Франц Герман

Теория КД - конфигураций

franz.h-n@yandex.ru

1. Введение

Скажем несколько слов о цели нашего исследования.

Самым фундаментальным принципом проективной геометрии является принцип двойственности.

Своим рождением принцип двойственности обязан введению в проективную геометрию понятия однородных координат (Julius Plücker).

Уравнение прямой $\boldsymbol{T(t_1 : t_2 : t_3)}$, проходящей через точку $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : x_3)}$, имеет вид:

$$\boldsymbol{t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = 0} \qquad (1)$$

Как видим, координаты прямой и координаты точки совершенно равноправны (симметричны) в уравнении (1), т.е. мы с таким же успехом могли бы сказать, глядя на данное уравнение, что прямая $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : x_3)}$ проходит через точку $\boldsymbol{T(t_1 : t_2 : t_3)}$.

Это положение и является ключевым в рождении принципа двойственности.

Таким образом, сыграв свою роль в появлении принципа двойственности, однородные координаты уже более никогда не упоминаются (по крайней мере, автору это не известно) в связи с данным принципом.

Сам же принцип двойственности являет собой только положение о равноправии инцидентности точек и прямых.

Между тем (и это очевидно), если на проективной плоскости существует точка $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : x_3)}$, то существует и прямая $\boldsymbol{T(x_1 : x_2 : x_3)}$. Таким образом, возникает смысл исследовать именно координатный принцип двойственности.

В чём суть данного исследования.

Нас будет интересовать, возможно ли, взяв K точек с координатами $\boldsymbol{X_k(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})}$ на проективной плоскости, объединить их в некую конфигурацию K прямыми T_k с такими же координатами $\boldsymbol{(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})}$.

Мы исследуем несколько таких конфигураций, а также рассмотрим некоторые свойства полярных отображений, связанные с координатным принципом двойственности.

2. Вспомогательные леммы.

Определение:

если на проективной плоскости заданы $\boldsymbol{K}$ прямых и $\boldsymbol{K}$ точек, принадлежащих этим прямым, и для каждой прямой существует координатно-двойственная ей точка, то такую совокупность точек и прямых будем называть координатно-двойственной (КД) конфигурацией.

Докажем несколько лемм, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1 (принцип неинцидентности)

Координатно-двойственные точки и прямые никогда не инцидентны.

Доказательство:

Это почти очевидно, т. к. в противном случае уравнение (1) имело бы вид:

$$\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0},$$

а это невозможно ни при каких условиях, т. к. в проективной геометрии не существует точки с однородными координатами (0 : 0 : 0).

Следовательно, инцидентность невозможна.

Для удобства записи введём обозначение координатно-двойственного соответствия точки и прямой: «<≡>».

Т. е. запись $\boldsymbol{A <\equiv> a}$ будет обозначать, что точка $\boldsymbol{A}$ координатно-двойственна прямой $\boldsymbol{a}$.

Лемма 2 (принцип взаимности)

Если $\boldsymbol{A <\equiv> a}$ *и* $\boldsymbol{B \in a}$*, то прямая* $\boldsymbol{b <\equiv> B}$ *проходит через точку А.*

Доказательство:

Пусть прямая $\boldsymbol{a}$ задаётся уравнением:

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0}, \tag{2}$$

и точка $\boldsymbol{B(b_1 : b_2 : b_3) \in a}$, т. е. можем записать:

$$\boldsymbol{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0}, \tag{3}$$

тогда прямая $b <\equiv> B$ обязательно пройдёт через точку $A(a_1 : a_2 : a_3)$.

Действительно:

Уравнение прямой b имеет вид:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

и т. к. справедливо (3), заключаем, что прямая b проходит через точку $A(a_1 : a_2 : a_3) <\equiv> a$.

Следствие:

Если на проективной плоскости даны две точки ***A*** *и* ***B,*** *и, соответственно, координатно-двойственные им прямые* ***a*** *и* ***b****, то прямая* $AB <\equiv> (a \cap b)$.

