Vse rešitve so podane na strani 2–6. Maksimalno število točk, ki jih študent/ka lahko dobi, je 110.

Za točnost nalog, prosim, poglej naslednjo tabelo:

Študent/ka	1. (100%=25t)	2. (100%=25t)	3. (100%=25t)	4. (100%=25t)	Bonus točke (vaje) (max 5)	Bonus točke (teorija) (max 5)	Število točk (max 110)
Andrej Erjavec	80%	30%	90%	30%	4,70	0,00	62,20

Za pristop na ustni izpit je potrebno v vsoti imeti vsaj 50 točk.

Če želite, da ogledate vse svoje rešitve in da se pogovarjamo o tem, prosim, mi pišite na e-mail: *safet.penjic@iam.upr.si*

(bomo se dogovorili za Zoom srečanje, dan in uro)

Ustni zagovori bodo v sredo, 10.2. od 9h dalje. Tisti, ki nameravate priti na ustni izpit, obvestite o tem prof. Bojana Kuzma na njegov e-mail: *bojan.kuzma@famnit.upr.si*

Analiza I, izpit - praktični del, 02.02.2021.

1. Predpostavimo, da ima množica A natanko dva elementa, množica B pa natanko tri elemente.

(a) Podaj primer funkcije $f : A \to B$. Podaj definicijo inverzne funkcije. Za dani primer, če obstaja, poišči inverzno funkcijo f^{-1}, ali razloži, zakaj funkcija $f^{-1} : B \to A$ ne obstaja.

(b) Podaj primer funkcije $g : B \to A$. Za dani primer, če obstaja, poišči inverzno funkcijo g^{-1}, ali razloži, zakaj funkcija $g^{-1} : A \to B$ ne obstaja.

(c) Koliko funkcij obstaja, ki slikajo iz A v B? Koliko od njih je surjektivnih? Koliko od njih je injektivnih preslikav? Koliko od njih je bijektivnih preslikav?

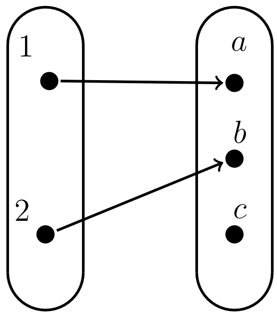
I metoda

Ideja. Naj bo $A = \{1, 2\}$ in $B = \{a, b, c\}$.

(a) Primer funkcije $f : A \to B$ je $f(1) = a$ in $f(2) = b$. To funkcijo lahko napišemo s pomočjo tabele

x	1	2
$f(x)$	a	b

ali s pomočjo Vennovega diagrama



.

(b) Primer funkcije $g : B \to A$ je $g(a) = 1$, $g(b) = 2$, $g(c) = 1$. To funkcijo lahko napišemo s pomočjo tabele:

x	a	b	c
$g(x)$	1	2	1

(c) Vse funkcije iz A v B so

x	1	2
$f_1(x)$	a	a

x	1	2
$f_3(x)$	b	a

x	1	2
$f_5(x)$	a	c

x	1	2
$f_2(x)$	a	b

x	1	2
$f_4(x)$	b	b

x	1	2
$f_6(x)$	c	a

x	1	2
$f_7(x)$	c	c

x	1	2
$f_8(x)$	b	c

x	1	2
$f_9(x)$	c	b

Rešitev. (a) Funkcija $h : B \to A$ je inverzna funkcija funkcije $f : A \to B$ če in samo če $(f \circ h)(y) = y$ in $(h \circ f)(x) = x$, za vsak $x \in A$ in $y \in B$.

Primer funkcije $f : A \to B$ je $f(1) = a$ in $f(2) = b$. Za inverz h funkcije f mora da velja $h(f(1)) = 1$ in $h(f(2)) = 2$ tj. $h(a) = 1$ in $h(b) = 2$. Za $h(c)$ imamo dve možnosti: $1°$ $h(c) = 1$ $2°$ $h(c) = 2$.

$1°$ Naj bo $h(c) = 1$. Zdaj so f in h definisani takole:

x	1	2
$f(x)$	a	b

x	a	b	c
$h(x)$	1	2	1

Opazimo da je $(f \circ h)(c) = f(h(c)) = f(1) = a \neq c$. V prvom primeru h ni inverz funkcije f.

$2°$ Naj bo $h(c) = 2$. Zdaj so f in h definisani takole:

x	1	2
$f(x)$	a	b

x	a	b	c
$h(x)$	1	2	2

Opazimo da je $(f \circ h)(c) = f(h(c)) = f(2) = b \neq c$. V drugom primeru tudi h ni inverz funkcije f.

