10 Kompleksna števila

Ker nekatere kvadratne enačbe, na primer enačba $x^2 + 1 = 0$, nimajo nobene realne rešitve, definiramo kompleksna števila.

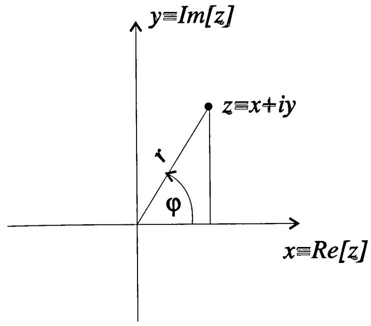
Vsako kompleksno število lahko zapišemo v obliki $a + ib$, kjer sta a in b neki realni števili, ki ju imenujemo realni in imaginarni del kompleksnega števila. Število i imenujemo imaginarna enota in je po definiciji enako $\sqrt{-1}$. Kompleksni števili $a + ib$ in $c + id$ sta enaki natanko tedaj, ko je $a = c$ in $b = d$. Kompleksna števila oblike $a + i0 = a$ lahko identificiramo z realnimi števili, zato realna števila lahko obravnavamo kot podmnožico kompleksnih števil. (Številu $r \in \mathbb{R}$ ustreza kompleksno število $r + i0 \in \mathbb{C}$.)

Apsolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + ib$ označimo s $|z| := |a + ib|$ in definiramo z $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Številu $a + ib$ *konjugirano kompleksno število* je število $a - ib$. Konjugirano kompleksno število kompleksnega števila z običajno označmo z $\overline{z}$ ali z^*.

Ker za seštevanjem množenje kompleksnih števil veljajo enaka pravila kot za realna števila, je tudi množica kompleksnih števil za ti dve operaciji obseg[3]. S kompleksnimi števili lahko računamo prav tako kot z realnimi, le i^2 zamenjamo z -1, kadarkoli se pojavi.

Včasih kompleksna števila obravnavamo kot množico urejenih parov oblike (a, b) in definiramo operacije $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$, $m(a, b) = (ma, mb)$. Potem identificiramo 1 z $(1, 0)$, i z $(0, 1)$ in $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ z $a + ib$.

Polarni zapis kompleksnih števil



Slika 1 Polarni zapis kompleksnih števil.

Ker lahko kompleksno število $x + iy$ identificiramo z urejenim parom (x, y), lahko število $x + iy$ ponazorimo s točko $P = (x, y)$ v ravnini, ki jo potem imenujemo *kompleksna ravnina*. Geometrijsko nazorno je $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$, kjer je φ kot med pozitivnim poltrakom osi x in poltrakom OP in je $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$. Kompleksno število lahko torej zapišemo, v polarni obliki $z = x + iy = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$. r in φ imenujemo *polarni koordinati* kompleksnega števila, φ pa tudi *argument* kompleksnega števila. Argument $\mathrm{Arg}(z)$ je definiran za vsa kompleksna števila razen za število $0 = 0 + i \cdot 0$.

Za kompleksni števili $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ velja

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ z^n &= r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \end{aligned}$$

za poljubno naravno število $n > 0$. Zadnja enačba je *Moivre-ov obrazec*, ki ga lahko uporabimo za določanje korenov kompleksnih števil. Za pozitivno naravno število je

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Torej ima neničelno kompleksno število natanko n različnih n-tih korenov $z^{\frac{1}{n}}$.

[3]Obsèg je v abstraktni algebri ime za algebrsko strukturo, v kateri je možno brez omejitev seštevati, odštevati, množiti in deliti (razen deljenja z 0), pri tem pa veljajo podobni zakoni (komutativnost za seštevanje, asociativnost za seštevanje, obstaja nevtralni element za seštevanje (označimo ga z oznako 0), poljubni element a ima nasprotni element $-a$, asociativnost za množenje, distributivnost (z leve in z desne strani) – ki povezuje seštevanje in množenje, obstaja nevtralni element za množenje in je različen od nevtralnega elementa za seštevanje, za vsak od 0 različen element obstaja inverzni element).

Naloge za začetnike

1. Izračunaj: (i) $(4-2i)+(-6+5i)$; (ii) $(-7+3i)-(2-4i)$; (iii) $(3-2i)(1+3i)$; (iv) $\dfrac{-5+5i}{4-3i}$; (v) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i+5}{i+1}$; (vi) $|3-4i|\cdot|4+3i|$; (vii) $\left|\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}\right|$.

2. Dokaži, da za poljubni kompleksni števili z_1, z_2 velja $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$!

3. Reši $x^3-2x-4=0$.

4. Izračunaj $|\alpha|$, če je $\alpha=\dfrac{-5+i}{2+2i}+\dfrac{i}{3+i}$.

5. Če sta $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ in $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, dokaži $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

6. Izračunaj produkt kompleksnih števil $1+i\sqrt{3}$ in $(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. Nariši skico!