Доказательство:

Проведём через A и B прямую. В силу принципа взаимности координатно-двойственная точка прямой AB должна принадлежать прямой a и одновременно и прямой b. Следовательно, это точка $(a \cap b)$, т. е. $AB <\equiv> (a \cap b)$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 3 (о двойственности координатного репера)

Если на проективной плоскости имеется треугольник $A_1 A_2 A_3$*, то всегда существует прективный репер, в котором вершины и стороны данного треугольника координатно-двойственны.*

Доказательство:

Выберем в качестве репера вершины нашего треугольника $\{A_1; A_2; A_3\}$, т. е. $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$. Уравнения прямых $A_2 A_3$, $A_1 A_3$, $A_1 A_2$ в этом случае соответственно будут иметь вид:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0,$$

или

$$A_2 A_3 (1:0:0); \qquad A_1 A_3 (0:1:0); \qquad A_1 A_2 (0:0:1).$$

Как видим, стороны треугольника координатно-двойственны соим противоположным вершинам.

Что и требовалось доказать.

3. Исследование (КД) конфигураций.

Теперь приступим к поиску и исследованиям (КД) конфигураций.

Сразу оговоримся. Мы будем рассматривать только такие (КД) конфигурации, где порядок каждой точки (прямой) не ниже второго, т. е. через каждую точку проходят, как минимум, две прямые (и, очевидно, каждой прямой принадлежат, как минимум, две точки).

Введём в наше рассмотрение вспомогательную структуру, отвечающую принципу взаимности и принципу неинцидентности. Такие структуры будем называть таблицами двойственности.

Из приведённого примера будет понятно, как задаются таблицы двойственности.

Пример:

1 - (2, 3, 4)
2 - (1, 3, 5)
3 - (1, 2)
4 - (1, 6)
5 - (2, 6)
6 - (4, 5)

Рис. 1

Структуру из 6-ти элементов, показанную на Рис. 1 будем называть таблицей двойственности 6-го порядка.

Здесь каждому элементу, имеющему обозначения 1, 2, 3, 4, 5, 6, ставится в соответствие набор других элементов (не менее двух), причём это соответствие операется на такие правила:

Сам себе элемент не может быть поставлен в соответствие
Если элементу ***a*** поставлен в соответствие элемент ***b***, в некотором наборе элементов, то и элементу ***b*** бедет проставлен в соответствие элемент ***a*.**

Среди всех наборов таблицы, не должно быть ни одной повторяющейся пары элементов.

Т. е., если в одном из наборов имеется пара элементов ***a*** и ***b***, то уже более ни в каком из других наборов такой пары не должно встретиться.
Как видим, таблица двойственности (ТД) на Рис. 1 отвечает всем этим трём правилам.

Заметим, что правило 1 и правило 2 – это ни что иное, как выражение принципа неинцидентности и принципа взаимности соответственно.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1 Если в некотором проективном репере $\boldsymbol{R}$ дана точка $\boldsymbol{A}$ и прямая $\boldsymbol{b}$, то существует единственное преобразование проективной плоскости, переводящее репер $\boldsymbol{R}$ в репер $\boldsymbol{R}^*$, в котором $\boldsymbol{A} <\equiv> \boldsymbol{b}$.

Доказательство:
Пусть прямая $\boldsymbol{b}$ задана точками $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$.
Тогда в репере $\boldsymbol{R}^* \{\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C}\}$, согласно Леммы 3, будем иметь $\boldsymbol{A} <\equiv> \boldsymbol{BC} \equiv \boldsymbol{b}$.

Найдём преобразование проективной плоскости, задаваемое матрицей $\|\boldsymbol{m}_{ij}\|$, переводящее репер $\boldsymbol{R}$ в репер $\boldsymbol{R}^*$.

Пусть в репере $\boldsymbol{R}$ точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ имеют координаты

$$(\boldsymbol{a}_1 : \boldsymbol{a}_2 : \boldsymbol{a}_3); \qquad (\boldsymbol{b}_1 : \boldsymbol{b}_2 : \boldsymbol{b}_3); \qquad (\boldsymbol{c}_1 : \boldsymbol{c}_2 : \boldsymbol{c}_3),$$

соответственно. В репере $\boldsymbol{R}^*$ эти точки будут иметь такие координаты:

$$(\mathbf{1} : \mathbf{0} : \mathbf{0}); \qquad (\mathbf{0} : \mathbf{1} : \mathbf{0}); \qquad (\mathbf{0} : \mathbf{0} : \mathbf{1}),$$

соответственно.