Lahko sklepamo: Funkcija f nima inverza.

(b) Vemo da je funkcija $h : B \to A$ bijekcija če in samo če obstaja inverzna funkcija $h^{-1} : A \to B$.

Primer funkcije $g : B \to A$ je $g(a) = 1$, $g(b) = 2$, $g(c) = 1$. Ker g ni bijekcija (g ni injektivna), to lahko sklepamo da g^{-1} ne obstaja.

(c) Obstaja 9 funkcij ki slikajo iz A v B. Nobena of njih ni surjektivna, kar pomeni da nobena tudi ni bijektivna. Injektivne funkcije so f_2, f_3, f_5, f_6, f_8 in f_9, ker za vsako od njih velja $x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y)$.

II metoda

Ideja. (a) Naj bosta $A = \{1, 2\}$ in $B = \{1, 2, 3\}$. Potem je $f(x) = x$ primer preslikave iz A v B. Ker f ni surjektivna to f ni bijektivna, kar implicira da f^{-1} ne obstaja...

$\dots$

III metoda

Ideja. (b) Naj bosta $B = \{-2, 1, 2\}$ in $A = \{1, 4\}$. Potem je $g(x) = x^2$ primer preslikave iz B v A. Ker g ni injektivna to g ni bijektivna, kar implicira da g^{-1} ne obstaja...

$\dots$

2. Pokaži, da je število $37^{500} - 37^{100}$ deljivo z 10.

I metoda

Ideja. Uporabimo matematično indukcijo in pokažimo da je $n^5 - n$ deljivo z 10 za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$. Če namesto n vstavimo naravno število 37^100, bomo dobili našo trditev.

Rešitev. Pokažimo da je $n^5 - n$ deljivo z 10.

Baza indukcije

Če je $n = 1$ potem $1^5 - 1 = 0$, in trditev sledi. Če je $n = 2$ potem $2^5 - 2 = 30$, in trditev sled. Trditev je resnična za $n = 1$ in 2.

Korak indukcije

Pretpostavimo da je število $n^5 - n$ deljivo z 10. Vporabimo to pretpostavko in pokažimo da je tudi število $(n+1)^5 - (n+1)$ deljivo z 10. Ker je

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n \\ &= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5n^4 + 5n \\ &= (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5n(n^3 + 1)\end{aligned}$$

Po indukciski pretpostavki $n^5 - n$ je deljivo z 10. Opazimo da je tudi $10(n^3 + n^2)$ deljivo z 10. Pokažimo še da je $5n(n^3 + 1)$ deljivo z 10. Če je n sodo število potem je $n = 2k$ tj.
$5n(n^3 + 1) = 10k((2k)^3 + 1)$ je deljivo z 10. Če je n liho število, potem je n^3 tudi liho število, kar implicira da je $n^3 + 1$ sodo število tj $n^3 + 1 = 2m$. Zdaj imamo da je $5n(n^3 + 1) = 10mn$ deljivo z 10.

Zaključek

Pokazali smo da je $n^5 - n$ deljivo z 10 za vsak $n \in \mathbb{N}$. Če za n vzamemo naravno število $n = 37^{100}$ lahko sklepamo da je število $37^{500} - 37^{100}$ deljivo z 10.

II metoda

Ideja. Opazimo da je $37^4 - 1 = 1874160$ tj. število $37^4 - 1$ je deljivo z 10. (To implicira da je tudi $37 \cdot (37^4 - 1) = 37^5 - 37$ deljivo z 10).

Rešitev. Naj bo $a = 37^4$. Potem je $a - 1$ deljivo z 10. Tudi velja

$$37^{500} - 37^{100} = (37^4)^{125} - (37^4)^{25} = a^{125} - a^{25}.$$

Ker je

$$a^{125} - a^{25} = a^{25}(a^{100} - 1) = a^{25}(a - 1)(a^{99} + a^{98} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

to je $a^{125} - a^{25}$ deljivo z 10. Lahko sklepamo da je število $37^{500} - 37^{100}$ deljivo z 10.

III metoda

Ideja. Pokaži da je

$$\text{zadnja števka števila } 37^n \text{ je } = \begin{cases} 7; & \text{ostanek pri deljenju } n \text{ s 4 je 1,} \\ 9; & \text{ostanek pri deljenju } n \text{ s 4 je 2,} \\ 3; & \text{ostanek pri deljenju } n \text{ s 4 je 3,} \\ 1; & \text{ostanek pri deljenju } n \text{ s 4 je 0,} \end{cases}$$

in uporabi to lastnost pri dokazu...