7. Izračunaj $\sqrt{4-3i}$.

8. Izrazi $\cos 4x$ in $\sin 4x$ s $\cos x$ in $\sin x$.

9. Opišite s kompleksnimi števili množice A, B in C: (a) $A=\{(x,y)\mid y<x\}$; (b) $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1 \text{ in } y>0 \text{ in } y>x\}$; (c) $C=\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R\}$.

Običajne naloge

1. Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednji kompleksni števili:

(a) $z=(1+i\sqrt{3})^{42}$;

(b) $z=\dfrac{1}{(1+i)^8}$.

2. Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^3=1$;

(b) $z^4=-8+8i\sqrt{3}$

3. Reši v obsegu kompleksnih števil enačbo $z^3+3z^2+z-5=0$.

4. Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil. Nalogo poskusi rešiti brez računanja.

(a) $\{z\in\mathbb{C}\mid \frac{\pi}{4}<\arg(z)\le\frac{7\pi}{4},\ 1<|z|\le 2\}$;

(b) $\{z\in\mathbb{C}: |z-2+i|<1\}$;

(c) $\{z\in\mathbb{C}: |z-1|=|z-i|\}$.

(d) $\{z\in\mathbb{C}: |z|+|z-3|=4\}$.

5. Reši enačbi:

(a) $z^2+2i\mathrm{Re}z=|z|$;

(b) $z^n=\overline{z}$, $n\ge 2$.

6. Naj bo funkcija $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$ dana s predpisom $f(z)=\frac{z^2}{z-1}$. Določi množici:

(a) $A=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}\mid f(z)\in\mathbb{R}\}$;

(b) $B=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}\mid f(z^2)=2\}$.

7. Naj bosta $a\neq 0$ in b kompleksni števili. Dokaži, da ima enačba $z^2-2az+b=0$ obe rešitvi na enotski krožnici natanko tedaj, kadar je $|a|\le 1$, $|b|=1$ in $\arg b=2\arg a$.

8. Za poljuben $\phi\in\mathbb{R}$ in poljuben $n\in\mathbb{N}$ izračunaj vsoti:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\phi = 1+\cos\phi+\cos 2\phi+\cdots+\cos n\phi,$$
$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\phi = \sin\phi+\sin 2\phi+\cdots+\sin n\phi.$$

Naloge z izpita

1. Nariši množico kompleksnih števil, ki zadoščajo enačbi $|z+1|=|2z-1|$.

2. Dokaži, da za vsa neničelna kompleksna števila z velja

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le \arg z.$$

Nalogo poskusi rešiti geometrijsko.

3. Naj bo z kompleksno število, $z\neq 1$ in $|z|=1$. Dokaži, da je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno.

10.1 Rešitve nalog

Naloge za začetnike

1.

Izračunaj:

- $(4-2i)+(-6+5i) = 4-2i-6+5i = (4-6)+(-2+5)i = -2+3i$
- $(-7+3i)-(2-4i) = -7+3i-2+4i = -9+7i$
- $(3-2i)(1+3i) = 3(1+3i)-2i(1+3i) = 3+9i-2i-6i^2 = 3+6+9i-2i = 9+7i$
- $\dfrac{-5+5i}{4-3i} = \dfrac{-5+5i}{4-3i}\dfrac{4+3i}{4+3i} = \dfrac{-20-15i+20i+15i^2}{16+12i-12i-9i^2} = \dfrac{-35+5i}{25} = \dfrac{-7}{5}+\dfrac{i}{5}i$
- $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i+5}{i+1} = \dfrac{i-1-i+1+i}{i+1}\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{i(1-i)}{2} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$
- $|3-4i||4+3i| = \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{4^2+3^2} = 55 = 25$
- $\left|\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}\right| = \left|\dfrac{1-3i-(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)}\right| = \left|\dfrac{-6i}{10}\right| = \sqrt{0^2+\left(\dfrac{6}{10}\right)^2} = \dfrac{6}{10}$

2.

Dokaži, da za poljubni kompleksni števili z_1, z_2 velja $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$!

Zapišimo $z_1 = x_1+iy_1$ in $z_2 = x_2+iy_2$. Potem je

$$\begin{aligned}
|z_1z_2| &= |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2| \\
&= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} \\
&= \sqrt{{x_1}^2{x_2}^2+{y_1}^2{y_2}^2+{x_1}^2{y_2}^2+{x_2}^2{y_1}^2}.
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned}
|z_1||z_2| &= |x_1+iy_1||x_2+iy_2| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \\
&= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \\
&= \sqrt{{x_1}^2{x_2}^2+{y_1}^2{y_2}^2+{x_1}^2{y_2}^2+{x_2}^2{y_1}^2}.
\end{aligned}$$

3.

Reši $x^3-2x-4=0$.

Uganemo (na primer uporabimo rezultat naloge 1.23), da je ena od rešitev $x=2$. Po deljenju dobimo $(x-2)(x^2+2x+2)=0$. Rešitve *kvadratne enačbe* $ax^2+bx+c=0$ dobimo po formuli $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. V našem primeru $(a=1, b=2, c=2)$ dobimo $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = -1\pm i$.

Druga metoda. Za ničle polinomov stopnje ≤ 4 obstajajo analitične formule za računanje ničel. (Najdemo jih v matematičnih priročnikih.)

