5 Funkcije

5.1 Načini dokazovanja

Dokaz izjave A s protislovjem
Dokaz:
Predpostavimo $\neg A$.
$\vdots$
Torej, B.
$\vdots$
Torej, $\neg B$.
Sledi, da je pravilna tudi izjava $B \wedge \neg B$, ta pa je protislovje.
Posledično A. $\square$

1. S protislovjem pokaži, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. (spomnimo se: Okrajšani ulomek je ulomek, ki ima v števcu in imenovalcu tuji si števili. Ulomek okrajšamo z največjim skupnim deliteljem števca in imenovalca.)

2. S protislovjem pokaži, da je praštevil neskončno.

5.2 Naloge za začetnike

Kótna stopínja	0°	30°	45°	60°	90°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Konstrukcija sinusov	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩
$\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

Relacija $f \subseteq X \times Y$ je **funkcija (preslikava)** iz množice X v množico Y, če velja:

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y : (x, y) \in f.$$

Namesto $f \subseteq X \times Y$ uporabljamo zapis $f : X \to Y$ in namesto $(x, y) \in f$ zapis $f(x) = y$.

Množici X rečemo **domena** (tudi **definicijsko območje**), množici Y pa rečemo **kodomena** funkcije $f : X \to Y$.

Množico $f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\} \subseteq Y$ imenujemo **slika** (tudi **zaloga vrednosti**) funkcije $f : X \to Y$.

1. (i) Funkcija φ je podana s predpisom $\varphi(x) = 2\mathrm{arc\,sin}\, x + \mathrm{arc\,tg}\, 2x$. Izračunaj $\varphi(-\frac{1}{2})$.

(ii) Funkcija g je podana s predpisom $g(x) = x^2 \mathrm{arc\,cos}\, \frac{x}{2} - 3x \mathrm{arc\,tg}\, x$. Izračunaj $g(-1)$.

(iii) Funkcija f je podana s predpisom $f(x+1) = x^3 - 5x + 4$. Izračunaj $f(3)$ in $f(x-1)$.

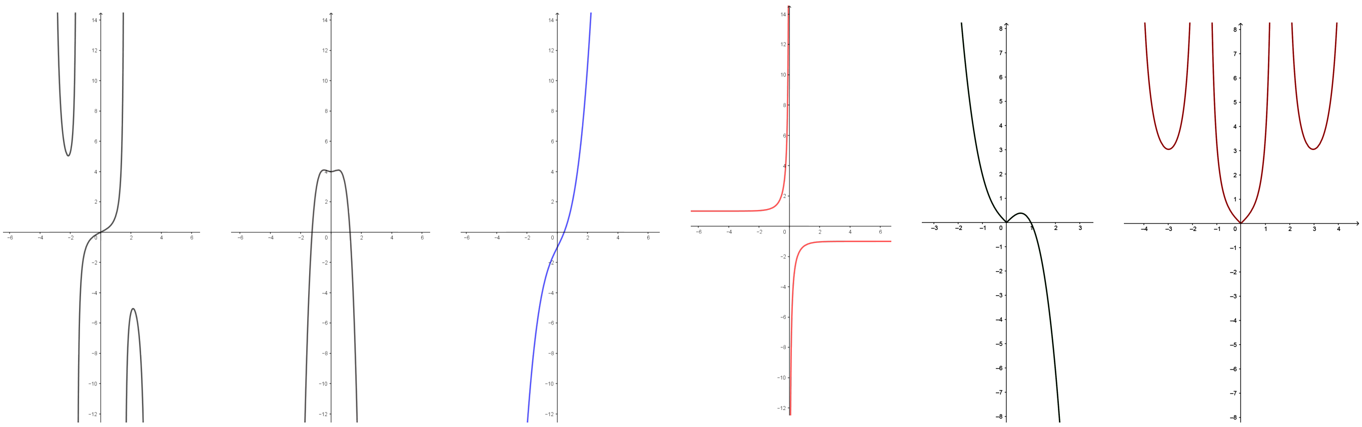
2. Funkcija P je podana s predpisom $P(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$. Pokaži, da je $P(\frac{1}{x}) = P(x)$. Izračunaj $P(\frac{1}{2})$, $P(2)$, $P(-10)$ in $P(-0,1)$.

