

Франц Герман

# $RP^2$ - Проективная плоскость



**LAMBERT**  
Academic Publishing

Франц Герман

## $RP^2$ - Проективная плоскость

LAP LAMBERT Academic Publishing

#### **Impressum / Выходные данные**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen Warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: [www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: [info@lap-publishing.com](mailto:info@lap-publishing.com)

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

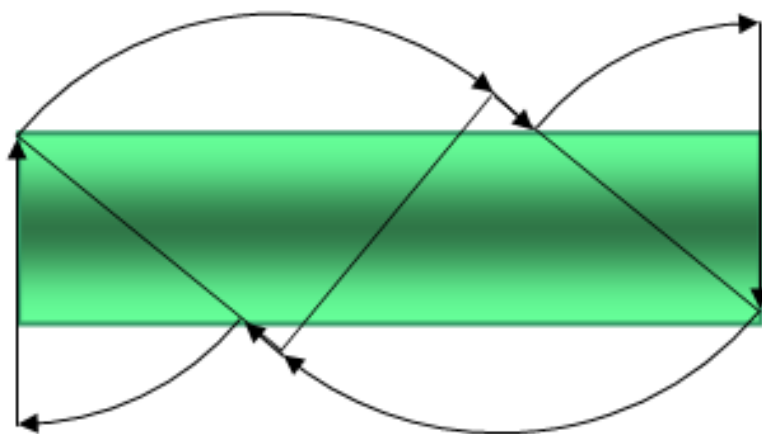
**ISBN: 978-3-659-77113-2**

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2015 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2015

Франц Герман

**$RP^2$  -  
проективная  
плоскость**



# Франц Герман

## *Проективная плоскость – $RP^2$ .*

### Содержание

Глава 1. КД – конфигурации	стр.1
Глава 2. Некоторые свойства полярных отображений	стр.35
Глава 3. Конические сечения и прямые Дезарга	стр. 52
Глава 4. Инварианты проективного преобразования	стр. 81
Глава 5. Модели $RP^2$	стр. 94
Глава 6. Конфигурации прямых Паскаля	стр. 129
Глава 7. Топология замкнутых маршрутов	стр. 176
Глава 8. Уравнение телепортации	стр. 197
Глава 9. Инвертированный репер	стр. 206
Глава 10. Поверхность Мёбиуса	стр. 218
Глава 11 Уникальность гептаэдра	стр. 245
Глава 12 ЛП-решётка в пространстве $R^3$	стр. 256



# Глава 1

## КД – конфигурации.

### 1. Введение

Скажем несколько слов о цели нашего исследования.

Самым фундаментальным принципом проективной геометрии является принцип двойственности.

Своим рождением принцип двойственности обязан введению в проективную геометрию понятия однородных координат ( Julius Plücker ).

Уравнение прямой  $T(t_1 : t_2 : t_3)$  на  $RP^2$  ( $RP^2$  - традиционное обозначение действительной проективной плоскости), проходящей через точку  $X(x_1 : x_2 : x_3)$ , на этой же плоскости, имеет вид:

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = 0 \quad (1)$$

Как видим, координаты прямой и координаты точки совершенно равноправны (симметричны) в уравнении (1), т.е. мы с таким же успехом могли бы сказать, глядя на данное уравнение, что прямая  $X(x_1 : x_2 : x_3)$  проходит через точку  $T(t_1 : t_2 : t_3)$ .

Это положение и является ключевым в рождении принципа двойственности.

Таким образом, сыграв свою роль в появлении принципа двойственности, однородные координаты уже более никогда не упоминаются (по крайней мере, автору это не известно) в связи с данным принципом.

Сам же принцип двойственности являет собой только положение о равноправии инцидентности точек и прямых на  $RP^2$ .

Между тем (и это очевидно), если на  $RP^2$  существует точка  $X(x_1 : x_2 : x_3)$ , то существует и прямая  $T(x_1 : x_2 : x_3)$ . Таким образом, возникает смысл исследовать именно координатный принцип двойственности.

