RELACIJE

Relacija R na množici X je podmnožica $R \subseteq X \times X$. Če velja $(x, y) \in R$, rečemo, da je element x **v relaciji** R z elementom y; v rabi pogosteje srečamo zapisa xRy ali $R(x, y)$.

Nekatere lastnosti relacije R na množici X:

- **refleksivnost:** $\forall x \in X : xRx$,
- **simetričnost:** $\forall x, y \in X : (xRy \Rightarrow yRx)$,
- **antisimetričnost:** $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$,
- **tranzitivnost:** $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.

Relacija je **ekvivalenčna**, natanko tedaj, ko je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Ekvivalenčni razred elementa x (glede na ekvivalenčno relacijo R na množici X) je množica vseh takih elementov y množice X, ki so v relaciji z elementom x:

$$[x]_R = \{y \in X \mid yRx\}.$$

Ekvivalenčna relacija R razbije množico X na ekvivalenčne razrede, ki so med seboj paroma disjunktni, kar pomeni, da vsak element $x \in X$ leži v natanko enem ekvivalenčnem razredu ekvivalenčne relacije R. Unija vseh ekvivalenčnih razredov relacije R je enaka množici X.

Naloge

1. Naj bo $X = \{a, b, c, d, e\}$ in $R = \{(e, c), (b, c), (b, b), (e, b), (c, e)\}$.
   (a) Ali je R relacija na množici X?
   (b) Razišči naslednje lastnosti relacije R: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost in tranzitivnost.
   (c) Poišči najmanjšo refleksivno relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R.
   (d) Poišči najmanjšo simetrično relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R.
   (e) Poišči najmanjšo antisimetrično relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R.
   (f) Poišči najmanjšo tranzitivno relacijo na množici X, katere podmnožica je relacija R.
   (g) Ali obstaja taka ekvivalenčna relacija E na množici X, da je $R \subseteq E$?

2. V množico vseh celih števil $\mathbb{Z}$ vpeljemo relacijo kongruence po modulu m, kjer je m neko od nič različno celo število, s predpisom
$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \text{ deljivo z } m.$$
Pokaži, da je ta relacija ekvivalenčna in poišči ekvivalenčni razred poljubnega celega števila a.

3. Na množici $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je definirana relacija R s predpisom:
$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x + v = y + u.$$
   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Naj bo množica M enaka
$$M = \{(0, 2), (1, 2), (2, 4), (3, 4), \ldots, (2n, 2n + 2), (2n + 1, 2n + 2), \ldots\}.$$
   Določi ekvivalenčne razrede, na katere relacija R razbije množico M.

4. Na množici $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 10\}$ je definirana relacija
$$R = \{(m, n) \,|\, b(m) = b(n)\},$$
kjer je $b(k)$ število enic v dvojiškem zapisu števila k. Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi njene ekvivalenčne razrede.

5. V potenčno množico $\mathcal{P}(N)$ množice $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ vpeljemo relacijo R s predpisom
$$ARB \Leftrightarrow A \cup \{1\} = B \cup \{10\}.$$
Razišči naslednje lastnosti relacije R: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost in tranzitivnost.

Rešitve nekaterih nalog

1. (a) Da.

1. (b) Relacija nima nobene od naštetih lastnosti.

1. (c) $R \cup \{(a, a), (c, c), (d, d), (e, e)\}$

1. (d) $R \cup \{(c, b), (b, e)\}$

1. (e) Ne obstaja.

1. (f) $R \cup \{(e, e), (c, c), (c, b), (b, e)\}$

1. (g) Obstaja. Npr.: unija množic pod točkami (c), (d) in (f).

2. $[a] = \{b + km \mid k \in \mathbb{Z}\}$

4. $[1] = \{1, 2, 4, 8\}$,
   $[3] = \{3, 5, 6, 9, 10\}$,
   $[7] = \{7\}$

5. Relacija R je antisimetrična in tranzitivna.