Pokazali smo, da ima vsaka matrika A aditiven inverz $-A$, ki je enolično določen in za katerega velja $A+(-A)=0$

Ali obstaja multiplikativen inverz?

Želimo: $A \cdot X = I$

za realna števila vemo, da je $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ in $\frac{1}{x} \cdot x = 1$

Def: Naj bo A poljubna $m \times n$ matrika.
Potem $n \times m$ matriki X pravimo LEVI INVERZ matrike A, če je $X \cdot A = I_n$ in $n \times m$ matriki Y pravimo DESNI INVERZ matrike A, če je $A \cdot Y = I_m$.

PRIMER: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & a \\ -3 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$

$$\underbrace{X \cdot A}_{2\times 4\ \ 4\times 2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & a \\ -3 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

X je levi inverz matrike A, matrik X je neskončno mnogo (a, b lahko izberemo poljubno)

Kako je pa z desnim inverzom? $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \end{bmatrix}$

želimo: $\underset{4\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 4}{Y} = I$

$$A \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

tak Y ne obstaja $\Rightarrow$ A nima desnega inverza.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad X = Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

IZREK: Naj bo A $m \times n$ matrika. Potem

- ima A desni inverz če in samo če $r(A) = m$
- ima A levi inverz če in samo če $r(A) = n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 - 4v_1 \\ v_3 - 3v_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 + v_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IZREK: Če ima matrika A oba, levi inv. X in desni inv. Y, potem
1.) je A kvadratna
2.) $X = Y$

Dokaz: 1.) Predpostavimo, da imamo matriko A velikosti $m \times n$ in sta X, Y ustrezna inverza.
Potem po prejšnjem izreku $\exists$ desni inverz, če $r(A) = m$ in $\exists$ levi inverz, če $r(A) = n$.
Torej $m = n \Rightarrow A$ kvadratna.

2.) Predpostavimo, da je A kvadratna matrika velikosti $n \times n$ in sta X, Y ustrezna inverza.

$$X \cdot A = I_n \quad \text{in} \quad A \cdot Y = I_n$$

asociativnost množenja

$$X = X \cdot I_n = X(A \cdot Y) \overset{\downarrow}{=} (XA)Y = I_n Y = Y$$

Za kvadratne matrike lahko povemo še več:

IZREK: Če je A matrika velikosti $n \times n$, potem so naslednje trditve ekvivalentne:
1) A ima levi inverz
2) A ima desni inverz
3.) $r(A) = n$
4.) Hermitska matrika matrike A je I_n
5.) A produkt elementarnih matrik

Če ima kvadratna matrika A enostranski inverz (L ali D), potem ima dvostranski inverz in tega imenujemo enostavno INVERZ. Inverz je enolično določen, označimo ga z A^{-1}.

Def Če ima matrika A inverz, potem pravimo, da je matrika A OBRNLJIVA.

Če je A obrnljiva $n \times n$ matrika potem je tudi A^{-1} obrnljiva matrika.

$$A^{-1} \cdot A = I = A A^{-1}$$

$\Rightarrow A$ je inverz od A^{-1} $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

Kako najdemo inverz? A $n\times n$ matrika

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n$$

$$E_k \dots E_2 E_1 \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \underbrace{I_n A^{-1}}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 I$$

Primer: Poiščite inverz od $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$A|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ v_3 - 2v_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} v_1 - 2v_2 \\ \\ :(-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} v_1 - v_3 \\ v_2 - v_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] = I | A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

D.N. preverite, da je $A \cdot A^{-1} = I$.

LASTNOSTI INVERZA:

1.) $(A^{-1})^{-1} = A$

2.) Če sta A, B obrnljivi matriki potem je obrnljiv tudi produkt AB in velja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Preverimo: $A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

! to ne velja za vsoto matrik!

3.) Če je A obrnljiva matrika, potem je A^m tudi obrnljiva matrika in velja $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

4.) Če je A obrnljiva matrika, potem je transponiranka A^T tudi obrnljiva matrika in velja $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$I = I^T = (AA^{-1})^T = \underbrace{(A^{-1})^T}_{\text{levi inverz od } A^T} A^T$$

DETERMINANTA KVADRATNE MATRIKE

Vsaki kvadratni matriki lahko priredimo neko število, ki mu pravimo DETERMINANTA. Za matriko $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ determinanto označimo z **det(A)** oz. razširjeni obliki:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Za $n=1$ in $n=2$ je definicija determinante enostavna:

$$|a_{11}| = a_{11} \qquad \text{in} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Primer: $\det([-6]) = |-6| = -6$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

Za $n=3$ je

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Kaj lahko povemo o zgornjem izrazu?