3. V množici realnih števil, za množici A in B, določi supremum, infimum, minimum ter maksimum, če obstajajo.

(a) $A = \{x \mid x^2 \leq 11\}$.

(b) $B = \{x \in [2, 5] \mid x$ ima v decimalnem zapisu vsej dve trojki$\}$.

Tudi podajte primer spodnje meje in zgornje meje za A in B. V primeru (b) podaj definicijo infimuma in supremuma ter podrobno razloži, zakaj je zahtevana številka infimum/supremum, oziroma podrobno razloži zakaj množica nima infimuma/supremuma.

Ideja.

$$A = \{x \mid x^2 \leq 11\} = \{x \mid |x| \leq \sqrt{11}\} = \{x \mid x \in [-\sqrt{11}, \sqrt{11}]\} = [-\sqrt{11}, \sqrt{11}].$$

Elementi množice B so npr.

$$2,0033; \qquad 2,00000033; \qquad 2,00000000000033; \qquad 2 + \frac{33}{10^{4544}}; \qquad \ldots$$

$$5 - 0,67 = 4,33; \qquad 5 - 0,067 = 4,933; \qquad 5 - 0,0067 = 4,9933;$$

$$5 - 0,0000000067 = 4,9999999933; \qquad 5 - \frac{67}{10^{4556544454}}; \qquad \ldots$$

Rešitev.

množica	minimum	maksimum	infimum	supremum
A	$-\sqrt{11}$	$\sqrt{11}$	$-\sqrt{11}$	$\sqrt{11}$
B	nima ga	nima ga	2	5

Primeri spodnje meje za A so $-\sqrt{11}$, -4, -5, -6,...
Primeri spodnje meje za B so 2, 1, $\frac{1}{2}$, -98,...

Primeri zgornje meje za A so $\sqrt{11}$, 4, 5, 6,...
Primeri zgornje meje za B so 5, 6, $\frac{23}{2}$, 98,...

$$m \text{ je infimum množice } B \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall b \in B : m \leq b \quad (m \text{ je spodnja meja}), \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in B : m < b < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$$M \text{ je supremum množice } B \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall b \in B : b \leq M \quad (M \text{ je zgornja meja}), \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in B : M - \varepsilon < b < M. \end{cases}$$

Za vsak $n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$) opazimo da število $2 + \frac{33}{10^n} \in B$. Ker

$$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{33}{10^n}\right) = 2,$$

to $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : (n > N \quad \Rightarrow \quad 2 < 2 + \frac{33}{10^n} < 2 + \varepsilon)$. Lahko sklepamo da je $\inf(B) = 2$.

Podobno, za vsak $n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$) opazimo da število $5 - \frac{67}{10^n} \in B$. Ker

$$\lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{67}{10^n}\right) = 5,$$

to $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : (n > N \quad \Rightarrow \quad 5 > 5 - \frac{67}{10^n} > 5 - \varepsilon)$. Lahko sklepamo da je $\sup(B) = 5$.

4. Z uporabo razcepa na parcialne ulomke seštej vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}.$$

Ideja.

$$\frac{1}{(n+7)(n+8)} = \frac{A}{n+7} + \frac{B}{n+8}, \qquad / \cdot (n+7)(n+8)$$

$$1 = A(n+8) + B(n+7)$$

$$1 = n(A+B) + (8A+7B)$$

$$A+B=0, \qquad 8A+7B=1,$$

$$A=-B, \qquad 8A+7B=1,$$

$$8A-7A=1 \qquad \Rightarrow \qquad A=1 \qquad \Rightarrow \qquad B=-1.$$

Torej, $\dfrac{1}{(n+7)(n+8)} = \dfrac{1}{n+7} - \dfrac{1}{n+8}$.

Rešitev. Spomnimo se, če je $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ in $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ potem je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. V našem primeru

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+7)(k+8)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+7} - \frac{1}{k+8} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1+7} - \frac{1}{1+8} \right) + \left(\frac{1}{2+7} - \frac{1}{2+8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)+7} - \frac{1}{(n-1)+8} \right) + \left(\frac{1}{n+7} - \frac{1}{n+8} \right) \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+7} + \frac{1}{n+7} - \frac{1}{n+8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{n+8}
\end{aligned}$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{n+8} \right) = \frac{1}{8},$$

lahko sklepamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)} = \frac{1}{8}.$$