

# Четыре

(математическое эссе о **четвёрках**)

Многое начинается с единицы. Число 2 – основа всех чётных чисел. Число 3 пользуется особой популярностью у Человечества. Но особо хочется отметить число **4**. Очень много фундаментальных «**четвёрок**» присутствует в нашей жизни и жизни Мироздания. Вот об этих примерах мы и поговорим.

Начнём с того, что наше Пространство-Время имеет **четыре** измерения (три пространственных и одно временное).

Существует «**четыре** основных типа» галактик ([28], стр. 85). Спиральные, линзообразные, эллиптические и неправильные.

Существует **четыре** свойства для определения аксиом геометрии ([33], стр. 50).

Сердце человека – **четырёхкамерный** орган.

Между двумя любыми системами существуют **четыре** закона соответствия и симметрии ([22], стр. 91).

В мире существует только **четыре** взаимодействия (Гравитационное, сильное, слабое и электромагнитное. Сегодняшняя наука практически доказала, что последние три можно объединить. Опять - три плюс один).

В механике существует **четыре** основных закона сохранения: закон сохранения энергии, закон сохранения обобщённого импульса, закон сохранения количества движения и закон сохранения кинетического момента ([36], стр. 156-159).

«...в слабых взаимодействиях участвуют всегда **четыре** фермиона» ([29], стр. 101):

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}$$

**Четыре** эпохи ядерного горения в звёздах ([3], стр. 33-35). Благодаря этой четвёрке существуют элементы таблицы Менделеева.

Существует **четыре** вида взаимодействия нейтронов с ядрами ([2], стр. 95-96).

Есть только **четыре** квантовых числа (главное, два внутренних и спиновое).

Сегодня известно **четыре** стабильных частицы (протон, электрон, фотон и нейтрино ([27], стр. 18), а все остальные частицы и античастицы в нашем мире нестабильны).

**Четыре** частицы переносчики электрослабого взаимодействия бозоны:  $\gamma, W^{+}, W^{-}, Z^{0}$  ([26], стр. 34-35).

Существует только **четыре** спиновых волновых функции для атома гелия ([25], стр. 306).

Существуют **четыре** матрицы Дирака  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  играющие определяющую роль для уравнения Дирака ([31], стр. 152).

Существует **четыре** свойства идеального газа ([35], стр. 22-23).

Существует **четыре** степени свободы движения молекулы: поступательные, вращательные, колебательные и электронные ([35], стр. 366).

Существует **четыре** типа супермультиплетов ([12], стр. 237), в которые собраны элементарные частицы. В супермультиплетах первого типа собраны мезоны и антимезоны со спином равным нулю, а также барионы с полуцелым спином. Супермультиплет второго типа содержит десять частиц со спином равным три вторых. И есть два типа по одному супермультиплету в каждом из кварков и антикварков ([11], стр. 152-156).

Существуют **четыре** правила симметрии реальных физических явлений ([13], стр. 53-56). Это правило *масштаба*, правило *правой (левой) руки*, правило *буравчика* и правило *гироскопа*.

Существует **четыре** преобразования ([20], стр. 190), оставляющие инвариантными дифференциальные уравнения:

1. Параллельный перенос.
2. Пространственные вращения.
3. Принцип относительности Эйнштейна (преобразования Лоренца).
4. Преобразование инверсии (в частности, зеркальное отражение).

Существует **четыре** вида движений плоскости: перенос, поворот, отражение и скользящее отражение ([21], стр. 62).

Электродинамика Максвелла – самая фундаментальная теория теоретической физики – имеет **четыре** уравнения ([9], стр. 196):

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho.$$

Существует **четыре** состояния вещества (твёрдое, жидкое, газообразное и плазменное).

По теории *Большого Взрыва* все основные свойства Мироздания были заложены в первые мгновения его существования. Это время характерно только **четырьмя** типами ядерных реакций ([4], стр. 601):

$$H_4 + n \rightarrow D^2 + \gamma, \quad D^2 + D^2 \rightarrow \begin{cases} H^3 + n \\ T^3 + p \end{cases}, \quad H^3 + n \rightarrow T^3 + p, \quad T^3 + D^2 \rightarrow He^4 + n.$$

Согласно Г. Вейлю ([23], стр. 378) «... мегафизику представляют величины  $H, p, G, c$ , а микрофизику –  $m, e, \hbar, c$ » по **четыре** величины с каждой стороны. Здесь  $H$  – постоянная Хаббла,  $p$  – плотность вещества во

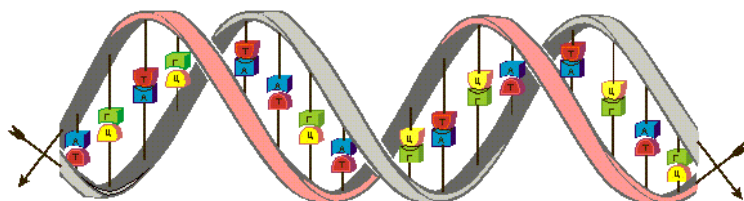
Вселенной,  $G$  – гравитационная постоянная Ньютона,  $c$  – скорость света,  $m$  и  $e$  – масса и заряд электрона,  $\hbar$  – постоянная планка

Существует **четыре** теоремы, определяющие дорелятивистское понятие массы ([17], стр. 162-170).

