Уникальные группы

Конечные группы образуют любопытный ряд количества различных групп в зависимости от порядкого номера n группы. Число групп будем обозначать такой функцией: $Q(n)$. Например для групп 8-го порядка будем иметь $Q(8)=5$, т. е. различных групп восьмого порядка существует всего пять штук. Когда-то задачей математиков был поиск количества групп того или иного порядка. Известно, что $Q(p)=1$, где p – простое число. Менее известно, что $Q(2p)=2$. Возможно, последнее выражение является пока только гипотезой (нам не известно доказательство этого выражения – Ф. Г.).

Однако, существует множество групп, для которых $Q(n)=1$ и при этом n – не простое число. Первой группой в этом ряду является группа 15-го порядка, т. е. $Q(15)=1$. Как уже было сказано, если порядок группы – простое число, то количество групп этого порядка всегда равно 1. Но число 15 составное. Почему группа 15-го порядка единственна? Возьмём например группу 21-го порядка. Её порядок также, как и у группы 15-го порядка, есть произведение двух простых чисел. Однако группа 15-го порядка *уникальна* (*не простые группы, число которых равно* **1**, *будем называть* ***уникальными***), а групп 21-го порядка две. Возможно, на этот вопрос и нет ответа и этот феномен надо принять, как закон или гипотезу. Как закон Паули: не могут два одинаковых электрона находиться на одной орбитали и всё. Закон. Так и для наших групп. Группа 15-го порядка уникальна, а групп 21-го порядка две. Это закон. Но попробуем всё-таки в этом разобраться. Может быть нам удастся найти в этом вопосе некоторую закономерность.

Группу порядка n будем обозначать, как $G(n)$. Очевидно, что группу 15-го порядка можно представить, как прямое произведение простых групп третьего и пятого порядков: $G(15)=G(3)\otimes G(5)$. Таблицы Кэли этих групп известны (таблицы Кэли показаны на Рис. 1). Все элементы, кроме нейтрального, у этих групп должны быть различны.

	a_0	a_1	a_2
a_0	a_0	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_0
a_2	a_2	a_0	a_1

	a_0	a_3	a_4	a_5	a_6
a_0	a_0	a_3	a_4	a_5	a_6
a_3	a_3	a_4	a_5	a_6	a_0
a_4	a_4	a_5	a_6	a_0	a_3
a_5	a_5	a_6	a_0	a_3	a_4
a_6	a_6	a_0	a_3	a_4	a_5

Рис. 1

После прямого произведения получаем такую таблицу Кэли для группы 15-го порядка. Сразу бросается в глаза любопытная структура этой таблицы (одинаковые квадраты мы выделии одинаковым цветом, Рис. 2).

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_1	a_1	a_2	a_0	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_0	a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_3	a_3	a_7	a_{11}	a_4	a_5	a_6	a_0	a_8	a_9	a_{10}	a_1	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_2
a_4	a_4	a_8	a_{12}	a_5	a_6	a_0	a_3	a_9	a_{10}	a_1	a_7	a_{13}	a_{14}	a_2	a_{11}
a_5	a_5	a_9	a_{13}	a_6	a_0	a_3	a_4	a_{10}	a_1	a_7	a_8	a_{14}	a_2	a_{11}	a_{12}
a_6	a_6	a_{10}	a_{14}	a_0	a_3	a_4	a_5	a_1	a_7	a_8	a_9	a_2	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_7	a_7	a_{11}	a_3	a_8	a_9	a_{10}	a_1	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_2	a_4	a_5	a_6	a_0
a_8	a_8	a_{12}	a_4	a_9	a_{10}	a_1	a_7	a_{13}	a_{14}	a_2	a_{11}	a_5	a_6	a_0	a_3
a_9	a_9	a_{13}	a_5	a_{10}	a_1	a_7	a_8	a_{14}	a_2	a_{11}	a_{12}	a_6	a_0	a_3	a_4
a_{10}	a_{10}	a_{14}	a_6	a_1	a_7	a_8	a_9	a_2	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_0	a_3	a_4	a_5
a_{11}	a_{11}	a_3	a_7	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_2	a_4	a_5	a_6	a_0	a_8	a_9	a_{10}	a_1
a_{12}	a_{12}	a_4	a_8	a_{13}	a_{14}	a_2	a_{11}	a_5	a_6	a_0	a_3	a_9	a_{10}	a_1	a_7
a_{13}	a_{13}	a_5	a_9	a_{14}	a_2	a_{11}	a_{12}	a_6	a_0	a_3	a_4	a_{10}	a_1	a_7	a_8
a_{14}	a_{14}	a_6	a_{10}	a_2	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_0	a_3	a_4	a_5	a_1	a_7	a_8	a_9

