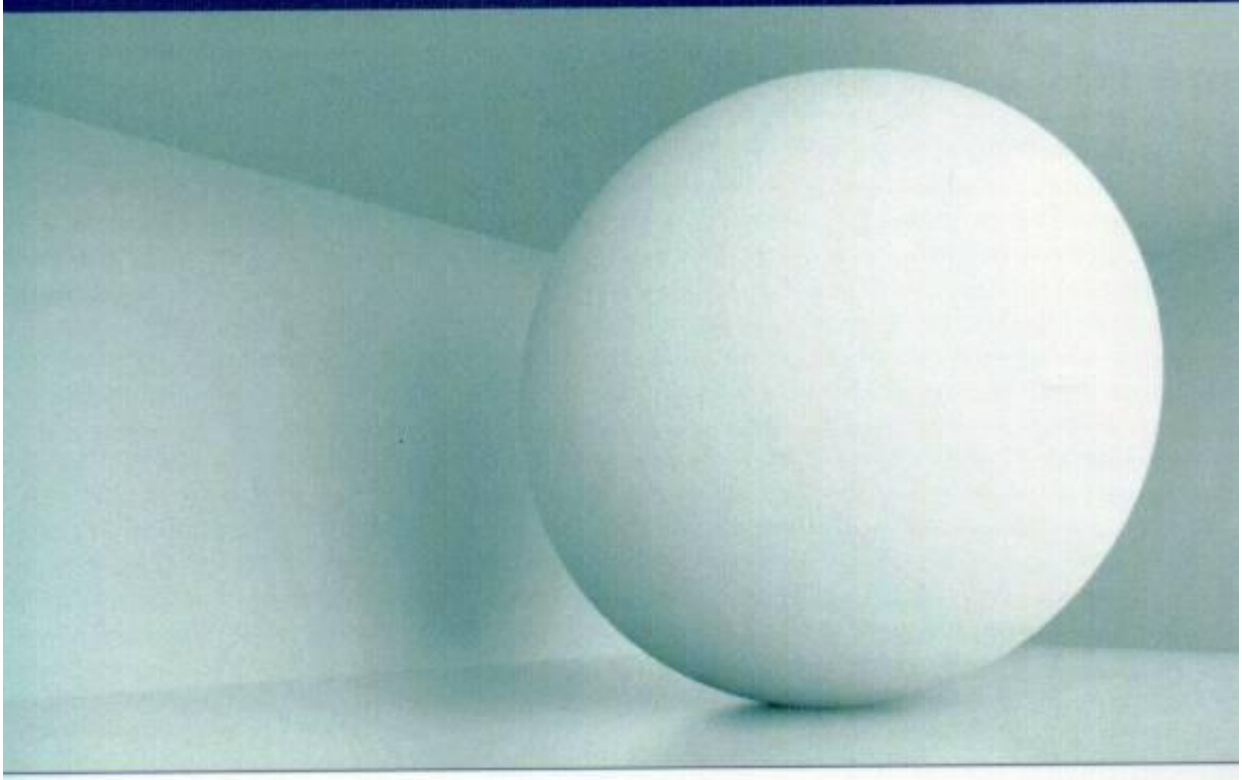


Франц Герман

Математика в науке и вокруг нас

LAMBERT Academic Publishing

Франц Герман

Математика в науке и вокруг нас

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

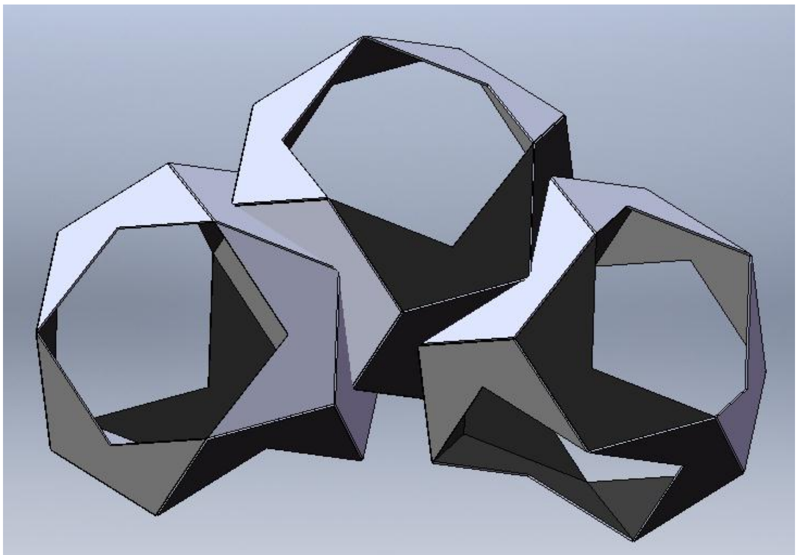
Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-85082-0

Франц Герман

Математика в науке и вокруг нас



2016

Содержание

Часть I
Естественно-математические статьи

Часть II
Научно - популярные статьи

Часть I
Естественно-математические статьи

1. К вопросу о представлении δ-функции Дирака

В данной заметке мы покажем представление δ-функции Дирака, которое будем назвать естественным. Существующие способы представления δ-функции Дирака носят в общем-то искусственный характер.

