $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$

Naloge z izpita

1. Dokaži, da imata intervala $[0,1]$ in $[0,1)$ isto moč.

2. Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $[0,1] \cup \mathbb{N}$ isto moč.

3. Dokaži, da je disjunktnih intervalov v $\mathbb{R}$ kvečjemu števno neskončno.

4. Določi moč množice $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_j \in \{0,1\} \ \wedge \ x_j \leq x_{j+1} \ \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$.

11.1 Rešitve nalog

Običajne naloge

1.

Dokaži, da je množica sodih števil enako močna kot množica naravnih števil.

Preslikava iz množice naravnih števil v množico sodih naravnih števil s predpisom $f : n \mapsto 2n$ je bijektivna preslikava. Množici sta torej enako močni.

2.

Dokaži, da je množica racionalnih števil števna.

Pokažimo, da obstaja bijektivna preslikava med množico pozitivnih racionalnih števil in med naravnimi števili. Definirajmo zaporedje racionalnih števil

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{2}\right), \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \left(\frac{2}{4}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \left(\frac{4}{2}\right), \frac{5}{1}, \ldots$$

Pravilo, ki smo ga uporabili, je naslednje: Najprej pride na vrsto ulomek $\frac{p}{q}$ z vsoto $p+q=2$, potem ulomki z vsoto $p+q=3$, potem ulomki z vsoto $p+q=4$, in tako naprej. Ulomke z enako vsoto $p+q$ razvrstimo po naraščajočih števcih p. Če se je kateri od ulomkov (okrajšan) že pojavil v zaporedju, ga izpustimo. (Zgoraj smo take ulomke zapisali v oklepaju.) S tem je zaporedje natanko določeno. Da se pokazati, da v njem nastopa vsako pozitivno racionalno število natanko enkrat.

Podobno bi našli bijektivno preslikavo med vsemi racionalnimi in celimi števili. Racionalnih števil je torej števno mnogo.

3.

Dokaži, da je množica realnih števil iz intervala $[0, 1]$ neštevna.

Uporabili bomo tako imenovano diagonalno metodo. Naj bo A poljubna števna množica realnih števil med 0 in 1. Ugotovili bomo, da A ne obsega vseh pozitivnih realnih števil, manjših od 1. Ker je množica A števna, lahko njene elemente bijektivno preslikamo na množico naravnih števil, ali drugače povedano, elemente A lahko zapišemo v zaporedje. Označimo prvo število iz A z a_1, drugo z a_2, tretje z a_3, itd. Če število iz A zapišemo v obliki decimalnega ulomka, je pred decimalno piko vedno ničla, saj so števila manjša od 1. Zapišimo te decimalne ulomke v obliki tabele

$$\begin{array}{lclll} a_1 & = & 0. & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \\ a_2 & = & 0. & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \dots \\ a_3 & = & 0. & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \dots \\ \dots & & \dots\dots\dots & & & \end{array}$$

Decimalke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_1$ so števke $0, 1, \dots, 9$. Decimalni zapis je končen (če je število racionalno), sicer je neskončen. V prvem primeru pripišimo za zadnjo decimalko same ničle, pa dobimo v vseh primerih neskončni decimalni zapis. Izberimo zdaj decimalke števila

$$x = 0.\xi_1\xi_2\xi_3\dots$$

takole: Prva decimalka ξ_1 naj bo 1, če je prva decimalka števila a_1 različna od 1. Če pa je $\alpha_1 = 1$, potem naj bo $\xi_1 = 2$. Prav tako naj bo ξ_2 enako 1, če je druga decimalka števila a_2 različna od 1. Če pa je $\beta_2 = 1$ potem naj bo $\xi_2 = 2$. Pravilo za n-to decimalko: ξ_n je enako 1, če je n-ta decimalka števila a_n različna od 1. Če pa je n-ta decimalka števila a_n enaka 1, potem je $\xi_n = 2$. Število x je s tem predpisom natanko določeno. Očitno je $0 < x < 1$. V množici A števila x ni, saj se x po konstrukciji razlikuje od vseh števil v tabeli, tam pa so vsa števila iz A.

