7 Racionalna, cela in naravna števila

NARAVNA ŠTEVILA

Množica
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
je množica **naravnih števil**, ki je matematično korektno definirana s **Peanovimi aksiomi.**
V množici $\mathbb{N}$ znamo **seštevati** in **množiti**, odštevati pa ne vedno.
Popolna matematična indukcija:
Naj bo $T(n)$ neka smiselna trditev, odvisna od števila n, kjer je n poljubno naravno število. Če veljata izjavi:

- baza $T(1)$ in
- indukcijski korak $\forall n \in \mathbb{N} : (T(n) \Rightarrow T(n+1))$,

smemo sklepati, da velja trditev $T(n)$ za vsako naravno število n.

CELA ŠTEVILA

Množica
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
je množica **celih števil.**
V množici $\mathbb{Z}$ znamo **seštevati**, **odštevati** in **množiti**, deljenje pa ni vedno izračunljivo.

RACIONALNA ŠTEVILA

Množica
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$
je množica **racionalnih števil.**
V množici $\mathbb{Q}$ znamo **seštevati, odštevati, množiti in deliti** (definirano ni le deljenje s številom 0).
Množico **realnih števil** $\mathbb{R}$ dopolnijo tako imenovana **iracionalna čtevil**. Tako je recimo število, katerega kvadrat je enak 2.

7.1 Naloge za začetnike

1. Pišči vse $n \in \mathbb{Z}$ za katere velja $\dfrac{(n-1)(n+1)(-n+2)}{(3-n)(n-4)} > 0$. Tudi, poišči podmnožico realnih števil za katere velja $\dfrac{(x-1)(x+1)(-x+2)}{(3-x)(x-4)} > 0$.

2. Pišči vse $n \in \mathbb{Z}$ za katere velja $\dfrac{(7-n)(n+1)}{(n-2)(n+3)(-n+1)} > 0$. Tudi, poišči podmnožico realnih števil za katere velja $\dfrac{(7-x)(x+1)}{(x-2)(x+3)(-x+1)} > 0$.

3. Določi vsa realna števila x, za katera je izpolnjena neenakost
$$\sqrt{x+1} - x + 1 > 0.$$

7.2 Običajne naloge

1. S popolno indukcijo dokaži, da naslednje enakosti veljajo za vsa naravna števila n.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Naj bo $h \in [0,1]$. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja $(1+h)^n \leq 1 + (2^n - 1)h$.

3. Z indukcijo dokaži, da je za vsako naravno število $n \geq 2$ število $2^{2^n} - 1$ deljivo s 15.

4. Z indukcijo dokaži, da je za vsako število $n \in \mathbb{N}_0$ število $1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$ deljivo s 7.

5. Dokaži, da za vsako celo število n obstajata taki celi števili a in b, da velja $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$.

Osnovni adicijski izreki

Sinus vsote / razlike kotov

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x.$$

Kosinus vsote / razlike kotov

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin y \cdot \sin x.$$

Tangens vsote / razlike kotov

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}.$$

6. Dokaži naslednji trditvi.

1. Za poljubni realni števili x in y velja $|\sin(x+y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$.

2. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Ali ta neenakost velja za vsa pozitivna realna števila n?

7.3 Naloge z izpita

1. Naj bo n naravno število. Dokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno.

2. Dokaži, da $\sqrt{2} + \sqrt{17}$ ni racionalno število.

3. Določi vsa realna števila x, za katera je izpolnjena neenakost

$$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0.$$

Rešitve nalog.

OBIČAJNE NALOGE.

