Франц Герман

О выворачивании пространства наизнанку

franz.h-n@yandex.ru

Мы в нашей повседневной жизни настолько привыкли к зеркальным отражениям, что уверены, будто прекрасно их понимаем [1].
(Мартин Гарднер)

Все мы знаем, что такое вывернуть наизнанку. Например, вывернуть наизнанку носок или перчатку. И что при этом получится? Снова носок и снова перчатка. Предположим, что носок чёрного цвета и снаружи и изнутри. Вывернув его наинанку снова получим чёрный носок и без разницы на какую ногу его надевать. Другое дело – если это перчатка. Вывернули перчатку – и она уже не левая, а правая. А если перчатка снаружи чёрная, а внутри белая. Вывернули наизнанку. И вот у нас уже две перчатки правая и левая, да ещё и разного цвета.

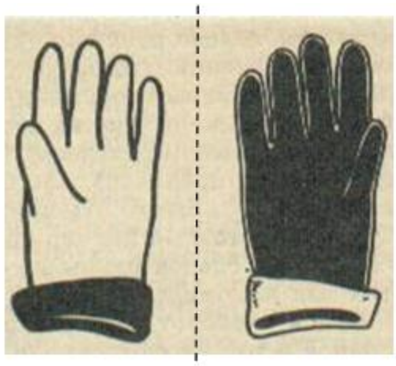

Рис. 1

А как это описать математически? Как вывернуть пространство наизнанку с точки зрения математики?. Вот этими вопросами мы и будем заниматься в настоящей заметке.

Всё это наводит на мысль, что операция «зеркального отражения» как-то сродни операции «выворачивания наизнанку». Хотя очевидно, что «зеркальное отражение» не превращает чёпную перчатку в белую (если у перчатки изнаночная сторона белая).

Рис. 2

Рассмотрим кольцо в виде не высокого цилиндра.

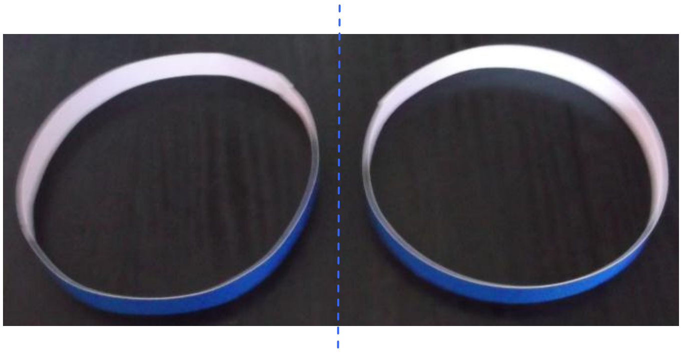

Рис. 3

Очевидно, что на Рис. 3 мы видим операцию «отражения». А вот на Рис. 4 – можно сказать, что цилиндры вывернуты наизнанку относительно друг друга.

Рис. 4

Операцию «выворачивания» таким образом можно представить в виде комбинации двух операций: сначала идёт операция «зеркального отражения», а затем операция «изменения цвета» с внешнего на внутренний и наоборот.

А если это односторонняя поверхность? Например лист Мёбиуса.

Рис. 5

Рассмотрим зеркальное отражение нашего листа.

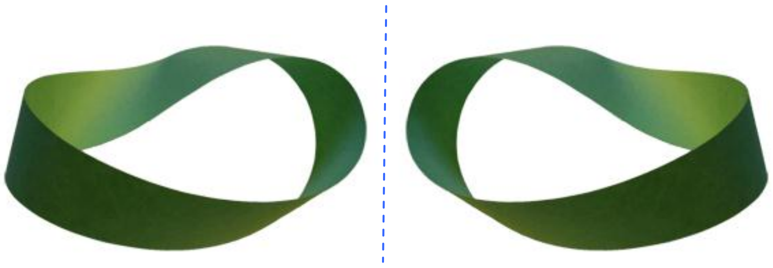

Рис.6

По сути дела на Рис. 6 мы видим два различных листа одного цвета. Причём, как бы мы ни старались, перекрутить левый лист Мёбиуса никогда не удастся получить из него правый.

А что будет если взять двойной лист Мёбиуса (склеенный из двух полосок)?

Рис.7

Такой лист Мёбиуса можно «распутать» не разрезая и снова свернуть таким образом, чтобы белая сторона оказалась внутри листа Мёбиуса.

