

Франц Герман
[\(franz.h-n@yandex.ru\)](mailto:franz.h-n@yandex.ru)

Модель локально-проективной решётки евклидова пространства

*В решёточных теориях приближённо принимается,
что пространство и время не образуют континуума,
а представляют собой дискретное множество точек,
напоминающее кристаллическую решётку.*

(И. Намбу, [7])

1. Введение

Сергей Павлович Фиников – один из патриархов российской школы геометров – когда-то сказал, что методы проективно-дифференциальной геометрии привлекли внимание геометров многих передовых стран и сделали её одной из самых «популярных направлений в дифференциальной геометрии наших дней» [2]. Это было сказано в далёком 1937 году. Но почему-то этого не произошло. Проективно-дифференциальная геометрия, как раздел проективной геометрии, даже вообще исчезла из студенческих учебников по всему миру. Возможно, это произошло в силу активно развивающихся других направлений математики. Например – тополого-групповых методов. Историки науки когда-нибудь разберутся с эти вопросом. Вообще интерес к проективной геометрии в науке остаётся. Возможно, потому, что самые простые после сферы компактные многообразия являются объектами проективной геометрии и проективные проостранства «возникают естественным образом даже в квантовой механике» [13]. К методам проективной геометрии обращаются и известные исследователи наших дней. Например, Р. Пенроуз и др. [4], [5].

Мы не единожды уже подчёркивали [14], [15], что наряду с нашим окружением привычного нам евклидового мира мы постоянно сталкиваемся с восприятием, в виде наших ощущений, ещё и мира проективной геометрии.



Рис. 1



Рис. 2

На Рис. 1 мы видим, что рельсы уходят в даль и где-то там пересекаются в одной точке. А с палубы корабля (или где-то в степи) можно увидеть и линию горизонта. Всё это образы объектов проективной геометрии: бесконечно удалённая точка и бесконечно удалённая прямая. Как отмечал М. Клейн со ссылкой на Б. Рассела «...что из всех геометрий априорность присуща лишь проективной геометрии» ([27], стр.113).

А на полотнах художников порой угадывается и точка перспективы (на Рис. 2 показан фрагмент известной картины А. Т. Фоменко, с нашей точкой перспективы, - Φ . Г.).

Надо сказать, что с точкой перспективы надо обращаться аккуратно. Порой небрежное обращение может привести и к серьёзным заблуждениям.

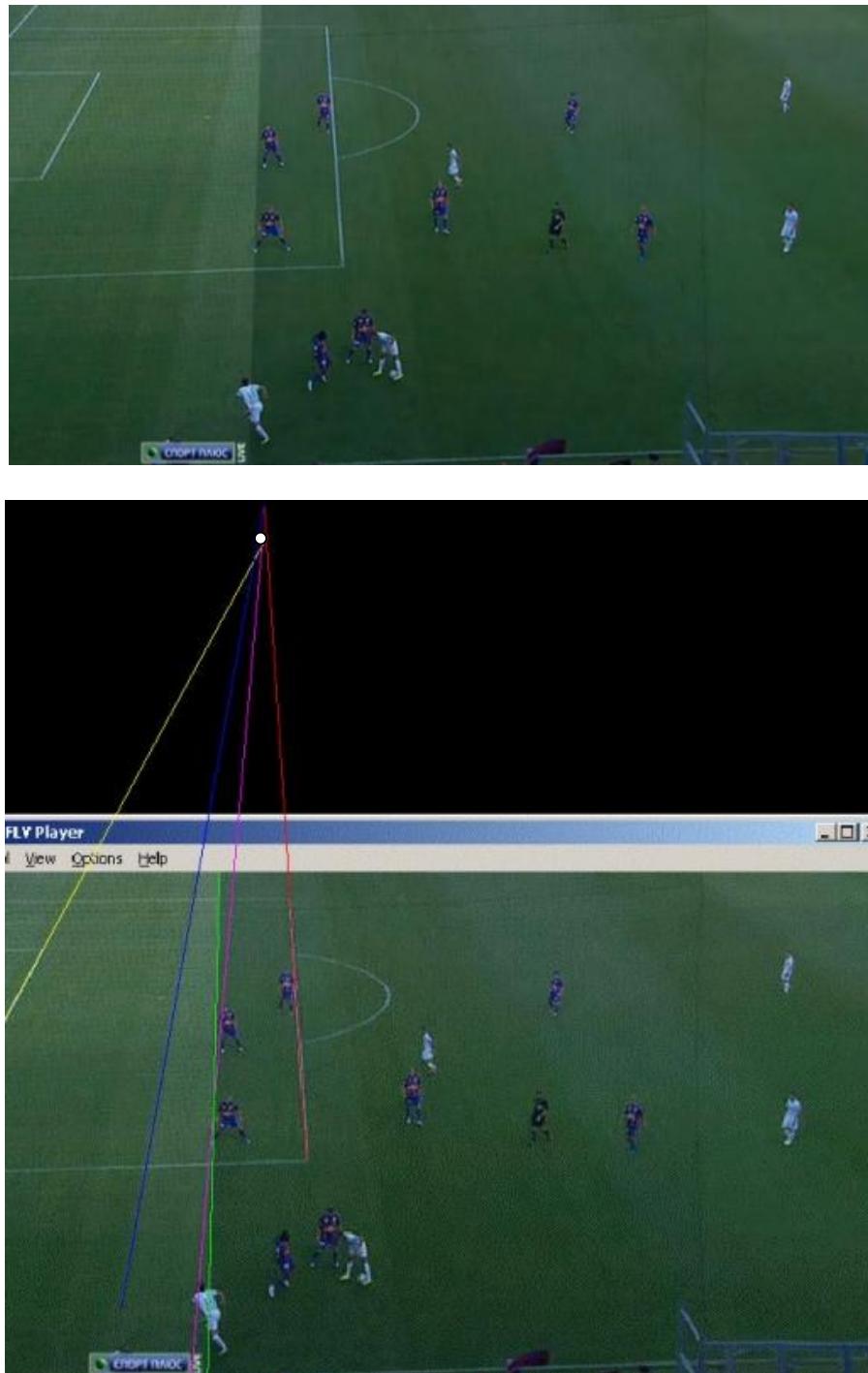


Рис. 3

На верхней части Рис. 3 мы видим, что нападающий уже вне игры. А построения с использованием точки перспективы показывают, что здесь вкрадась ошибка и нападающий играл правильно.

