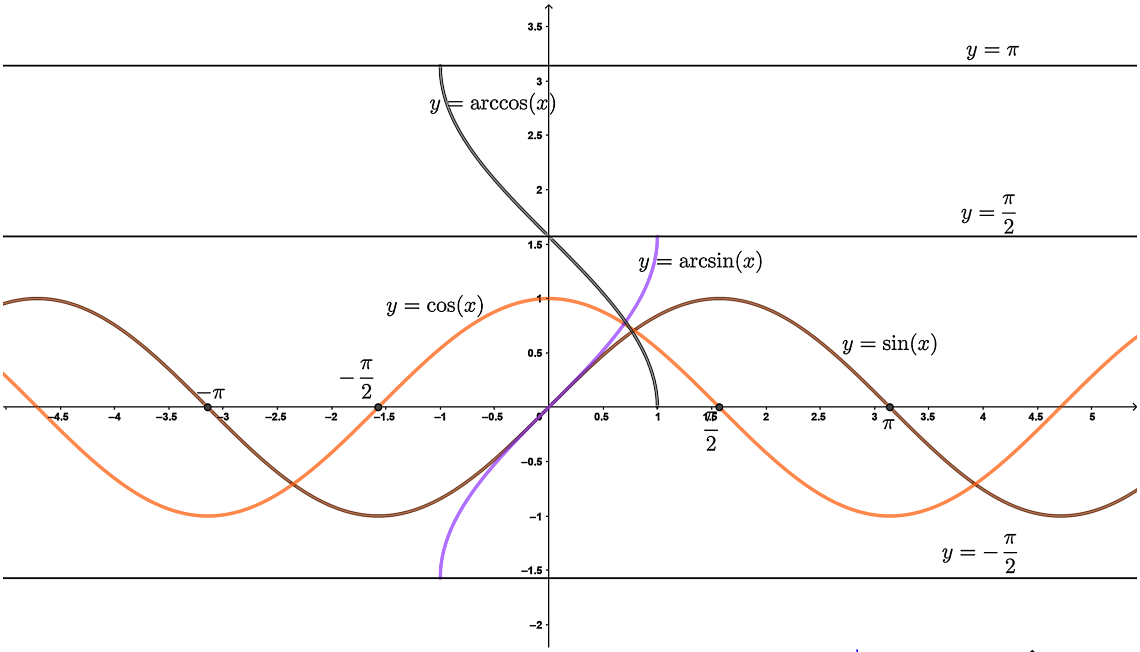
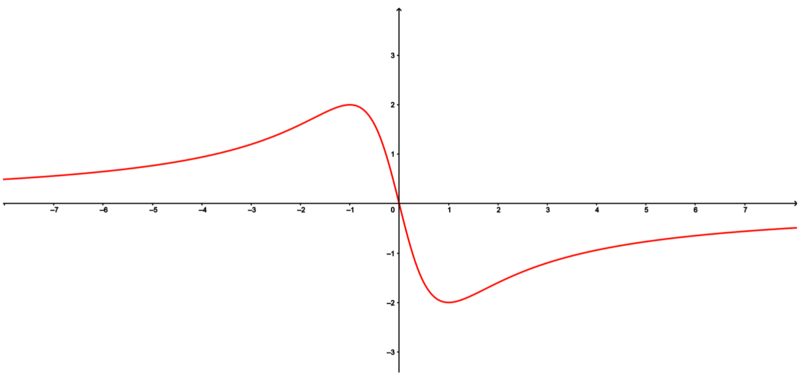
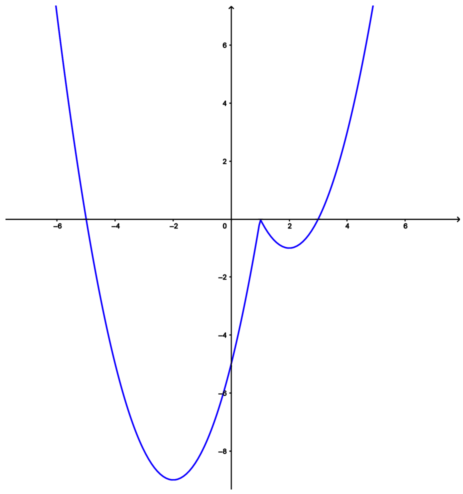
6 Kompozitum funkcij







6.1 Naloge za začetnike: Neenačbe

1. Graf funkcije $\phi(x) = -\dfrac{4x}{x^2+1}$ je narisan zgoraj levo. Uporabi dani graf in zapišite množico rešitev neenačbe $-\dfrac{4x}{x^2+1} < 0$. Utemelji, ali je $\phi(x)$ injektivna funkcija. Tudi izpolnite tabelo spodaj.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\phi(x)$									

2. Graf funkcije $\psi(x) = x^2 - 4|x-1| - 1$ je narisan zgoraj desno. Opazimo da je $\psi(-5) = 0 = \psi(1)$. Uporabi dani graf in zapišite množico rešitev neenačbe $x^2 - 4|x-1| - 1 < 0$. Utemelji, ali je $\psi(x)$ injektivna funkcija. Tudi izpolnite tabelo spodaj.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi(x)$	0						0		

Kvadratna neenačba je neenačba, ki jo lahko zapišemo v obliki $ax^2 + bx + c < 0$. ($a \neq 0$, namesto $<$ lahko tudi $>$, $\leq$, $\geq$).

3. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = 6x^2 - x - 1$. Zapišite ničle, skicirajte graf in zapišite množico rešitev neenačbe $6x^2 - x - 1 < 0$.

4. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = -8x^2 - 2x + 1$. Zapišite ničle, skicirajte graf in zapišite množico rešitev neenačbe $-8x^2 - 2x + 1 < 0$.

5. Dana je funkcije $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Opazimo da je $g(1) = 0$. Zapišite množico rešitev neenačbe $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$.

6. Dana je funkcije $h(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 4$. Opazimo da je $h(-2) = 0$. Zapišite množico rešitev neenačbe $-x^3 - 3x^2 - 4x - 4 \leq 0$.

6.2 Običajne naloge

Kompozitum funkcij $f : X \to Y$ in $g : Z \to W$, kjer je $f(X) \subseteq Z$, je funkcija

$$g \circ f : X \to W, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Inverz funkcije $f : X \to Y$, kjer je f bijektivna, je funkcija

$$f^{-1} : Y \to X, \qquad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Zožitev funkcije $f : X \to Y$ na množico $A \subseteq X$, je funkcija

$$f|_A : A \to Y, \qquad (f|_A)(x) = f(x).$$

1. Za vsak par funkcij ugotovi, ali sta identični (funkciji f in g sta identični, če imata enaki domeni, enaki zalogi vrednosti in je $f(x) = g(x)$ za vsak x iz domene funkcij).

1. $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = 1$
2. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$
3. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$

2. Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, podani s predpisom

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, \qquad g(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Določi $f \circ g$ in $g \circ f$.

3. Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, podani s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad x \geq 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| > \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Določi $f \circ g$ in $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g$ ter skiciraj grafa.

4. Nariši grafa funkcij $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$.

5. Za vsako od funkcij, ki so dane s spodnjimi predpisi, utemelji, ali je surjektivna oz. injektivna.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2$
3. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$
4. $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$
5. $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$

6. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & ; \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Utemelji, ali je f injektivna in ali je f surjektivna.

6.3 Naloge z izpita

1. Naj bo $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$. Določi definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ funkcije f. Dokaži, da je f injektivna na $\mathcal{D}_f$ in določi inverzno funkcijo. Nalogo reši računsko in grafično. Podobno obravnajvaj še funkcijo $g(x) = \arcsin \frac{x-3}{2}$.

2. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$f(x) = \arcsin(||x| - 1| + |x + 2|).$$

Določi definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$ funkcije f. Nato poišči funkcijo $g : \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero velja $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f}$, kjer je $\mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f}(x) = x$ za vsak $x \in \mathcal{Z}_f$. Ali je funkcija g inverz funkcije f?

3. Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, ki sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3+1}{x+1}, & x < 0 \\ e^{2x} - 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}(x+1), & x > 0 \end{cases}.$$

Zapišite predpis po katerem slika funkcija $g \circ f$.

4. Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, ki sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ -x + 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Določite kompozitum $g \circ f$ in $f \circ g$.

Navodila.

Običajne naloge.
1. (a) Ne. (b) Ne. (c) Ne.
2. $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $(f \circ g)(x) = x$
$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $(g \circ f)(x) = x$
3. $f \circ g = g$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x < 0 \\ \cos x & ; \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$f \circ f = f$

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| \ge \frac{\pi}{2} \\ \cos(\cos x) & ; \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4. Definicijsko območje funkcije $\sin(\arcsin x)$ je $[-1, 1]$.
Definicijsko območje funkcije $\arcsin(\sin x)$ je $\mathbb{R}$.
5.

1. Je surjektivna, ni injektivna.
2. Ni surjektivna, ni injektivna.
3. Je surjektivna, ni injektivna.
4. Ni surjektivna, je injektivna.
5. Bijekcija.

6. Ni injektivna, ni surjektivna.

Naloge z izpita
1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, inverzna funkcija f^{-1} je definirana na $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ in dana s predpisom $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$.
$\mathcal{D}_g = [1, 5]$, inverzna funkcija g^{-1} je definirana na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in dana s predpisom $g^{-1}(x) = 3 + 2\sin x$.
2. $\mathcal{D}_f = [-2, -1]$, $\mathcal{Z}_f = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$. Za funkcijo g je več možnosti, npr.: $g(\frac{\pi}{2}) = -2$. g ni inverz funkcije f, saj f ni injektivna.

Zanimive povezave:
[a] Kvadratna funkcija
[b] Graf kvadratne funkcije
[c] Ali je $f(x) = g(x)$, če sta $f(x) = \frac{x}{x}$ in $g(x) = 1$?