4.

Izračunaj $|\alpha|$, če je $\alpha = \frac{-5+i}{2+2i}+\frac{i}{3+i}$.

Preoblikujemo $\frac{-5+i}{2-2i}+\frac{i}{3+i} = \frac{(-5+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}+\frac{i(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{-3-2i}{2}+\frac{1+3i}{10} = -\frac{1}{2}-\frac{7}{10}i$, in izračunamo

$$|\alpha| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+49}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{74}$$

5.

Dokaži: $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$!

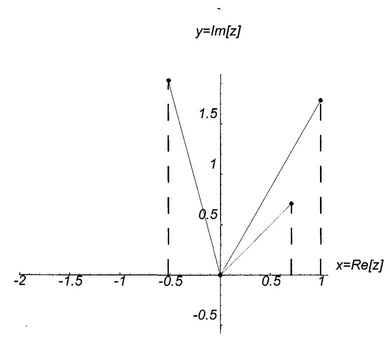
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \end{aligned}$$

Če uporabimo adicijska izreka za sinus in kosinus dobimo

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

6.

Izračunaj produkt kompleksnih števil $1 + i\sqrt{3}$ in $(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Nariši skico!



Argument produkta je vsota argumentov.

Geometrijsko nazorno je

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,.$$

Torej

$$(1+i\sqrt{3})+(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)) = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+2\sqrt{3})\right)$$

Druga metoda. Geometrijsko nazorno je

$$1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Produkt je potem enak (glej prejšnjo nalogo) $r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = 2(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$.

7.

Izračunaj $\sqrt{4-3i}$.

$r = |4-3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $\varphi = \arctan\frac{-3}{4}$. Zapišimo $4-3i = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Po Moivreovem obrazcu je

$$(4-3i)^{1/2} = 5^{1/2}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right),$$

$(k \in \mathbb{Z})$, v našem primeru dobimo dve rešitvi

$$\sqrt{4-3i} = \sqrt{5}\left(\cos(\varphi/2) + i\sin(\varphi/2)\right) \quad \text{in} \quad \sqrt{4-3i} = \sqrt{5}\left(\cos(\varphi/2+\pi) + i\sin(\varphi/2+\pi)\right)\,.$$

Če izračunamo na nekaj decimalnih mest natančno, dobimo

$$\sqrt{4-3i} = 2.1213203 - i0.7071068 \quad \text{in} \quad \sqrt{4-3i} = -2.1213203 + i0.7071068\,.$$

Druga metoda. Rezultat bo kompleksno število $x+iy$, za katero velja $(x+iy)^2 = 4-3i$. Iz

$$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = 4-3i$$

sklepamo

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \text{in} \quad 2xy = -3.$$

Iz druge enačbe sledi $y = -\frac{3}{2x}$, to vstavimo v prvo enačbo $x^2 - (-\frac{3}{2x})^2 = 4$ in dobimo

$$4(x^2)^2 - 16x^2 - 9 = 0.$$

Torej $x^2 = \frac{1}{2\cdot 4}(16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 4\cdot(-9)}) = \frac{1}{2}(4\pm 5)$. Ker mora biti $x^2 > 0$, je smiselna rešitev samo $x^2 = 9/2$ in zato $x = \pm\sqrt{9/2} = \pm 3/\sqrt{2} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Upoštevajmo še enkrat $y = -\frac{3}{2x}$, pa dobimo obe rešitvi $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ in $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Drugače zapisano

$$\sqrt{4-3i} = x+iy = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ali} \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

8.

Izrazi $\cos 4x$ in $\sin 4x$ s $\cos x$ in $\sin x$.

Po formuli za potenciranje binoma je

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^4 &= \cos^4 x + 4\cos^3 x\, i\sin x + 6\cos^2 x\, i^2 \sin^2 x + 4\cos x\, i^3 \sin^3 x + i^4 \sin^4 x \\ &= \cos^4 x - 6\cos^3 x\, \sin^2 x + \sin^4 x + i(4\cos^3 x\, \sin x - 4\cos x\, \sin^3 x).\end{aligned}$$

Po Moivrovi formuli pa je

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x,$$

zato mora biti

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\ \sin 4x &= 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x\end{aligned}$$

in, če upoštevamo še zvezo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dobimo

$$\begin{aligned}\cos 4x &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \\ \sin 4x &= 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x.\end{aligned}$$

9.

Kako s kompleksnimi števili opišemo množice A, B in C

(a) $A = \{(x,y) \mid y < x\}$

(b) $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ in } y > 0 \text{ in } y > x\}$

(c) $C = \{(x,y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R\}$

(a) $A = \{z \mid \frac{-3\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}\}$
(b) $B = \{z \mid |z| < 1 \text{ in } \frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z) < \pi\}$
(c) $C = \{z \mid |z - z_0| = \sqrt{R}\}$, kjer je $z_0 = (x_0, y_0)$.

Običajne naloge

1.

Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednji kompleksni števili:

(a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z = \dfrac{1}{(1+i)^8}$.

