KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Kompleksno število je število oblike $z = x + iy$, kjer sta x in y realni števili in je $i = \sqrt{-1}$ **imaginarna enota.**

Množico kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$.

Konjugirano število $\overline{z}$ kompleksnega števila $z = x+iy$ je število $x-iy$. V kompleksni ravnini je to ravno zrcalna točka točke z glede na realno os.

Veljajo zveze: $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $\quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

Obrat (tudi **inverz**) neničelnega kompleksnega števila z je kompleksno število

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Realni del $Re\, z$ kompleksnega števila $z = x + iy$ je realno število x. Geometrijski pomen: oddaljenost točke z od imaginarne osi. Velja zveza:

$$Re\, z = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

Imaginarni del $Im\, z$ kompleksnega števila $z = x+iy$ je realno število y. Geometrijski pomen: oddaljenost točke z od realne osi. Velja zveza:

$$Re\, z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Absolutna vrednost $|z|$ kompleksnega števila $z = x + iy$ je realno število $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometrijski pomen: oddaljenost točke z od izhodišča 0.

Argument $arg\, z$ neničelnega kompleksnega števila z je tak kot $\varphi \in (-\pi, \pi]$, za katerega velja $tg\, \varphi = \frac{Im\, z}{Re\, z}$ in leži število $\cos\varphi + i \sin\varphi$ v istem kvadrantu kot število z. Vrednost $arg\, 0$ ni definirana. Geometrijski pomen: kot, ki ga oklepa daljica, ki ima za krajišči izhodišče 0 in točko z, s pozitivnim poltrakom realne osi.

Kompleksno število z ima poleg **kartezičnega zapisa** $Re\, z + i\, Im\, z$ še **polarni zapis** oblike $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, za katerega velja, da je $r \geq 0$ in $\varphi \in \mathbb{R}$.

Iz postavljene zahteve za neničelna števila z sledi karakterizacija $r = |z|$ in $\varphi = arg\, z + 2k\pi$ za kak $k \in \mathbb{Z}$.

Pri potenciranju kompleksnih števil nam pomaga **Moivrov obrazec:**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi) \qquad \text{za vsak } \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pri korenjenju kompleksnih števil nam za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ pomaga formula:

$$\sqrt[n]{(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Naloge

1. V ravnini kompleksnih števil označi množico točk, ki ustrezajo naslednjim neenačbam oz. enačbam:

   (a) $arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

   (b) $2 < |z| \leq 3$

   (c) $|z + i + 1| \geq 2$

   (d) $|z| + Re(z) \leq Im(z)$

2. Poišči realni števili x in y, ki ustrezata enačbi:

$$(3 - i)x^2 - (3 + 2i)x - (1 - i)y = 13 - 10i$$

Rešitev: $x = 3,\ y = 5$ ali $x = -\dfrac{1}{2},\ y = -\dfrac{43}{4}$

3. Določi števila $z \in \mathbb{C}$, za katera je $Re(z + iz) = 0$.

Rešitev: $z = x + ix,\ x \in \mathbb{R}$

4. Izračunaj $(1 - i)^{2012}$.

5. Izračunaj $1 + z + z^2$, če je $z = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$.

Rešitev: 0

6. Reši enačbo: $z^6 + 8 = 0,\ z \in \mathbb{C}$.

Rešitev: $\left\{ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i),\ \sqrt{2}i,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i),\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} - i),\ -\sqrt{2}i,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i) \right\}$

7. Ali v množici kompleksnih števil vedno velja enakost:

$$|z|^2 = z^2?$$

Če enakost vedno velja, to dokažite, sicer pa utemeljite, za natanko katera kompleksna števila enakost velja.

Rešitev: Enakost velja natanko tedaj, ko je z realno število.

8. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe:

$$z^3 + 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2 + z + 1}.$$

Rešitev: $z = 0$

9. Poenostavi izraze

   (a) $(3 + 4i)\overline{(1 - 3i)}$

   Rešitev: $-9 + 13i$

   (b) $\dfrac{7 - 3i}{1 + i}$

   Rešitev: $2 - 5i$

10. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo enačbi

    (a) $z^3 + 4z^2 - z - 4 = 0$

    Rešitev: $z \in \{4, -1, 1\}$

    (b) $z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0$

    Rešitev: $z = -1 \pm i$

11. Poišči kakšen polinom z realnimi koeficienti, ki ima ničlo $\sqrt{3} - i\sqrt{5}$.

    Rešitev: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 8$

12. Določi množice kompleksnih števil z, ki zadoščajo enačbi in jih nariši.

    (a) $|z| = |2z - 3 - i\,\mathrm{Im}\,z|$

    Rešitev: $\{z \mid \mathrm{Re}\,z = 1 \quad \text{ali} \quad \mathrm{Re}\,z = 3\}$

    (b) $z^4 = -8\sqrt{3} - 8\,i$

    Rešitev: $z_k = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right)\right) \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}$

13. Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil; φ označuje argument kompleksnega števila z. (Nalogo poizkusi rešiti s čim manj računanja.)

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 4\,i| < 2\}$

    Rešitev: Notranjost krožnice s središčem $(-3, 4)$ in polmerom 2.

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3,\, \varphi \in [\frac{\pi}{3}, \pi]\}$

Rešitev: Števila v izseku zunanjosti krožnice s središčem v izhodišču in polmerom 3 med vključno kotom $\pi/3$ in kotom π.

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = |z+3\,i|\}$

Rešitev: točke, ki ležijo na simetrali daljice med točkama $(2,0)$ in $(0,-3)$; t.j. premica: $6y + 4x + 5 = 0$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+5| \leq 10\}$

Rešitev: Točke na in znotraj elipse z enačbo $(\frac{x+2}{5})^2 + (\frac{y}{4})^2 = 1$.

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) + 4\,\mathrm{Im}\, z = 0\}$

Rešitev: Hiperbola z enačbo $x^2 - (y-2)^2 = -4$.

14. Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i\,\dfrac{z+1}{z-1}$ realno.

Rešitev: Upoštevaj $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ in izračunaj konjugirano vrednost.

15. Dokaži, da je množica kompleksnih števil

$$\left\{ z = \frac{3}{2 + \cos\varphi + i\,\sin\varphi} \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

podmnožica krožnice s središčem $a = 2$ in polmerom 1.

Rešitev: Dokaži, da vsa števila iz množice ustrezajo enačbi $|z-2| = 1$.

16. Določi množice kompleksnih števil z, ki zadoščajo enačbam, in jih nariši.

(a) $z^8 + z^4 - 12 = 0$

Rešitev: $\{\pm\sqrt[4]{3},\, \pm i\,\sqrt[4]{3},\, \pm 1 \pm i\}$

(b) $z^3 + 3z^2 + 3z + i = 0$

Rešitev: $-1 + \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{8k-1}{12}\pi) + i\,\sin(\frac{8k-1}{12}\pi))$ za $k = 0, 1, 2$

(c) $z^2 + 2i\,\mathrm{Re}\, z = |z|$

Rešitev: $\{0,\, \sqrt{3} - i,\, -\sqrt{3} - i\}$