Analiza I, izpit - praktični del, 19.01.2021.

1. Reši naslednjo neenačbo

$$\frac{|x+1|}{-x^2-2x+15} > 0.$$

Ideja. Po definiciji, opazimo da je $|x+1| \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Tudi, $|x+1| = 0$, če je $x = -1$.

Rešitev.

$$-x^2 - 2x + 15 = (-1)(x^2 + 2x - 15) = (-1)(x-3)(x+5)$$

$\Rightarrow x_1 = -5 \wedge x_2 = 3$.

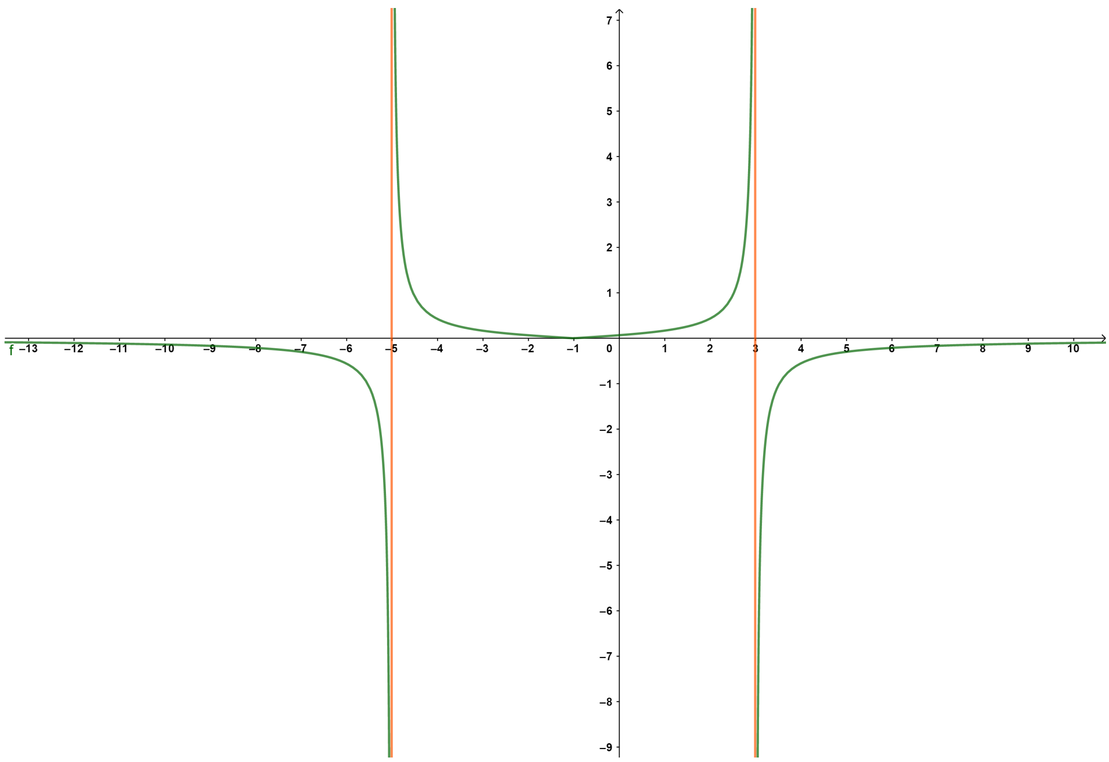
	$x \in (-\infty, -5)$	$x \in (-5, -1)$	$x \in (-1, 3)$	$x \in (3, \infty)$
$\lvert x+1\rvert$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(-1)(x-3)$	$+$	$+$	$+$	$-$
$(x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{\lvert x+1\rvert}{-x^2-2x+15}$	$-$	$+$	$+$	$-$

Iz tabele zgoraj lahko sklepamo

$$\text{za vse } x \in (-5,-1) \cup (-1,3) \text{ velja } \frac{|x+1|}{-x^2-2x+15} > 0.$$

$\square$

Mimogrede, če uporabimo GeoGebru, graf funkcije $f(x) = \dfrac{|x+1|}{-x^2-2x+15}$ je videti takole:



Z grafa lahko, npr sklepamo, da je

$$\lim_{x\uparrow -5} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\downarrow -5} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\uparrow 3} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\downarrow 3} f(x) = -\infty.$$

2. Naj bosta f in g realni funkciji realne spremenljivke, ki sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ -1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Določite kompozitum $g \circ f$ in $f \circ g$.

