Дифференциальная теория чисел
(генетическая теория чисел)

«Яркая, вечно изменчивая полнота красок, случайностей,
не поддающаяся нашему чувству разнообразия,
живая природа, в сущности, построена на мере и на числе.
Она согласована в своих тончайших проявлениях и, по существу,
является частью единого стройного целого, единой
структуры - организованности»

В. И. Вернадский

1. Вступительное слово к теме

Число является одним из первичных объектов математики. Существует несколько различных точек зрения, отвечающих на вопрос, что такое число. Платоновский подход к этому вопросу говорит, что «математические понятия объективно существуют как особые сущности между миром идей и миром материальных вещей» ([1], стр. 8). Многие выдающиеся математики такие как Дедекинд, Кантор, Эрмит придерживались платоновской точки зрения. Кантор «приписывал числам самостоятельное существование в царстве идей. Эрмит утверждал, что числа – не произвольные создания нашего ума, а существуют вне нас с такой же необходимостью, как и предметы объективной реальности, мы их встречаем или открываем и изучаем так же, как физики, химики или зоологи исследуют свои объекты» ([1], стр. 9). А Пифагор, как известно, обожествлял числа: «... число есть сущность всех вещей, и организация Вселенной в её определениях представляет собой вообще симметрическую систему чисел и их отношений» ([2], стр. 16). « Бог – учили пифагорейцы, - положил числа в основу порядка. Бог – это единство, а мир – множество и состоит из противоположностей. То, что приводит противоположности к единству и создаёт всё в космосе, есть гармония. Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях... Блаженство есть знание совершенства чисел души» ([3], стр. 129).

Мы не будем здесь заниматься рассмотрением различных философских взглядов на число. В этом вопросе автор придерживается мнения Пифагора и Платона. Мы постараемся заглянуть в этот удивительный мир чисел и посмотреть на него, как на некий фундамент, если угодно, плана Божественного творения. Можно не принимать такую точку зрения. Творец, мол, вовсе не нуждается ни в каком плане творения и число здесь не при чём. «Между тем числа выступают на самых «горячих» точках науки: то при изучении распределения планет в Солнечной Системе, то при объяснении сущности кода наследственности, то при выводе фундаментальных инвариантов в теоретической физике, то при объяснении периодической природы музыкального ряда и ряда

Менделеева» ([2], стр. 16-17), то при рассмотрении закономерностей в живой природе.

Уже из самых древних источников, дошедших до нашего времени, видно, что человечество с незапамятных времён пользовалось понятием числа. Правда сначала это были непозиционные системы числовых обозначений. «Крупным шагом вперёд, оказавшим колоссальное влияние на всё развитие математики, было создание позиционных систем счисления» ([4], стр. 52). Было ли в этом Божественное провидение? Может быть, если бы наука пошла другим путём, то человечество уже сейчас могло бы запросто путешествовать к звёздам? Известный социолог, бизнесмен и исследователь творчества братьев Стругацких С. Б. Переслегин отмечает. «Понятно, что выиграло человечество, перейдя к позиционной записи числа. Гораздо труднее определить, что при этом было потеряно. И довольно трудно поверить в то, что за прогресс в информатике, за создание виртуальной реальности человечество, по всей видимости, заплатило отказом от звёзд» ([5], стр. 530). Действительно, поверить трудно.

Первые позиционные системы записи чисел появились в Вавилоне [4] правда не сохранилось никаких исторических сведений, как это произошло и было ли в этом Божественное провидение. В Библии мы тоже не находим на это ответа, хотя косвенные доказательства имеются.

Главным объектом нашего исследования будет натуральный ряд чисел $\boldsymbol{N}$. Леопольд Кронекер говорил: «Бог создал натуральные числа, а всё прочее — дело рук человеческих».

Если заглянуть в интернет, то выражение «Вселенная чисел» можно найти либо в астрологии, либо в нумерологии. Само понятие «Вселенная» восходит скорее всего ещё к древней астрономии, когда первые астрономы закладывали основы этой науки из визуального наблюдения звёздного неба.

Что же такое «Вселенная чисел» с научной точки зрения? Что там можно наблюдать? И вообще, как можно изучать натуральный ряд чисел? Не пытаемся ли мы подменить «Вселенной чисел» уже давно существующий раздел математики – теорию чисел?