В общем в нашей работе мы попробуем рассмотреть модели мироздания, где могут уживаться обе геометрии: метрическая (евклидова) и неметрическая (проективная). Т. е. будем изучать локально-проективные (ЛП) пространства.

Основной гипотезой нашего моделирования будет аксиома, что в основе всего мира лежат пространственные решётки. Идея эта не нова. Такой подход уже применялся для решения различных задач [7], [26].

Наши решётки будут символизировать трёхмерный мир евклидовой геометрии \mathbf{R}^3 , а в клетках этих решёток мы будем размещать известные естественные компактификации [18, стр. 222] замкнутых многообразий.

Мы не будем вдаваться в тонкости математических изысканий и построим нашу теорию на популярно-интуитивном и наглядном материале.

Рассмотрим три известных упаковки пространства \mathbf{R}^3 классическими полиэдрами. Напомним, в такой упаковке полиэдры должны прилегать друг к другу идеально плотно.

2. Гексагональная модель (тривиальная).

В первом случае мы рассмотрим кубическую решётку. Не путайте нашу решётку с понятием кристаллической решётки [12].

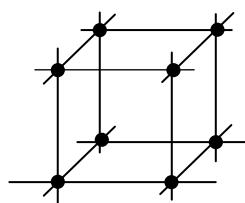


Рис. 4

На Рис. 4 показана элементарная клетка гексагональной решётки.

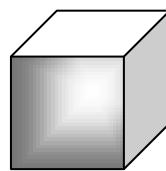


Рис. 5

Очевидно, такая решётка элементарно может быть упакована знакомыми нам с детства кубиками (Рис. 5). Размер нашего кубика должен быть таким, чтобы он был не меньше, чем клетка взятой решётки. А масштаб должен быть такой, чтобы вершины кубика всегда были узлами, показанной решётки. Грубо говоря, нашу решётку мы будем упаковывать полиэдрами. Общее топологическое определение полиэдра можно найти например, в [21], но для нашего исследования под полиэдром достаточно будет понятия обычного многогранника.

С геометрией Эвклида всё понятно. Но где же сдесь проективная геометрия?

Тот, кто уже сталкивался когда-то с проективной геометрией знает, что одной из моделей проективной плоскости является сфера с отождествлёнными диаметрально противоположными точками (в математике такие точки обычно обозначают через x и $-x$, а саму проективную плоскость через \mathbf{RP}^2).

С точки зрения топологии сфера и куб являются фигурами гомеоморфными (что такое гомеоморфизм можно посмотреть например в [22], стр. 20). Более того, центр сферы совпадает с геометрическим центром симметрии куба. Т. е для пары диаметрально противоположные точки сферы всегда найдётся пара центрально симметричных точек куба. Пары этих точек всегда лежат на одной прямой и имеют взаимно однозначное соответствие. Различие лишь в том, что расстояние между диаметрально противоположными точками на сфере всегда является константой (диаметр сферы), а расстояние между центрально симметричными точками куба не всегда одинаково. В отличие от куба на Рис. 4 мы будем показывать его голубым цветом (Рис. 5).

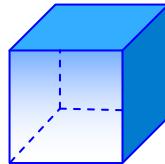


Рис. 5

Вот из таких кубиков и складывается первая модель пространства \mathbf{R}^3 .

Покажем примеры исследований такого пространства.

Мы не представляем, каково соотношение числа серых и голубых кубиков в таком пространстве. Напомним, что серый кубик – это трёхмерный объект и по форме и по сути. А голубой кубик – это модель проективной плоскости. Если пространство состоит только из серых кубиков – это стерильная модель трёхмерного евклидового мира. Если модель пространства состоит только из голубых кубиков – это практически только проективная плоскость ($\mathbf{R}^3 \sim \mathbf{RP}^2$ – компактификация трёхмерного пространства, не путайте с вложением и погружением [8], стр. 490). Символ «~» означает гомеоморфизм ([25], стр. 146).

В топологии существует понятие связная сумма [24]. Это понятие возникает когда два многообразия имеют общую поверхность (слипаются или отождествляются частью поверхности). При этом общая поверхность исчезает (аннигилирует). Для этого, как правило, используют значок «#».

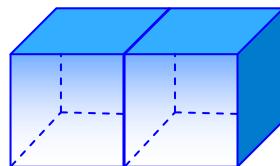


Рис. 6

На Рис. 6 показан пример связной суммы, имеющей математическое выражение: $(\mathbf{RP}^2 / D^2) \# (\mathbf{RP}^2 / D^2) \sim K^2$. Пример доказательства этого выражения можно найти в [24] на стр. 97-98. Рис. 6 говорит о том, что при слиянии двух проективных плоскостей получается объект гомеоморфный бутылке Клейна. Поверхность, представляющая собой связную сумму проективной плоскости и бутылки Клейна, гомеоморфна проективной плоскости с ручкой [11]. Теорию ручек можно найти в [23], нам это не понадобится.