Определение $\delta(x)$-функции задаётся следующими равенствами:

$$\delta(x) = 0, \qquad \forall x \neq 0. \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{2}$$

Обычно представляют $\delta(x)$-функцию, как предел функциональной последовательности, образованной некоторой исходной функцией ***f(x)***.

$$f_n(x) = nf(nx), \tag{3}$$

здесь n – натуральное число.

Такую последовательность называют слабо сходящейся к $\delta(x)$-функции.

Покажем три наиболее распространённых примера представления $\delta(x)$-функции.

Пример 1. В качестве базовой функции берётся функция $\frac{Sin(x)}{x}$. Базовая функция должна быть нормирована, т. е. Приведена к выражению (2). Известно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Sin(x)}{x} dx = \pi$. Откуда получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Sin(x)}{\pi \cdot x} dx = 1.$$

Т. о. в качестве базовой функции имеем: $f(x) = \frac{Sin(x)}{\pi \cdot x}$ и по правилу (3) получаем необходимую последовательность:

$$f_n(x) = n \frac{Sin(nx)}{\pi \cdot (nx)} = \frac{Sin(nx)}{\pi \cdot x}.$$

Покажем график этой функции при n = 50 (Рис. 1).

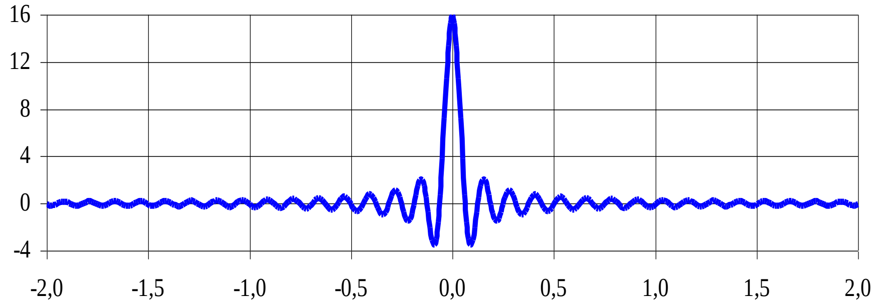


Рис. 1

На интервале (-2; +2) при x = 0 получаем пиковое значение функции примерно равное 16.

Пример 2. В данном случае используется функция Гаусса закона нормального распределения: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-x^2\right)$. Данная функция уже нормирована, поэтому получаем такую функциональную последовательность:

$$f_n=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-(nx)^2\right).$$

Покажем график этой функции при n = 50 (Рис. 2).

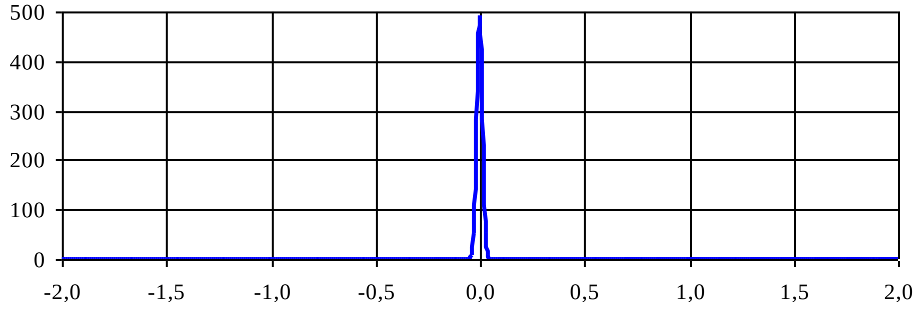


Рис. 2

Как видим, представление функцией Гаусса быстрее сходится к $\delta(x)$-функции. При x = 0 получаем пиковое значение функции примерно равное 500.

Пример 3. В данном случае за базовую функцию взята функция Лоренца, которая после нормирования принимает вид: $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}$.

Переходя к функциональной последовательности, получаем: $f_n = \frac{1}{\pi}\frac{n}{\left((nx)^2+1\right)}$.