Автор - по образованию геометр и мы постараемся подойти к понятию «Вселенная чисел», используя геометрические методы. Можно представить, что натуральный ряд чисел – это ось абсцисс, т. е. одно измерение, а каждое натуральное число – это некая числовая функция. Второе измерение – некая ось ординат – пока свёрнуто каким-то образом (Рис. 1).

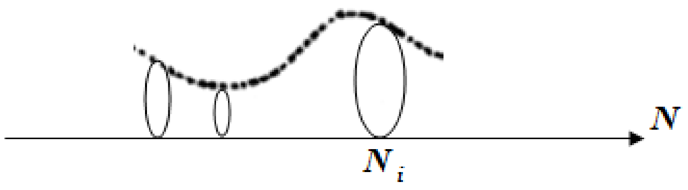

Рис. 1

Как же можно представить число в виде числовой функции. Конечно же, это можно сделать различными способами, надо только определить некий алгоритм, в результате действия которого из одного натурального числа можно получить другое натуральное число (мы же изучаем только натуральный ряд чисел). Обозначим числовую функцию числа $\boldsymbol{n}$ через $\boldsymbol{\partial n}$ и назовём её *производным числом* от числа $\boldsymbol{n}$. Число $\boldsymbol{\partial n}$ – это сумма всех делителей числа n, которые меньше самого числа n. Таким образом:

$$\boldsymbol{\partial n = 1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_k}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{d_i < n}$.

Из этого определения очевидно, что для любого числа $\boldsymbol{n}$ натурального ряда существует число $\boldsymbol{k = \partial n}$. Исключением буде являться только число **1**, поэтому мы примем исключение: $\boldsymbol{\partial 1 = 1}$.

Если число n можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел $\boldsymbol{n = k \cdot m}$, то

$$\boldsymbol{\partial n = \partial(k \cdot m) = k \cdot \partial m + m \cdot \partial k + \partial k \cdot \partial m} \qquad (2)$$

Не правда ли, формула (2) очень напоминает правило дифференцирования функции (см., например, [6]), которая представлена в виде произведения двух функций, только без последнего слагаемого (в мат. анализе бесконечно малые второго порядка в вычислениях не участвуют). Только надо помнить, что $\boldsymbol{(k,m) = 1}$, т. е. взаимнопросты. Формула (2) и позволило нам число $\boldsymbol{k = \partial n}$ назвать производным числом. Продолжая аналогию, число $\boldsymbol{n}$ назовём *первообразным числом* для числа $\boldsymbol{k}$. Можно ввести и соответственное обозначение: $\boldsymbol{n = \int \partial n = \int k}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{\partial P = 1}$, где $\boldsymbol{P}$ – простое число. Продолжая наше рассуждение, отмечаем, что и число $\boldsymbol{k}$ будет иметь своё производное число. И т. д.. Т. е., можем записать: $\boldsymbol{\partial n = k,\ \partial^2 n = \partial k = k_1,\ \ldots,\ \partial k_m = 1}$. Введём обозначение: выражение $\boldsymbol{\partial n = k}$ будем ещё обозначать как $\boldsymbol{n \Rightarrow k}$, тогда всю последовательность действий, нахождения производных чисел можно представить таким образом:

$$\boldsymbol{n \Rightarrow k \Rightarrow k_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow k_m \Rightarrow 1} \qquad (3)$$

Выражение (3) будем называть *цепочкой производных чисел*. Теперь можем приступить к исследованию натурального ряда, двигаясь от единицы к беконечности и, ставя в соответствие каждому числу его цепочку производных чисел. Однако, начав такое исследование, мы тут же столкнулись с таким вопросом. Дойдя до числа **12**, мы вычислили его производное число, которое оказалось равно 16-ти, но до числа **16** мы ещё не дошли по натуральному ряду. Числа, которые впервые появляются только в натуральном ряду будем называть *собственными*, а числа, которые впервые появились в цепочках производных – *несобственными*.

Теперь мы можем заглянуть в начало нашей «Вселенной чисел». Для удобства числа будем заключать в прямоугольную рамочку и фон рамки раскрашивать в жёлтый цвет в том случае если число появляется впервые и в голубой цвет, если число уже появлялось в наших вычислениях. Т. о., в натуральном ряде чисел все жёлтые ячейки числа будут собственными, а голубые – несобственными (Рис. 2).