Рис. 2

Начнём исследование этой группы с выяснения, элементы какой степени её составляют. Что такое степень элемента будет понятно из примера. Например, выясним степень элемента a_1. Для этого надо умножать элемент сам на себя столько раз пока в результате не получим нейтральный элемент: $a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 = a_0 = (a_1)^3$. Следовательно степень этого элемента равна 3. Итак, получаем: нейтральный элемент a_0, который в любой группе единственный. Два элемента a_1 и a_2 имеют третью степень, элементы a_3, a_4, a_5 и a_6 имеют пятую степень, а оставшиеся в группе элементы с a_7 по a_{14} имееют пятнадцатую степень. Т. к. группа $G(15)$ образована прямым произведением двух групп, то эти группы и будут подгруппами $G(15)$. Не трудно выяснить, являются ли эти подгруппы *нормальными делителями* (что такое нормальный делитель можно посмотреть, например, в ([1], стр. 30). Для нормального делителя $\boldsymbol{H_0}$ справедлива формула $\boldsymbol{a_i \cdot H_0 = H_0 \cdot a_i}$. Как оказалось, подгруппа $\boldsymbol{G(3)}$ не является нормальным делителем, а вот группа $\boldsymbol{G(5)}$ - это нрмальный делитель для группы $\boldsymbol{G(15)}$ и можно записать $\boldsymbol{G(5) \equiv H_0}$. А это значит, что для этого нормального делителя существует *факто-группа* $\boldsymbol{G(15)/H_0}$ (см., например, [1]). Нулевым элементом для этой факто-группы будет класс $\boldsymbol{H_0 : \{a_0, a_3, a_4, a_5, a_6,\}}$. Т. е. $\boldsymbol{G(15)/H_0 \cong G(3)}$, здесь значок «$\cong$» означает изоморфизм групп. Два других элемента фактор-группы будут иметь вид : $\boldsymbol{H_1 : \{a_1, a_7, a_8, a_9, a_{10},\}}$ и $\boldsymbol{H_2 : \{a_2, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14},\}}$. Групповая операция фактор-группы $\boldsymbol{G(15)/H_0}$ такая же, как и у группы $\boldsymbol{G(15)}$.

Если у нас имеется конечное множество из 15-ти элементов, построенное по некоторому алгоритму, то однозначно сопоставив элементам этого множества элементы группы $\boldsymbol{G(15)}$, можно такое множество объявить группой, т. к. группа $\boldsymbol{G(15)}$ является уникальной. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть дана окружность, разделённая на 6 равных частей. Солькими сполсобами можно построить на этой окружности три хорды, так, чтобы никакие две хорды не имели бы общих конечных точек. На Рис. 3-5 показаны все возможные варианты.