В чём суть данного исследования.

Нас будет интересовать, возможно ли, взяв  $K$  точек с координатами  $X_k(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})$  на  $RP^2$ , объединить их в некую конфигурацию  $K$  прямыми  $T_k$  с такими же координатами  $(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})$ .

Мы исследуем несколько таких конфигураций, а также рассмотрим некоторые свойства полярных отображений, связанные с координатным принципом двойственности.

## 2. Вспомогательные теоремы.

**Определение:** если на  $RP^2$  заданы  $K$  прямых и  $K$  точек, принадлежащих этим прямым, и для каждой прямой существует координатно-двойственная ей точка, то такую совокупность точек и прямых будем называть координатно-двойственной конфигурацией (КД – конфигурацией) порядка  $K$ .

Докажем несколько теорем, которые понадобятся нам в дальнейшем.

### Теорема 1 (принцип неинцидентности)

**Координатно-двойственные точки и прямые никогда не инцидентны.**

**Доказательство:**

Это почти очевидно, т. к. в противном случае уравнение (1) имело бы вид:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ , а это невозможно ни при каких условиях, т. к. в проективной геометрии не существует точки с однородными координатами  $(0 : 0 : 0)$ .

Следовательно, инцидентность невозможна.

Для удобства записи введём обозначение координатно-двойственного соответствия точки и прямой: « $\Leftrightarrow$ ».

Т. е. запись  $A \Leftrightarrow a$  будет обозначать, что точка  $A$  координатно-двойственна прямой  $a$ .

### Теорема 2 (принцип взаимности)

**Если  $A \Leftrightarrow a$  и  $B \in a$ , то прямая  $b \Leftrightarrow B$  проходит через точку  $A$ .**

**Доказательство:**

Пусть прямая  $a$  задаётся уравнением:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad (2)$$

и точка  $B(b_1 : b_2 : b_3) \in a$ , т.е. можем записать:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad (3)$$

тогда прямая  $b \Leftrightarrow B$  обязательно пройдёт через точку  $A(a_1 : a_2 : a_3)$ .

Действительно:

Уравнение прямой  $b$  имеет вид:  $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$

и т.к. справедливо (3), заключаем, что прямая  $b$  проходит через точку  $A(a_1 : a_2 : a_3) \Leftrightarrow a$ .

Следствие: Если на  $RP^2$  даны две точки  $A$  и  $B$ , и, соответственно, координатно-двойственные им прямые  $a$  и  $b$ , то прямая  $AB \Leftrightarrow (a \cap b)$ .

**Доказательство:**

Проведём через  $A$  и  $B$  прямую. В силу принципа взаимности координатно-двойственная точка прямой  $AB$  должна принадлежать прямой  $a$  и одновременно и прямой  $b$ . Следовательно, это точка  $(a \cap b)$ , т.е.  $AB \Leftrightarrow (a \cap b)$ .

Что и требовалось доказать.

**Теорема 3 (о двойственности координатного репера)**

Если на  $RP^2$  имеется треугольник  $A_1 A_2 A_3$ , то всегда существует преотивный репер, в котором вершины и стороны данного треугольника координатно-двойственны.

**Доказательство:**

Выберем в качестве репера вершины нашего треугольника  $\{A_1; A_2; A_3\}$ , т. е.  $A_1(1:0:0)$ ,  $A_2(0:1:0)$ ,  $A_3(0:0:1)$ . Уравнения прямых  $A_2 A_3$ ,  $A_1 A_3$ ,  $A_1 A_2$  в этом случае соответственно будут иметь вид:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0,$$

или

$$A_2 A_3(1:0:0); \quad A_1 A_3(0:1:0); \quad A_1 A_2(0:0:1).$$

Как видим, стороны треугольника координатно-двойственны своим противоположным вершинам.

Что и требовалось доказать.