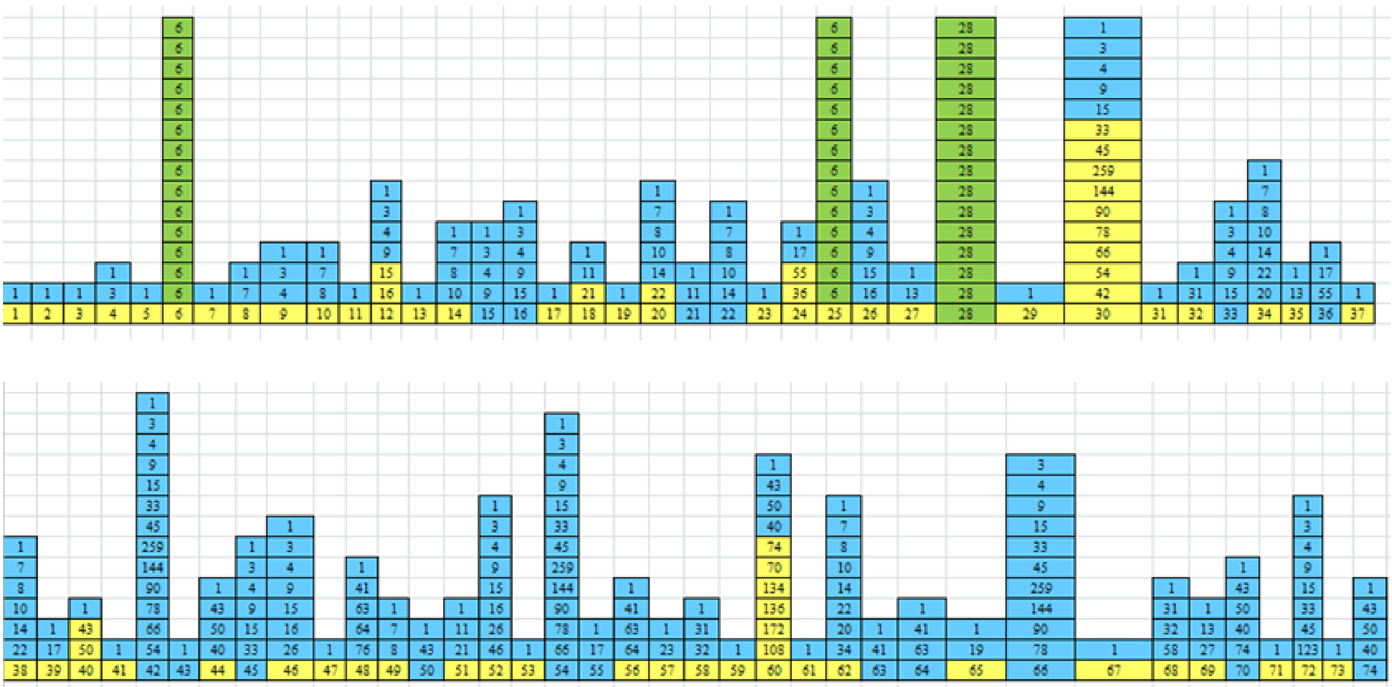

Рис. 2

Собственные числа – это те, которые вперые полявились в натуральном ряду естественным путём $(\boldsymbol{n}_{i+1} = \boldsymbol{n}_i + \mathbf{1})$, а числа несобственные, которые впервые появились в цпочках производных.

Зелёным цветом обозначены клетки, в которых стоят *совершенные* числа, т. е числа, для которых $\partial \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$.