Рис. 8

Цвет, действительно, изменился, но лист как был левозакрученным, так таким и остался.

Таким образом, для примера рассмотрения операции «выворачивания наизнанку» не подходит ни перчатка, ни двухцветный цилиндр, ни двойной (тем более однослойный) лист Мёбиуса.

Есть ещё один объект, при помощи которого можно демонстрировать выворачивание наизнанку. Это – тор ([9], стр. 115). При выворачивании тора наизнанку меридианные кривые (показана красным пунктиром) и кривые, соответствующие широтам фигуры (синяя окружность), меняются местами [3].

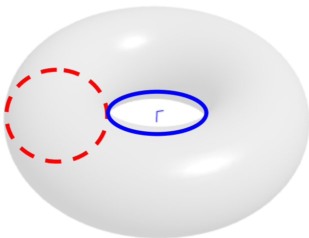

Рис. 9

Рассмотрим отдельно от тора кольцо меридиана (красное) и кольцо широты (синее) (Рис. 10).

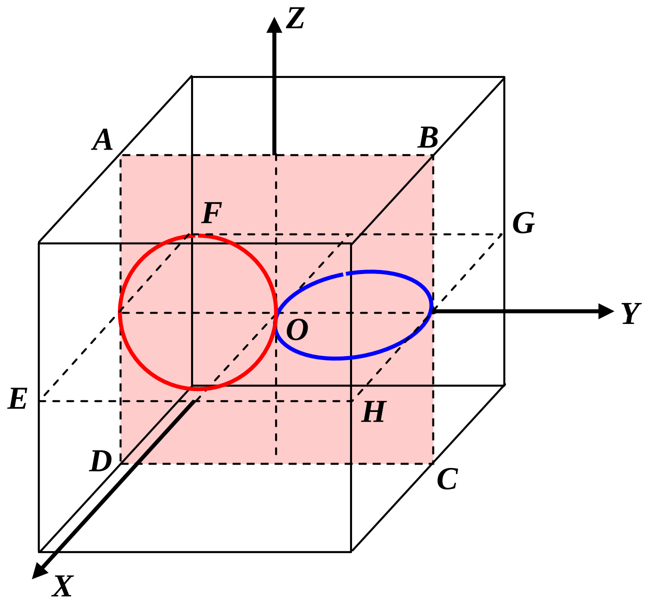

Рис. 10

Красная окружность принадлежит плоскости ***YOZ***, т. е. лежит в розовом квадрате ***ABCD***. А синяя окружность - в плоскости ***XOY***, т. е лежит в квадрате ***EFGH***. В данных координатах, показанные окружности имеют одинаковый радиус ***r***. Соответствующие уравнения окружностей имеют вид:

$$y^2 + 2ry + z^2 = 0, \quad (1)$$

$$y^2 - 2ry + x^2 = 0, \quad (2)$$

и связаны общим преобразованием: $y = \dfrac{x^2 - z^2}{4r}$.

Чтобы поменять окружности местами надо сделать такие преобразования:

1. Повернуть куб, показанный на Рис. 10, вокруг оси ***OY*** на **90°** против часовой стрелки.
2. Затем тот же куб провернуть вокруг оси ***OZ*** на **180°** против часовой стрелки.

Это похоже на спинорные преобразования, которые подробно описаны и показаны, например, в [4], но с другими углами поворотов. В координатном виде такие преобразования можно посмотреть в любом учебнике по аналитической геометрии, например, в [10] или [11]. Мы этим здесь заниматься не будем.

Однако надо сказать, что все эти ухищрения в общем-то не выворачивают по большому счёту пространство наизнанку, только переводят друг в друга отдельные его (пространства) объекты. Перчатка из чёрной не превратилась в белую (при условии, что её изнанка белая). Оказывается, это не простое дело – вывернуть пространство наизнанку. Наверное без мнимых объктов и величин здесь не обойтись. Попробуем привлечь кватернионы.

Рассмотрим радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ в виде векторного кватерниона, который описывает некоторую поверхность по аналогии с тем, как это показано в [8]. Здесь уравнение поверхности задаётся выражением: $z = f(x, y)$, а текущая точка $M(x, y, z)$ этой поверхности задана радис-вектором $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k}$.