Существует **четыре** типа особых точек: узел, седло, фокус, центр ([34], стр. 10).

Существует **четыре** фактора эволюции – это наследственная изменчивость, борьба за существование, естественный отбор и изоляция.

**Четыре** белка лежат в основе ДНК всех живых организмов на Земле.



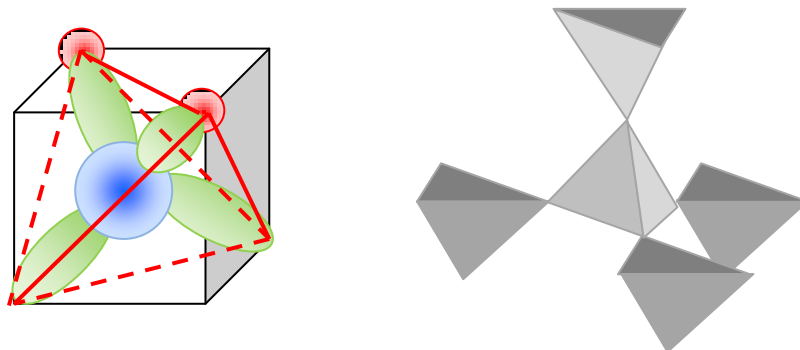
А белки эти, в свою очередь, состоят из молекул только **четырёх** элементов (углерода, кислорода, азота и водорода) ([11], стр. 66). Т. е. получаем *встроенную четвёртку в четвёрке*.

Существует **четыре** типа памяти: двигательная, эмоциональная, образная и смысловая ([32], стр. 27).

Согласно следствия из принципа системного морфогенеза существует **четыре** главных биополимера: белки, нуклеиновые кислоты, полисахариды, липиды ([22], стр. 141).

Напомним, что мы рассматриваем только фундаментальные **четвёрки**.

Молекулу воды можно представить в виде тетраэдра, по углам которого размещаются **четыре** заряда ([30], стр. 77-78). Кроме того каждая молекула воды может присоединить к себе только **четыре** соседних молекулы ([11], стр. 58).

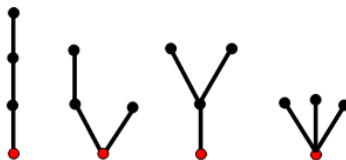


Заглянем в «чистую» математику. Простейший полиэдр (тетраэдр) имеет **четыре** грани и **четыре** вершины.

Академик П. С. Александров пишет, что «... понятия *числа, множества, функции и группы* являются теми **четырьмя** краеугольными

камнями, на которых зиждется всё здание современной математики и к которым сводится всякое другое математическое понятие» [24].

В теории графов существуют **четыре** корневые дерева с **четырьмя** вершинами ([18], стр. 219).



Существует **четыре** теоремы, характеризующие обходы графов ([18], стр. 83-87).

Действия с графами определяются **четырьмя** бинарными операциями ([18], стр. 37): (объединением, соединением, произведением и композицией).

На множестве определены **четыре** операции ([1], стр. 130) ( $\cup$ -объединение,  $\cap$ -пересечение,  $\setminus$ -вычитание (дополнение) и  $\Delta$ -симметрическая разность).

Мы рассказали о встроенной **четвёрке** ДНК, а есть **четвёрка**, порождающая **четвёрку**. Всякий кватернион - это **четвёрка** слагаемых, три из которых мнимые и одно слагаемое - действительное. Известна формула матричного представления кватерниона ([14], стр. 40).

$$A = aI + bi + cj + dk = \begin{pmatrix} a + id & -c + ib \\ c + ib & a - id \end{pmatrix},$$

где матрица  $A$  второго порядка составлена из **четырёх** комплексных чисел.

Известно ([9], стр. 99), что спинор второго ранга задаётся именно совокупностью **четырёх** комплексных чисел. Т. о., получается, что **четвёрка** кватерниона порождает **четвёрку** спинора второго ранга.

Продолжая разговор о спинорах, отметим, что спинор «имеет» всю **четвёрку** информации для описания вида ночного неба в астрономии ([15], стр. 419-420). Это 1- расстояние во времени, 2- расстояние в пространстве, 3- направление в пространстве и 4- вращение вокруг этого направления.