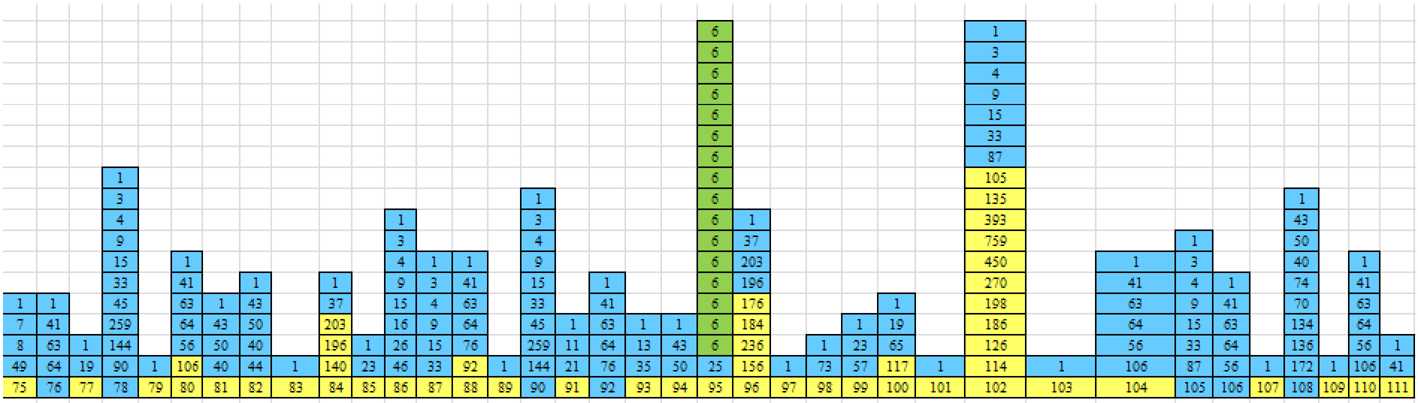

Рис. 3

По сути дела мы развернули числа оси натурального ряда и их производные (Рис. 1) на плоскость и увидели, как «рождается» Вселенная чисел.

Для удобства вычисления *числовых цепочек* производных была написана простенькая программа (ЧЦ). Чем дальше мы двигались по натуральному ряду, тем процесс вычисления производных становился всё более трудоёмким, хотя длина цепочек сильно не увеличивалась, а мы предполагали в начале нашего исследования обратную картину.

Время от времени появлялись небольшие «всплески». Например значения производных чисел числа 120 так быстро росли, что казалось этот процесс не остановится, но уже одиннадцатое производное число закончило бурную цепочку ($\partial^{11}\mathbf{120} = \mathbf{1}$, Рис. 4).

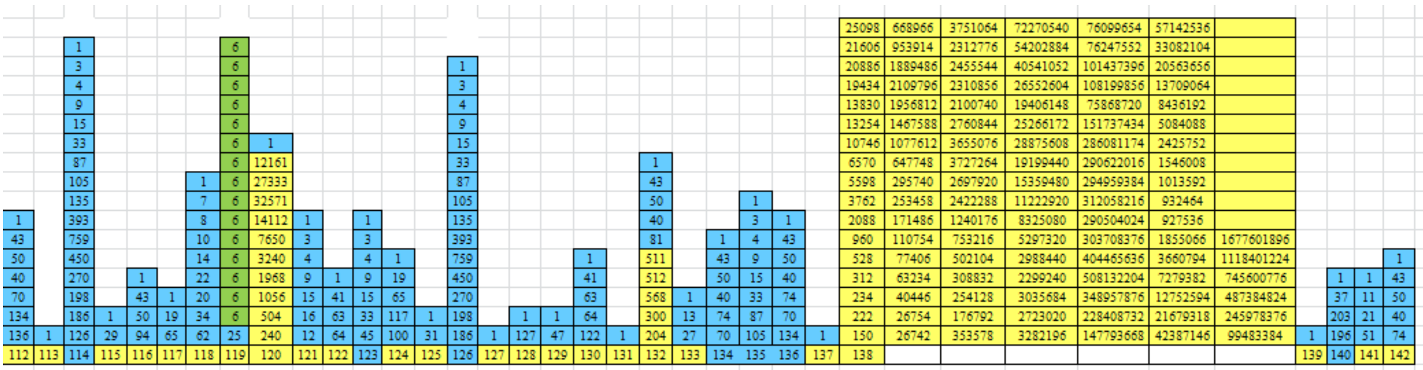

Рис. 4

«Взрыв» натурального ряда случился на числе **138**. Его *генетика* (разложение в произведение по степеням простых чисел в науке называется факторизацией) имеет вид: $\mathbf{138} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{23}$. Программа ЧЦ не смогла вычислить очередное (109 в цепочке) производное число и «свалилась». Мы не стали переделывать программу и ввели понятие *супер числа* (СЧ). Если программа ЧЦ не может вычислить очередную производную некоторого числа, то такое исходное число натурального ряда и будем называть *суперчислом* (Рис. 4).

Возникает вопрос: часто ли в натуральном ряду встречаются СЧ? Как оказалось, на интервале первых 1000 чисел ($\mathbf{966 = 7 \cdot 138}$ из первых **1000** чисел показаны на «спектре», Рис. 12.5) натурального ряда встретилось всего 11 (включая **138**) СЧ. Десять из них имели цепочки, полученные от чисел, кратных числу **138**. На Рис. 5 спектральные линии (цепочки производных) таких чисел показаны красной вертикальной чертой, упирающейся в верхнюю границу картинки спектра (для получения «спектра» была написана отдельная программа, где каждое число изображалось пикселем определённого цвета на жёлтом фоне).