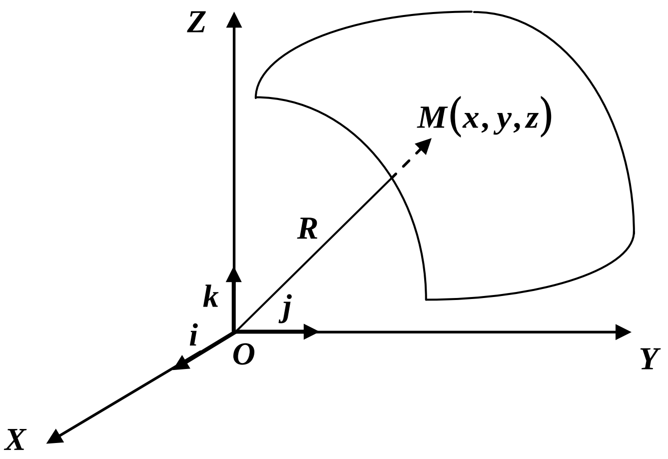

Рис. 11

Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – кватернионовые орты. Напомним, что это единичные вектора, для которых справедливы равенства [2]: $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$.

Зеркально отражённая, относительно плоскости $\boldsymbol{YOZ}$, поверхность будет описываться радиус-вектором $\boldsymbol{R}^* = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k}$. В литературе тела, описываемые радиус-векторами $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}^*$ (зеркальноотражённые) обычно называют энантиоморфными [5].

Введём оператор зеркального отражения δ:

$$\delta \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^* \tag{3}$$

Т. к. операция деления определена в алгебре кватернионов, то можем записать [2]:

$$\delta = \frac{\boldsymbol{R}^*}{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}\boldsymbol{R}^*\overline{\boldsymbol{R}}, \tag{4}$$

где $\overline{\boldsymbol{R}} = -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - f(x, y)\boldsymbol{k}$ - сопряжённый для $\boldsymbol{R}$ кватернион, $|\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - его модуль. Заметим, что $|\boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{R}^*| = |\overline{\boldsymbol{R}}|$, т. е. можем записать:

$$\delta = \frac{\boldsymbol{R}^*}{|\boldsymbol{R}^*|} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{R}}}{|\overline{\boldsymbol{R}}|}. \tag{5}$$

Прямое вычисление оператора зеркального отражения даёт выражение:

$$\delta = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}\left(a - 2x(z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k})\right), \tag{6}$$

где $a = -x^2 + y^2 + z^2$. Как видим, оператор зеркального отражения – это кватернион общего вида. Чтобы превратить его в векторный кватернион, должно выполняться равенство $x^2 = y^2 + z^2$. Теперь функция оператора будет иметь вид:

$$\delta^* = \frac{2x}{|\boldsymbol{R}|^2}\left(y\boldsymbol{k} - z\boldsymbol{j}\right) \tag{7}$$

Напомним, что зеркальное отражение в нашем случае происходит как раз вдоль оси абсцисс $\boldsymbol{OX}$. По выражению (7) сказать что-либо об операторе δ очень трудно, т. к. он является продуктом векторных кватернионов самого общего вида. Можно с уверенностью сказать только, что этот кватернион получается вращением одного из сомножителей вокруг некоторой оси.

В рамках нашего исследования (а это - кватернионно-векторное пространство) даже трудно представить, как работает такой оператор, но можно сказать, что в каждой точке исследуемой поверхности нашему оператору соответствует какая-то координатно-пространственная окружность $x^2 = y^2 + z^2$.

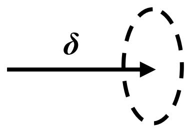

Рис. 12

Очевидно, что радиус этой окружности всё время будет меняться при переходе от точки к точке описываемой окружности.

Введём сферические координаты (Рис. 13) $\boldsymbol{X = R \cdot Sin(\theta) \cdot Cos(\varphi)}$, $\boldsymbol{Y = R \cdot Sin(\theta) \cdot Sin(\varphi)}$, $\boldsymbol{Z = R \cdot Cos(\theta)}$ в общем ортогональном репере.

