Diskretna matematika I – Teorija množic

# – Vaje 4 –

1. Z uporabo če in samo če dokaza pokaži: $ac \mid bc \Leftrightarrow a \mid b$.

2. Ali je naslednji sklep pravilen?

   (i) Če je danes sreda bom imel vaje. Danes je sreda. Sklep: Imel bom vaje.

   (ii) Če se učim, bom opravil izpit. Nisem se učil. Sklep: Ne bom opravil izpita.

3. Ali je naslednji premislek pravilen?

   (i) Študent se je z mestnim avtobusom odpravil na izpit. Rekel si je: Če bo na naslednjem semaforju zelena luč, bom naredil izpit. No, ko je avtobus pripeljal na naslednji semafor, na semaforju ni svetila zelena luč, študent pa si je dejal: Presneto, spet bom padel.

   (ii) Inženir, ki obvlada teorijo, vedno načrta dobro vezje. Dobro vezje je ekonomično. Torej, inženir, ki načrta neekonomično vezje, ne obvlada teorije.

4. Zapiši simbolično naslednje izjave:

   (i) Vsako naravno število, ki ni večje od 10, je manjše od 11.

   (ii) Vsaj eno naravno število, ki ni večje od 10, je manjše od 11.

   (iii) Vsaj eno naravno število, ki ni večje od 10, ni manjše od 11.

   (iv) Nobeno naravno število, večje od 10, ni manjše od 11.

5. Negiranj naslednje izjave s kvantifikatorji:

   (i) $(\forall x)(x \in S)$

   (ii) $(\forall x)(x < 10 \wedge x^2 > 100)$

   (iii) $(\forall x)(\exists y)(x > y \Rightarrow x^2 > y^2)$

   (iv) $(\exists x)(\forall y)(x \neq y \vee x + y = 0)$

(v) $(\forall a)(\forall b)(a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$

(vi) $(\forall a)(\forall b)(a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0)$

(vii) $(\forall a)(\forall b)(ab = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0)$

(viii) $(\forall a)(\forall b)(ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$

(ix) $(\forall a)(\forall b)(a^2 < b^2 \Rightarrow a < b)$

6. Naslednjo trditev zapiši s kvantifikatorji in jo pokaži: Med poljubnima racionalnima številoma $x$ in $y$, kjer je $x < y$, obstaja drugo racionalno število $z$.

7. Naslednjo trditev zapiši s kvantifikatorji in jo pokaži: Ne obstaja liho število, ki bi ga lahko izrazili v obliki $4j + 1$ in $4k - 1$ za celi števili $j$ in $k$.

8. Dokažite ali pa poiščite protiprimer:

   (i) Za vsa nenegativna cela števila $x$ je $x^2 + x + 41$ praštevilo.

   (ii) $(\forall x)(\forall y)(x > 1 \wedge y > 0 \Rightarrow y^x > x)$ (domena pogovora so realna števila)

   (iii) Za vsako pozitivno realno število $x$ obstaja pozitivno realno število $y$, ki je manjše od $x$, z lastnostjo, da za vsa pozitivna realna števila $z$ velja neenakost $yz \geq z$.

9. Katere izmed naslesnjih izjav so pravilne, kjer so domena pogovora realna števila?

   (i) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$.

   (ii) $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0)$.

   (iii) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -1)$.

   (iv) $(\forall x)[x > 0 \Rightarrow (\exists y)(y < 0 \wedge xy > 0)]$.