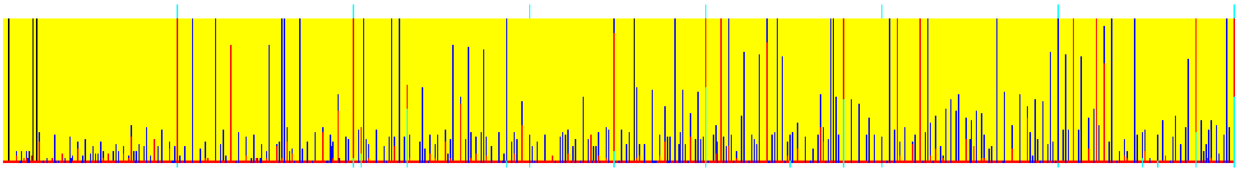

Рис. 5

Понятно, что для дальнейшего изучения Вселенной чисел без мощного компьютера не обойтись. Надо создавать новые программы для вычисления производных больших чисел.

Для дополнительного понимания, что такое «спектр» натурального ряда, покажем кусочек такого спектра для интервала [1–16], где каждый кружок (число) соответствует компьтерному пикселю Рис. 6.

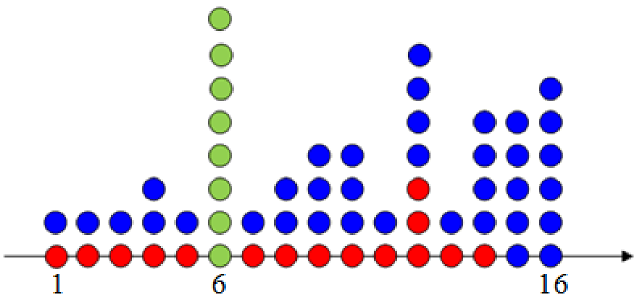

Рис. 6

Теперь мы попробуем взглянуть на нашу Вселенную ещё с одной стороны. Будем рассматривать Вселенную чисел в координатах ($\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{\partial N}$)

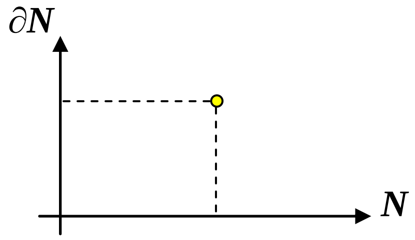

Рис. 7

Используя помощь компьютера, получаем такую картину (Рис. 8):