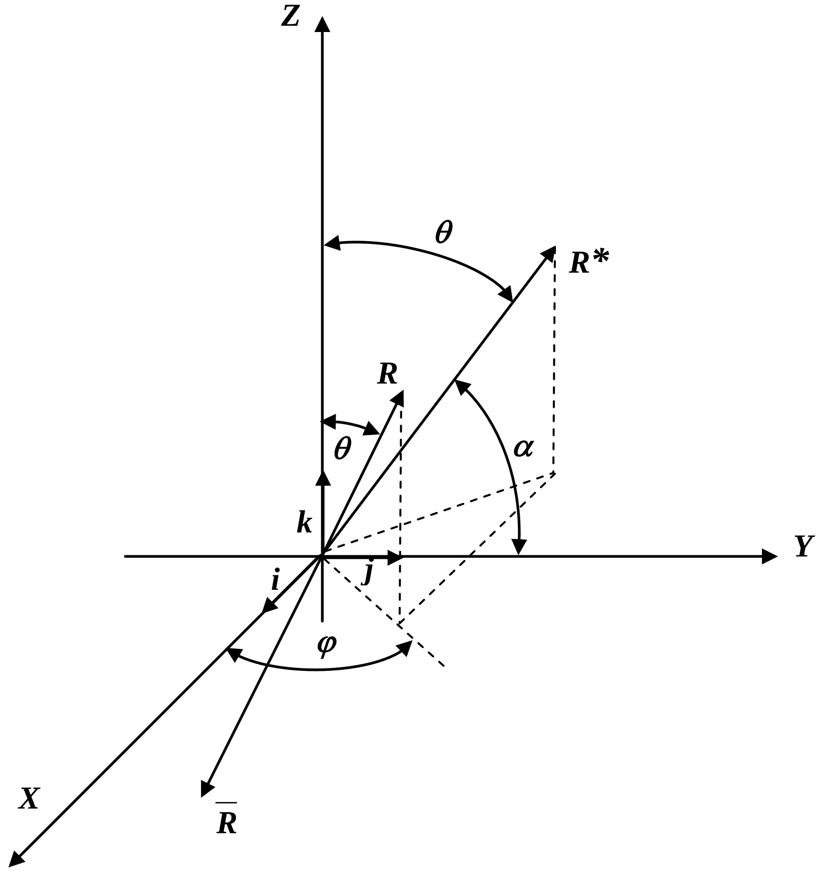

Рис. 13

Мы надеемся, что с их помощью хоть немного удасться пролить свет на геометрическую природу оператора зеркального отражения.

Известно также [2], что для произведения чисто векторных кватернионов $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_2}$ справедлива формула $\boldsymbol{q_1 q_2 = -(q_1, q_2) + [q_1, q_2]}$, где $\boldsymbol{(q_1, q_2) = |q_1| \cdot |q_2| \cdot Cos(\omega)}$ - скалярная часть, а $\boldsymbol{[q_1, q_2] = |q_1| \cdot |q_2| \cdot Sin(\omega)}$ - векторная часть, $\boldsymbol{\omega}$ – угол между кватернионами.

Рассмотрим произведение двух чисто векторных кватернионов $\boldsymbol{R^*}$ и $\boldsymbol{j}$. Получаем:

$\boldsymbol{R^* \cdot j = -|R^*| \cdot Cos(\alpha) + |R^*| \cdot Sin(\alpha)}$ или $\boldsymbol{\frac{R^*}{|R^*|} = j(Cos(\alpha) - Sin(\alpha))}$. Из Рис. 13 находим, что $\boldsymbol{Cos(\alpha) = \frac{y}{R^*} = Sin(\theta) \cdot Sin(\varphi)}$ и $\boldsymbol{Sin(\alpha) = \sqrt{1 - Sin^2(\theta) Sin^2(\varphi)}}$. Тогда окончательно можем записать:

$$\boldsymbol{\frac{R^*}{|R^*|} = j\left(Sin(\theta) Sin(\varphi) - \sqrt{1 - Sin^2(\theta) Sin^2(\varphi)}\right)}.$$

Аналогично рассмотрим произведение двух чисто векторных кватернионов $\overline{\boldsymbol{R}}$ и $\boldsymbol{k}$. Получаем:

$$\frac{\overline{\boldsymbol{R}}}{\left|\overline{\boldsymbol{R}}\right|} = \boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{Sin}(\theta) - \boldsymbol{Cos}(\theta)\right)$$

Подставим два последних выражения в (5).

$$\delta = \boldsymbol{i} \cdot \left(\boldsymbol{Sin}(\theta) - \boldsymbol{Cos}(\theta)\right) \cdot \left(\boldsymbol{Sin}(\theta)\boldsymbol{Sin}(\varphi) - \sqrt{1 - \boldsymbol{Sin}^2(\theta)\boldsymbol{Sin}^2(\varphi)}\right). \qquad (8)$$

Выражение (8) описывает геометрический смысл оператора зеркального отражения в сферических координатах. Как видим оператор δ является вектором, который расположен вдоль оси $\boldsymbol{OX}$. Этот вывод не противоречит нашему исследованию.