Можно доказать ([22], стр. 159), что связная сумма трёх проективных плоскостей гомеоморфна связной сумме тора и проективной плоскости $(\mathbf{RP}^2 / D^2) \# (\mathbf{RP}^2 / D^2) \# (\mathbf{RP}^2 / D^2) \sim (T^2 / D^2) \# (\mathbf{RP}^2 / D^2)$. Символ D^2 обозначает часть плоскости, гомеоморфной кругу. В нашем случае – это общая грань голубых

кубов, которая после отождествления исчезает (как мы сказали – аннигилирует). Это свойство аннигилирования проявляется только в случае связной суммы для проективных плоскостей. В случае обыкновенных (серых) кубов грани рядом стоящих кубов просто отождествляются в одну: $D^2 \cup D^2 \equiv D^2$.

А. Пуанкаре говорил, что «метрическая геометрия есть изучение твёрдых тел, а проективная геометрия – изучение света» ([28], стр.49).

Посмотрим, как поведёт себя луч света, попав в голубой кубик.

Пусть луч света распространяется из точки A в точку B .



Рис. 7

В точке M луч входит в область голубого кубика и тут же оказывается в точке M^* , которая центрально противоположна точке M . Т. е. область голубого кубика луч проскаивает мгновенно (быстродействие). И далее продолжает свой путь. Но в каком направлении? Мы принимаем гипотезу о *законе сохранения направления движения*. Т. е. луч света продолжает двигаться в том же направлении, в котором он начинал движение (Рис. 7).

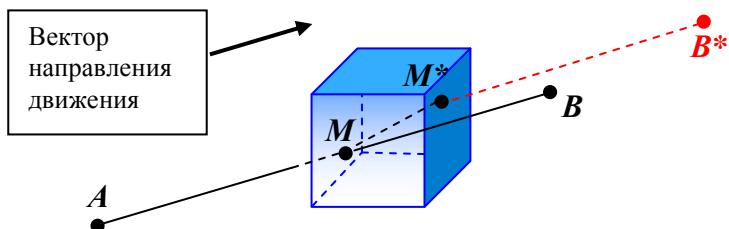


Рис. 7

Отрезок MM^* проходит через центр голубого куба. В результате таких построений луч приходит уже не в точку B , куда должен был прийти, если бы на пути не было RP^2 , а в точку B^* (на Рис. 7 эта точка показана красным цветом). Мы не знаем сколько голубых кубов встретится на пути светового луча, но примерную картинку такого движения можно нарисовать (Рис. 8).

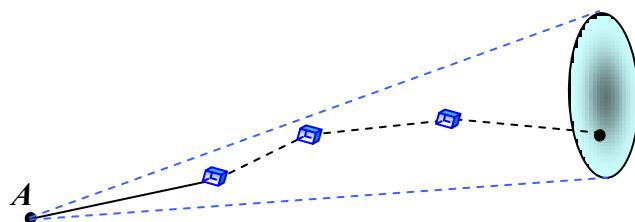


Рис. 8

Т. о., луч света, выходя из точки A может угодить не в точку B , а в любую точку из множества точек, содержащихся в некоторой области, показанной на Рис. 8 голубым эллипсом (форма области тоже условная). А находясь в этой области мы можем точку A воспринимать как раз, как точку перспективы. Может быть в этом тоже есть

проявление знаменитого принципа неопределённости Гейзенберга? Но не будем заниматься тонкостями квантовой физики, наша заметка не об этом.

Говоря о кубиках надо сделать одно уточнение. Кубик, где мы рассматривали движение луча света, это конечно же не тот элементарный кубик, о котором мы говорили, имея в виду Рис. 5. Сторона кубика (Рис. 7) может быть записана выражением $l = \lambda \cdot l_0$, где l_0 - сторона элементарного кубика (Рис. 5), а $\lambda >> 0$. В противном случае мы вторгались бы уже в область микромира и какой-то квантовой оптики, где луч света уже рассматривается не как луч, а как совокупность отдельных, как-то упорядоченных фотонов и квантов.

Мы показали пример возможного исследования тривиально смоделированного ЛП - пространства R^3 .

Известно, что существует ещё одна геометрическая фигура - полиэдр, а мы работаем только с полиэдрами - которая заполняет евклидово пространство без пробелов. Приступаем к моделированию R^3 при помощи этой фигуры, которая называется ромбический додекаэдр.

3. Ромбододекаэдрическая модель

Ромбический додекаэдр является полуправильным полиэдром, т. е. не относящимся к Платоновым телам. Все грани этого полиэдра являются одинаковыми ромбами, но в его вершинах сходятся либо три, либо четыре ребра (Рис. 9).

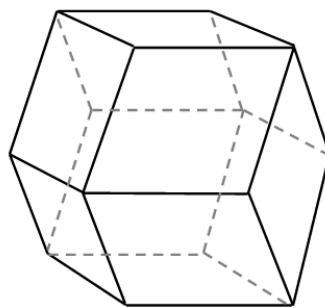


Рис. 9

В качестве главной характеристики этого полиэдра можно принять отношение диагоналей ромба, который является его гранью: $\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{2}$. Наша фигура - это центрально симметричный полиэдр.

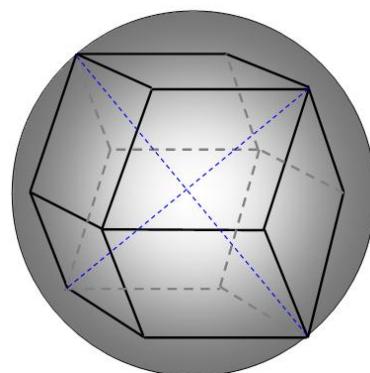


Рис. 10

Центр, описанной сферы, софпадает с центром симметрии полиэдра. Максимальная диагональ полиэдра равна диаметру описанной сферы (Рис. 10). Все рассуждения относительно моделирования точно такие же как и в первой части. Т. е для модели проективной плоскости мы используем ромбический додекаэдр с отождествлёнными центрально противоположными точками.