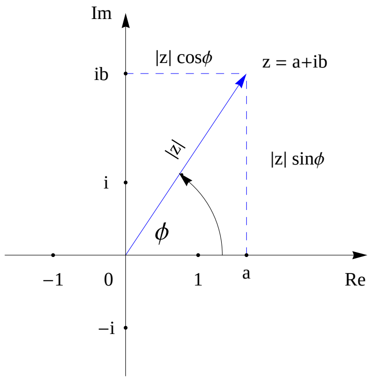
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z = a + ib$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z = |z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z.



Za nas bo Eulerjev zapis zaenkrat le primeren pripomoček za računanje, ko se bomo naučili potencirati na kompleksne eksponente, pa bomo dokazali, da velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

S pomočjo de Moivrove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}.$$

2.

Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^3 = 1$,

(b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ natanko eno pozitivno rešitev, ki ji rečemo n-ti koren števila a in jo označimo z $\sqrt[n]{a}$.

V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo n-ti koreni enote.

(a) Iščemo rešitve enačbe $z^3 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^3 e^{i3\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je:

$$|z| = 1,$$
$$\phi = \frac{2k\pi}{3}.$$

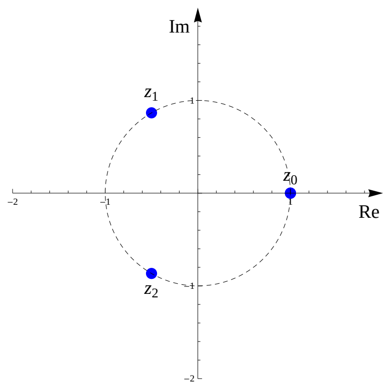
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Eksplicitno so to števila:

$$z_0 = 1,$$
$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^3 = 1$ oglišča enakostraničnega trikotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n-ti koreni enote oglišča enakostraničnega n-kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Rešimo še enačbo $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$. Najprej moramo desno stran zapisati v Eulerjevi obliki

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 16 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} |z| &= 2, \\ \phi &= \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

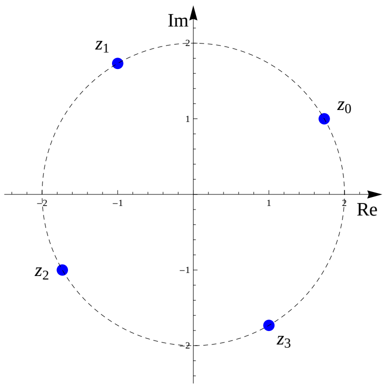
za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Eksplicitno so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= -1 + i\sqrt{3}, \\ z_0 &= -\sqrt{3} - i, \\ z_0 &= 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na krožnici s polmerom 2. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{6}$ glede na koordinatne osi.



Opomba: n-te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n-tih korenov števila a. Preostale n-te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n-timi koreni enote. Vidimo, da n-ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n-kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n-kotnik korenov enote je ta n-kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$. $\square$

3.

Reši v obsegu kompleksnih števil enačbo $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$.

Rešitev: Polinomska enačba stopnje n ima po osnovnem izreku algebre n kompleksnih ničel. Kakšna je lahko večkratna, najpogosteje pa so vse paroma različne. Če ima polinom realne koeficiente, nastopajo kompleksne ničle v konjugiranih parih.

Kubična enačba $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$ ima tri ničle. Preverimo lahko, da je ena izmed njih $z_1 = 1$. Z uporabo Hornerjevega algoritma nato dobimo razcep

$$z^3 + 3z^2 + z - 5 = (z-1)(z^2 + 4z + 5).$$

Kvadratni člen na desni ima dve kompleksni ničli:

$$z_2 = -2 + i,$$
$$z_3 = -2 - i,$$

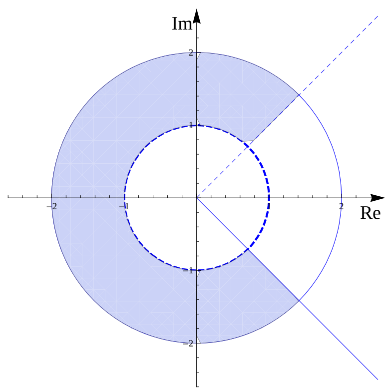
ki sta paroma konjugirani. □

4.

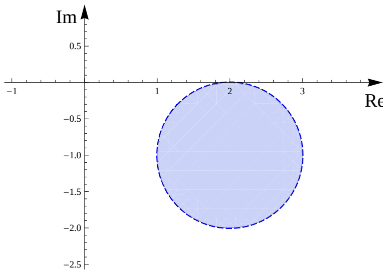
Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil. Nalogo poskusi rešiti brez računanja.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \arg(z) \le \frac{7\pi}{4},\ 1 < |z| \le 2\}$,
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| < 1\}$,
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z - i|\}$,
(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z - 3| = 4\}$.