Введём понятие кватерниона $\boldsymbol{R}^+$, который «упирается» в изнаночную часть поверхности $z = f(x, y)$ в виде суммы кватернионов:

$$\boldsymbol{R}^+ = \boldsymbol{R}^* \pm \boldsymbol{dR}^* = \boldsymbol{R}^* \pm \left(\partial x\boldsymbol{i} + \partial y\boldsymbol{j} + \partial z\boldsymbol{k}\right) = \left(-x \pm \partial x\right)\boldsymbol{i} + \left(y \pm \partial y\right)\boldsymbol{j} + \left(z \pm \partial z\right)\boldsymbol{k}. \qquad (9)$$

Рассмотрим плоскость сечения радиус-вектора $\boldsymbol{R}^+$. Этот вектор может «упираться» в изнаночную часть поверхности двумя способами (Рис. 14). Сечение поверхности показано сплошной линией, изнаночная часть сечения – пунктирной линией.

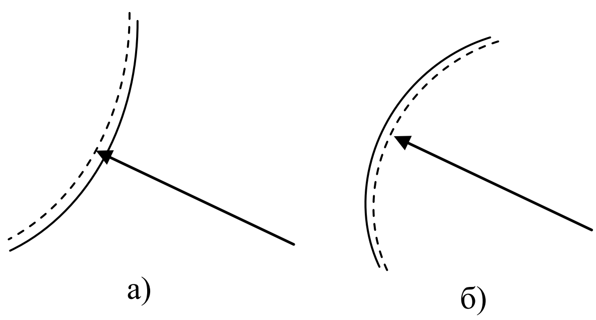

Рис. 14

В случае, показанном на Рис.14 а), в формуле (9) будем иметь знак «+», в случае Рис. 14 б) в формуле (9) будем иметь «-».

С другой стороны, вектор $\boldsymbol{R}^+$ можно представить как удлиннение (уменьшение) вектора $\boldsymbol{R}^*$ на некоторую бесконечно малую величину $\boldsymbol{\mu}$.

$$\boldsymbol{R}^+ = \mu\boldsymbol{R}^* = \mu\left(-x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right) = \left(-x \pm \partial x\right)\boldsymbol{i} + \left(y \pm \partial y\right)\boldsymbol{j} + \left(z + \partial z\right)\boldsymbol{k}.$$

Откуда получаем условия существования кватерниона $\boldsymbol{R}^+$:

$$\begin{cases} x\partial y = \pm y\partial x \\ y\partial z = z\partial y \\ z\partial x = \mp x\partial z \end{cases} . \qquad (10)$$

Подведём некоторые итоги. В пространстве векторных кватернионов можно математически описать выворачивание некоторой поверхности наизнанку. При этом вектор, описывающий поверхность изнанки, имеет вид:

$$\boldsymbol{R}^{+} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{R}, \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1} \mp \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}}$.

По сути дела, мы предположили, что наша поверхность имеет некоторую толщину и на каждую точку поверхности можно «взглянуть» и сверху, и снизу. Подобный подход рассматривается в [7]. Причём в последнем случае точку можно рамматривать не только сверху и снизу, но и изнутри.

Литература

1. М. Гарднер, «Математические головоломки и развлечения», М., «Мир», 1971

2. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, «Гиперкомплексные числа», М., «НАУКА», 1973

3. С. Барр, «Россыпи головоломок», М., «Мир», 1987

4. Ч. Мизнер, К Торн, Дж. Уилер, «Гравитация, Т. 3», М., «Мир», 1977

5. И. С. Желудев, «Симметрия и её приложения», М., «Энергоатомиздат», 1983

6. А. С. Сонин, «Постижение совершенства», М., «Знание», 1987

7. П. А. Флоренский, «Мнимости в геометрии», М., «Лазурь», 1991

8. Г. Ф. Лаптев, «Элементы векторного исчисления», М., «НАУКА», 1975

9. Ф. Герман, «Математика в науке и вокруг нас», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015

10. П. С. Александров, «Лекции по аналитической геометрии», М., «НАУКА», 1968

11. А. В. Погорелов, «Геометрия», М., «НАУКА», 1983