Naloge za utrjevanje

1. Naj bo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množica naravnih števil in naj bo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija, dana s predpisom
$$f(x) = 2x + 3.$$
   (i) Poiščite $f(f(4) + 1)$.
   (ii) Poiščite $f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$.
   (iii) Poiščite $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$.
   (iv) Ali je f injektivna?
   (v) Ali je f surjektivna?

2. V tej nalogi naj $\mathbb{N}^+$ označuje množico vseh pozitivnih celih števil, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in bijektivnost naslednjih funkcij:
   (i) $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+, f(n) = 2n$;
   (ii) $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+, f(n) = 2^n$;
   (iii) $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+, f(n) =$ število vseh pozitivnih deliteljev števila n.

3. Naj bo $S = \mathbb{N}$. Na množici $S \times S$ je definirana relacija R takole:
$$(a, b)\, R\, (c, d) \Leftrightarrow 2a - b = 2c - d.$$
   (i) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.
   (ii) Če je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, določite $R[(2, 5)]$, ekvivalenčni razred elementa $(2, 5)$.

4. Naj bo relacija R_1, ki delno ureja množico X, in relacija R_2, ki delno ureja množico Y. Naj bo R definirana na množici $X \times Y$ takole:
$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1\, R_1\, x_2 \wedge y_1\, R_2\, y_2.$$
   Pokažite, da R delno ureja $X \times Y$.

5. V tej nalogi naj $\mathbb{R}^+$ označuje množico vseh pozitivnih realnih števil, $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$, $\mathbb{N}^+$ pa množico vseh pozitivnih celih števil, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in bijektivnost naslednjih funkcij:
   (i) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = |x|$;
   (ii) $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 2x + 7$;
   (iii) $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x, y) = 2x - y$.

6. Naj bo $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 16\}$. Na množici S je definirana relacija deljivosti R:
$$x\, R\, y \Leftrightarrow x|y.$$

(i) Narišite Hassejev diagram glede na R.

(i) Poiščite vse R-maksimalne elemente, če obstajajo.

(iii) Poiščite vse R-minimalne elemente, če obstajajo.

(iv) Ali ima S strukturo mreže glede na R?

7. Naj bo $S = \mathbb{R}$. Na množici S je definirana relacija R takole:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

(i) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.

(ii) Določite $R[\frac{1}{2}]$, ekvivalenčni razred elementa $\frac{1}{2}$.

8. Naj bo $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Na množici S je definirana relacija takole:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x + y \text{ je sodo in } x \leq y.$$

(i) Pokažite, da R delno ureja množico S.

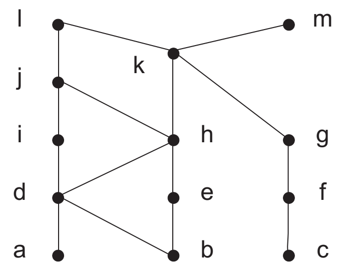
(ii) Narišite Hassejev diagram glede na R.

(iii) Poiščite vse R-maksimalne elemente, če obstajajo.

(iv) Poiščite vse R-minimalne elemente, če obstajajo.

(v) Ali ima S strukturo mreže glede na R?

9. Delna urejenost R je podana z naslednjim Hassejevim diagramom:



(i) Poiščite vse R-maksimalne elemente, če obstajajo.

(ii) Poiščite vse R-minimalne elemente, če obstajajo.

(iii) Ali obstaja R-prvi element?

(iv) Ali obstaja R-zadnji element?

(v) Poiščite vse R-zgornje meje podmnožice $\{a, b, c\}$, če obstajajo.

(vi) Poiščite R-najmanjšo zgornjo mejo podmnožice $\{a, b, c\}$, če obstaja.

(vii) Poiščite vse R-spodnje meje podmnožice $\{f, g, h\}$, če obstajajo.

(viii) Poiščite R-največjo spodnjo mejo podmnožice $\{f, g, h\}$, če obstaja.

10. Naj bo $S = \mathbb{N}$. Na množici S je definirana relacija R takole:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow (\exists a)(a \in \mathbb{N} \wedge xy = a^2).$$

(i) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.

(ii) Če je $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, določite $R[1]$, ekvivalenčni razred elementa 1.

(iii) Če je $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, določite vse ekvivalenčne razrede z več kot enim elementom.

11. Naj bo $n \geq 2$ in $M = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Na potenčni množici $\mathcal{P}(M)$ je definirana relacija R takole:

$$A\,R\,B \Leftrightarrow A \cup \{1\} = B \cup \{n\}.$$

(i) Pokažite, da relacija R ni niti irefleksivna, niti simetrična, niti sovisna.

(ii) Pokažite, da je relacija R tranzitivna.

12. Naj bo $S = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\}$ množica vseh bodisi omejenih bodisi neomejenih zaprtih intervalov na realni osi. Nadalje, naj bo R relacija vsebovanosti na S, to je, $A\,R\,B \Leftrightarrow A \subseteq B$, in naj bo $U = \{[1, 10], [3, 20], [4, 15]\} \subset S$.

(i) Poiščite R-spodnjo mejo za U, ki ni R-največja spodnja meja za U.

(ii) Poiščite R-največjo spodnjo mejo za U.

(iii) Poiščite R-zgornjo mejo za U, ki ni R-najmanjša zgornja meja za U.

(iv) Poiščite R-najmanjšo zgornjo mejo za U.

(v) Ali je R linearna urejenost na S?

(vi) Poiščite podmnožico $V \subseteq S$, ki nima R-spodnje meje.

13. Poiščite bijekcijo med intervalom $(-3, \infty)$ in množico $\mathbb{R}$.

14. Pokažite, da sta intervala $[-5, \infty)$ in $[-1, 1)$ ekvipolentna.