1.(a) Najprej preverimo trditev za $n = 1$. V vsoti na levi strani vzamemo le prvi člen, ki je enak 1. V izraz na desni strani pa namesto n vstavimo 1 in dobimo 1. Ker sta leva in desna stran enaki, trditev za $n = 1$ velja.
Indukcijski korak: privzamemo, da trditev velja za naravno število n, torej da velja

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Radi bi dokazali, da pri tej predpostavki velja (dokazujemo drugi enačaj v)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Začnemo na levi strani in upoštevamo indukcijsko predpostavko

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

kar smo želeli dokazati.
(b) Dokažemo podobno kot primer (a).
(c) Dokažemo podobno kot primer (a).
2. Preverimo trditev za $n = 0$. Leva stran je

$$(1+h)^0 = 1,$$

desna stran pa je

$$1 + (2^0 - 1)h = 1.$$

Ker sta leva in desna stran enaki, trditev za $n = 0$ velja.
Indukcijski korak: privzamemo, da trditev velja za število $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1+h)^n \leq 1 + (2^n - 1)h.$$

Dokazujemo, da pri tej predpostavki velja

$$(1+h)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1)h.$$

Začnemo na levi strani in upoštevamo indukcijsko predpostavko

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \leq (1 + (2^n - 1)h)(1+h) = 1 + 2^n h + (2^n - 1)h^2.$$

Dokazati moramo še

$$1 + 2^n h + (2^n - 1)h^2 \leq 1 + (2^{n+1} - 1)h.$$

Na obeh straneh lahko odštejemo $1 + 2^n h$ in dobimo

$$(2^n - 1)h^2 \leq (2^n - 1)h.$$

Sedaj obe strani delimo z $2^n - 1$ in dobimo

$$h^2 \leq h,$$

ta neenakost pa velja za vse $h \in [0, 1]$. Iz veljavnosti zadnje neenakosti lahko sklepamo v obrnjenem vrstnem redu na veljavnost predhodnih dveh neenakosti, saj operacija prištevanja oz. odštevanja

nekega števila in množenja oz. deljenja s pozitivnim številom preoblikuje neenakost v ekvivalentno neenakost.
3. Najprej preverimo trditev za $n = 2$. Pogledati moramo, ali je število $2^{2^2} - 1$ deljivo s 15. Izračunamo, da je $2^{2^2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$, torej je to število res deljivo s 15.
Indukcijski korak: privzamemo, da je za naravno število $n \geq 2$ število $2^{2^n} - 1$ deljivo s 15. Dokazati moramo, da je tudi število $2^{2^{n+1}} - 1$ deljivo s 15. Uporabimo formulo $(a^x)^y = a^{xy}$ in računamo

$$2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1).$$

Po indukcijski predpostavki je število $2^{2^n} - 1$ deljivo s 15, zato je $2^{2^n} - 1 = 15k$ za neko naravno število k. Vstavimo to v zgornjo enakost in dobimo

$$2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 15k \cdot (2^{2^n} + 1).$$

S tem smo preverili veljavnost indukcijskega koraka.
4. Za $n = 0$ dobimo

$$1 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7,$$

torej trditev velja.
Indukcijski korak: privzamemo, da trditev velja za število $n \in \mathbb{N}_0$. Torej je število $1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$ večkratnik števila 7, zato je

$$1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2} = 7k$$

za neko naravno število k. Dokazujemo, da je pri tej predpostavki tudi število $1 + 2^{3n+4} + 2^{6n+8}$ deljivo s 7. S preoblikovanjem in upoštevanjem indukcijske predpostavke dobimo
$1 + 2^{3n+4} + 2^{6n+8} = 1 + 2^{3n+4} + 2^6 \cdot 2^{6n+2} =$
$= 1 + 2^{3n+4} + 2^6(7k - 1 - 2^{3n+1}) = 7 \cdot 2^6 k - (2^6 - 1) - 2^{3n+4}(2^3 - 1) =$
$= 7 \cdot 2^6 k - 63 - 7 \cdot 2^{3n+4} = 7 \cdot (2^6 k - 9 - 2^{3n+4})$,
torej je to število deljivo s 7 in je indukcijska predpostavka dokazana.
5. Preverimo najprej, da trditev velja za naravna števila n. Za $n = 1$ je trditev očitna. Sedaj privzamemo, da trditev velja za naravno število n, torej je $(1 + \sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$ za neki celi števili a in b. Potem je

$$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = (a + 2b) + (a + b)\sqrt{2}.$$