Не вдаваясь в физические подробности и математические тонкости, можно отметить, что характер сингулярности по Хокингу имеет лоренцеву метрику удовлетворяющую **четырёх** специальным условиям ([16], стр. 317).

Натуральный ряд чисел ( $N$ ) распадается на **четыре** непересекающихся множества (три содержат нечётные числа и одно - чётные).

С числа **4** начинается разложение ряда  $N$  в цепочки производных чисел:

$$4 = \partial 4 + \partial^2 4, \text{ где } \partial 4 = 3, \partial^2 4 = 1.$$

Число **4** – первое составное число в  $N$ .

Простейшая квадратичная форма  $a^2 + b^2 = c^2$  имеет **четыре** геометрических представления (три теоремы связаны с окружностями и одна с прямоугольными треугольниками, знакомая нам со школьной скамьи, как теорема Пифагора).

Простейший и единственный инвариант сложного отношения в проективной геометрии, с которой начинаются все остальные геометрии, строится по **четырёх** точкам прямой.

Проективная система координат на плоскости задаётся **четырьмя** точками.

**Четыре** точки проективного пространства, лежащие в одной плоскости, образуют уравнение Плюккера для пучка проективных прямых ([7], стр. 26):

$$p_{12} \cdot p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23} = 0$$

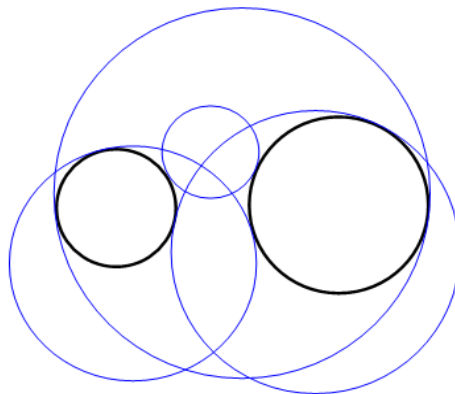
Существуют только **четыре** простейших правильных пространственных решётки.

Существует **четыре** аксиомы инцидентности ([37], стр. 25)

В основе одной из самых фундаментальных математических теорий – теории групп – лежит всего **четыре** аксиомы.

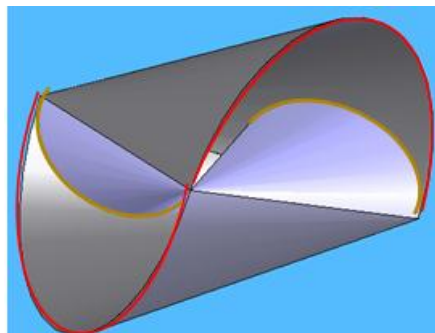
Группа **четвёртого** порядка является первой группой, с которой начинается деление групп на циклические и не циклические.

Существует только **четыре** типа касательных окружностей проведённых к двум данным непересекающимся окружностям.



Именно благодаря этой **четвёрке** строится вся теория кривых и поверхностей второго порядка ([6], стр. 1).

Знакомый всем нам лист Мёбиуса (топологи очень любят этот объект) является частью односторонней поверхности, которая представляет из себя комбинацию **четырёх** конических поверхностей плавно замыкающих друг друга ([1], стр. 218).



Существует только **четыре** простейших замкнутых двумерных многообразия (сфера, тор, бутылка Клейна и проективная плоскость, многообразие – это обобщение понятия поверхность).

Для понятия расстояния в метрическом пространстве  $R^3$  справедливы **четыре** определяющих свойства ([5], стр. 12).

Понятие кратчайшего расстояния на графе определяется **четырьмя** аксиомами ([19], стр. 34).

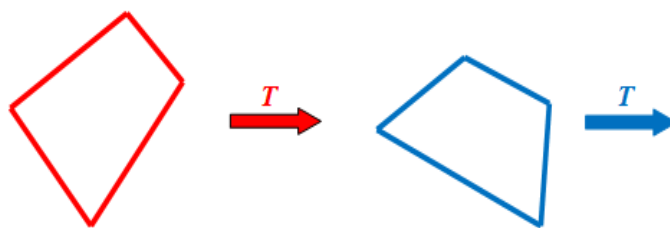
Для любой карты на плоскости (сфере) достаточно **четырёх** красок, чтобы раскрасить страны в различные (не соприкасающиеся по границе) цвета (проблема **четырёх** красок [8]).

Максимальным произвольным  $n$ -угольником, которым можно замостить плоскость является произвольный **четырёхугольник**. Т. е., какой бы четырёхугольник мы не взяли (не обязательно выпуклый), его можно использовать в качестве плитки для замощения плоскости.