I metoda.

Ideja. Nalogo lahko razdelimo na primere $x \in (-\infty, 0)$, $x \in [0, 1)$, $x \in [1, +\infty)$. Opazimo da

$$x \in (-\infty, 0) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = e^x \quad \wedge \quad g(x) = 1,$$

$$x \in [0, 1) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -x^2+1 \quad \wedge \quad g(x) = 1,$$

$$x \in [1, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -x^2+1 \quad \wedge \quad g(x) = -1.$$

Rešitev.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x) = \begin{cases} f(g(x)), & x \in (-\infty, 0) \\ f(g(x)), & x \in [0, 1) \\ f(g(x)), & x \in [1, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} f(1), & x \in (-\infty, 0) \\ f(1), & x \in [0, 1) \\ f(-1), & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(1), & x \in (-\infty, 0) \\ f(1), & x \in [0, 1) \\ f(-1), & x \in [1, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} -1^2+1, & x \in (-\infty, 0) \\ -1^2+1, & x \in [0, 1) \\ e^{-1}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}.$$

Torej

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{e}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}.$$

Izračunajmo še $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = \begin{cases} g(f(x)), & x \in (-\infty, 0) \\ g(f(x)), & x \in [0, 1) \\ g(f(x)), & x \in [1, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} g(e^x), & x \in (-\infty, 0) \\ g(-x^2+1), & x \in [0, 1) \\ g(-x^2+1), & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Ker je

$$e^x < 1 \qquad \forall x \in (-\infty, 0), \qquad\qquad g(0) = 1,$$

ter

$$-x^2+1 < 1 \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

to

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

II metoda.

Ideja. Opazim da, če je $f(x) \geq 1$ (za določen x), potem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -1$, ter če je $f(x) < 1$ (za določen x), potem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1$. Moramo še določiti za katere $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) \geq 1$, ter $f(x) < 1$.

Podobno, če je $g(x) \geq 0$ (za določen x), potem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(g(x))^2 + 1.$$

Če je $g(x) < 0$, (za določen x), potem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)}.$$

Moramo še določiti za katere $x \in \mathbb{R}$ velja $g(x) \geq 0$, ter $g(x) < 0$.

Rešitev. Želimo poiskati vse $x \in \mathbb{R}$ t.d. $f(x) \geq 1$, ter vse $x \in \mathbb{R}$ t.d. $f(x) < 1$. Če upoštevamo definicijo funkcije f, imamo dva primera 1° $x \geq 0$ in 2° $x < 0$.

1° Naj bo $x \geq 0$. Zanimajo nas vsi $x \geq 0$ za katere je $f(x) \geq 1$ t.j. $-x^2 + 1 \geq 1$.

$$-x^2 + 1 \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad -x^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

Podobno,

$$-x^2 + 1 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -x^2 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lahko sklepamo,

$$x = 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 \qquad \wedge \qquad x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) < 1 \tag{1}$$

2° Naj bo $x < 0$. Zanimajo nas vsi $x < 0$ za katere je $f(x) \geq 1$ t.j. $e^x \geq 1$.

$$e^x \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad e^x \geq e^0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 0$$

Podobno,

$$e^x < 1 \qquad \Rightarrow \qquad e^x < e^0 \qquad \Rightarrow \qquad x < 0$$

Lahko sklepamo,

$$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) < 1. \tag{2}$$

Z upoštevanjem (1) in (2), imamo

$$f(x) = \begin{cases} < 1, & x > 0 \\ \geq 1, & x = 0 \\ < 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Na koncu

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 1, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Zdaj izračunajmo $f \circ g$. Želimo poiskati vse $x \in \mathbb{R}$ t.d. $g(x) \geq 0$, ter vse $x \in \mathbb{R}$ t.d. $g(x) < 0$. Če upoštevamo definicijo funkcije g, imamo dva primera 1° $x \geq 1$ in 2° $x < 1$.