Funkcija f je **soda funkcija**, če za vsak x, za katerega je funkcija definirana, velja: $f(-x) = f(x)$. Če je funkcija soda, je graf funkcije simetričen glede na ordinatno os.

Funkcija f je **liha funkcija**, če za vsak x, za katerega je funkcija definirana, velja: $f(-x) = -f(x)$. Če je funkcija liha, je graf funkcije simetričen glede na koordinatno izhodišče.

3. Kateri graf spodaj predstavlja sodo funkcijo in kateri liho.

4. Katera funkcija je soda in katera liha: (a) $f(x) = \frac{x^2}{\sin 2x}$. (b) $\varphi(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x$. (c) $u(x) = x^3 + 2x - 1$. (d) $y(x) = \frac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}$. (e) $g(t) = |t| - t^3$. (f) $h(x) = |x| \mathrm{ctg}^2 x$.



5.3 Običajne naloge

Funkcija $f : X \to Y$ je **injektivna**, če

$$\forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

ali enakovredno

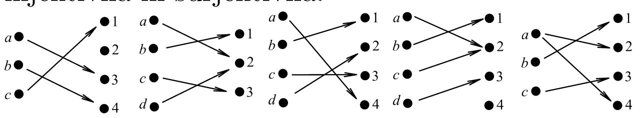
$$\forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Funkcija $f : X \to Y$ je **surjektivna**, če

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : y = f(x)$$

ali enakovredno, če je zaloga vrednosti enaka množici Y.

Funkcija $f : X \to Y$ je **bijektivna**, če je hkrati injektivna in surjektivna.



1. Naj bo

$$\begin{aligned} f &= \{(1,b),(2,d),(4,d)\} \subseteq \{1,2,4\} \times \{a,b,c,d\}, \\ g &= \{(a,1),(b,2),(c,4)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{1,2,4\}, \\ h &= \{(a,1),(a,2),(b,1)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{1,2,4\}. \end{aligned}$$

(i) Prepričaj se, da imamo opraviti s funkcijama

$$f : \{1,2,4\} \to \{a,b,c,d\}$$

oz.

$$g : \{a,b,c\} \to \{1,2,4\},$$

in utemelji, zakaj

$$h : \{a,b,c\} \to \{1,2,4\}$$

ni funkcija.

(ii) Določi domeno, kodomeno, zalogo vrednosti ter razišči injektivnost, surjektivnost, bijektivnost in inverz funkcij f in g.

(iii) Opiši naslednje kompozitume funkcij: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g$.

2. Naslednjim realnim funkcijam realne spremenljivke določi njihova naravna definicijska območja.

(i) $y = \sqrt{1 - x^2}$

(ii) $u = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$.

(iii) $v = \arccos \frac{1-2x}{3}$.

(iv) $\rho = \frac{x}{\sin x}$.

(v) $q = \log_2(x^2 - 9)$.

3. Naslednjim realnim funkcijam realne spremenljivke določi njihova naravna definicijska območja.

(i) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

(iii) $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{5x - x^2}{4}}$

(iv) $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{2x}$

(v) $f(x) = \arccos \ln \dfrac{x+1}{x-3}$

(vi) $f(x) = \ln \arcsin \dfrac{x+2}{5-x}$

5.4 Naloge z izpita

1. Naj bosta X in Y končni množici, X z m elementi in Y z n elementi.

(i) Koliko je vseh funkcij, ki preslikajo množico X v množico Y?

(ii) Koliko funkcij iz točke (a) je injektivnih?

(iii) Koliko funkcij iz točke (a) je bijektivnih?

2. Utemelji, ali je dana funkcija injektivna, surjektivna oz. bijektivna.

(i) Naj bo S množica vseh točk v ravnini, K pa množica vseh krogov v ravnini. Naj bo $f : K \to S$ funkcija, ki vsakemu krogu priredi njegovo središče.