Хотелось бы верить, что на базе ромбического полиэдра возможно построить модель проективной плоскости в виде многогранника с дополнительными взаимно пересекающимися гранями, как это показано в следующей части нашего исследования. Пока такая модель нам не известна.

Дополнительно можем сказать, что гексагональная решётка идеально вписывается в решётку ромбического полиэдра (Рис. 11).

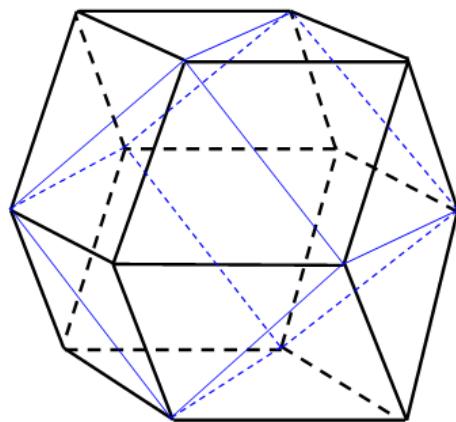


Рис. 11

Какими ещё одинаковыми полиэдрами можно идеально упаковать пространство \mathbb{R}^3 нам не известно. Но оказывается, что два Платоновых тела октаэдр и тетраэдр вместе тоже могут упаковывать пространство \mathbb{R}^3 . Исследованием этой решётки мы сейчас и займёмся.

4. Комбинированная модель

Что представляет собой ячейка (клетка) такой решётки. Как уже было сказано, решётка состоит из комбинаций октаэдра и тетраэдра. В топологии используется понятие симплекс. В этом случае тетраэдр является простейшим пространственным симплексом [12]. Для понимания всей конструкции удобнее всего воспользоваться словесным описанием решётки [3]. В каждом узле этой решётки находятся вершины *восьми* тетраэдров и *шести* октаэдров. Каждая грань тетраэдра (или октаэдра - правильный треугольник) всегда является одновременно и гранью октаэдра (или тетраэдра). Т. о., октаэдры (тетраэдры) между собой соприкасаются только вершинами.

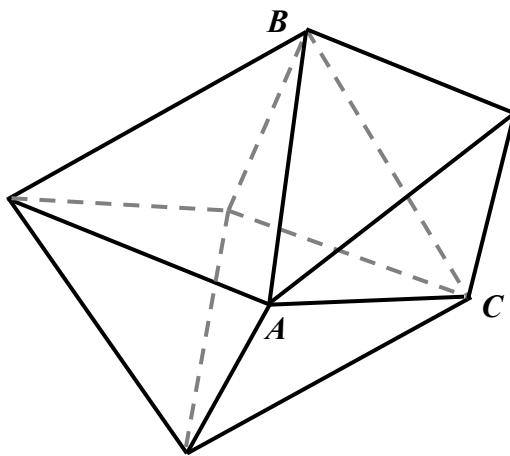


Рис. 12

Т. е. два тетраэдра или два октаэдра никогда не имеют общих граней, только тетраэдр-октаэдр.

На Рис. 12 показана связка октаэдра и тетраэдра. Грань ABC у них общая. Чтобы представить, как эти фигуры образуют пространственную клетку заполнения надо и к остальным семи граням октаэдра также прилепить по тетраэдру.

Каждая из фигур и октаэдр, и тетраэдр гомеоморфны сфере. Поэтому каждая из этих фигур может служить моделью проективной плоскости аналогично, как это было показано для гексагональной модели. Надо помнить, что модель проективной плоскости, построенная на базе тетраэдра не имеет центра симметрии. Вместо этого роль центра тетраэдра играет точка ортоцентра [30] тетраэдра (Рис. 13).

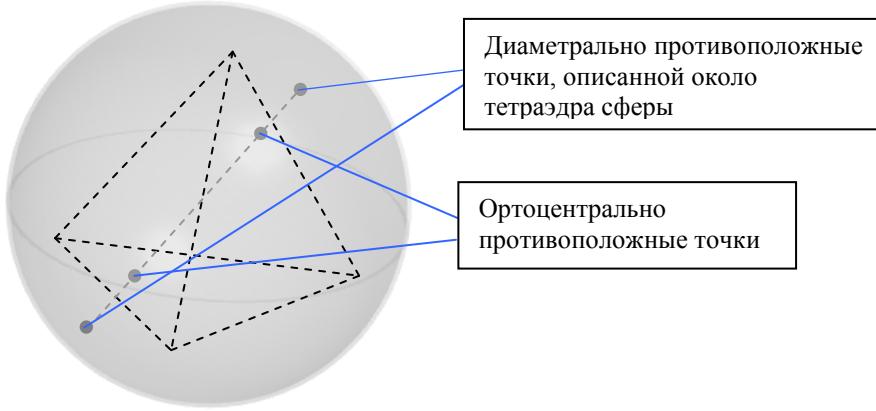


Рис. 13

Приступим к исследованию последней модели.

