Франц Герман

О существовании реликтовой Геометрии

«Проективная геомерия -
это вся геометрия» ([2], стр. 208).

А. Кэли

Мы не случайно слово «Геометрия» в заголовке нашего разговора написали с большой буквы, чтобы подчеркнуть этим понятием, что под этим словом имеются в виду все возможные геометрии, которые только можно получить при помощи различных инвариантов, рассматриваемых в проективной геометрии.

Скажем несколько слов о проективной геометрии (ПГ). Удобнее всего это можно, пожалуй, сделать на примере проективной плоскости. В математике принято обозначать проективную плоскость – $\boldsymbol{CP^2}$ или $\boldsymbol{RP^2}$ в зависимости от того, какое поле чисел мы рассматриваем (комплексное или действительное).

У проективной геометрии нет одного автора. Порой, автором этой геометрии называют Дезарга, открывшего одну из основопологающих теорем этой геометрии.

Теоремы ПГ были уже известны с древних времён. Например, теорема Паппа Александрийского. Теорема Паппа легко формулируется и понятна даже школьнику.

Если вершины замкнутого произвольного шестивершинника **123456** *принадлежат двум прямым* ***a*** *и* ***b*** (Рис. 1).

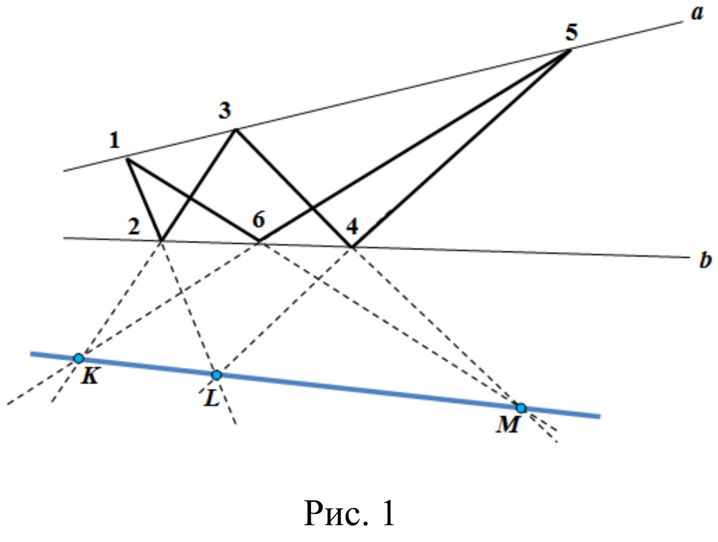

Рис. 1

Точка ***K*** *является точкой пересечения сторон (23) и (65), точка* ***L*** *является точкой пересечения сторон (12) и (45), а точка* ***M*** *– это пересечение сторон (16) и (34), то точки* ***K*, L** *и* ***M*** *лежат на одной прямой.*

Большую роль в становлении проективной геометрии сыграли немецкие и французские математики XIX века, но мы не будем специально на этом останавливаться. Проективная геометрия настолько необычна, что об этом стоит сказать несколько слов. В проективной геометрии можно ввести координатную систему и строить уравнения прямых по координатам точек (координаты в ПГ называются *однородными*). Однако не всё так просто. Начало координат (точка с нулевыми координатами) не принадлежит самой проективной плоскости, а находится где-то в $\boldsymbol{RP^3}$ – проективном пространстве.

В проективной геометрии нет понятия расстояния между двумя точками. Поэтому $\boldsymbol{RP^2}$ порой называют неметрической геометрией. Здесь невозможно вычислить угол между двумя прямыми. Нет ни параллельных, ни перпендикулярных прямых. В проективной геометрии треугольники принято называть *трёхвершинниками*. В проективной геометрии существует всего один - он же основной - инвариант (инвариант – объект, сохраняющийся при проективных преобразованиях) – *сложное отношение четырёх точек на прямой* (об этом может быть отдельный разговор). Для вычисления такого инварианта существует специальная формула ([1], стр. 29). Одним из важных свойств $\boldsymbol{RP^2}$ является *принцип двойственности*. Это значит, что если дано математическое (координатное) описание некоторой проективной конфигурации, то невозможно понять речь идёт о точках или о прямых. Поэтому большинство теорем и выссказываний в $\boldsymbol{RP^2}$ носит двойственный характер.