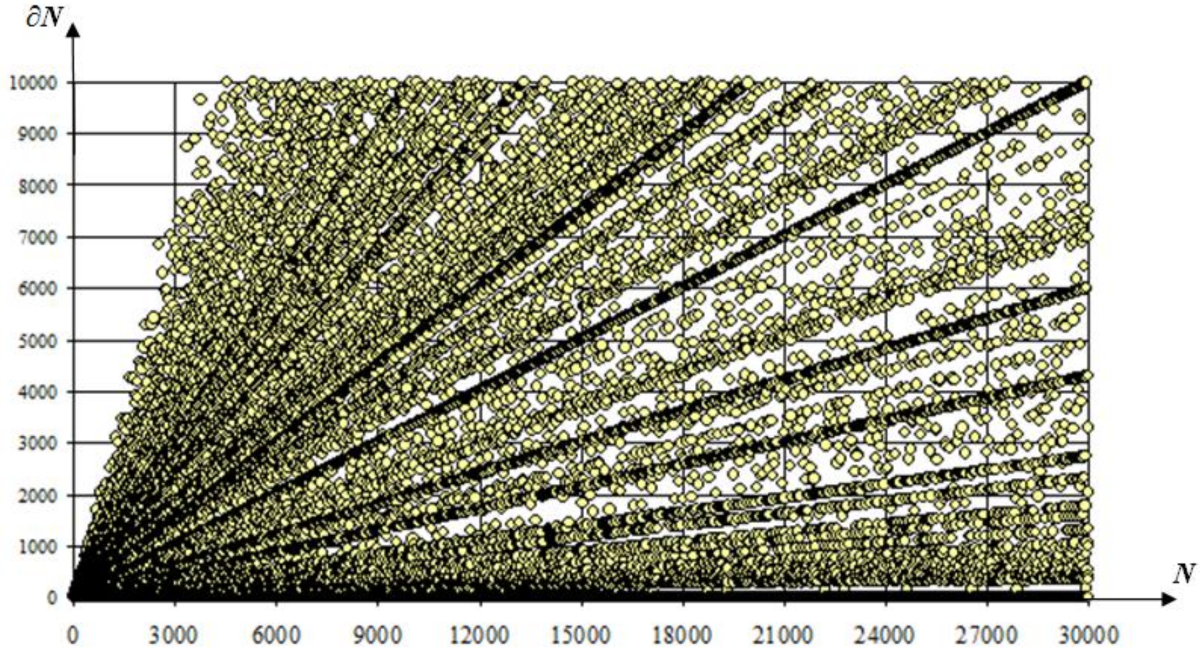

Рис. 8

Увиденная координатная картина Вселенной чисел была полной неожиданностью. Вселенная чисел как будто взрывалась. Более того, на фоне ожидаемого хаоса жёлтых кружков (положения производного числа в координатах $\boldsymbol{N}$**,** $\boldsymbol{\partial N}$) чётко выделялись тёмные прямые. Некоторые жёлтые кружки так плотно прилегали друг к другу, что казалось образовывали собой чёрные прямые линии. Очевидно, что чёрная жирная прямая на оси абсцисс ($\boldsymbol{N}$) соответствовала выражению: $\boldsymbol{\partial P_i = 1}$, т. е. производное число от простого числа всегда равно единице. Но о чём говорят другие чёрные прямые, которые выходят из начала координат? Решено было взглянуть на картину «числового взрыва» поближе к началу координат (Рис. 9).