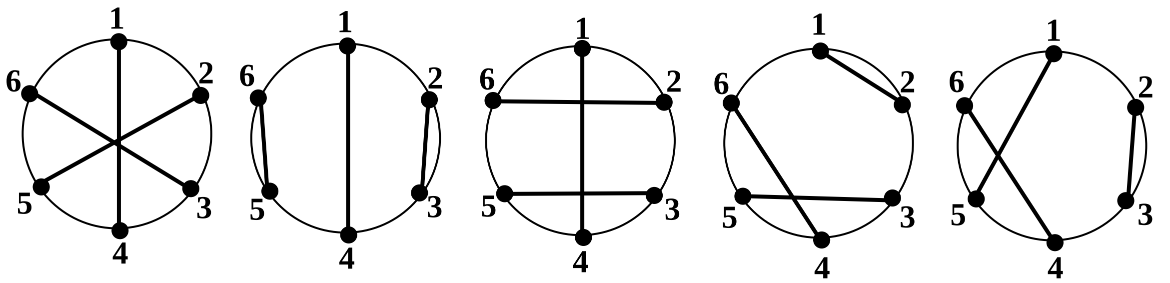

Рис. 3

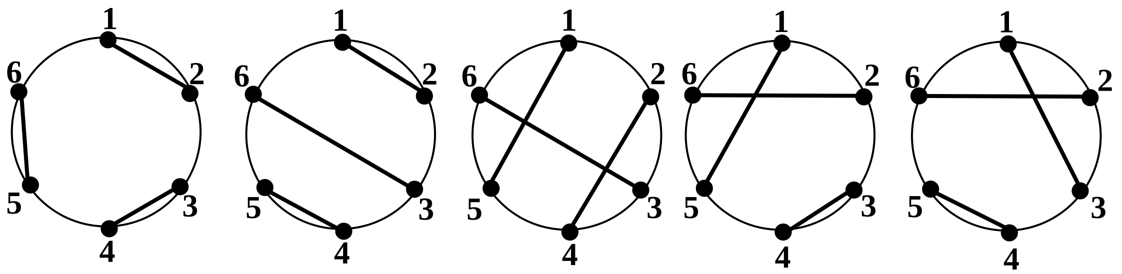

Рис. 4

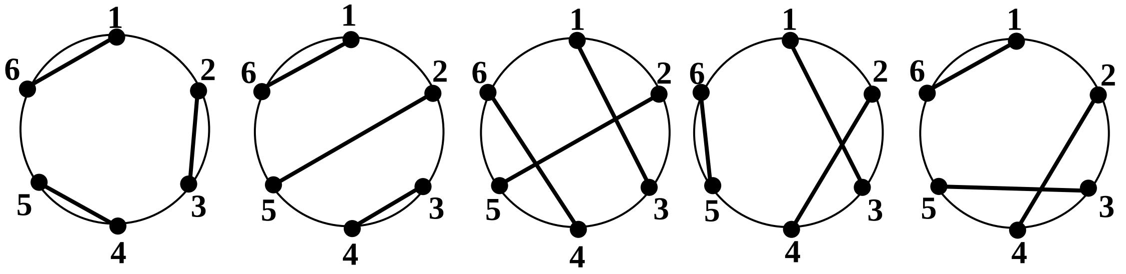

Рис. 5

Действительно, все $\boldsymbol{Q}$ возможные варианты комбинаций хорд здесь представлены. Мы имеем шесть точек, по две точки на хорду. Т. е. получаем: $\boldsymbol{Q = C_6^2 = 15}$. Введём уникальное аналитическое обозначение для каждого случая расположения хорд. Для комбинаций Рис. 3 будем иметь такие обозначения:

$$\mathbf{(14)(25)(36)};\ \mathbf{(14)(23)(56)};\ \mathbf{(14)(26)(35)};\ \mathbf{(12)(35)(46)};\ \mathbf{(15)(23)(46)}.$$

Комбинации хорд Рис. 4 будут иметь такие обозначения:

$$\mathbf{(12)(34)(56)};\ \mathbf{(12)(36)(45)};\ \mathbf{(15)(24)(36)};\ \mathbf{(15)(26)(34)};\ \mathbf{(13)(26)(45)}.$$

Аналогичные обозначения для комбинаций Рис. 5 будут иметь вид:

$$\mathbf{(16)(23)(45)};\ \mathbf{(16)(25)(34)};\ \mathbf{(13)(25)(46)};\ \mathbf{(13)(24)(56)};\ \mathbf{(16)(24)(35)}.$$