Топологи очень любят $\boldsymbol{RP^2}$. Проективная плоскость является одной из классических замкнутых поверхностей наряду со сферой, тором и бутылкой Клейна. В теории поверхностей, например, вводится такая характеристика, как *ориентируемость* (*неориентируемость*). Например сфера – это ориентируемая поверхность. Бутылка Клейна – неориентируема. А проективные многообразия $\boldsymbol{RP^n}$ могут быть и ориентируемыми и неориентируемыми. Если $\boldsymbol{n}$ - чётно, то многообразие неориетировано. Если нечётно - то ориентировано. Проективная прямая $\boldsymbol{RP^1}$ ориентирована, а проективная плоскость неориентируема ([6], стр. 200). Заметим также, что все проективные прямые замкнуты. Осевая линия листа Мёбиуса является хорошей моделью $\boldsymbol{RP^1}$. Надо отметить такой «парадокс». В одной из моделей $\boldsymbol{RP^2}$ используется лист Мёбиуса, как составная часть $\boldsymbol{RP^2}$. При этом помним, что сам лист Мёбиуса – неориентированная поверхность с краем, а его осевая линия – модель проективной прямой ориентирована. Это строго доказано. Кстати, сама проективная плоскость может быть частью в модели бутылки Клейна. Если две $\boldsymbol{RP^2}$ соединить цилиндрическим тоннелем ([3], стр. 18), то получим модель бутылки Клейна.

Удобно изучать $\boldsymbol{RP^2}$ по её моделям. Таких моделей существует не один десяток (это тоже может быть темой отдельного разговора). Возможно, именно за это топологи и проявляют к объектам ПГ такой интерес. Однако, надо переходить к основному разговору, как из проективной геометрии появляются другие геометрии.

Представим себе $\boldsymbol{RP}^2$ в виде кипящей поверхности. Всё движется под воздействием проективных преобразований. Точки переходят в точки, прямые – в прямые. Но вот наша поверхность начинает остывать и появляются первые кристаллы неподвижности - инварианты. Одним из простейших инвариантов (в $\boldsymbol{RP}^2$ такой инвариант, чтобы не путать с остальными, принято называть *абсолютом*) на проективной плоскости может быть прямая. Сделав расчёты, мы видим, что проективные преобразования изменились и теперь они приняли вид аффинных преобразований. А геометрия из проективной превратилась в аффинную геометрию. Произошёл простейший геометрический метаморфоз (качественный переход). Аффинная плоскость получила свойства, которых раньше у проективной плоскости не было. Что бросается в глаза в первую очередь. Нулевая точка (начало координат) «упала» из пространства на плоскость и появился новый инвариант – параллельность прямых. Но продолжим наблюдать за происходяшим метаморфозом. Вспомним, что в проективной геометрии имеется принцип двойственности. Что будет если абсолют будет не прямой, а точкой. И геометрия тут же стала не аффинной, а *ценропроективной*. В новой геометрии появился и новый инвариант – *несоединимые точки*. Если прямая проходит через точку-абсолют, то точки на этой прямой будут несоединимыми. Такого нет ни в какой другой геометрии. Всё это поисходит в силу принципа двойственности. В одной геометрии есть непересекающиеся прямые (параллельные), в другой – несоединимые точки. Однако, поверхность продолжает «остывать», появляются новые центры кристализации. Появляются новые абсолюты. Теперь за абсолют можно принять одновременно и прямую, и точку (не лежащую на этой прямой). Новая геометрия носит название *центроаффинной*, объединяя названия двух предыдущих геометрий. Преобразования этой последней геометрии ещё немного отличаются от преобразований прежних геометрий. В новых геометриях можно уже использовать и неоднородные координаты.