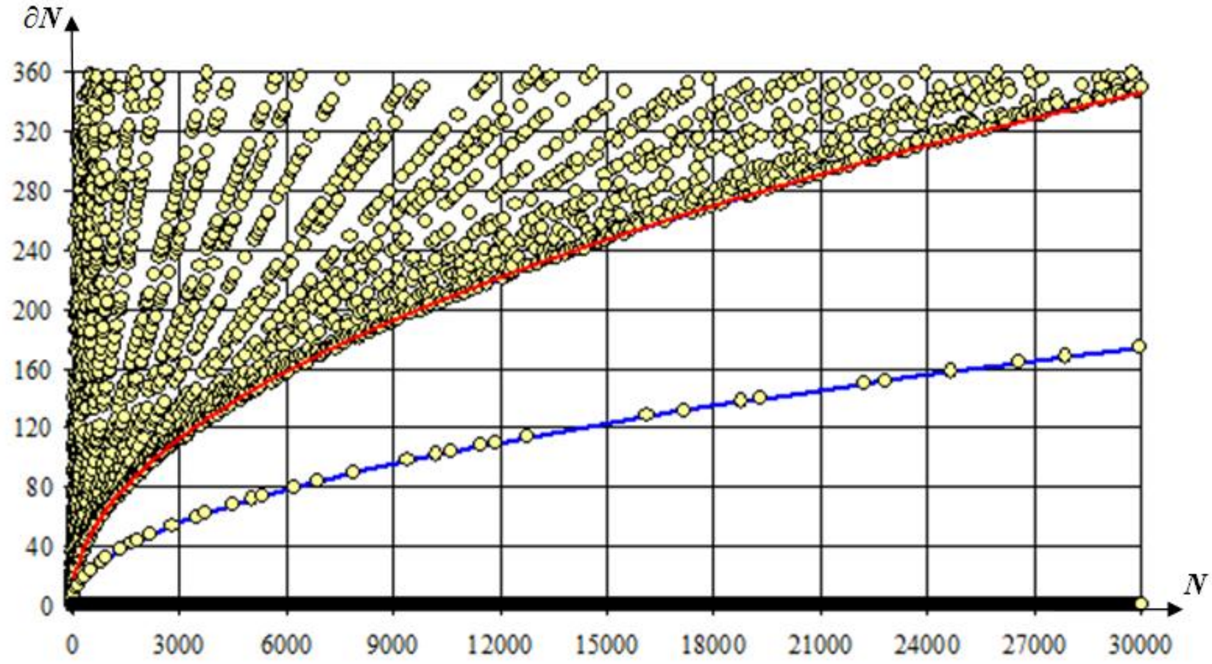

Рис. 9

То что мы видим а Рис. 9 оказалось не менее фантастичным, чем картина Вселенной чисел на Рис. 8. Очень немного жёлтых кружков находились обособленно («висели» в числовом вакууме). Если на систему ($\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{\partial N}$) наложить привычную нам декартову систему координат ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$), то обособленные точки будут точно лежать на кривой $\boldsymbol{Y = \sqrt{X} + 1}$ (синяя кривая на Рис. 9). Это объясняется тем, что для чисел $\boldsymbol{N = n^2}$ числовая производная равна: $\boldsymbol{\partial N = n + 1 = \sqrt{N} + 1}$. Вторая кривая (красная линия на Рис. 9) имеет уравнение $\boldsymbol{Y = 2 \cdot \sqrt{X} + 1}$. Впечатление такое, что каждое производное число лежит на некой прямой, которая является касательной линией к кривой $\boldsymbol{Y = 2 \cdot \sqrt{X} + 1}$.

Производная этой функции имеет выражение: $\boldsymbol{\partial_x Y = \frac{1}{\sqrt{X}}}$. А уравнение касательной прямой, проходящей через конкретную точку ($\boldsymbol{x_0, y_0}$), будет иметь выражение: $\boldsymbol{Y - y_0 = \partial_x(x_0) \cdot (X - x_0)}$ [6].

Определим касательную прямую в точке $\boldsymbol{x_0 = 4,\ y_0 = 5}$. Подставляя эти значения в уравнение касательной, получаем: $\boldsymbol{Y = \frac{1}{2} X + 3}$.

В координатах (N, ∂N) существует подобная прямая: $\partial N = \frac{1}{2}N + 3$ (Рис. 10).

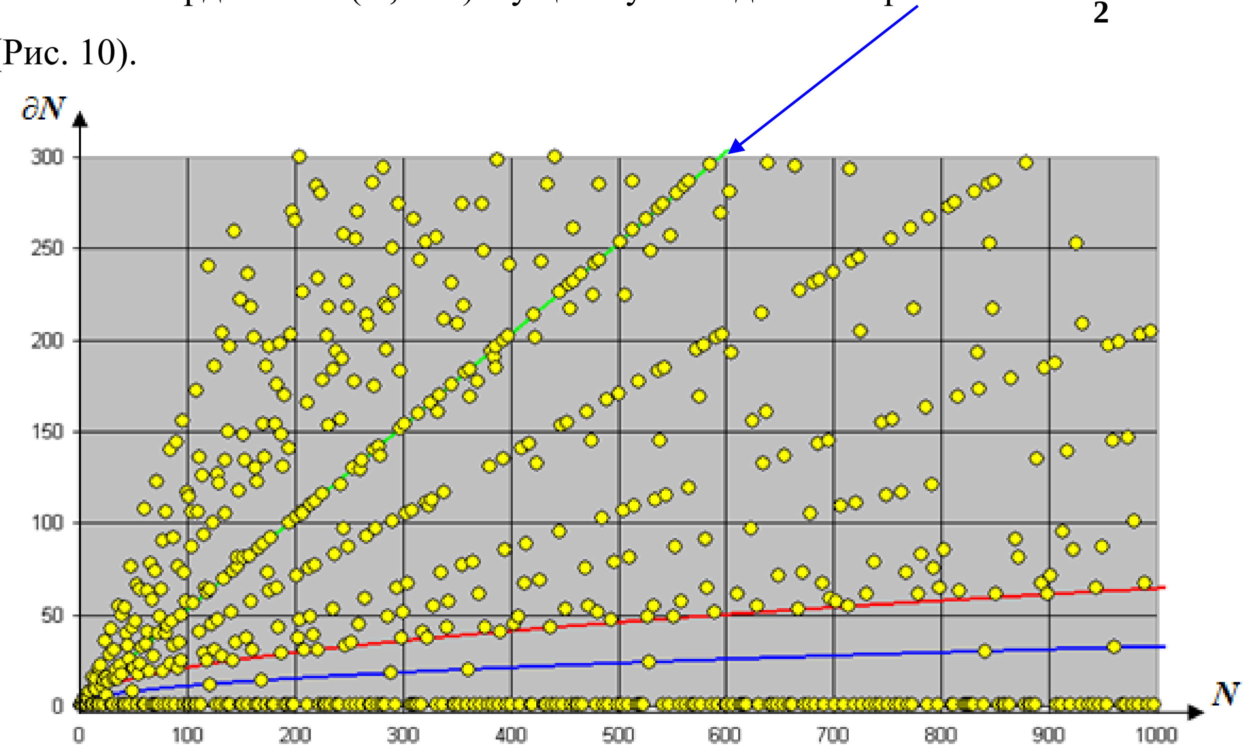

Рис. 10

Для точке $x_0 = 9,\ y_0 = 7$ получаем новую касательную к кривой в этой точке: $Y = \frac{1}{3}X + 4$.

