# REALNA ŠTEVILA

## NARAVNA ŠTEVILA

Množica

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

je množica **naravnih števil**, ki je matematično korektno definirana s **Peanovimi aksiomi.**

V množici $\mathbb{N}$ znamo **seštevati** in **množiti**, odštevati pa ne vedno.

**Popolna matematična indukcija:**

Naj bo $T(n)$ neka smiselna trditev, odvisna od števila $n$, kjer je $n$ poljubno naravno število. Če veljata izjavi:

- baza $T(1)$ in
- indukcijski korak $\forall n \in \mathbb{N} : (T(n) \Rightarrow T(n+1))$,

smemo sklepati, da velja trditev $T(n)$ za vsako naravno število $n$.

## CELA ŠTEVILA

Množica

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

je množica **celih števil.**

V množici $\mathbb{Z}$ znamo **seštevati**, **odštevati** in **množiti**, deljenje pa ni vedno izračunljivo.

## RACIONALNA ŠTEVILA

Množica

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

je množica **racionalnih števil.**

V množici $\mathbb{Q}$ znamo **seštevati, odštevati, množiti in deliti** (definirano ni le deljenje s številom 0).

Množico **realnih števil** $\mathbb{R}$ dopolnijo tako imenovana **iracionalna števil**. Tako je recimo število, katerega kvadrat je enak 2.

## REALNA ŠTEVILA

Med poljubnima različnima realnima številoma obstaja racionalno število; rečemo tudi, da so racionalna števila povsod gosta v realnih. Je pa množica racionalnih števil zelo "luknjičava", saj med njimi nastopa neskončno iracionalnih števil.

Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica:

- **Spodnja meja** množice $X$ je število $s \in \mathbb{R}$, za katerega velja $s \leq x$ za vsak $x \in X$.
  Če spodnja meja obstaja, rečemo, da je množica $X$ **navzdol omejena.**
- **Zgornja meja** množice $X$ je število $z \in \mathbb{R}$, za katerega velja $z \geq x$ za vsak $x \in X$.
  Če zgornja meja obstaja, rečemo, da je množica $X$ **navzgor omejena.**
- **Minimum** množice $X$ je število $m \in \mathbb{R}$, za katerega velja $m \in X$ in $m \leq x$ za vsak $x \in X$.
  Minimum označimo na kratko $\min X$.
- **Maksimum** množice $X$ je število $M \in \mathbb{R}$, za katerega velja $M \in X$ in $M \geq x$ za vsak $x \in X$.
  Maksimum označimo na kratko $\max X$.
- **Infimum** množice $X$ je največja spodnja meja množice $X$; označimo jo z $\inf X$.
- **Supremum** množice $X$ je najmanjša zgornja meja množice $X$; označimo jo s $\sup X$.

Vsaka navzdol omejena podmnožica množice $\mathbb{R}$ premore infimum; podobno vsaka navzgor omejena podmnožica premore supremum.

Če množica navzdol ni omejena, infimum ne obstaja; podobno, če množica navzgor ni omejena, supremum ne obstaja.

Če obstaja $\min X$, je enak $\inf X$ in če obstaja $\max X$, je enak $\sup X$.

**Absolutno vrednost** realnega števila $x$ označimo z $|x|$ in jo definiramo takole:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0 \\ -x, & \text{če je } x < 0 \end{cases}$$

Na številski premici pomeni $|x|$ razdaljo točke $X$, ki je slika števila $x$ od izhodišča 0.

Absolutna vrednost razlike $|a-b|$ pa je razdalja ustreznih točk $A$ in $B$ na številski osi.

## Naloge

1. S popolno indukcijo dokaži, da naslednje enakosti veljajo za vsa naravna števila $n$.

   (a) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

   (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Naj bo $h \in [0,1]$. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja $(1+h)^n \leq 1 + (2^n - 1)h$.

3. Z indukcijo dokaži, da je za vsako naravno število $n \geq 2$ število $2^{2^n} - 1$ deljivo s 15.

4. Z indukcijo dokaži, da je za vsako število $n \in \mathbb{N}_0$ število $1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$ deljivo s 7.

5. Dokaži, da za vsako celo število $n$ obstajata taki celi števili $a$ in $b$, da velja $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$.

6. Naj bo $q$ neničelno racionalno število, $x > 0$ in $y$ pa iracionalni števili.

   (a) Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + y$ in $qy$ iracionalna.

   (b) Ali lahko kaj podobnega povemo o številih $x + y$, $xy$ in $\sqrt{q}$?

7. Dokaži, da $\sqrt{2} + \sqrt{17}$ ni racionalno število.

8. Določi vsa realna števila $x$, za katera je izpolnjena neenakost

$$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0.$$

9. Reši naslednje neenačbe.

   (a) $|x-1| < x+4$

   (b) $\dfrac{x^2+10x-29}{x^2-15x+26} > -1$

   (c) $2|x-1| + |x+2| < 4$

   (d) $||x+1| - |2x-1|| \leq 1$

   (e) $\sqrt{2x+1} < \dfrac{x+2}{2-x}$

10. Za vsako od naslednjih množic določi tista od števil supremum, infimum, minimum in maksimum, ki obstajajo.

    (a) $A = \left\{ 1 + \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

    (b) $B = \{x^2 - 6x \,|\, x > 0\}$

    (c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x-3)(x-2)(x-1)(x+5) < 0\}$

    (d) $D = \{x \in [1,3] \,|\, x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki}\}$

11. Naj bosta $A$ in $B$ podmnožici v $\mathbb{R}$. Definirajmo vsoto (razliko) množic kot množico vseh vsot (razlik) elementov množic, torej $A \pm B = \{a \pm b \,|\, a \in A, b \in B\}$. Dokaži enakosti in premisli, kdaj so te formule sploh smiselne.

    (a) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$

    (b) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

**Rešitve nekaterih nalog**

8. $\mathcal{R} = (-\infty, 4/3)$

9.(a) $\mathcal{R} = (-3/2, \infty, )$

9.(b) $\mathcal{R} = (-\infty, -1/2) \cup (2, 3) \cup (13, \infty)$

9.(c) $\mathcal{R} = (0, 4/3)$

9.(d) $\mathcal{R} = [-1/3, 1/3] \cup [1, 3]$

9.(e) $\mathcal{R} = [-1/2, 0) \cup (0, 2)$

10.(a) $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 1$, $\min A$ ne obstaja

10.(b) $\inf B = \min B = -9$, $\sup B$ in $\max B$ ne obstajata

10.(c) $\inf C = -5$, $\min C$ ne obstaja, $\sup C = 3$, $\max C$ ne obstaja

10.(d) $\inf D = 1$, $\min D$ ne obstaja, $\sup D = 3$, $\max D$ ne obstaja