Torej množica realnih števil na intervalu $[0, 1]$ ni števna.

4.

Dokaži $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Zapišimo $X \sim Y$ če obstaja bijektivna preslikava med množicama X in Y, in $X \not\sim Y$ če ni nobene bijektivne preslikave med množicama.

Trditev: $X \neq \emptyset \Longrightarrow X \not\sim \mathcal{P}(X)$.

Dokaz. Če je X prazna množica, je $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ in seveda $X \not\sim \mathcal{P}(X)$.

Naj bo zdaj $X \neq \emptyset$. Recimo, da obstaja bijekcija $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Potem obstajata elementa $a, b \in X$, tako da je $f(a) = \emptyset$ in $f(b) = X$. Iz $f(a) = \emptyset$ vidimo, da $a \notin f(a)$.

Naj bo X_1 množica vseh $x \in X$, za katere velja $x \notin f(x)$.

$X_1 \neq \emptyset$, saj vemo, da je $a \in X_1$. Ker je $b \in f(b)$, velja $b \notin X_1$, torej $X_1 \neq X$. Torej $f(b) \neq X_1$. Ker je f bijekcija, mora obstajati tak element, označimo ga s c, da je $f(c) = X_1$. Ločimo dva primera:

- $c \in X_1$. Po definiciji množice X_1 sledi $c \notin f(c) = X_1$. Protislovje.
- $c \notin X_1$. Po definiciji množice X_1 sledi $c \in f(c) = X_1$. Protislovje.

Ker smo v obeh primerih prišli v protislovje, sklepamo, da ni nobene bijekcije $X \to \mathcal{P}(X)$. Trditev je dokazana.

Posledica: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

5.

Dokaži, da so naslednje množice števno neskončne:

(a) množica sodih naravnih števil,
(b) množica celih števil $\mathbb{Z}$,
(c) množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$.

Rešitev: Množica A je števno neskončna, če obstaja bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$. To pomeni, da lahko elemente množice A razvrstimo v zaporedje, če definiramo $a_n := f(n)$. Od tod dobimo razpored

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Če torej želimo pokazati, da je množica števno neskončna, najprej poskusimo elemente množice razvrstiti v zaporedje, formalno pa nato iz tega razporeda razberemo predpis za iskano bijekcijo.

(a) Množico sodih naravnih števil $2\mathbb{N}$ lahko razvrstimo v naslednje zaporedje

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots \end{array}$$

Od tod lahko preberemo, da sta iskani bijekciji $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ in $f^{-1} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dani s predpisoma:

$$f(n) = 2n, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$f^{-1}(k) = \frac{k}{2}, \qquad k \in 2\mathbb{N}.$$

(b) Bijekcij med množicama celih in pa naravnih števil je veliko, ni pa kakšne posebej odlikovane. Uporabimo lahko na primer naslednjo postavitev celih števil po vrsti

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \ldots \end{array}$$

Ustrezni bijekciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ in $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sta dani s predpisoma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ sod}, \\ -\frac{n-1}{2} & ; n \text{ lih}, \end{cases}$$

$$g(k) = \begin{cases} 2k & ; k > 0, \\ -2k+1 & ; k \leq 0. \end{cases}$$

(c) Pri dokazu, da je množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ števno neskončna, bomo upoštevali dejstvo, da lahko racionalna števila identificiramo z okrajšanimi ulomki. Zaporedje vseh racionalnih števil bomo definirali tako, da bodo vsote števcev in imenovalcev ulomkov naraščale, predznaki števil pa bodo alternirali. Poglejmo si nekaj prvih členov.

$$\mathbb{Q} = \{0, \underbrace{\tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}}_{\text{vsota=2}}, \underbrace{\tfrac{2}{1}, -\tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}}_{\text{vsota=3}}, \underbrace{\tfrac{3}{1}, -\tfrac{3}{1}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}}_{\text{vsota=4}}, \ldots\}$$

Z uporabo tega postopka lahko definiramo bijekcijo med naravnimi in racionalnimi števili kljub temu, da ne znamo napisati eksplicitne formule. □

6.

