3 Množice

Ugotovite, ali so naslednje trditve resnične ali neresnične.

(i) Posebej preprosta konstrukcija množic združi končen nabor matematičnih objektov v množico. Na primer, če so a, b in c matematični objekti, potem lahko tvorimo množico

$$\{a, b, c\}$$

katere objekti so natanko a, b in c.
Da Ne

(ii) Za naše potrebe množica pomeni skupino (zbirko, družino, nabor,...) nekih objektov.
Da Ne

(iii) Naj bo $A = \{a, b, c\}$. Potem za vsak matematični objekt x velja $x \in A$ če in samo če $x = a$ ali $x = b$ ali $x = c$. Da Ne

(iv) Fraza "če in samo če" v (iii) pomeni, da velja dvoje: **1.** Če $x = a$ ali $x = b$ ali $x = c$, potem $x \in A$. **2.** Če $x \in A$, potem $x = a$ ali $x = b$ ali $x = c$. Da Ne

(v) Če množica A vsebuje objekt x, pravimo, da je x element množice A in zapišemo $x \in A$.

(vi) $1 + 1 \in \{1, 2, 3\}$. Da Ne

(vii) $5 \in \{1, 2, 3\}$. Da Ne

(viii) **Pravilo:** Za vse objekte $a, b, \ldots, z$ je $\{a, b, \ldots, z\}$ množica, katere elementi so natanko objekti $a, b, \ldots, z$. Da Ne

(ix) Zapis s tropičjem '...' ni dovolj natančen, saj dopušča dvoumnosti. Denimo, so elementi množice $\{3, 5, 7, \ldots, 31\}$, liha števila med 3 in 31, ali samo praštevila? Zapis res ni dovolj natančen? Da Ne

(x) Naslednji člen v zaporedju $1, 2, 3, \ldots$ je seveda 5, ker je naslednji člen vsota prejšnjih dveh, kot v Fibonaccijevem zaporedju. Da Ne

(xi) **Pravilo.** Prazna množica $\emptyset$ je množica, ki nima elementov. Da Ne

(xii) Dve množici sta *enaki* natanko tedaj, ko *vsebujeta* iste elemente. To zapišemo takole: $A = B \quad \equiv \quad \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.
Da Ne

(xiii) $\{1, 1, 1, 2, 2\} = \{1, 2\}$ Da Ne

(xiv) Če množica A vsebuje vse elemente množice B (in morda še kakšnega za povrh), pravimo, da je B podmnožica množice A in to zapišemo kot $B \subseteq A$.
Da Ne

(xv) $\{a, a, a, 2, 2\} \subseteq \{a, 2\}$ in $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Da Ne

(xvi) $B \subseteq A \equiv \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$. Da Ne

(xvii) Množici A in B sta torej enaki natanko tedaj, ko velja tako $A \subseteq B$ kot $B \subseteq A$.
Da Ne

(xviii) **Pravilo.** Za vsak x in y je *(neurejeni) par* ali *dvojec* $\{x, y\}$ množica, katere elementa sta natanko x in y. Da Ne

(xix) **Pravilo.** Za vsaki množici A in B je *unija* $A \cup B$ množica, ki ima za elemente natanko vse objekte, ki so element A ali element B. Da Ne

(xx) Končno množico lahko določimo tako, da naštejemo vse njene elemente. Na primer, $A := \{2, 3, 5, 7\}$ ali $X := \{Sonce, Zemlja, Mesec\}$. Da Ne

(xxi) V splošnem množice podamo tako, da podamo pogoj za pripadnost. Na primer, $\mathbb{P} := \{x \mid \text{x je naravno število, deljivo le z 1 in samim seboj}\}$ Da Ne

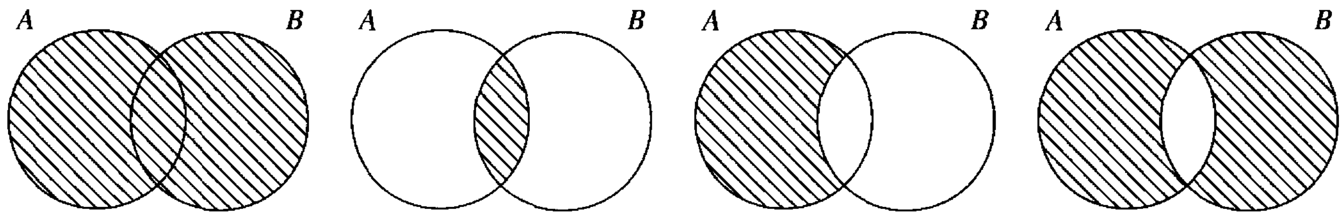
(xxii) Za dani dve množici A in B lahko definiramo njuno unijo in presek:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$,
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Da Ne

