ZAPOREDJA

Zaporedje a v množici M je funkcija $a : \mathbb{N} \to M$, ki je definirana na množici naravnih števil in je določena s predpisom $f(n) = a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

a_n je **splošni (oz. n-ti) člen** zaporedja in največkrat zaporedje podamo kar z nekaj členi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ali ga krajše ozačujemo z $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zaporedju v množici $\mathbb{R}$ rečemo **realno zaporedje.**

Zaporedje $\{b_n\}$ je **podzaporedje** zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko obstaja tako strogo naraščajoče zaporedje indeksov $\{i_n\}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $b_n = a_{i_n}$.

Zaporedje je **navzgor (oz. navzdol) omejeno,** če obstaja število M (oz. število m), da je $a_n \leq M$ (oz. $a_n \geq m$) za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Če je zaporedje hkrati navzgor in navzdol omejeno, rečemo, da je **zaporedje omejeno.**

Zaporedje $\{a_n\}$ je **naraščajoče (oz. strogo naraščajoče),** če je $a_{n+1} \geq a_n$ (oz. $a_{n+1} > a_n$) za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje $\{a_n\}$ je **padajoče (oz. strogo padajoče),** če je $a_{n+1} \leq a_n$ (oz. $a_{n+1} < a_n$) za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Če je zaporedje naraščajoče ali padajoče, rečemo, da je zaporedje **monotono.**

Zaporedje $\{a_n\}$ je **alternirajoče,** če je $a_{n+1}a_n \leq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Število $a \in \mathbb{R}$ imenujemo **stekališče** zaporedja $\{a_n\}$, če vsebuje vsaka poljubno majhna okolica števila a neskončno mnogo členov zaporedja:

$|a_n - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ za neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$.

Če ima zaporedje $\{a_n\}$ eno samo stekališče a, to število imenujemo **limita** zaporedja in zapišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Število a je **limita zaporedja** $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko velja trditev:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n \geq N$.

Zaporedje $\{a_n\}$ **gre proti neskončnosti** natanko tedaj, ko velja trditev:

$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq M$ za vsak $n \geq N$.

Tedaj zapišemo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Podobno definiramo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty.$$

Zaporedje imenujemo **konvergentno,** če je njegova limita realno število. Zaporedje, ki ni konvergentno, je **divergentno.**

Potreben in zadosten pogoj za konvergenco zaporedja: zaporedje $\{a_n\}$ je konvergentno in konvergira proti limiti $a \in \mathbb{R}$, če k poljubnemu $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $|a_n - a| < \varepsilon$, če je $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Naraščajoče (oz. padajoče) zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor (oz. navzdol) omejeno.

Alternirajoče zaporedje je konvergentno, če je $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$.

Naj bosta zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni in naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$; $a, b \in \mathbb{R}$. Potem velja:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0, b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

Te formule o računanju s konvergentnimi zaporedji lahko posplošimo tudi na divergentna zaporedja z limito ∞ ali $-\infty$; ne velja pa to za naslednje **nedoločene izraze:**

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad \frac{1}{0}$$

Število e - osnova za naravne logaritme - je definirano z:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Naloge

1. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n}$.

   (a) Zapiši nekaj členov in jih nariši na številski premici.

   (b) Dokaži, da je zaporedje strogo padajoče.

   (c) Koliko členov zaporedja leži na intervalu $\left[\frac{5}{4}, 3\right]$?

   (d) Poišči natančno zgornjo in natančno spodnjo mejo zaporedja.

2. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2}{3n+7}$.

   (a) Zapiši prvih nekaj členov zaporedja.

   (b) Ugotovi, ali je zaporedje omejeno, naraščajoče, padajoče in ali je konvergentno.

   (c) Če je zaporedje konvergentno, mu izračunaj limito.

3. Z uporabo definicije limite zaporedja dokaži enakosti

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\arctan n} = \infty$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3ni}{n(1+i)} = \dfrac{3+3i}{2}$

4. Naj bo $a_1 = 1$ in naj za vsako naravno število n velja

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}\left(a_n^2 + a_n + 6\right).$$

   Dokaži, da je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno. Utemelji, ali je zaporedje konvergentno, in če je, mu izračunaj limito.

5. Določi vsa stekališča danega zaporedja in za vsako zaporedje poišči podzaporedje, ki konvergira k posameznemu stekališču.

   (a) $a_n = (-1)^n$

   (b) $b_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \arctan((-1)^n\sqrt{n})$

6. Za dano zaporedje ugotovi, ali je konvergentno, in če je, izračunaj njegovo limito.

$$a_n = \frac{1000^n}{n!}$$

7. Dokaži, da je naslednje zaporedje naraščajoče in neomejeno.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

8. Dokaži, da je naslednje zaporedje Cauchyjevo.

$$a_n = \frac{\arctan 1}{3} + \frac{\arctan 3}{3^2} + \cdots + \frac{\arctan(2n-1)}{3^n}$$

9. Dokaži, da je naslednje zaporedje divergentno.

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n+n}}$$

10. Izračunaj limite zaporedij.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-3}{n+2}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n+5}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n\sqrt{n^2+4} - n^2)$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+2}}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

11. Določi $\limsup\limits_{n\to\infty}$ in $\liminf\limits_{n\to\infty}$ za naslednje zaporedje.

$$a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

12. Izračunaj limite zaporedij.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{-\frac{n}{2}-1}$