Poišči bijekcije:

(a) $f : (0,1) \to (a,b)$,

(b) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,

(c) $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo pokazali, da so vsi odprti intervali enako močni.

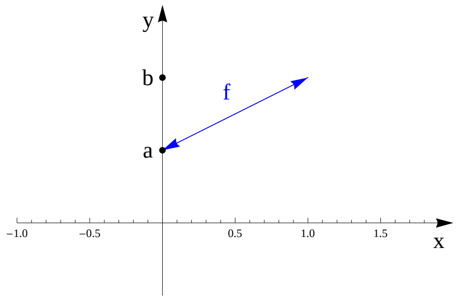
(a) Za bijekcijo $f : (0,1) \to (a,b)$ lahko vzamemo kar linearno funkcijo, za katero velja $f(0) = a$ in $f(1) = b$. Ta funkcija ima predpis

$$f(x) = (b-a)x + a,$$

njen inverz pa je

$$f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}.$$

Poglejmo še graf funkcije f.

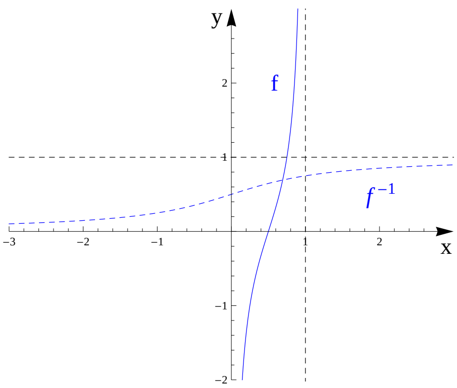


(b) V tem primeru iščemo bijekcijo med odprtim intervalom $(0,1)$ in pa množico realnih števil $\mathbb{R}$. Lahko bi našli racionalno funkcijo, ki bi imela pola v robnih točkah intervala $(0,1)$, lahko pa vzamemo tudi funkcijo $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Preslikava f je potem bijekcija z inverzom

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

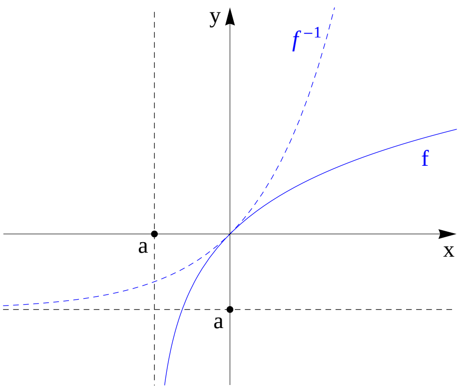


(c) Sedaj iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom (a, ∞) in množico realnih števil. Ustrezna je na primer ustrezno premaknjena logaritemska funkcija

$$f(x) = \ln(x - a)$$

z inverzom

$$f^{-1}(x) = e^x + a.$$



$\square$

1.

Dokaži, da imata intervala $[0,1]$ in $[0,1)$ isto moč.

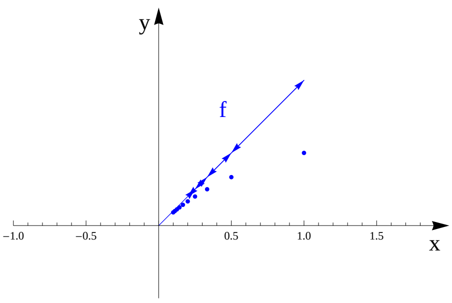
Rešitev: V tem primeru ne bomo mogli najti zvezne bijekcije $f : [0,1] \to [0,1)$, ker takšne preslikave sploh ni. Zato se bomo morali malo bolj potruditi. Označimo z $A \subset [0,1]$ in $A' \subset [0,1)$ podmnožici

$$A = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\right\},$$
$$A' = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Po eni strani sta množici A in A' enako močni (eksplicitna bijekcija je $f : A \to A'$ s predpisom $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ za $n \geq 1$), po drugi strani pa je $[0,1] \setminus A = [0,1) \setminus A'$. Bijekcijo $F : [0,1] \to [0,1)$ bomo konstruirali tako, da bomo točke izven A pustili pri miru, točke v A pa preslikali s funkcijo f:

$$F(x) = \begin{cases} x & ; x \notin A, \\ f(x) & ; x \in A. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija je bijekcija. Njen graf se skoraj povsod ujema s simetralo lihih kvadrantov, razen v točkah oblike $x = \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, kjer je funkcija f nezvezna.