(xxiii) Mnogokrat je udobno vnaprej izbrati množico vseh objektov, o katerih želimo govoriti. Takšni množici rečemo *univerzalna množica.* Da Ne

(xxiv) S pomočjo univerzalne množice definiramo operacijo komplementa. Komplement množice A vsebuje natanko tiste elemente univerzalne množice, ki jih A ne vsebuje: $\overline{A} = A^c = \{x \mid x \notin A\}$. Da Ne

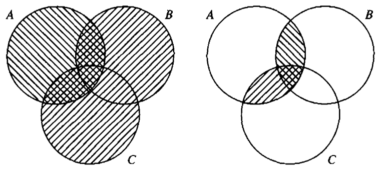
(xxv) Naj bo $\mathcal{D} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$. Tedaj je $\bigcap_{A \in \mathcal{D}} A = \{3\}$ and $\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Da Ne

(xxvi) $\forall A : \emptyset \in A$. Da Ne



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $A \oplus B$

3.1 Naloge za začetnike



$A \cap (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. Utemelji, ali opis (zapis) pravilno določa neko množico.

(i) $\{2, 4\}$.

(ii) $\{2, 4, \ldots\}$.

(iii) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(iv) $\{|x| : x \in \mathbb{R}\}$.

(v) $\{x \mid |x| = 1\}$.

2. Naj bodo podane množice: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $\quad C = \{\{1\}\}$, $D = \{\{1\}, 1\}$, $\quad E = \{1\}$. Preveri pravilnost naslednjih izjav:

(i) $E \in C$.

(ii) $E \in D$.

(iii) $E \subseteq D$.

(iv) $C \subseteq D$.

(v) $E \cup \{1\} \subseteq C$.

(vi) $E \cup C = D$.

(vii) $E \subseteq A$.

(viii) $E \in A$.

(ix) $E \subseteq C$.

(x) $C \in D$.

Glede na podane množice, določi še množice:

(i) $A \cup B$

(ii) $A \cap B$

(iii) $A \setminus B$

(iv) $B \setminus A$

(v) $\mathcal{P}(B)$

(vi) $A \times B$

3. Poišči potenčno množico: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

3.2 Običajne naloge

1. Z relacijama $=$ in $\subseteq$ paroma primerjaj množice:
$A = \{1, 2\}$, $\quad B = \{2, 1\}$,
$C = \{1, 2, 1\}$,
$D = \{x \,|\, x = 1 \wedge x = 2\}$,
$E = \{x \,|\, x = 1 \vee x = 2\}$,
$F = (1, 2)$.

2. Ali je med množicami $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{0\}$ kaj enakih?

3. Določi naslednje množice:

(i) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$

(ii) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$

(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$

(iv) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$

(v) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$

[$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset\}$].

4. Poišči primer množic A, B, C, D, ki hkrati zadoščajo danim pogojem.

(i) $A \subset B$, $\quad B \in C$, $C \subset D$;

(ii) $A \in B$, $\quad B \subset C$, $C \in D$;

(iii) $A \in C$, $\quad B \in C$, $A \subset B$;

(iv) $A = \{B\}$, $\quad B \subset A$;

(v) $A \in C$, $\quad B \in C$, $A \subset C$, $\quad B \subset C$.

[$A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{\{1\}\}$, $D = \{1, \{1\}\}$; $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{\emptyset, 1\}$, $D = \{\{\emptyset, 1\}\}$; $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$; $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$; $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$.].

3.3 Naloge z izpita

1. Poišči vse nabore množic A, B, C, za katere je

$$B \setminus A = A \cup C = C \cap B = \{1\}$$

2. Naj bodo A, B in C poljubne množice. Če meniš, da je spodnja izjava resnična, jo dokaži, sicer pa navedi primer množic, za katere je izjava neresnična?

$$A \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus C \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

3. Utemelji, ali za vsako trojico množic A, B, C veljajo enakosti

(i) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

(ii) $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$.

(iii) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.