(ii) Naj bo B izbrana podmnožica množice X in $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ funkcija, ki dani podmnožici $A \subseteq X$ priredi množico $A \cap B$.

3. Funkcija f je dana s predpisom $f(x) = \arcsin(2\cos x)$.

(i) Določi definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ funkcije f.

(ii) Dokaži, da je funkcija f injektivna na množici $[0, \pi] \cap \mathcal{D}_f$.

(iii) Določi zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$ funkcije f.

Navodila.

Naloge za začetnike. 1. [1(i) $-\frac{7}{12}\pi$. 1(ii) $\frac{35}{12}\pi$. 1(iii) $f(3)=2$, $f(x-1)=x^3-6x^2+7x+6$]. 4. [4(a). liha 4(b). soda 4(c). ni liha, ni soda 4(d). liha 4(e). ni liha, ni soda 4(f). soda].

Običajne naloge. 1.

(a) Predpis h nam isti element slika v dve različni sliki, zato h ni funkcija.

(b) $\mathcal{D}_f=\{1,2,4\}$, $\mathcal{K}_f=\{a,b,c,d\}$, $\mathcal{Z}_f=\{b,d\}$. Funkcija f ni injektivna, saj je $f(2)=f(4)$ in $2\neq 4$. Funkcija f ni surjektivna, saj $\mathcal{Z}_f\neq\mathcal{K}_f$. Sledi, da funkcija f ni bijektivna. Funkcija f nima inverza, saj ni injektivna (oz. bijektivna).
$\mathcal{D}_g=\{a,b,c\}$, $\mathcal{K}_g=\{1,2,4\}$, $\mathcal{Z}_g=\{1,2,4\}$. Funkcija g je injektivna, saj se različni elementi slikajo v različne slike. Funkcija g je surjektivna, saj je $\mathcal{Z}_g=\mathcal{K}_g$. Sledi, da je funkcija g tudi bijektivna. Inverz funkcije g, je funkcija

$$g^{-1}=\{(1,a),(2,b),(4,c)\}\subseteq\{1,2,4\}\times\{a,b,c\}.$$

(c)

$$f\circ g=\{(a,b),(b,d),(c,d)\}\subseteq\{a,b,c\}\times\{a,b,c,d\}$$

$f\circ g$ ne obstaja, saj $\mathcal{Z}_f\not\subseteq\mathcal{D}_g$. $f\circ f$ ne obstaja, saj $\mathcal{Z}_f\not\subseteq\mathcal{D}_f$. $g\circ g$ ne obstaja, saj $\mathcal{Z}_g\not\subseteq\mathcal{D}_g$.

2. (i) [-1,1] (ii) $\mathbb{R}\backslash\{2,3\}$ (iii) [-1,2] (iv) $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ (v) $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

3.

(i) $[-3,3]$

(ii) $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$

(iii) $[1,4]$

(iv) $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right)$

(v) $\left(-\infty,-\frac{e+3}{e-1}\right]\cup\left[\frac{3e+1}{e-1},\infty\right)$

(vi) $\left(-2,\frac{3}{2}\right]$

Naloge z izpita.

1.

(a) Vseh funkcij je n^m.

(b) Če je $n<m$, potem injektivnih funkcij ni. Če je $n\geq m$, potem je injektivnih funkcij

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

(c) Bijektivne funkcije obstajajo natanko tedaj, ko je $n=m$ in jih je

$$m!=m(m-1)(m-2)\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

2.

(a) Je surjektivna, ni injektivna, ni bijektivna.

(b) Ni surjektivna, ni injektivna, ni bijektivna.

3.

(i) $\mathcal{D}_f=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{3}+\pi k,\frac{2\pi}{3}+\pi k]$.

(ii) Izračunamo $[0,\pi]\cap\mathcal{D}_f=[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$. Funkcija $x\mapsto 2\cos x$ je na intervalu $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ strogo padajoča. Ker je arkus sinus strogo naraščajoča, je funcija f strogo padajoča, torej injektivna.

(iii) $\mathcal{Z}_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.