Модели проективной плоскости в нашей упаковке \mathbf{R}^3 могут быть представлены тремя видами: 1). октаэдрическая - \mathbf{RP}_o^2 , 2). тетраэдрическая - \mathbf{RP}_T^2 , 3). гептаздрическая - \mathbf{RP}_G^2 [6]. Сначала поговорим о первых двух. Обе эти модели изоморфны сферической модели с отождествлёнными диаметрально противоположными точками. Очевидно, что любая из этих моделей может существовать в полной изоляции. В противном случае сразу же возникает фигура гомеоморфная бутылке Клейна - $(\mathbf{RP}_o^2 / D^2) \# (\mathbf{RP}_T^2 / D^2) \sim K^2$. Каркас такой фигуры

проказан на Рис. 12 (связная сумма 1) и 2) модели). К такому телу могут быть присоединены ещё семь моделей типа 2) $K^2 \# \underbrace{(RP_T^2 + \dots)}_n$, $n \leq 7$ по числу свободных

граней октаэдра. Очевидно, что с любой моделью типа 2) могут быть максимально связаны четыре модели типа 1): $K^2 \# \underbrace{(RP_o^2 + \dots)}_n$, $n \leq 3$.

Каждая модель типа 1) может быть в общей упаковке R^3 заменена моделью типа 3) и наоборот. При этом связная сумма иногда будет исчезать, а иногда возникать в зависимости от того будут ли модели иметь общую грань или нет. Это будет понятно чуть позже, после того как мы разберём устройство модели RP_G^2 .

Прежде чем приступить к изучению модели типа 3) необходимо познакомиться с моделью листа Мёбиуса, придуманного Б. Туккерманом. Несмотря на свою оригинальность, модель эта широкой публике почему-то мало известна [9]. Этот лист Мёбиуса имеет вид изменённого октаэдра. Что-то добавлено, а что-то убрано от классического октаэдра, причём краем такого листа является прямоугольный треугольник (показан красным, Рис. 14).

На рисунке мы видим в различных положениях одну и ту же модель листа Мёбиуса - Туккермана, склеенную из бумаги.

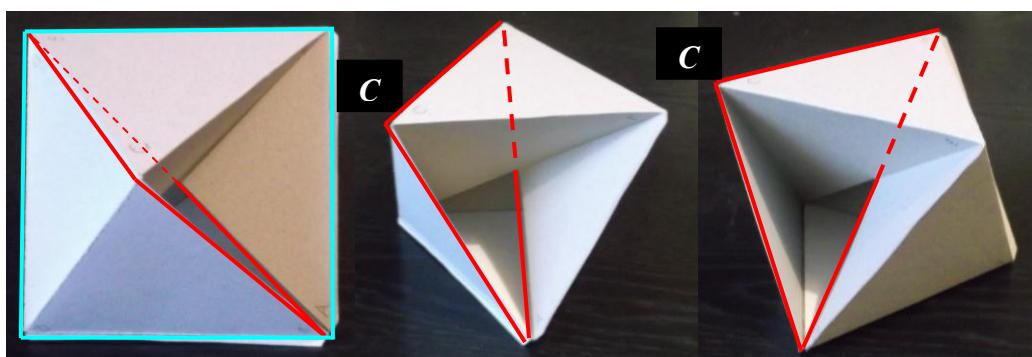


Рис. 14

Неискущенному читателю понять всю конструкцию будет не просто поэтому мы рассмотрим фигуру, разрезав её на две части. Линия разреза показана на Рис. 14 (слева) голубым цветом.

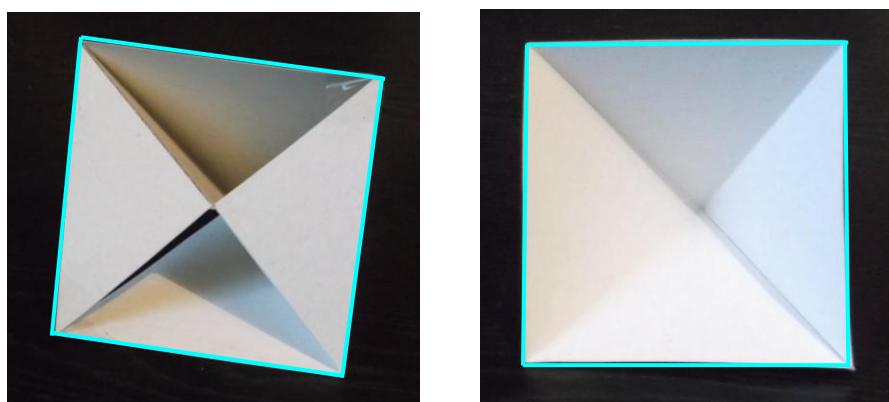


Рис. 15

Линия разреза находится в плоскости рисунка (чёрный фон), а части фигуры как бы вдавлены под рисунок (от нас). Чтобы лучше понять устройство модели Туккермана построим выкройки [17] частей, которые показаны на Рис. 15.

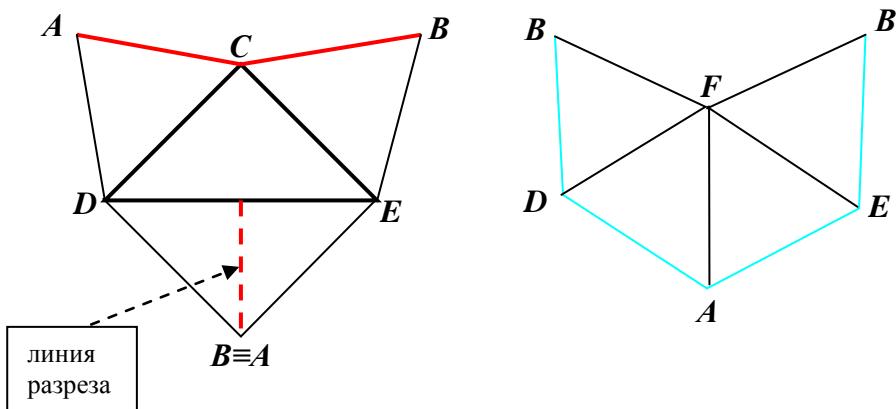


Рис. 16

На Рис. 16 (слева) показана выкройка части, показанной на Рис. 15 (слева). Соответственно правая выкройка Рис. 16 - для правой части фигуры, изображённой на правой части Рис. 15. Здесь же показана линия разреза $BDAEB$. Отрезки DC , CE , DE – линии перегиба (Рис. 15). Естественно одинаковые буквы должны отождествляться. Точки C и F – симметрично противоположные точки всей фигуры (всего листа Туккермана). Треугольник DCE - прямоугольный. Треугольники DAC и CBE - равносторонние. А краем нашего листа Мёбиуса будет треугольник ABC – красные линии на Рис. 16 слева.