Т. о., множество $\boldsymbol{Q}$ имеет 15 элементов, как и множество группы $\boldsymbol{G(15)}$. Если поставить элементы множества $\boldsymbol{Q}$ в однозначное соответствие элементам группы $\boldsymbol{G(15)}$, то можно считать, что мы построили группу конфигураций хорд шестого порядка, где порядок определяется количеством точек на окружности. Но как выбрать правило изоморфизма? По какому алгоритму ставится соответствие элементов наших двух множеств? Вспомним, что множество элементов группы $\boldsymbol{G(15)}$ индуцирует ещё фактор-группу $\boldsymbol{G(15)/H_0}$. В соответствии с фактор-группой всё множество элементов группы разбивается на три класса по пять элементов в каждом классе. Можно, например, классу $\boldsymbol{H_0}$ однозначно сопоставить конфигурации хорд Рис. 3: $\boldsymbol{H_0 \equiv (14)(25)(36)}$; $\boldsymbol{H_3 \equiv (14)(23)(56)}$; $\boldsymbol{H_4 \equiv (14)(26)(35)}$; $\boldsymbol{H_5 \equiv (12)(35)(46)}$; $\boldsymbol{H_6 \equiv (15)(23)(46)}$. Аналогично можно сопоставить классам $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ конфигурации хорд Рис. 4 и 5. Групповая операция полностью задаётся таблицей Кэли Рис. 2. Теперь можно сказать, что группа конфигураций хорд Рис. 3 – Рис. 5 построена.

Попробуем представить эту задачу в более общем случае.

Пусть на окружности имеем множество из n точек, являющихся вершинами правильного n-угольника.

Задача:

Сколько существует способов (вариантов) взаимного расположения k хорд на данной окружности, не имеющих общих граничных точек?

Очевидно, что $k \le \frac{n}{2}$, где k - целое положительное число.

Решение:

Одну хорду на данной окружности можно расположить C_n^2 способом. Тогда k хорд, не имеющих общих граничных точек, можно расположить V способами, т. е. для k хорд будем иметь $\underbrace{C_n^2, \cdots, C_n^2}_{k}$ способов, а возвращаясь к вариантам для расположения одной хорды, можно записать формулу:

$$V = \frac{1}{k} C_n^2 \cdot V_1,$$

где V_1 - число способов расположения $k-1$ хорды, среди оставшихся $n-2$ точек окружности. Т. е.

$$V_1 = \frac{1}{k-1} C_{n-2}^2 \cdot V_2,$$

и т.д..

В конце концов мы дойдём до случая, когда останется разместить одну хорду среди оставшихся $n-2(k-1)$ точек. Это можно будет сделать V_{k-1} способом:

$$V_{k-1} = C_{n-2(k-1)}^2.$$

Т. о., получаем произведение из k сомножителей:

$$V = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k} C_{n-2(i-1)}^2 \qquad (1)$$

Пример 1: $n = 4$, $k = 2$.

$$V = \frac{1}{2} C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 3.$$

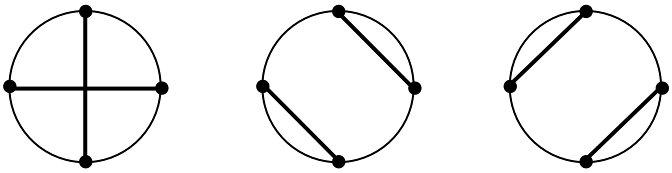

Рис. 6

Пример 2: $n = 5$, $k = 2$.

