

MATRIKE

1. Pokažite, da je determinanta $n \times n$ matrike $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ enaka $n + 1$.

2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Izračunajte determinanto $n \times n$ matrike

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}.$$

3. Izračunajte determinanto naslednjih matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Z uporabo osnovnih operacij na vrsticah pokažite, da je naslednja determinanta enaka 0.

$$\begin{vmatrix} a+2 & b+2 & c+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$$

5. Naj bo $E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Pokažite, da za matriko $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ velja:

$$\det(A) = 1 \iff A^T E A = E.$$

6. Naj bodo $A, B, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in naj velja $\det(B) = \det(A) - 1$ ter $3A^2X = XB$. Poiščite $\det(X)$.