Франц Герман

Теорема о поляре трёхвершинника

franz.h-n@yandex.ru

Посвящаю Л. Р.

Теорема: ***Если дан произвольный трёхвершинник и произвольная коника, то точки пересечения сторон трёхвершинника и поляр противоположных вершин лежат на одной прямой.***

Эту прямую мы и будем называть полярой данного трёхвершинника относительно данной коники.

Итак, рассмотрим произвольный трёхвершинник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ и произвольную конику $\boldsymbol{G}$ (Рис. 1).

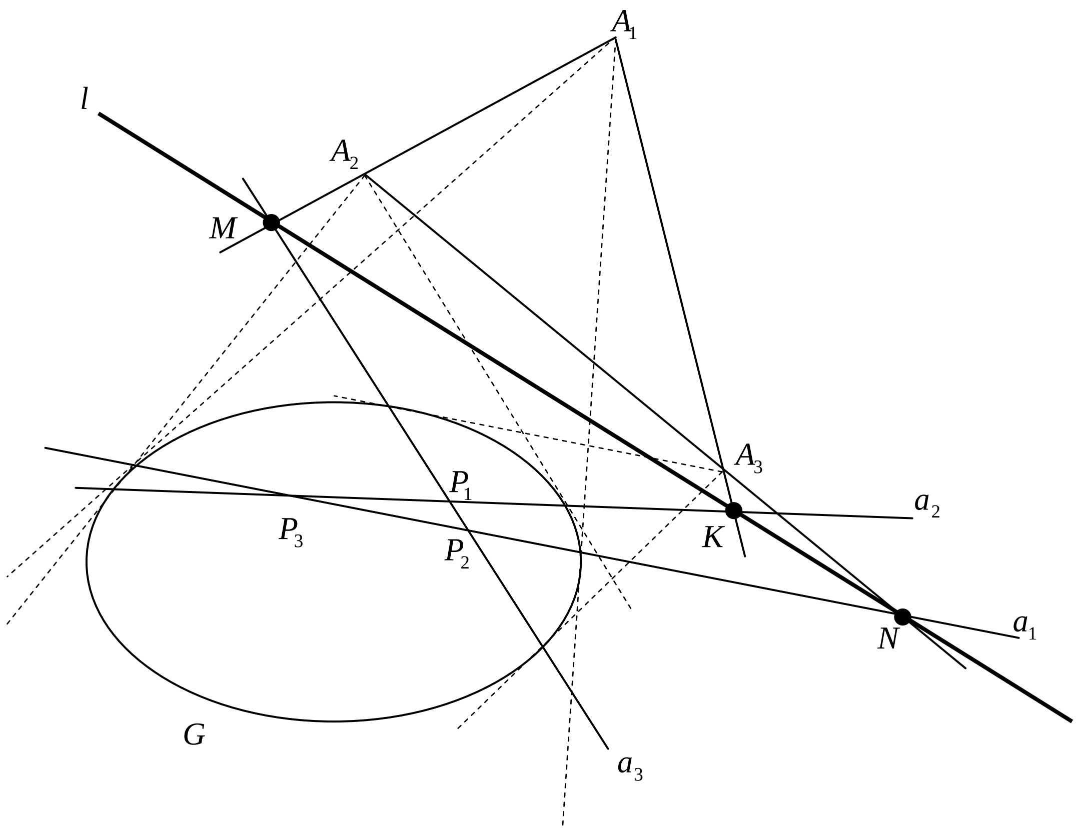

Рис. 1

Пунктирными линиями показано построение поляр.

$\boldsymbol{a_1}$ - поляра вершины A_1, $\boldsymbol{N \equiv (A_2 A_3 \cap a_1)}$.

$\boldsymbol{a_2}$ - поляра вершины A_2, $\boldsymbol{K \equiv (A_1 A_3 \cap a_2)}$.

$\boldsymbol{a_3}$ - поляра вершины A_3, $\boldsymbol{M \equiv (A_1 A_2 \cap a_3)}$.

Докажем, что точки N, K, M лежат на одной прямой l - поляре трёхвершинника.

Автор не ставил своей целью найти короткое и красивое доказательство. Задача стояла – доказать теорему.