Одним из топологических инвариантов является Эйлерова характеристика поверхности [16]. Это число, которое вычисляется по формуле:

$$\chi(G) = B - P + \Gamma, \quad (1)$$

здесь B – число вершин, P – число рёбер, Γ – число граней. Формула (1) применима только к триангулированным поверхностям, т. е. к таким поверхностям, которые можно разбить на простейшие многоугольники. По сути дела, т. к. нашими поверхностями являются полиэдры, то триангуляция будет естественной. Напомним, что грань – это часть плоскости, гомеоморфная кругу и окружённая со всех сторон рёбрами. Ребро должно всегда соединять две вершины и быть общим для двух граней.

Известно [10], что Эйлерова характеристика листа Мёбиуса равна 0. Мы в этом сейчас убедимся. Выпишем значения формулы (1) глядя на Рис. 15 и Рис. 16.

$$\begin{aligned} B &= \{B, D, A, E, F, C\}; \\ P &= \{BD, DA, AE, EB, BF, FE, FA, FD, DC, CE, DE\}; \\ \Gamma &= \{FBD, DFA, AFE, EFB, DCE\}. \end{aligned}$$

Обозначим поверхность нашего листа Мёбиуса $G \equiv M_T^2$. Тогда $\chi(M_T^2) = 6 - 11 + 5 = 0$.

Известно [1], что если из сферы вырезать отверстие, гомеоморфное кругу, и затянуть это отверстие плёнкой (листом Мёбиуса), то получим модель проективной

плоскости: $(S^2 / D^2) \# M^2 \sim RP^2$. С другой стороны - $(S^2 / D^2) \sim D^2$. Т. е. можем записать: $M^2 \# D^2 \sim RP^2$.

Как мы уже показали, край листа Мёбиуса Туккермана – это треугольник (стороны треугольника ABC выделены красным цветом на выкройке Рис. 16 слева). Приклеим к треугольнику ACB плоскость в виде квадрата $ACBF$. Т. е. край листа Мёбиуса закрыли плоскостью. Т. о. получили модель проективной плоскости. Чтобы эта модель отвечала требованиям полиэдра надо убрать лишние грани (DFA и BFE). Эта модель и называется гептаздром (семиугольником).

Можно было бы с самого начала не рассматривать модель Туккермана, а сразу рассмотреть фигуру гептаздра, но тогда было бы труднее объяснить, что гептаздр действительно является моделью проективной плоскости в виде листа Мёбиуса, край которого заклеен куском плоскости, гомеоморфным кругу.

Рассмотрим более подробно, что представляет из себя гептаздр. Известно, что замкнутая односторонняя поверхность, вложенная в R^3 , всегда имеет самопересечения. На Рис. 17 мы можем увидеть все линии пересечений. Линии пересечений на нашей модели образованы тремя взаимно перпендикулярными гранями: $AFBC$, $FECD$ и $AEBD$. Т. е. линиями пересечений являются главные диагонали октаэдра: AB , FC , DE . Кроме того в таком октаэдре отсутствуют грани: DFA и BFE (об этом мы уже сказали) и ACE и DCB .

Надо отметить, что в евклидовом пространстве R^3 не существует несамопересекающейся замкнутой неориентированной поверхности [19].

Известно [10], что Эйлерова характеристика проективной плоскости равна 1. Действительно, вершин у нас 6, рёбер – 12, граней – 7. Получаем: $\chi(RP_G^2) = 6 - 12 + 7 = 1$.

Напомним [9], что всякая замкнутая односторонняя поверхность рода $p = 1, 2, \dots$ топологически эквивалентна сфере, из которой вынуты p дисков и заменены плёнками (листами Мёбиуса). Отсюда Эйлерова характеристика такой поверхности имеет выражение: $\chi(G) = 2 - p$. При $p = 1$ имеем характеристику проективной плоскости.

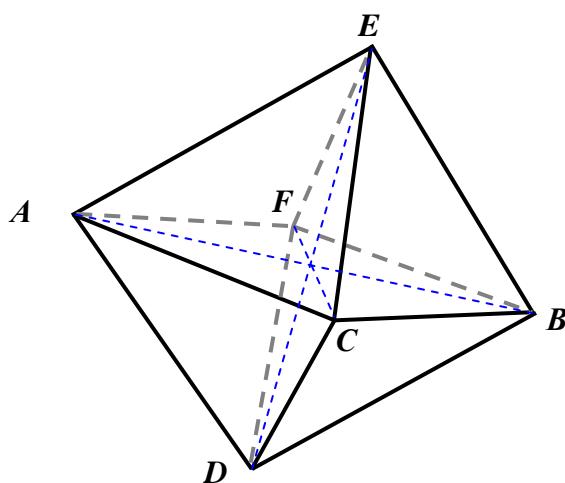


Рис. 17

Отметим также, что Эйлерова характеристика неориентированной поверхности может быть либо чётной, либо нечётной, но не может быть больше 1 [19].