График этой функции показан на Рис. 3

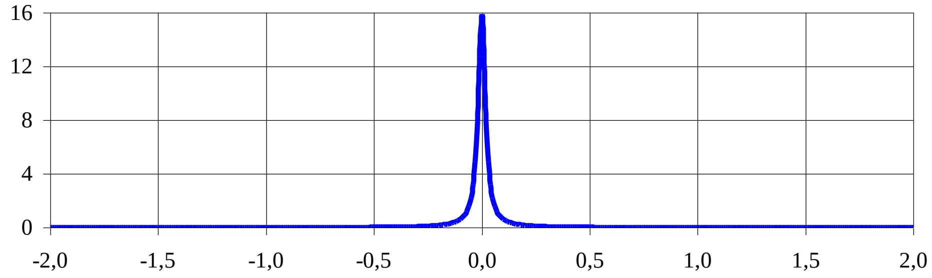


Рис. 3

Представления 1 - 3 будем называть искусственными, так как исходные функции искусствено превращаются в функциональные последовательности по правилу (3).

Рассмотрим пример естественного представления $\delta(x)$-функции.

На Рис. 4 показана кривая, которая называется версьера (Локон Аньези). Уравнение этой кривой имеет вид:

$$y = \frac{d^3}{x^2 + d^2}\,, \tag{4}$$

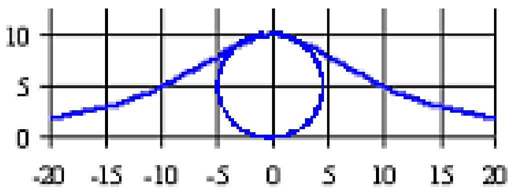


Рис. 4

где d – даметр образующей окружности.

Вместо образующей окружности возьмём эллипс (Рис.5) с полуосями b, a; уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1\,. \tag{5}$$

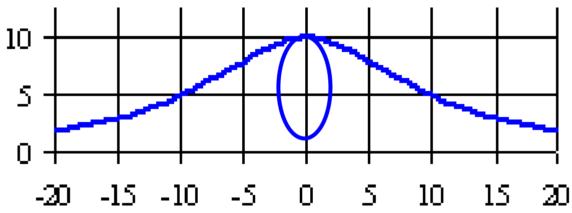


Рис. 5

Очевидно, что при $b \to 0$, и $a \to \infty$ новая кривая будет давать представление $\delta(x)$-функции, конечно же при соблюдении условия нормирования (2).

Построим обобщённое уравнение версьеры. Покажем, как строится текущая точка искомой кривой.

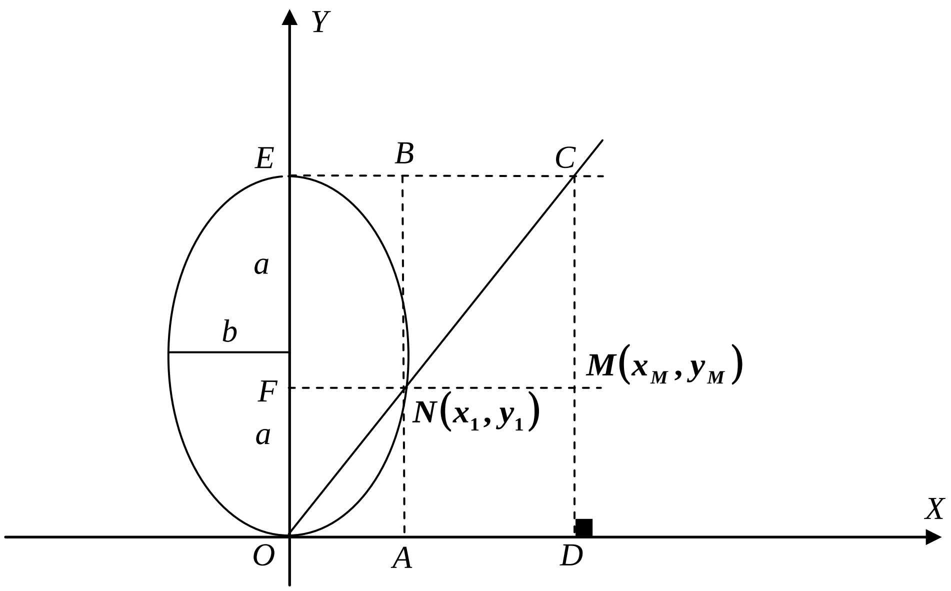


Рис. 6

Пусть точка N принадлежит нашему эллипсу. Прямая EB: $y = 2a$, тогда $C \equiv ON \cap EB$. Проведём прямую $CD \perp OX$. Прямая FN: $y = y_1$, тогда $FN \cap CD \equiv M$ - текущая точка искомой прямой.

Из построения имеем такое соотношение:

$$\frac{x_M}{2a} = \frac{x_1}{y_1}. \tag{6}$$

Откуда можем записать:

$$x_1 = \frac{x_M y_M}{2a}, \tag{7}$$