***Доказательство*:**

Как известно произвольная коника имеет в общем виде такое уравнение:

$$G: \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3} g_{ij}x_i x_j = 0 \text{ или } g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Пусть трёхвершинник $A_1A_2A_3$ определяет проективный репер $\{A_1, A_2, A_3, E\}$, т.е. $A_1(1:0:0)$; $A_2(0:1:0)$; $A_3(0:0:1)$; $E(1:1:1)$. Тогда уравнение поляры точки A_3 будет иметь вид:

$$g_{11}\cdot 0\cdot x_1 + g_{22}\cdot 0\cdot x_2 + g_{33}\cdot 1\cdot x_3 + g_{12}(x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0) + g_{13}(x_1\cdot 1 + x_3\cdot 0) + g_{23}(x_2\cdot 1 + x_3\cdot 0) =$$
$$= g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_2 в данном репере будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0 \end{cases}$$

найдём координаты точки $M(g_{23} : -g_{13} : 0)$.

Аналогично находятся координаты точек $K(g_{23} : 0 : -g_{12})$ и $N(0 : g_{13} : -g_{12})$.

Убедимся, что точки N, K, M лежат на одной прямой, т.е. определитель, составленный из координат этих точек должен быть равен нулю. Действительно:

$$\begin{vmatrix} g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \\ 0 & g_{13} & -g_{12} \end{vmatrix} = g_{23}g_{12}g_{13} - g_{23}g_{12}g_{13} = 0 .$$

Найдём уравнение поляры трёхвершинника.

$$l: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \end{vmatrix} = x_1 g_{12}g_{13} + x_2 g_{12}g_{23} + x_3 g_{13}g_{23} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{x_1}{g_{23}} + \frac{x_2}{g_{13}} + \frac{x_3}{g_{12}} = 0, \qquad (1)$$

при $g_{12} \neq g_{13} \neq g_{23} \neq 0$

Как и для всякой теоремы проективной геометрии справедлива двойственная ей

Теорема: ***Если дан пройзвольный трёхвершинник и произвольная коника, то прямые, проходящие через вершины трёхвершинника и полюсы противоположных сторон, пересекаются в одной точке.***

Мы будем называть эту точку полюсом данного трёхвершинника относительно данной коники.

Доказательство:

Введём обозначения:

$P_1 \equiv (a_2 \cap a_3)$ - полюс A_2A_3

$P_2 \equiv (a_1 \cap a_3)$ - полюс A_1A_3

$P_3 \equiv (a_1 \cap a_2)$ - полюс A_1A_2

Рассмотрим трёхвершинники $A_1A_2A_3$ и $P_1P_2P_3$. $(P_1P_2 \cap A_1A_2) \equiv M$; $(P_1P_3 \cap A_1A_3) \equiv K$; $(P_2P_3 \cap A_2A_3) \equiv N$, но точки ***N, K, M*** лежат на одной прямой, следовательно, по теореме Дезарга, прямые A_1P_1, A_2P_2 и A_3P_3 пересекаются в одной точке S. Что и требовалось доказать.

Следствие: точка $\boldsymbol{S}$ является полюсом прямой $\boldsymbol{l}$ относительно данной коники.

Доказательство:

Точка $K \in A_1A_3$, точка P_2 является полюсом прямой A_1A_3, следовательно точка $\boldsymbol{K}$ сопряжена с точкой P_2. Также точка $K \in a_2$, следовательно $\boldsymbol{K}$ сопряжена с точкой A_2. Следовательно точка $\boldsymbol{K}$ является полюсом прямой A_2P_2. Рассуждая аналогично, можно показать, что точка $\boldsymbol{M}$ является полюсом прямой A_3P_3. Но $S \equiv (A_2P_2 \cap A_3P_3)$, следовательно $\boldsymbol{S}$ сопряжена с точкой $\boldsymbol{K}$ и с точкой $\boldsymbol{M}$, а т.к. $K \in l$ и $M \in l$, то точка $\boldsymbol{S}$ является полюсом прямой $\boldsymbol{l}$. Что и требовалось доказать.

Вся работа передана в РАН