Теперь рассмотрим абсолют в виде прямой и точки, которая лежит на этой прямой. Геометры – люди с фантазией. По чьей-то такой математической фантазии новую геометрию назвали *флаговой*. Может показаться, что всё это сплошная абстракция и к нашей жизни не имеет ничего общего. Для любителей конкретики можно отметить, что «аффинная геометрия, например, является теоретической базой начертательной геометрии» ([5], стр. 109).

Отметим, что все новые геометрии – неметрические, как и сама ПГ. Здесь невозможно вычислять расстояния и углы между прямыми.

Кроме прямых и точек на проективной плоскости есть и другие фигуры. Например, кривые второго порядка. Таких кривых ровно пять: *овальная линия*, *нулевая линия* (невырожденные кривые), *пара* *вещественных прямых, пара мнимых прямых, пара слившихся прямых* (вырожденные кривые) ([4], стр. 386).

В качестве абсолюта выберем действительную овальную кривую. При этом проективная плоскость распадается на две части. Внутри абсолюта и снаружи. Расчёты показывают, что внутри абсолюта родилась новая геометрия, которая называется геометрией Лобачевского. А что же получилось снаружи? Разобраться в этом помогут прямые на $\boldsymbol{RP^2}$. Все эти прямые можно разбить на два класса: прямые, которые пересекают абсолют и прямые, которые не пересекают абсолют (прямые, которые касаются абсолюта рассматривать нельзя [4]). Кроме того в абсолют (и из абсолюта) проникнуть нельзя – там другая геометрия, поэтому прямые первого класса оказались разорванными. Сделаем небольшую остановку.

Как показывают современные исследования [7] выбраться из абсолюта всё-таки можно. Да, вынуть целиком прямую со всеми её свойствами из геометрии Лобачевского и положить в другую геометрию невозможно, но оказывается можно вытащить отрезок такой прямой. Но сделать это удаётся в два этапа. Сначала отрезок вытаскивается в новую мнимую геометрию, а потом, после небольших преобразований, его (отрезок) уже можно «втащить» в геометрию за абсолютом. Исследования показывают, что между начальным и конечным отрезками при этом существует изоморфизм. Грубая иллюстрация такой телепортации показана на Рис. 2.

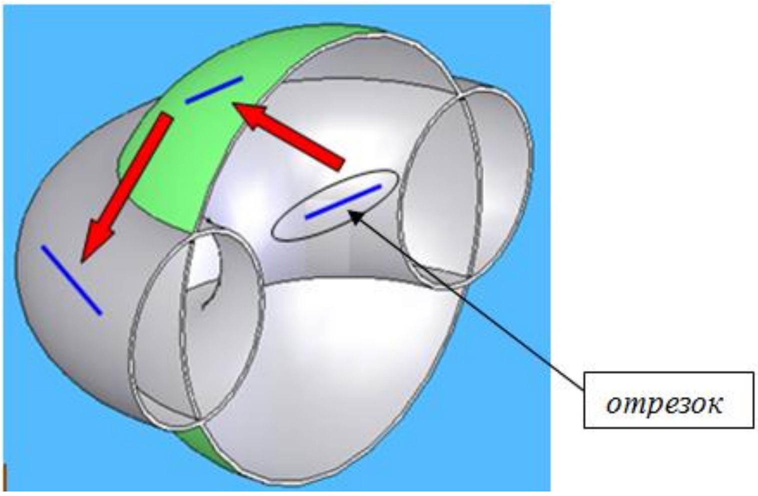

Рис. 2

Для такой иллюстрации тор оказался подходящей фигурой, так как с внутренней стороны тора (поверхность, окружающая отверстие тора) и с наружной разные геометрии, отличные от геометрии сферы. Сфера в нашем примере является «промежуточной» (мнимой) поверхностью. А если радиусы тора $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ и радиус сферы $\boldsymbol{R}$ связаны соотношением $\boldsymbol{r}_1^{\,2}+\boldsymbol{r}_2^{\,2}=\boldsymbol{R}^2$ (как в нашем примере), то сфера рассекает тор на две равновеликие части. Первая часть – внешняя, вторая ограничена поверхностью дырки тора. Можно ещё отметить и такой факт. Если метрику мнимого пространства обозначить через $\boldsymbol{H}^*$, а метрику геометрии за абсолютом через $\boldsymbol{E}$, то справедлива такая формула: $\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{H}^*$, где $\boldsymbol{i}$ – мнимая единица. Но вернёмся к нашему метаморфозу Геометрии.