$$V = \frac{1}{2} C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 15.$$

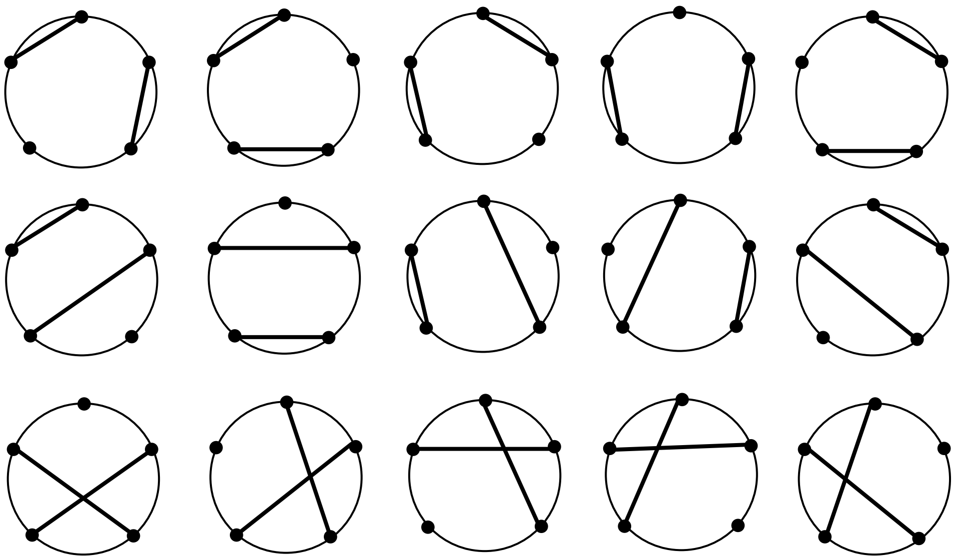

Рис. 7

Как видим из Рис. 7, здесь показаны три ряда, по пять в каждом, конфигураций хорд. Каждому ряду можно однозначно сопоставить классы элементов фактор-группы $G(15)/H_0$. Т. е. получаем ещё один изморфизм группы $G(15)$. Кстати заметим, что формула (1) справедлива и для конфигураций хорд с шестью точками на окружности, которые были показаны на Рис. 3-5.

Продолжая разговор о группе $G(15)$ хочется показать ещё один пример множества, которое состоит из 15-ти элементов. Это множество *присоединений к тетраэдру*. У нас есть тетраэдр. У тетраэдра четыре грани в виде правильного треугольника. Возьмём три вида фигур: октаэдр - O, гептаэдр (см. [3] стр. 303) – Γ и модель лист Мёбиуса Туккермана – M (см. [2] стр. 287) Каждая из этих трёх фигур имеет хотя бы одну грань в виде правильного треугольника. Задача: сколькими различными способами можно присоединить к граням тетраэдра эти фигуры. Присоединением будем считать совпадение конгруэнтных граней. Например, к тетраэдру можно присоединить четыре октаэдра - (***О, О, О, О***) или три гептаэдра и один лист мёбиуса - (***Г, Г, Г, М***). Всего различных способов получается пятнадцать. Т. е. опять получаем множество из 15-ти элементов. Ниже все эти возможности показаны в виде трёх рядов кортежей.

(*О, О, О. О*); (*О, О, О, Г*); (*О, О, О, М*); (*О, О, М, М*); (*О, О, Г, Г*);

(*Г, Г, Г, Г*); (*Г, Г, Г, О*); (*Г, Г, Г, М*); (*Г, Г, М, М*); (*Г, Г, О, М*);

(*М, М, М, М*); (*М, М, М, Г*); (*М, М, М, О*); (*М, М, О, Г*); (*О, О, Г, М*);

Рис. 8

Очевидно, что ставя в соответствие каждому ряду класс элементов $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$, снова получаем группу $\boldsymbol{G(15)}$, которую можем назвать, например, *группой присоединений к тетраэдру*. Надо отметить, что если в поиске множеств из пятнадцати элементов в первых двух случаях нам помогали математические формулы, то последнее множество присоединений мы построили просто перебором. Мы думаем, что заинтересованный читатель сможет отыскать ещё не одно замкнутое множество из 15-ти элементов и описать соответствующую группу, изоморфную группе $\boldsymbol{G(15)}$.