В качестве дополнительной характеристики моделей \mathbf{RP}_T^2 , \mathbf{RP}_o^2 и \mathbf{RP}_G^2 можем взять суммарную площадь всех граней S_T , S_o и S_G соответственно. Тогда $S_T = \sqrt{3}$, $S_o = 2\sqrt{3}$ и $\frac{S_G}{S_o} = \frac{4 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx 1.65$. При условии, что длина стороны полиэдра равна 1.

Посмотрим внимательнее на последнюю модель, когда полученная решётка упакована объектами \mathbf{RP}_G^2 .

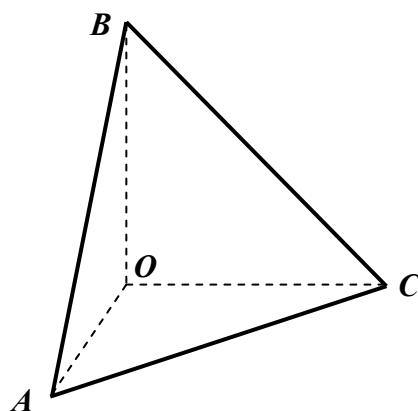


Рис. 18

Гептаэдр можно представить фигурой, состоящей из 8-ми частей, показанных на Рис. 18. Это пирамида, в основании которой лежит равносторонний треугольник, а в вершине сходятся грани в виде трёх прямоугольных треугольников.

Не забываем, что вершины нашего гептаэдра находятся в узлах пространственной решётки. А прямоугольные грани пересекаются в точке, которая не является узлом пространственной решётки (эта точка лежит на линии самопересечения гептаэдра). Кроме того, основаниями 4-х пирамидок являются грани гептаэдра, а у 4-х других пирамидок граней-оснований нет. Мы помним, что каждая грань решётки является одновременно и гранью октаэдра, и гранью тетраэдра. Но в случае гептаэдра такой грани может и не быть. Как же полиэдры будут связываться в единое целое? Получается такая картина: грани принадлежат гептаэдру, а основание – тетраэдру.

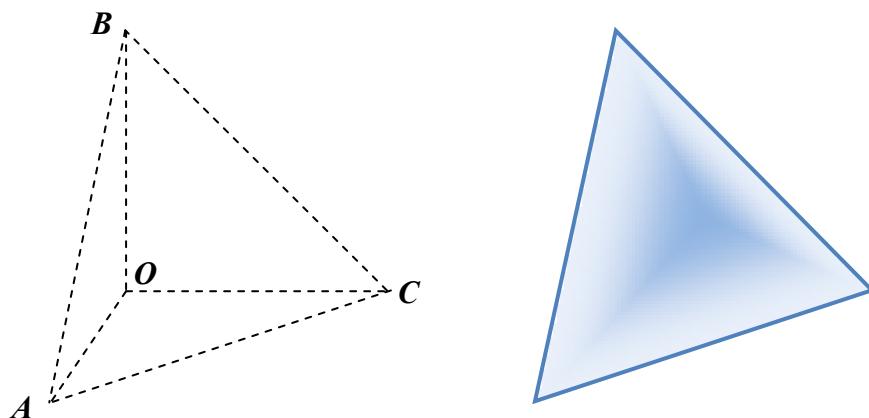


Рис. 19

Выходит, что часть пространства (внутренняя часть пирамиды) не принадлежит \mathbf{R}^3 , а является частью какого-то другого пространства. Это может быть либо пространство \mathbf{C}^3 , либо пространство $\mathbf{CP}^3 \in \mathbf{C}^4$. Попробуем в этом разобраться.

Фигура на Рис. 18 – это стереометрический аналог теоремы пифагора $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s^2$, где $s_1 = S_{AOB}$, $s_2 = S_{BOC}$, $s_3 = S_{AOC}$, $s = S_{ABC}$ – площади треугольников AOB , BOC , AOC и ABC соответственно [31].

Т. к. рассматриваемая часть (имеется в виду пирамидка Рис. 18) относится к полю комплексных чисел мы допускаем случай когда $s = i \cdot s^*$ (i - мнимая единица). После нормирования последнего выражения, получаем:

$$\left(\frac{s_1}{s^*}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{s^*}\right)^2 + \left(\frac{s_3}{s^*}\right)^2 = -1. \quad (2)$$

Для удобства можем ввести обозначения $\frac{s_i}{s^*} = x_i$. Тогда выражение (2) – это уравнение

единичной сферы мнимого радиуса в пространстве \mathbf{C}^3 . Условия отождествления диаметрально противоположных точек в параметрическом виде записываются таким образом: $u_i = x_j \cdot x_k$ (u_i - произвольные параметры) [20]. Выражая координаты в

параметрическом виде, получаем: $x_i = \sqrt{\frac{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_i}}$. Подставляя это выражение в (2)

находим параметрическое уравнение:

$$u_1^2 u_2^2 + u_1^2 u_3^2 + u_3^2 u_2^2 + u_1 u_2 u_3 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть аналитическое выражение «римской поверхности» (поверхность Штейнера) [20], которая, как мы только что показали, тоже является моделью проективной плоскости.

По аналогии с предыдущим для полиэдра (Рис. 18) введём обозначение $\mathbf{CP}_c^2 \equiv \otimes$ (индекс « C » взят от слова «симплекс»). В самом общем виде моделируемое

пространство может быть записано структурной формулой: $\mathbf{R}^3 \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{RP}_i^2 \otimes \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbf{RP}_j^2$. Эта

формула показывает, что модель евклидова пространства может быть представлена совокупностью локальных проективных объединений, склеенных комплексными симплексами, которые, в свою очередь, являются тоже проективными многообразиями.