Ker sta po indukcijski predpostavki a in b celi števili, sta tudi $a + 2b$ in $a + b$ celi števili. Torej trditev velja za $n + 1$ in zato za vsa naravna števila n.
Pri $n = 0$ je $(1 + \sqrt{2})^n = 1$, torej trditev velja tudi za to število.
Naj bo sedaj $n = -1$. Potem je

$$(1 + \sqrt{2})^n = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = -1 + \sqrt{2}$$

in trditev velja tudi za $n = -1$.
Končno vzemimo poljubno negativno celo število n. Če pišemo $n = -m$, kjer je m naravno število, potem je

$$(1 + \sqrt{2})^n = (-1 + \sqrt{2})^m,$$

za takšna števila pa lahko, tako kot smo dokazali zgoraj, dokažemo, da imajo zahtevano obliko.
6. (a) Uporabimo adicijski izrek, trikotniško neenakost in dejstvo, da je $|\cos x| \leq 1$, ter dobimo
$|\sin(x + y)| = |\sin x \cos y + \sin y \cos x| \leq |\sin x \cos y| + |\sin y \cos x| =$
$= |\sin x| \cdot |\cos y| + |\sin y| \cdot |\cos x| \leq |\sin x| + |\sin y|$.
(b) Dokažimo le, da neenakost ne velja za vsa pozitivna realna števila. Za $x = \pi$ in $n = 1/2$ je $\sin(nx) = 1$ in $n \sin x = 0$.

Naloge z izpita

1. Če je število $\sqrt{n}$ iracionalno, smo končali. V nasprotnem primeru je število $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, zato ga lahko zapišemo kot $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, kjer sta p in q tuji si naravni števili in je $q > 1$. S kvadriranjem dobimo, da je $n = \frac{p^2}{q^2}$ oz. $q^2 n = p^2$. Naj bo sedaj a nek praštevilski delitelj števila q. Iz enakosti $q^2 n = p^2$ potem sledi, da a deli p^2 in posledično tudi p. To pa je v protislovju s predpostavko, da sta p in q tuji števili.
2. Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je $\sqrt{2} + \sqrt{17} = q \in \mathbb{Q}$. S kvadriranjem dobimo $19 + 2\sqrt{34} = q^2$. Torej je $\sqrt{34} = \frac{q^2 - 19}{2}$ in od tod sklepamo, da je $\sqrt{34}$ racionalno število. To pa ni mogoče, ker 34 ni popoln kvadrat, saj po prejšnji nalogi velja, da je koren iz naravnega števila bodisi naravno ali pa iracionalno število. Zaradi protislovja sledi, da je število $\sqrt{2} + \sqrt{17}$ iracionalno.
3. S kvadriranjem bi radi odpravili korene, zato neenakost preoblikujemo v $\sqrt{x^2 + 1} > 2x - 1$. Neenakost je izpolnjena, če je desna stran negativna, to pa je res za $x < 1/2$. Če je $x \geq 1/2$, je desna stran pozitivna ali enaka 0, zato lahko kvadriramo in dobimo ekvivalentno neenakost $x^2 + 1 > (2x - 1)^2$. Sedaj nesemo vse na desno stran, uredimo in dobimo $0 > 3x^2 - 4x$, kar je res za $x \in (0, 4/3)$. Pogoju $x \geq 1/2$ ustrezajo števila na intervalu $[1/2, 4/3)$. Celotna množica rešitev je interval $(-\infty, 4/3)$.

Zanimive povezave:
[a] Popolna indukcija
[b] Matematična indukcija
[c] Adicijski izreki