Но вернёмся к группе $\boldsymbol{G(15)}$, как к уникальной. Как уже было сказано - эта группа является первой в ряду уникальных групп. Таких групп не так уж и мало. Например среди первых 300-т конечных групп находим **35** уникальных групп. Покажем их все, выписывая в числовой ряд порядок таких групп:

15, 33, 35, 51, 65, 69, 77, 85, 87, 91, 95, 115, 119, 123, 133, 141, 143, 145, 159, 177, 185, 187, 209, 213, 217, 235, 247, 249, 255, 259, 265, 267, 287, 295, 299,

Рис. 9

На диаграмме (Рис. 10) показаны точками числа порядка (вертикалная ось) первых простых групп на интервале [1-300] натурального ряда (голубые точки) и числа порядка первых уникальных групп на этом же интервале (красные точки)

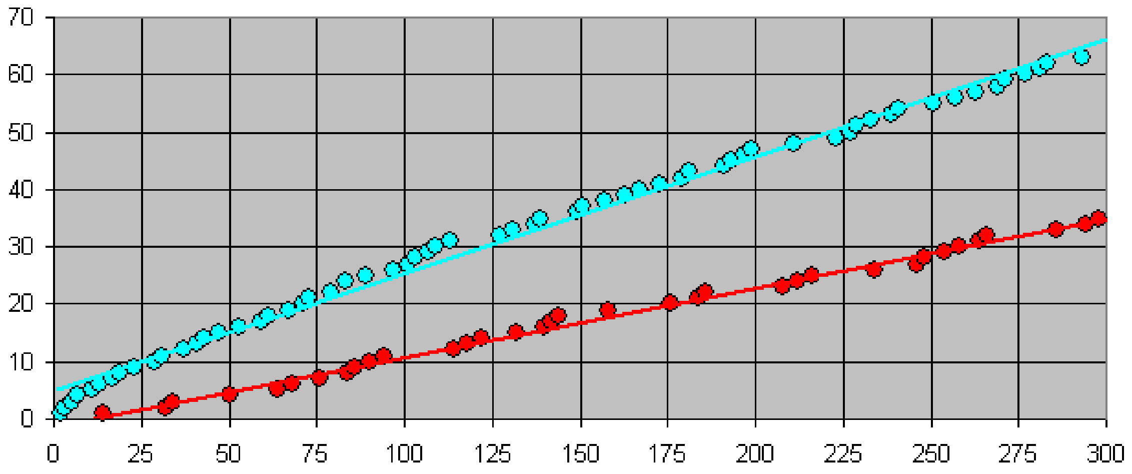

Рис. 10

На Рис. 10 показаны также тренд-линии (прямые соответствующих цветов), из которых видно, что и для простых, и для уникальных групп существует своё условное направление на числовом множестве.

Читатель наверное уже заметил, что порядок уникальных групп (см. Рис. 9) – это составные нечётные числа. Покажем, как всё множество нечётных чисел можно разбить на три подмножества ***U***, ***V*** и ***W***. Какие же числа составляют эти подмножества: $\boldsymbol{u_i \equiv 1\,\mathrm{mod}(6)}$ - это числа подмножества ***U*,** числа $\boldsymbol{v_i \equiv 3\,\mathrm{mod}(6) \in V}$ - все числа этого подмножества делятся на **3**, а числа $\boldsymbol{w_i \equiv 5\,\mathrm{mod}(6) \in W}$.

Введём дополнительную характеристику для подмножеств ***U***, ***V*** и ***W***, которую будем называть *классом*. Обозначать класс будем квадратными скобками, например, **[*AB*]**. Класс обладает двумя элементарными свойствами.

1. Комутативность. $[AB] = [BA]$ и $[A[BC]] = [[BC]A]$.

2. Ассоциативность. $[A[BC]] = [[AB]C]$

Пример:

Если $a_i \in A$, $b_i \in B$ и $a_i b_j = c_k \in C$, то можем записать: $[AB] = C$.

Покажем несколько теорем, характерных для подмножеств ***U*** и ***W***.

Теорема 1:

Если даны два числа u_i *и* u_j, *то их произведением будет число* $u_k \in U$.

Теорема 2:

Если даны два числа u_i и w_j, то их произведением будет число $w_k \in W$.