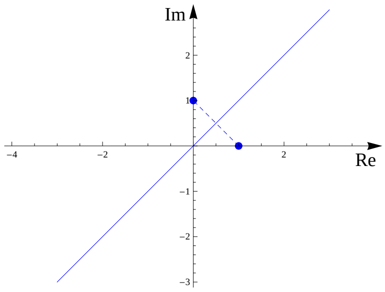
Rešitev: (a) Neenakost $1 < |z| \le 2$ določa kolobar z notranjim polmerom $r = 1$ in zunanjim polmerom $R = 2$. Poleg tega nam neenakost $\frac{\pi}{4} < \arg(z) \le \frac{7\pi}{4}$ iz tega kolobarja izreže krožni izsek, ki ustreza kotom na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.



(b) Neenačba $|z - 2 + i| < 1$ določa krog s središčem v točki $2 - i$ in s polmerom $R = 1$.



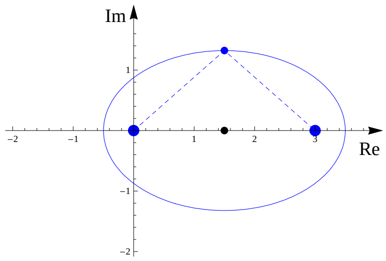
(c) Enačba $|z - 1| = |z - i|$ določa točke, ki so enako oddaljene od števil 1 in i. To so ravno točke na simetrali daljice med tema dvema točkama, ki pa se ujema s simetralo lihih kvadrantov.



Računsko bi lahko do rešitve prišli takole:

$$
\begin{aligned}
|z - 1| &= |z - i|, \\
\sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2}, \\
x^2 - 2x + 1 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1, \\
y &= x.
\end{aligned}
$$

(d) Rešitev enačbe $|z| + |z - 3| = 4$ so vsa kompleksna števila, ki imajo konstantno vsoto oddaljenosti od števil 0 in 3. Če se spomnimo na geometrijsko definicijo elipse, lahko od tod sklepamo, da bomo dobili elipso z goriščema v točkah 0 oziroma 3. Razdalja med tema dvema točkama je enaka dvakratniku linearne ekscentričnosti, kar pomeni, da je $e = \frac{3}{2}$. Dvakratnik velike polosi pa je po drugi strani enak vsoti oddaljenosti od gorišč, kar pomeni, da je $a = 2$. Od tod dobimo še $b^2 = a^2 - e^2 = \frac{7}{4}$. Središče elipse je v razpolovišcu daljice med goriščema, ki je v točki $S(\frac{3}{2}, 0)$.



Računsko pa dobimo:

$$
\begin{aligned}
|z| + |z - 3| &= 4, \\
\sqrt{(x-3)^2 + y^2} &= 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, \\
x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 16 + x^2 + y^2 - 8\sqrt{x^2 + y^2}, \\
6x + 7 &= 8\sqrt{x^2 + y^2}, \\
36x^2 + 84x + 49 &= 64x^2 + 64y^2, \\
28(x - \tfrac{3}{2})^2 + 64y^2 &= 112, \\
\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} &= 1.
\end{aligned}
$$

5.

Reši enačbi:

(a) $z^2 + 2i\mathrm{Re}z = |z|$,

(b) $z^n = \overline{z}$, $n \geq 2$.

Rešitev: (a) Naj bo $z = x + iy$. Sledi:

$$\begin{aligned} z^2 + 2i\mathrm{Re}z &= |z|, \\ (x+iy)^2 + 2ix &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ (x^2 - y^2) + i(2xy + 2x) &= \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Če primerjamo realni in imaginarni komponenti obeh strani enačbe, dobimo naslednji sistem realnih enačb:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ 2xy + 2x &= 0. \end{aligned}$$

Druga enačba se prevede v enačbo

$$x(y+1) = 0.$$

Torej mora veljati bodisi $x = 0$ bodisi $y = -1$. Če je $x = 0$, iz prve enačbe sledi, da mora biti tudi $y = 0$. Če je $y = -1$, pa iz prve enačbe sledi:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= \sqrt{x^2+1}, \\ x^4 - 2x^2 + 1 &= x^2 + 1, \\ x^4 - 3x^2 &= 0, \\ x^2(x^2 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Torej mora biti $x = 0$ ali $x = \pm\sqrt{3}$. Preverimo lahko, da rešitev $x = 0$ ne ustreza prvotni enačbi, zato so rešitve enačbe:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0, \\ z_1 &= \sqrt{3} - i, \\ z_2 &= -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

(b) Rešujemo enačbo $z^n = \overline{z}$. Ena rešitev je $z = 0$, zato v nadaljevanju privzemimo, da je $z \neq 0$. Če enačbo $z^n = \overline{z}$ pomnožimo z z, dobimo:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= |z|^2, \\ |z|^{n+1} e^{i(n+1)\phi} &= |z|^2 e^{i2k\pi}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{2k\pi}{n+1}$ za $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z \in \left\{0, 1, e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, e^{\frac{4\pi i}{n+1}}, \ldots, e^{\frac{2n\pi i}{n+1}}\right\}.$$

Geometrično so to poleg koordinatnega izhodišča oglišča pravilnega $(n+1)$-kotnika na enotski krožnici. $\square$

6.

Naj bo funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ dana s predpisom $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$. Določi množici:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid f(z^2) = 2\}$.