Opomba: Na podoben način lahko pokažemo, da so množice $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$ in $(0,1]$ vse paroma enako močne. □

2.

Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $[0,1]\cup\mathbb{N}$ isto moč.

Rešitev: S podobno idejo kot pri prejšnji nalogi bi lahko tudi tokrat konstruirali bijekcijo med danima množicama. Dostikrat pa je ekvipolentnost dveh množic lažje dokazovati z uporabo Cantor-Bernstein-Schroederjevega izreka.

Za množico X rečemo, da ima moč manjšo ali enako kot množica Y (to označimo z $|X| \leq |Y|$), če obstaja injektivna preslikava $f : X \to Y$.

Izrek (Cantor-Bernstein-Schroeder)**.** *Naj za množici X in Y velja $|X| \leq |Y|$ in $|Y| \leq |X|$. Potem sta množici X in Y enako močni.*

Ta izrek bomo podrobneje spoznali pri predmetu Logika in množice. V praksi je uporaben, ker je pogosto lažje definirati dve injektivni preslikavi kot pa eno bijektivno.

Če želimo torej pokazati, da sta množici $\mathbb{R}$ in $[0,1]\cup\mathbb{N}$ enako močni, moramo konstruirati injektivni preslikavi:

$$i : [0,1]\cup\mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$j : \mathbb{R} \to [0,1]\cup\mathbb{N}.$$

Ker je $[0,1]\cup\mathbb{N}$ podmnožica $\mathbb{R}$, je avtomatično $|[0,1]\cup\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, saj lahko za i izberemo kar zožitev identitete s predpisom

$$i(x) = x.$$

Za konstrukcijo preslikave j pa se spomnimo, da imamo bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0,1)$. Ker je $(0,1)$ podmnožica $[0,1]\cup\mathbb{N}$, smo tako našli iskano preslikavo. Ekspliciten predpis pa je

$$j(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

3.

Dokaži, da je disjunktnih intervalov v $\mathbb{R}$ kvečjemu števno neskončno.

Rešitev: Recimo, da imamo množico intervalov

$$A = \{I_\alpha\},$$

ki so vsi paroma disjunktni. Nalogo bomo dokazali tako, da bomo konstruirali injektivno preslikavo

$$f : A \to \mathbb{Q}.$$

Od tod bo sledilo, da je $|A| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Preslikavo f lahko konstruiramo takole. Najprej se spomnimo, da vsak interval vsebuje vsaj eno racionalno število. Izberimo torej za vsak interval I_α neko racionalno število r_α in definirajmo

$$f(I_\alpha) = r_\alpha.$$

Ker so intervali I_α paroma disjunktni, so števila r_α paroma različna, kar pa pomeni, da je preslikava f injektivna. Torej ima množica A kvečjemu števno neskončno elementov. $\square$

4.

Določi moč naslednjih množic:

(b) $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in A \mid x_j \leq x_{j+1} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$.

(b) V množici B so samo tista zaporedja, ki imajo na začetku nekaj ničel, nato pa same enice. Takšna so na primer:

$$\begin{gathered} 0, 0, 0, 0, 0, 0 \ldots, \\ 1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots, \\ 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, \\ 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots \end{gathered}$$

Opazimo lahko, da je takšno zaporedje natanko določeno, če povemo, kdaj se pojavi prva enica. To nam da misliti, da je množica B števno neskončna.

Eksplicitno lahko konstruiramo bijekcijo $f : \mathbb{N}_0 \to B$ s predpisom

$$f(n) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 1, 1, \ldots\}$$

za $n \geq 1$ in

$$f(0) = \{0, 0, 0, \ldots\}.$$