Теорема 3:

Если даны два числа w_i и w_j, то их произведением будет число $u_k \in U$.

Доказательства этих теорем просты, поэтому мы покажем здесь доказательство только первой теоремы, а доказательство двух других теорем оставляем читателю.

Доказательство:

Рассмотрим ряд чисел множества U:

$$U: \quad 1,\ 7,\ 13,\ 19,\ \ldots\ u_n = 6n - 5.$$

Рассмотрим два числа u_i и u_j этого множества и вычислим их произведение.

$$u_i \cdot u_j = (6i - 5)(6j - 5) = 36ij - 30j - 30i + 25 = 6(6ij - 5j - 5i + 5) - 5.$$

Выражение в скобках в правой части равенства – это какое-то натуральное число n. Т. о., имеем: $u_i \cdot u_j = 6n - 5 \in U$. Что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются и две другие теоремы.

С. Варкентин (Дрезден) предложил оригинальный метод доказательства сразу всех трёх теорем. По методу Варкентина надо расположить все числа множеств U и W на оси целых чисел следующим образом (Рис. 16).

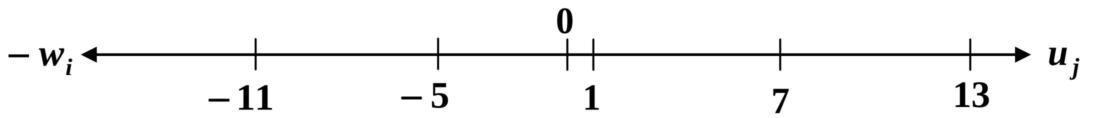

Рис. 11

Общая формула для чисел множества W имеет вид: $w_i = 6n - 1$. Слева от нуля располагаются числа множества W, а справа – множества U. Т. к., говоря о произведении, нас интересует в данном случае только его численное значение, а не знак, то будем считать числа множества W отрицательными. Тогда по правилу умножения целых чисел автоматически получаем доказательства сразу всех трёх теорем о произведении нечётных чисел.

Чем интересен для нас метод Варкентина? Этот метод хорош тем, что он не даёт жёсткой привязки множеств $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$ к полуосям целых чисел. Действительно, мы свой выбор сделали совершенно произвольно, расположив числа множества $\boldsymbol{W}$ слева от нуля, а числа множества $\boldsymbol{U}$ - справа. А теперь поменяем местами числа этих множеств. Пусть слева от нуля будут лежать числа множества $\boldsymbol{U}$, а справа числа множества $\boldsymbol{W}$. Получаем противоречие теоремам о произведении нечётных чисел. Что же получается? Метод Варкентина не приемлен в данном случае? Чтобы сохранить универсальность метода, надо рассматривать числа множеств $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$, расположенными на полуосях целых *мнимых* чисел. Каждое целое мнимое число записывается в виде: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}$, где $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -\mathbf{1}$. В данном случае метод Варкентина вновь работает.

Но вернёмся к классам подмножеств. Для подмножеств $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ получаем шесть характеристических классов: $[\boldsymbol{UU}]$, $[\boldsymbol{UV}]$, $[\boldsymbol{UW}]$, $[\boldsymbol{VW}]$, $[\boldsymbol{VV}]$, $[\boldsymbol{WW}]$, которые характеризуют все нечётные числа. Тогда, согласно теоремам 1, 2 и 3 получаем: $[\boldsymbol{UU}] = [\boldsymbol{WW}] = \boldsymbol{U}$, $[\boldsymbol{UV}] = [\boldsymbol{VW}] = [\boldsymbol{VV}] = \boldsymbol{V}$ и $[\boldsymbol{UW}] = \boldsymbol{W}$. Проанализировав числа Рис. 9, можем сформулировать гипотезу:

Гипотеза:

Группа, порядок которой принадлежит классу $[\boldsymbol{VV}]$*, не бывает уникальной.*

Литература

1. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, «Основы теории групп», М., «Наука» 1977

2. Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика?», М., «МЦНМО» 2004

3. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М., «Наука» 1981

Ф. Г.