Итак, из расчётов можем заключить, что за абсолютом «запутаны» две геометрии *когиперболическая* и *дважды гиперболическая*. Геометрию Лобачевского иногда называют *гиперболической*.

Теперь в качестве абсолюта рассмотрим мнимую конику (нулевая линия). В связи с этим в рассмотрение вступает и более общая проективная плоскость - $\boldsymbol{CP}^2$. $\boldsymbol{RP}^2$ принадлежит $\boldsymbol{CP}^2$. Метрика, которая получается при таком абсолюте является *эллиптической*, а геометрия называется Римановой. Справедливости ради надо отметить, что геоматрия Лобачевского – это частный случай Римановой геометрии [8].

У нас остались нерассмотренными ещё три вырожденных линии второго порядка. Рассмотрим в качестве абсолюта пару мнимых прямых. Получаем новую геометрию, которую называю *параболической*. Заметим такую особенность. Риманова геометрия двойственна сама себе. А какая геометрия будет двойственной параболической геометрии? Для этого надо абсолют (пара мнимых прямых) представить в двойственном виде. Получаем действительную прямую и на ней две комплексных сопряжённых точки. Вычисляем метрику для этой геометрии и ... получаем родную нам Евклидову геометрию. Вот такой получается не простой метаморфоз Геометрии. Но у нас есть ещё две неиспользованных линии второго порядка. Рассмотрим абсолют в виде кривой, которая распадается на пару вещественных прямых. Как оказалось, в такой геометрии углы можно вычислить используя гиперболическую метрику, а расстояния вычисляются по псевдопараболической метрике. Физики сразу бы признали в этой плоскости геометрию Минковского. А последний абсолют (пара слипшихся прямых) даёт геометрию, которая тоже знакома физикам – это геометрия Галилея.

А в виде заключительного резюме - *гипотеза*.

Итак, случился Большой Взрыв (БВ). Родилось Мироздание, а вместе с ним и Пространство-Время. И это новорожденное Пространство было одето в простейшую геометрическую рубашку. Очевидно, рубашка представляла собой ПГ. А какую ещё? Ведь все остальные геометрии трансформировались из ПГ.

По мере расширения, остывания, появления материи, менялось и излучение... Изменялась и геометрия пространства. Появились галактики и всё, что в галактиках может быть. Сегодня известно, что в своём глобальном существовании Мироздание имеет геометрию Евклида.

Известно, что сохранилось реликтовое излучение. Так может быть сохранилась и ***реликтовая геометрия***? Нам дана возможность увидеть бесконечно удалённую точку (там, где сходятся рельсы железнодорожного полотна), а ведь бесконечно удалённая точка принадлежит проективной геометрии. Или, порой, нам удётся увидеть линию горизонта, находясь в степи или на палубе океанского лайнера. Т. е. линия горизонта замкнута. Что это, как не образ бесконечно удалённой прямой. Т. о. нам дана возможность видеть некоторые образы проективной геометрии. Той геометрии, которая когда-то родилась с рождением нашего Мироздания.

Т. е. ***проективная геометрия – это реликтовая геометрия нашего Мироздания***.

В этом и есть суть нашей гипотезы.

Литература

1. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия, часть II», М. «Просвещение», 1987
2. Ф. Клейн, «Элементарная геометрия с точки зрпения высшей, том II», М. «Наука», 1987
3. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., «Наука», 1989
4. Н. В. Ефимов, «Высшая геометрия», М., «Наука», 1971
5. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин, «От проективной геометрии к неевклидовой», М., «Просвещение», 1979
6. Ю. Г. Борисович и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980
7. Ф. Герман, «Проективная плоскость – RP^2», Saarbrücken, «LAP LAMBERT, Academic Publishing», 2015
8. Б. А. Розенфельд, «История неевклидовой геометрии», М., «Наука», 1976