Можем записать следующие уравнения.

$$\boldsymbol{m}_{11}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{m}_{12}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{m}_{13}\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{1};\ \boldsymbol{m}_{21}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{m}_{22}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{m}_{23}\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0};\ \boldsymbol{m}_{31}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{m}_{32}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{m}_{33}\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0};$$

$$\boldsymbol{m}_{11}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{m}_{12}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{m}_{13}\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{0};\ \boldsymbol{m}_{21}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{m}_{22}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{m}_{23}\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{1};\ \boldsymbol{m}_{31}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{m}_{32}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{m}_{33}\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{0};$$

$$\boldsymbol{m}_{11}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{m}_{12}\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{m}_{13}\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{0};\ \boldsymbol{m}_{21}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{m}_{22}\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{m}_{23}\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{0};\ \boldsymbol{m}_{31}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{m}_{32}\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{m}_{33}\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{1};$$

Сгруппируем наши уравнения в три системы следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}_{11}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{m}_{12}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{m}_{13}\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{m}_{11}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{m}_{12}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{m}_{13}\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{m}_{11}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{m}_{12}\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{m}_{13}\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}_{21}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{m}_{22}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{m}_{23}\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m}_{21}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{m}_{22}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{m}_{23}\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{1}, \\ \boldsymbol{m}_{21}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{m}_{22}\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{m}_{23}\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}_{31}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{m}_{32}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{m}_{33}\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m}_{31}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{m}_{32}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{m}_{33}\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{m}_{31}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{m}_{32}\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{m}_{33}\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{1} \end{cases} \tag{6}$$

Замечаем, что для всех трёх систем уравнений (4), (5), (6) главный определитель один и тот же.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{vmatrix}$$

И т. к. точки $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ не лежат на одной прямой, то главный определитель системы не равен нулю. Следовательно системы (4), (5) и (6) имеют единственное решение для коэффициентов $\boldsymbol{m}_{ij}$.

Что и требовалось доказать.

Таблицы двойственности будем использовать как вспомогательный инструмент для поиска (КД) конфигураций. Т. к. и (КД) конфигурации и (ТД) отвечают принципу взаимности и принципу неинцидентности, то, очевидно, что всякой (КД) конфигурации можно поставить в соответствие, по крайней мере, одну таблицу двойственности.

Обратное же не всегда справедливо, т. е. не для всякой (ТД) можно построить (КД) конфигурацию (ниже мы приведём такой пример).

Проблема соответствия (ТД) и (КД) конфигураций может послужить темой отдельного исследования, но мы этим здесь заниматься не будем.

Итак, приступим к описанию некоторых (КД) конфигураций. Как и договорились ранее, будем заниматься только такими конфигурациями, у которых порядок точек и прямых не ниже 2-го.

Как было сказано выше, предметом нашего исследования будет являться составление таблиц двойственности и проверка их на соответствие (КД) конфигурвциям.

Простейшая, интересующая нас, таблица состоит их 3-х элементов и имеет вид:

1 - (2, 3)
2 - (1, 3)
3 - (1, 2)

и ей соответствует простейшая (КД) конфигурация (Рис. 2).

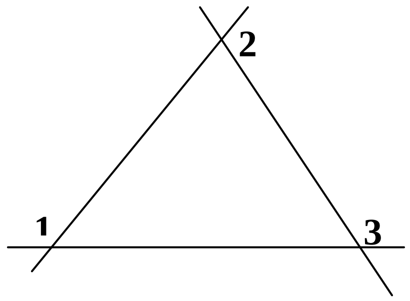

Рис. 2

Действительно, в силу Леммы 3 и Теоремы 1, существует такое преобразование прективной плоскости, что для данного треугольника будет справедлив принцип координатной двойственности.

Оказывается, не существует таблицы двойственности для 4-х элементов порядка 2 и более (надо помним, что мы рассматриваем конфигурации, у которых порядок точек и прямых не менее второго), а следовательно, невозможно построить и (КД) конфигурацию из 4 точек и 4 прямых.

Но из пяти точек уже можно построить две (КД) конфигурации Рис. 3 и Рис. 4. Конфигурацию Рис.3 будем называть кольцом, а конфигурацию Рис 4. – пучком.

Кольцо

1 - (2, 4)
2 - (1, 3)
3 - (2, 5)
4 - (1, 5)
5 - (3, 4)

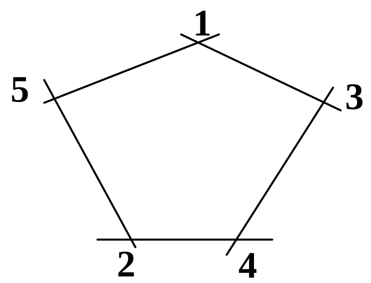

Рис. 3

Вся работа передана в РАН