Аналогичная прямая есть и в координатах (N, ∂N): $\partial N = \frac{1}{3}N + 4$ (см. Рис. 11).

Анализируя диаграмму Рис. 9, можно сделать заключение, что каждое число (жёлтый кржок) принадлежит какой-то прямой $\partial N = \frac{1}{P}N + m$ (или нескольким прямым одновременно) - касательной к кривой $Y = 2 \cdot \sqrt{X} + 1$, а чёрные прямые Рис. 8 – это точки прямых $\partial N = \frac{1}{P_k}N + P_k + 1$, где P_k - простое число.

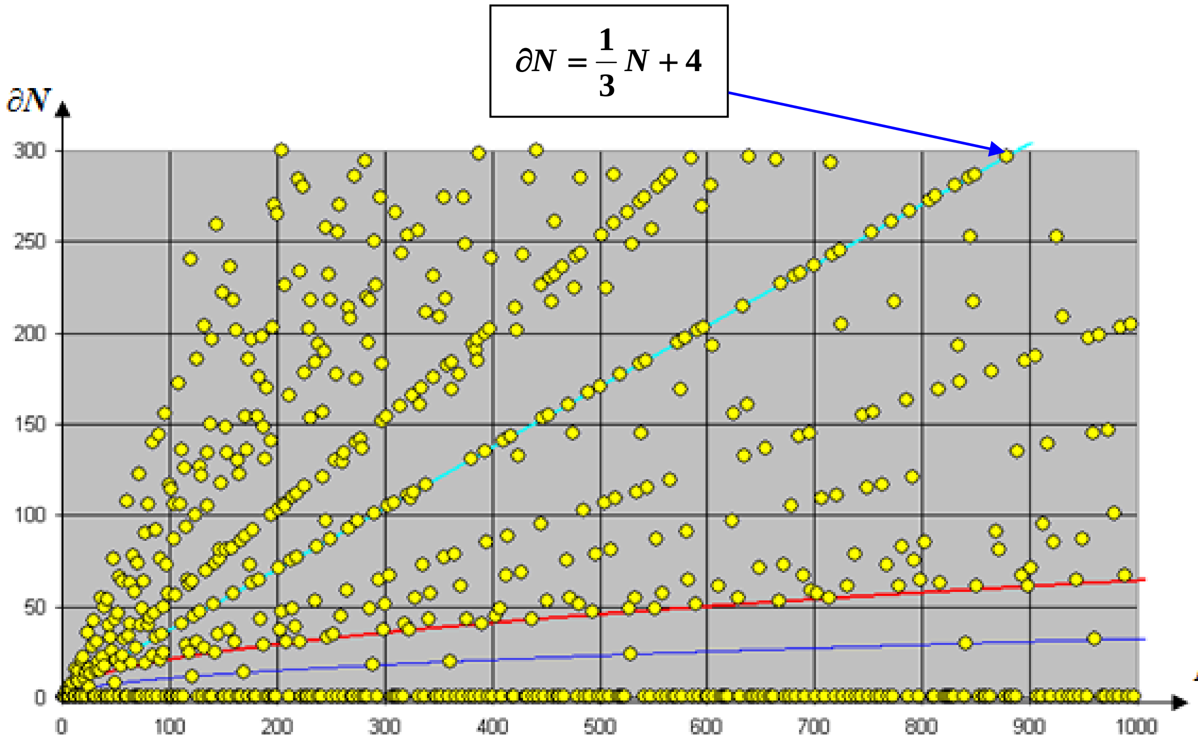

Рис. 11

По сути дела, кривая $Y = 2 \cdot \sqrt{X} + 1$ - это огибающая прямых $Y - y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot (X - x_0)$.

Заметим, что первое *совершенное число* при $N = 6$ является общей точкой для прямых $\partial N = \frac{1}{2}N + 3$ и $\partial N = \frac{1}{3}N + 4$.

Наука которая изучает законы числовой Вселенной названа нами *дифференциальной теорией чисел* и ждёт своих Ньютонов, Лобачевских, Коперников и Эйнштейнов.

Вся работа передана в РАН