Rešitev: (a) Pišimo $z = x + iy$. Iščemo torej vsa kompleksna števila, ki zadoščajo pogoju

$$\frac{(x+iy)^2}{x+iy-1} = r,$$

kjer je r neko realno število. Zgornja enakost se prevede v enakost

$$x^2 + 2ixy - y^2 = rx - r + iry.$$

S primerjavo realnih in imaginarnih komponent dobimo:

$$x^2 - y^2 = rx - r,$$
$$2xy = ry.$$

Iz druge enačbe dobimo pogoj

$$y(2x - r) = 0,$$

ki nam pove, da je bodisi $y = 0$ bodisi $r = 2x$. Če je $y = 0$, je $z = x$, izraz $f(z) = \frac{x^2}{x-1}$ pa je seveda realen za vsak $x \neq 1$. Če je $r = 2x$, pa iz prve enačbe zgoraj dobimo enačbo

$$x^2 - y^2 = 2x^2 - 2x,$$

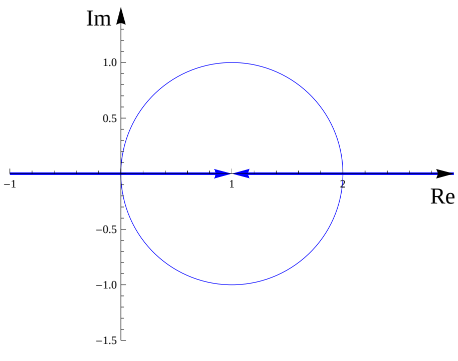
ki jo lahko preoblikujemo v enačbo

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Dobimo krožnico s središčem v točki $S(1,0)$ in s polmerom $R = 1$. Iskano množico torej lahko zapišemo v obliki

$$A = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}.$$

Poglejmo še skico.



(b) Sedaj rešujemo enačbo

$$\frac{z^4}{z^2-1} = 2,$$

ki jo lahko prevedemo v polinomsko enačbo četrte stopnje

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0.$$

Vemo, da ima ta enačba štiri kompleksne rešitve, rešimo pa jo lahko na več načinov. Z uvedbo nove spremenljivke $w = z^2$ jo lahko na primer prevedemo na kvadratno enačbo za w, ki ima rešitvi

$$w_{1,2} = 1 \pm i.$$

Da bi dobili rešitve prvotne enačbe, moramo sedaj izračunati korene števil $1+i$ in $1-i$. V Eulerjevem zapisu lahko ti dve števili izrazimo v obliki:

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \\ 1-i &= \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Ko ju korenimo, tako dobimo rešitve prvotne enačbe:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \\ z_2 &= -\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \\ z_3 &= \sqrt[4]{2}e^{\frac{-i\pi}{8}}, \\ z_4 &= -\sqrt[4]{2}e^{\frac{-i\pi}{8}}. \end{aligned}$$

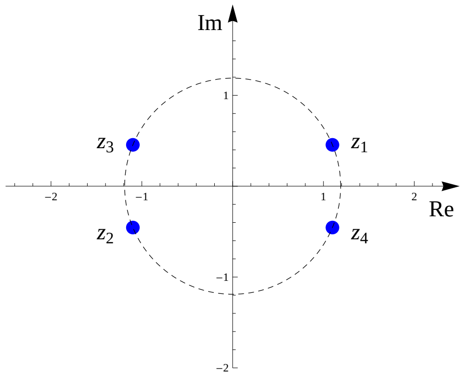
Če jih hočemo eksplicitno izračunati, moramo najprej izračunati še vrednosti $\cos\frac{\pi}{8}$ in $\sin\frac{\pi}{8}$. Dobimo ju lahko z uporabo formul za polovične kote:

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}}, \\ \sin\phi &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{2}}. \end{aligned}$$

Ker vrednosti kosinusa in sinusa poznamo pri kotu $\phi = \frac{\pi}{4}$, lahko od tod izpeljemo, da velja:

$$\cos\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},$$
$$\sin\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.$$

Ti vrednosti bi sedaj lahko vstavili v rešitve, a rezultat ne pride posebej lep, zato si množico B raje poglejmo grafično.



7.

Naj bosta $a \neq 0$ in b kompleksni števili. Dokaži, da ima enačba $z^2 - 2az + b = 0$ obe rešitvi na enotski krožnici natanko tedaj, kadar je $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $\arg b = 2\arg a$.

Rešitev: Kadar dokazujemo ekvivalenco dveh trditev, moramo dokazati implikaciji v obe smeri.

($\Longleftarrow$) Denimo najprej, da velja $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $\arg b = 2\arg a$. Potem lahko zapišemo:

$$a = |a|e^{i\phi},$$
$$b = e^{2i\phi}$$

za nek $\phi = \arg a$. V tem primeru sta rešitvi kvadratne enačbe $z^2 - 2az + b = 0$ števili

$$z_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = |a|e^{i\phi} \pm \sqrt{|a|^2 e^{2i\phi} - e^{2i\phi}} = e^{i\phi}(|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1}).$$

Prvi faktor leži na enotski krožnici, zato moramo pokazati še, da leži tudi člen

$$|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1}$$

na enotski krožnici. Ker je $|a| \leq 1$, je $1 - |a|^2 \geq 0$, zato lahko to število zapišemo v kartezični obliki

$$|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1} = |a| \pm i\sqrt{1 - |a|^2}.$$

Od tod pa takoj sledi, da je absolutna vrednost tega števila enaka 1, kar smo želeli pokazati.