На этом наверное надо остановиться, а то возникает ощущение, что автор запутал не только читателя, но и себя самого.

Два слова в завершение.

Иногда «римскую поверхность» называют гептаздром. Происходит это, видимо, от того, что по аналогии, как простой многогранник можно деформировать в сферу, так и гептаздр можно деформировать в «римскую поверхность» [20].

Проективная плоскость интересна тем, что существует не менее десяти всевозможных её моделей. В нашем исследовании мы использовали только три: гептаздр, сферу с отождествлёнными диаметрально противоположными точками и римскую поверхность, причём последняя, при определённых условиях, тоже является сферой с отождествлёнными диаметрально противоположными точками.

Простейшей моделью [25], на наш взгляд, является пучок прямых аффинного пространства, проходящих через фиксированную точку. А наиболее сложной – модель

Боя [20], отличительной чертой которой является троекратное ортогональное самопересечение (аналогично гептаэдру). Кстати, «францкая поверхность» имеет шесть особенностей точно также как и гептаэдр.

Для любителей аналитических выражений покажем совокупность трёх параметрических уравнений поверхности Боя (Рис. 20).

$$B(u, v) : \begin{cases} \frac{\cos(u) \cdot (\cos(u) \cdot \cos(2v) + \sqrt{2} \cdot \sin(u) \cdot \cos(v))}{\sqrt{2} - \sin(2u) \cdot \sin(3v)} \\ \frac{\cos(u) \cdot (\cos(u) \cdot \sin(2v) - \sqrt{2} \cdot \sin(u) \cdot \sin(v))}{\sqrt{2} - \sin(2u) \cdot \sin(3v)} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(u)^2}{\sqrt{2} - \sin(2u) \cdot \sin(3v)} \end{cases} .$$

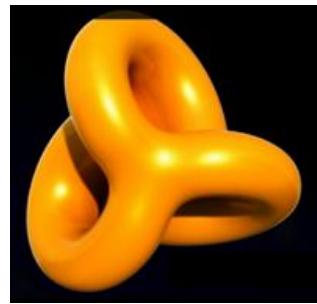


Рис. 20

Обратим внимание ещё вот на что. Мы занимались здесь локально-проективным моделированием пространства \mathbf{R}^3 . Время от времени в наших построениях возникал объект, гомеоморфный поверхности, которая называется бутылкой Клейна. Это случалось потому, что мы постоянно использовали различные модели проективной плоскости, а это многообразие неориентировано (одностороннее), как и бутылка Клейна. Сама бутылка Клейна к проективной геометрии прямого отношения не имеет. Мы уже отмечали, что связная сумма двух проективных плоскостей гомеоморфна бутылке Клейна. Вот и всё. Хотя, косвенная связь конечно существует. Если разрезать бутылку Клейна симметрично, то получим два зеркальных листа Мёбиуса. А лист Мёбиуса – это законная часть проективной плоскости. Отметим ещё, что существуют такие разрезы бутылки Клейна, которые сразу превращают её в единственный лист Мёбиуса [29]. Причём, разрез можно по желанию так построить, что лист Мёбиуса может быть и лево, и право закрученным.

Литература

1. А. Т. Фоменко, «Наглядная геометрия и топология», М., «ЧеРо», 1998
2. С. П. Фиников, «Дифференциально-проективная геометрия», М., «КомКнига»,
3. М. Гарднер, «Математические новеллы», М., «Мир», 1974
4. В. А. Шашлов, «О природе материи», // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19336, 28.07.2014
5. В. А. Шашлов, «Раскрыта тайна строения нуклонов и атомных ядер», // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19626, 04.10.2014
6. Ф. Клейн, «Элементарная математика с точки зрения высшей. Геометрия, Т. 2», М., «НАУКА», 1987
7. И. Намбу, «Кварки», М., «Мир», 1984
8. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», М. , «НАУКА», 1979
9. Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика?», М., «МЦНМО», 2001
10. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко, «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980
11. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., «НАУКА», 1989
12. С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Элементы дифференциальной геометрии и топологии», М., «НАУКА», 1987
13. М. Берже, «Геометрия», Т. 1, М., «Мир», 1984
14. Ф. Герман, « RP^2 - проективная плоскость», «LAP LAMBERT», Saarbrücken, 2015
15. Ф. Герман, «Математика и тонкий мир», «LAP LAMBERT», Saarbrücken, 2016
16. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, «Наглядная топология», М., «НАУКА», 1982
17. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецеваев, «Геометрия», М., «НАУКА», 1990
18. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, «Линейная алгебра и геометрия», М., «НАУКА», 1986
19. У. Болл, Г. Коксетер, «Математические эссе и развлечения», М., «Мир», 1986
20. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М., «НАУКА», 1981
21. Л. С. Понтрягин, «Основы комбинаторной топологии», М., «НАУКА», 1986

22. Дж. Милнор, А. Уоллес, «Дифференциальная топология», М., «Мир», 1972
23. К. Рурк, Б. Сандерсон, «Введение в кусочно линейную топологию», М., «Мир», 1974
24. Ч. Кошёвски, «Начальный курс алгебраической топологии», М., «Мир», 1983
25. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия, часть 2», М. «Просвещение», 1987
26. Ф. Герман, «Математика в науке и вокруг нас», «LAP LAMBERT», Saarbrücken, 2016
27. М. Клейн, «Математика. Утрата определённости», М., «Мир», 1984
28. А. Пуанкаре, «О науке», М., «НАУКА», 1990
29. Ст. Барр, «Россыпи головоломок», М., «Мир», 1987
30. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
31. Д. Пойа, «Математическое открытие», М., «НАУКА», 1970