В планиметрии существует теорема ( $T$ ) «О произвольном **четырёхугольнике**» ([10], стр. 114):

*Если дан произвольный четырёхугольник  $A_1A_2A_3A_4$ , то для любой фиксированной вершины  $A_k$  точки  $X_i \equiv A_iA_j \cap a_k$  лежат на одной прямой  $b_k$ , где  $A_k \in a_k$ ,  $a_k \perp A_iA_j$  и  $i, j \neq k$ .*

Очевидно, что в силу теоремы  $T$  для каждой вершины  $A_i$  данного **четырёхугольника**, соответственно получаем прямую  $b_i$ . А **четыре** прямые  $b_i$  определяют новый **четырёхугольник**  $B_1B_2B_3B_4$ . Т. е. **четырёхугольник** порождает **четырёхугольник**.



До сих пор мы говорили о «знаменитых» **четвёрках**. Однако число «**четыре**» может выступать и в качестве особенных исключений.

Не существует одиночной **KD**-конфигурации **четвёртого** порядка (они появляются в результате распада более сложных конфигураций ([1], стр. 8)). Есть **KD**-конфигурация третьего порядка. Есть – пятого и больше, а **четвёртого** не существует.

Также не существует самостоятельного циклического изоморфизма **четвёртого** порядка в теории групп ([6], стр. 105). Токой изомрфизм возможен в группе, как минимум 10-го порядка, и он там не единственный и не самостоятельный.

На этом остановимся, но список фундаментальных **четвёрок** не закрыт. А может быть замахнёмся и на фундаментальные пятёрки? Дерзайте!

## Литература

1. Ф. Герман, « $RP^2$  - Проективная плоскость», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
2. У. И. Франкфурт, А. М. Френк, «Физика наших дней», М., «Наука», 1971
3. Я. М. Крамаровский, В. П. Чечев, «Синтез элементов во Вселенной», М., «Наука», 1987
4. Дж. Б. Мэрион, «Физика и физический мир», М., «Мир», 1975
5. Ю. Г. Борисович и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980
6. Ф. Герман, «Закоулки и перекрёстки математики», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
7. С. П. Фиников., «Проективно-дифференциальная геометрия», М., «URSS», 2006
8. Г. Рингель, «Теорема о раскраске карт», М., «Мир», 1977
9. И. С. Желудев, «Симметрия и её приложения», М., «Энергоатомиздат», 1983
10. Ф. Герман, «Поэзия разума», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
11. Л. Тарасов, «Этот удивительно симметричный мир», М., «Просвещение», 1982
12. Е. Вигнер, «Этюды о симметрии», М., «Мир», 1971
13. И. С. Желудев, «Физика кристаллов и симметрия», М., «Наука», 1987

14. Р. Пенроуз, В. Риндлер, «Спиноры и пространство-время», М., «Наука», 1987
15. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, «Гравитация. Т. 3», М., «Мир», 1977
16. С. Хокинг, Дж. Эллис, «Крупномасштабная структура пространства-времени», М., «Мир», 1977
17. М. Джеммер, «Понятие массы в классической и современной физике», М., «Прогресс», 1967
18. Ф. Харари, «Теория графов», М., «Мир», 1973
19. В. А. Емеличев и др., «Лекции по теории графов», М., «Наука», 1990
20. Я. М. Гельфер, «Законы сохранения», М., «Наука», 1967
21. С. В. Дужин, Б. Д. Чеботаревский, «От орнаментов до дифференциальных уравнений», Минск, «Высшая школа», 1988
22. «Система. Симметрия. Гармония», М., «Мысль», 1988
23. Г. Вейль, «Математическое мышление», М., «Наука», 1989
24. П. С. Александров, «Введение в теорию групп», М., «Учпедгиз», 1939
25. Д. В. Сивухин, «Атомная и ядерная физика, Том 5», М., «МФТИ», 2002
26. И. А. Савин, «Семь путешествий в микромир», М., «Наука», 1986
27. Л. Б. Окунь, «Физика элементарных частиц», М. «Наука», 1988
28. И. Д. Новиков, «Чёрные дыры и Вселенная», М., «Молодая гвардия», 1985
29. В. И. Кувшинов, В. И. Стражев, «От научной гипотезы к физическому факту», Минск, «Наука и техника», 1977
30. В. В. Синюков, «Вода известная и неизвестная», М., «Знание», 1987
31. Ю. С. Владимиров, «Метафизика», М., «БИНОМ», 2002.
32. С. М. Иванов, «Отпечаток перстня», М., «Знание», 1973
33. В. В. Никулин, И. Р. Шафаревич, «Геометрии и группы», М., «Наука», 1983
34. А. Л. Санин, «Структуры и хаос – проблемы физики», Ленинград, «Знание», 1985
35. Я. В. Радужкевич, «Курс статистической физики», М., «Просвещение», 1966
36. В. В. Добронравов, «Основы аналитической механики», М., «Высшая школа», 1976
37. И. П. Егоров, «Геометрия», М., «Просвещение», 1979

**Франц Герман**

051225