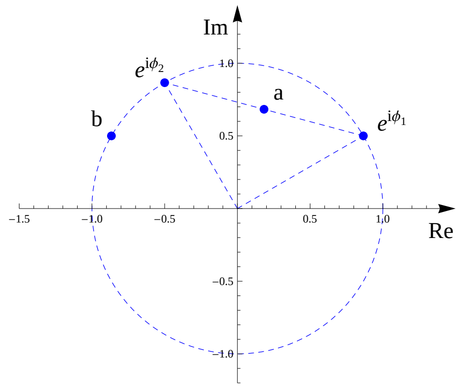
($\Longrightarrow$) Sedaj privzemimo, da ležita rešitvi enačbe $z^2 - 2az + b = 0$ na enotski krožnici. Potem ju lahko zapišemo v obliki:

$$z_1 = e^{i\phi_1},$$
$$z_2 = e^{i\phi_2}$$

za neka $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$. Privzamemo lahko, da je $\phi_1 \leq \phi_2$. Z uporabo Vietovih formul dobimo:

$$z_1 + z_2 = 2a,$$
$$z_1 z_2 = b.$$

Sedaj bomo poskusili ti dve enačbi interpretirati geometrično. Poglejmo si skico v primeru, ko sta $\phi_1, \phi_2 \in [0, \pi)$.



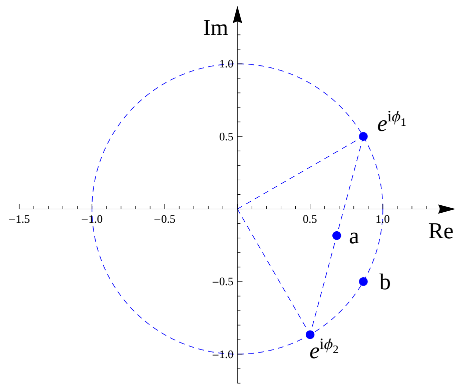
Vidimo, da je točka a razpolovišče daljice med z_1 in z_2. Od tod takoj sledi, da je $|a| \leq 1$ in da je $\arg a = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$. Po drugi strani pa je

$$b = z_1 z_2 = e^{i(\phi_1 + \phi_2)},$$

od koder sledi $\arg b = \phi_1 + \phi_2$ in $|b| = 1$. Torej je $\arg b = 2 \arg a$, kot smo želeli dokazati.

Podobna je skica tudi v primeru, ko je $\phi_2 - \phi_1 < \pi$. Je pa treba v tem primeru pravilno interpretirati enakost $\arg b = 2 \arg a$. Če je na primer $\phi_1 = \pi$ in $\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$, je $\arg a = \frac{5\pi}{4}$ in $\arg b = \frac{\pi}{2}$. V tem primeru velja enakost $\arg b = 2 \arg a$ le do večkratnika 2π natančno.

Malce drugače pa je treba ravnati v primeru, ko je $\phi_2 - \phi_1 > \pi$.



V tem primeru je:

$$\begin{aligned}\arg a &= \tfrac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \pi,\\ \arg b &= \phi_1 + \phi_2.\end{aligned}$$

Enakost $\arg b = 2\arg a$ je torej spet treba razumeti do večkratnika 2π natančno.

Opomba: Ker je $a \neq 0$, se ne more zgoditi, da bi bilo $\phi_2 - \phi_1 = \pi$.

8.

Za poljuben $\phi \in \mathbb{R}$ in poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunaj vsoti:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos k\phi &= 1 + \cos\phi + \cos 2\phi + \ldots + \cos n\phi,\\ \sum_{k=0}^{n} \sin k\phi &= \sin\phi + \sin 2\phi + \ldots + \sin n\phi.\end{aligned}$$

Rešitev: Pri izračunu danih vsot si bomo na zvit način pomagali z de Moivrovo formulo. Definirajmo:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=0}^{n} \cos k\phi,\\ y &= \sum_{k=0}^{n} \sin k\phi.\end{aligned}$$

Potem velja

$$x + iy = \sum_{k=0}^{n} (\cos k\phi + i\sin k\phi) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\phi} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\phi}\right)^k.$$

Če ϕ ni večkratnik števila 2π, je $e^{i\phi} \neq 1$. Torej imamo opravka z vsoto geometrijskega zaporedja z začetnim členom 1 in s količnikom $e^{i\phi}$. Po znani formuli je ta vsota enaka

$$\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\phi}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1}.$$