- 6 členov
- vsak člen je zmnožek 3 koeficientov iz matrike A
- 1. indeksi so vedno 1,2,3
- 2. indeksi 1,2,3 2,3,1 3,1,2 2,1,3 3,2,1 1,3,2
  predstavljajo VSEH 6 možnosti, ki jih imamo, da razvrstimo števila 1,2,3.
- 3 členi imajo predznak + in 3 −

Obstaja nek vzorec ...

- členov je toliko kolikor je različnih razvrstitev števil $1, \dots, n$
- vsak člen bo imel n koeficientov
- znamo določiti indekse

Kako določimo predznake?

Pri tem nam pomagajo PERMUTACIJE.

PERMUTACIJE

Permutacija je bijekcija množice $\{1,2,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.j. neka razvrstitev števil $1,2,\dots,n$.

Primer:

Permutacija od $\{1,2,3\}$ je npr. $3,2,1$

Če imamo n elementov $\{1,2,\dots,n\}$ lahko konstruiramo posamezno permutacijo tako, da se za vsako mesto odločimo kateremu elementu "ga damo".

za 1. mesto imo n možnosti
za 2. mesto imamo $(n-1)$ možnosti
za 3. mesto imamo $(n-2)$ možnosti
⋮
za n-to mesto imamo 1 možnost

Skupaj imamo torej

$$n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n! \quad \text{permutacij}$$

Običajno permutacijo zapišemo kot

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Primer: $n=8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ali} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

poenostavljen zapis: (18746532) $\qquad$ $(18746)(23)(5)$

zapis ni enoličen (lahko začnemo s poljubnim elementom)

(46532187)

$1 \to 8 \to 7 \to 4 \to 6$ $\qquad$ $2 \to 3$ $\qquad$ 5

vrstni red se ohranja "ciklično"

$1 \to 8 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 2$

Parnost permutacije je tista, ki nam določa predznak posameznega člena.

Kako določimo parnost permutacije?

Def Števili $\pi(i)$ in $\pi(j)$ tvorita INVERZIJO, če je $i<j$ in $\pi(i) > \pi(j)$.

Primer: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

	$i<j$	$\pi(i)>\pi(j)$
$\pi(2)=5$, $\pi(3)=1$	$2<3$	$5>1$

$\Rightarrow$ 5 in 1 tvorita inverzijo.

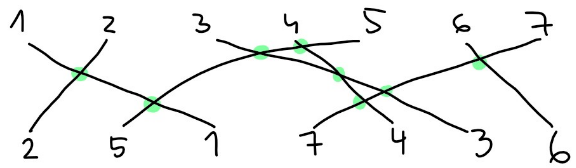
Def Predznak permutacije π, $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{\text{št. vseh inverzij}}$

če je $\operatorname{sign}(\pi) = 1$ je π soda permutacija

če je $\operatorname{sign}(\pi) = -1$ je π liha permutacija

Kako preštejemo VSE inverzije?

I. možnost:



8 inverzij

$\Rightarrow$ π je soda permutacija

II. možnost: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ koliko števil desno od $\pi(i)$ je manjših od $\pi(i)$

$1+3+0+3+1+0+0 = 8$ inverzij

Sedaj lahko definiramo determinanto $n \times n$ matrike A:

Def: $$\det(A) = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

D.N. Zapišite izraz za $\det(A)$ če je $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$.

MINORJI IN KOFAKTORJI

Minor je neka poddeterminanta. Če je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ potem je i,j-ti **minor** M_{ij} enak determinanti podmatrike A, ki ostane po tem, ko v A prečrtamo/odstranimo i-to vrstico in j-ti stolpec.

i,j-ti **kofaktor** A_{ij} matrike A je minor z ustreznim predznakom.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}$$

S pomočjo kofaktorjev lahko izračunamo determinanto po postopku, ki mu pravimo RAZVOJ PO VRSTICI (ALI STOLPCU).

__IZREK__: Naj bo $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Potem je

1.) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (razvoj po i-ti vrstici)

2.) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ (razvoj po j-tem stolpcu)

__Primer__: Izračunajmo determinanto matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1.) Razvoj po 1. vrstici:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 1\,(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 4-(-2) - 2\cdot(8-(-6)) + 0$$
$$= 6 - 2\cdot 14 = 6-28 = -22$$

2.) Razvoj po 2. stolpcu:

$$\det(A) = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\cdot(8-(-6)) + 2\,(2-0) - 2\,(-1-0)$$
$$= -2\cdot 14 + 4 + 2 = 6-28 = -22$$