1° Naj bo $x \geq 1$. Potem $g(x) = -1 < 0$.

2° Naj bo $x < 1$. Potem $g(x) = 1 \geq 0$.

Z upoštevanjem 1° in 2°, imamo

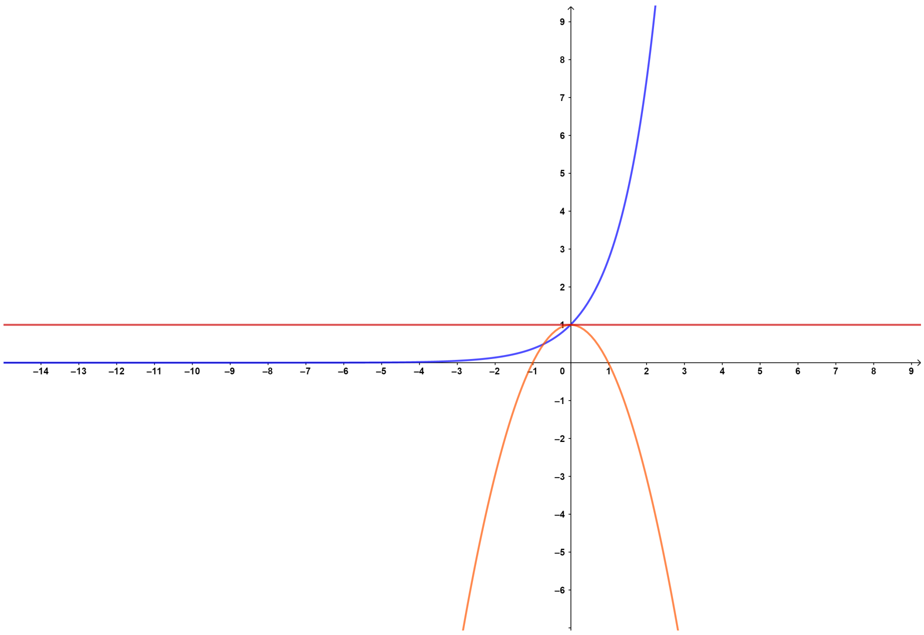
$$g(x) = \begin{cases} -1 \ (< 0), & x \geq 1 \\ 1 \ (\geq 0), & x < 1 \end{cases}.$$

Na koncu

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} f(g(x)), & x \geq 1 \\ f(g(x)), & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} f(-1), & x \geq 1 \\ f(1), & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-1}, & x \in [1, \infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}.$$

$\square$

Mimogrede, če uporabimo GeoGebru, graf funkcije e^x in funkcije $-x^2 + 1$ je videti takole:



Torej, z grafa zgoraj (in definicije od g) lahko preberemo, da je

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 1, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \end{cases}.$$

Spet mimogrede, opazimo, da je

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 1) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} (-x^2 + 1) = -\infty.$$

3. Reši v obsegu kompleksnih števil enačbo:

$$z^3 = -4.$$

Vse rešitve zapiš v obliki $a + ib$ (kjer sta a in b neki realni števili), ter jih napiši v polarni obliki. Tudi, vse rešitve nariši v kompleksni ravnini s pravokotnimi koordinatami.

I metoda

Ideja. Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Za pozitivno naravno število $n \in \mathbb{N}$ je

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{3}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Torej ima neničelno kompleksno število z natanko n različnih n-tih korenov $z^{\frac{1}{n}}$.