Prvotni vsoti bomo dobili tako, da bomo izračunali realno in imaginarno komponento kompleksnega števila na desni. Iz enakosti

$$\frac{e^{i(n+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = \frac{(e^{i(n+1)\phi} - 1)(e^{-i\phi} - 1)}{(e^{i\phi} - 1)(e^{-i\phi} - 1)} = \frac{-e^{i(n+1)\phi} + e^{in\phi} - e^{-i\phi} + 1}{2 - e^{i\phi} - e^{-i\phi}}$$

dobimo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\cos(n+1)\phi + \cos n\phi - \cos\phi + 1}{2 - 2\cos\phi}, \\ y &= \frac{-\sin(n+1)\phi + \sin n\phi + \sin\phi}{2 - 2\cos\phi}. \end{aligned}$$

Ta dva izraza lahko še malo poenostavimo z uporabo trigonometričnih identitet:

$$\begin{aligned} \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

in pa enakostjo

$$2 - 2\cos\phi = 4\sin^2\tfrac{\phi}{2}.$$

Sledi

$$x = \frac{1}{2} + \frac{-\cos(n+1)\phi + \cos n\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}$$

in

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\phi}{2} + \frac{-\sin(n+1)\phi + \sin n\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\phi}{2} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}.$$

Tako smo izpeljali enakosti:

$$\begin{aligned} 1 + \cos\phi + \cos 2\phi + \ldots + \cos n\phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}, \\ \sin\phi + \sin 2\phi + \ldots + \sin n\phi &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\phi}{2} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}, \end{aligned}$$

ki jima rečemo Lagrangeevi trigonometrični identiteti.

Posebej moramo obravnavati še primer, ko je ϕ večkratnik števila 2π. V tem primeru so vsi sinusi enaki nič, vsi kosinusi pa enaki ena, zato obeh vsot ni težko izračunati. $\square$

NALOGE Z IZPITA

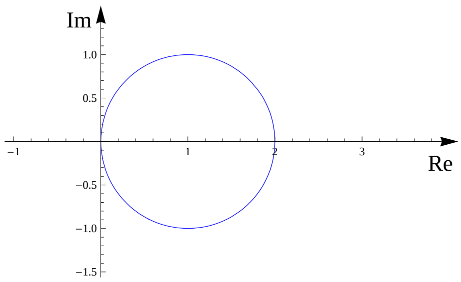
1.

Nariši množico kompleksnih števil, ki zadoščajo enačbi $|z+1| = |2z-1|$.

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in računajmo:

$$\begin{aligned} |z+1| &= |2z-1|, \\ |x+iy+1| &= |2x+2iy-1|, \\ \sqrt{(x+1)^2+y^2} &= \sqrt{(2x-1)^2+4y^2}, \\ x^2+2x+1+y^2 &= 4x^2-4x+1+4y^2, \\ 0 &= 3x^2-6x+3y^2, \\ 1 &= (x-1)^2+y^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da je to krožnica s središčem v točki $S(1,0)$ in s polmerom $R=1$.



2.

Dokaži, da za vsa neničelna kompleksna števila z velja

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leq \arg z.$$

Nalogo poskusi rešiti geometrijsko.

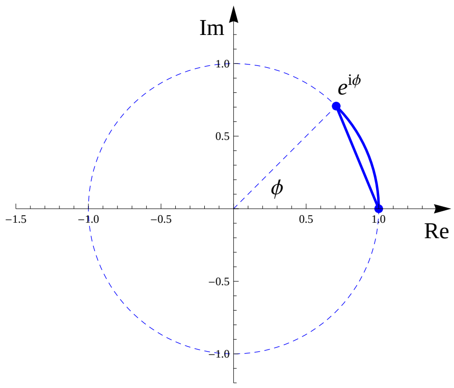
Rešitev: Tokrat si bomo pomagali z zapisom kompleksnega števila v Eulerjevi obliki. Naj bo $z = |z|e^{i\phi}$. Potem je

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right| = |e^{i\phi}-1|,$$

kar pomeni, da dokazujemo neenakost

$$|e^{i\phi}-1| \leq \phi.$$

Izraz na levi je enak dolžini daljice med točkama $e^{i\phi}$ in 1 v kompleksni ravnini. Ker ti dve točki ležita na enotski krožnici, pa je kot ϕ enak kar dolžini loka med njima. Ker je daljica najkrajša pot med dvema točkama, velja dana neenakost.



□

3.

Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno.

Rešitev: Spomnimo se, da je kompleksno število w realno natanko takrat, ko je $w = \overline{w}$. Definirajmo

$$w = i\frac{z+1}{z-1}$$

in računajmo:

$$\begin{aligned}
w &\stackrel{?}{=} \overline{w}, \\
i\frac{z+1}{z-1} &\stackrel{?}{=} -i\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}, \\
(z+1)(\overline{z}-1) &\stackrel{?}{=} -(\overline{z}+1)(z-1), \\
|z|^2+\overline{z}-z-1 &\stackrel{?}{=} -|z|^2-z+\overline{z}+1, \\
|z|^2-1 &\stackrel{?}{=} -|z|^2+1.
\end{aligned}$$

Ker je $|z| = 1$, zadnja enakost drži. Torej je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno. □

Zanimive povezave:
[a] Polarni zapis kompleksnega števila