V našem primeru, iščemo $w^{\frac{1}{3}}$, kjer je $w = -4$. Ker je $\cos(\pi) = -1$ in $\sin(\pi) = 0$ to je

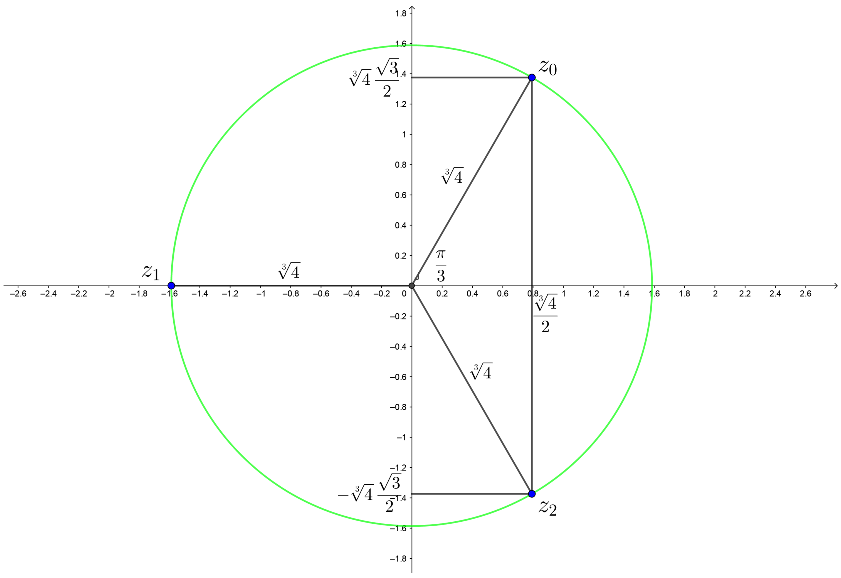
$$w = -4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi)).$$

Rešitev. Če uporabimo (3) na kompleksno število $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$, rešitve enačbe $z^3 = -4$ v polarni obliki so

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\\
z_1 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt[3]{4}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right),\\
z_2 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Na koncu, ker je $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ in $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, vse rešitve v obliki $a + ib$ so

$$z_0 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad z_1 = -\sqrt[3]{4}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



II metoda

Ideja. Ker je $(-\sqrt[3]{4})^3 = -4$ to je $z_0 = -\sqrt[3]{4}$ ena rešitev enačbe $z^3 = -4$. Preostala dva lahko dobimo, če poiščemo ničli kvadratne enačbe $q(z) = 0$, kjer je

$$z^3 + 4 = q(z) \cdot (z + \sqrt[3]{4}).$$

Rešitev.

$$(z^3 + 4) : (z + \sqrt[3]{4}) = z^2 + \sqrt[3]{4}z + 2\sqrt[3]{2}.$$

Smo dobili da je $q(z) = z^2 + \sqrt[3]{4}z + 2\sqrt[3]{2}$. Rešitvi kvadratne enačbe = ničli kvadratne enačbe = korena kvadratne enačbe $z^2 + \sqrt[3]{4}z + 2\sqrt[3]{2} = 0$ sta

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Na koncu, ker je $z^3 + 4 = (z + \sqrt[3]{4})(z - z_1)(z - z_2)$, vse rešitve enačbe $z^3 = -4$ v obliki $a + ib$ so

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad z_0 = -\sqrt[3]{4}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Pretvorba v polarno obliko nam poda

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \\
z_0 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \\
z_2 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

□

4. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}).$$

Ideja. Vidimo, da je $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}) = \infty - \infty$, kar je nedoločen izraz. Izraz $\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}$ moramo poenostaviti.

Spomnimo se da je $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$. Torej, imamo npr $(\sqrt{m}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{m}+\sqrt{n}) = m - n$. Opazimo, da je
$$(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}) = n-3-(n+3) = -6. \tag{4}$$

Rešitev.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3})}{1}\cdot 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3})}{1}\cdot\frac{(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3})}\\
&\overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}}\\
&= (-6)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ker je $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$. Tudi, lahko napišemo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3})/\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\frac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}\\
&= \frac{0}{1+1} = 0.
\end{aligned}$$

V vsakem primeru
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}) = 0.$$