Франц Герман
franz.h-n@yandex.ru

Введение в теорию касательных сфер

Эти кривые могут быть определены
многими различными способами

Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер

В данной статье мы познакомим читателя с теорией кривых центров (ТКЦ), как с альтернативной теорией для теории конических сечений (ТКС).

Рассмотрим две произвольные непересекающиеся окружности. Очевидно, что построить касательную окружность к этим двум данным окружностям можно различными четырьмя способами (Рис. 1).

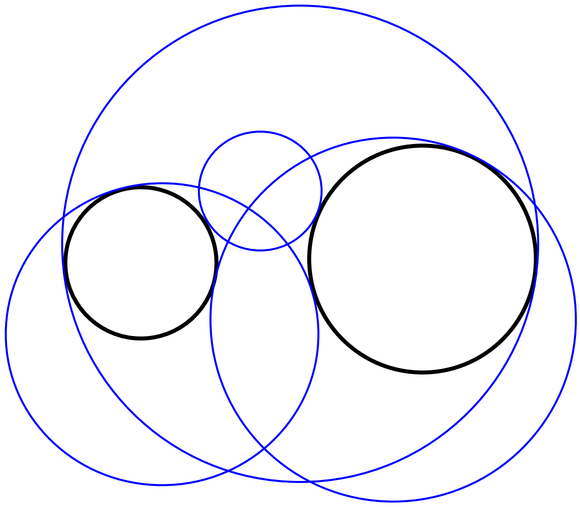

Рис. 1

Построенная окружность может касаться двух данных снаружи. А может - и изнутри. Кроме того, построенная окружность может касаться одну данную окружность снаружи, адругую при этом – изнутри. И наоборот. Т. е., как и было сказано, - четырьмя различными способами. И, кроме того, в каждом из этих четырёх случаев построенная окружность не является единственной.

Рассмотрим первый случай, когда окружность касается двух данных снаружи.

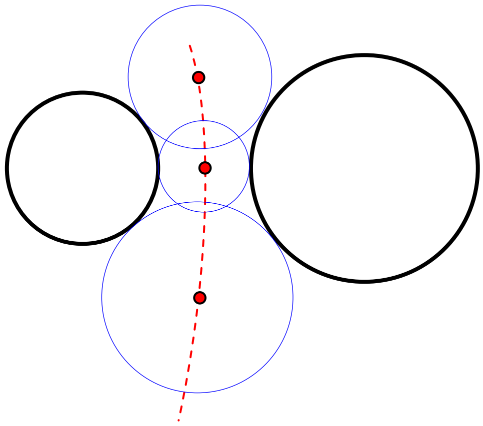

Рис. 2

На Рис. 2 показан пример - три окружности первого типа. Очевидно, что построить таких окружностей можно бесконечно много. Нас будет интересовать задача поиска геометрического места точек, где лежат центры построеных окружностей. Т. е. аналитический вид такой кривой. Мы будем называть её *кривой центров*.

Введём систему координат, как показано на Рис. 3.

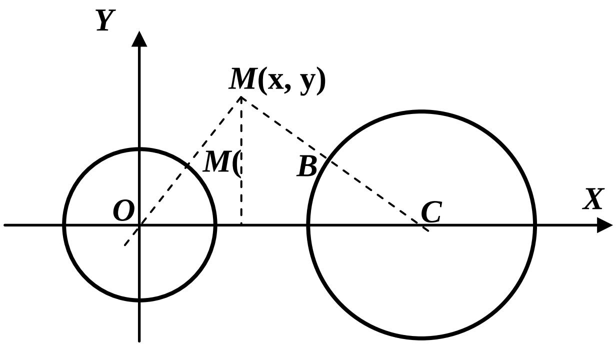

Рис. 3

Пусть ***OC* = *n*, *OA* = *r*, *CB* = *R***. ***M*** – текущая точка искомой кривой, т. е. центр некоторой окружности, касающейся двух данных внешним образом. Тогда можем записать: $\sqrt{x^2+y^2}=r+AM$, но т. к. точка ***M*** – центр окружности, которая касается двух данных, то $AM=MB=\sqrt{(n-x)^2+y^2}-R$. Подставляя ***AM*** в первое выражение получаем:

$$R-r=\sqrt{(n-x)^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$

Выражение (1) и будет уравнением кривой центров.

Не трудно понять, что (1) является уравнением второго порядка, а это значит, что наша кривая принадлежит к классу линий конического сечения (исключая, конечно, вырожденные случаи). Попробуем разобраться, что же это за линия.

Правая часть выражения (1) – это ни что иное, как разность расстояний текущей точки искомой кривой до двух фиксированных точек ***C*** и ***O***. Причём разность эта есть величина постоянная – (***R*** - ***r***). Именно таким свойством обладает гипербола [1]. Глядя на Рис. 2 понятно, что найденная кривая центров ни что иное, как левая ветвь гиперболы, а точки ***O*** и ***C*** – её фокусы. Пусть x_0 - точка пересечения кривой центров с осью абсцисс. Т. е. $x_0 = \frac{n - R + r}{2}$. Пользуясь классической терминологией [3] введём обозначения: $n = 2c$ - межфокусное расстояние, а $R - r = 2a$ - абсолютная разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов. Теперь сделаем преобразования координат: $Y^* = Y$, $X^* = X - \frac{n}{2}$. Переходя к новым координатам и используя принятые обозначения получаем:

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} - \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

здесь $b^2 = c^2 - a^2$. Т. е. получаем канонический вид уравнения гиперболы.

Рассмотрим второй случай, когда построенная окружность касается данные окружности изнтри.

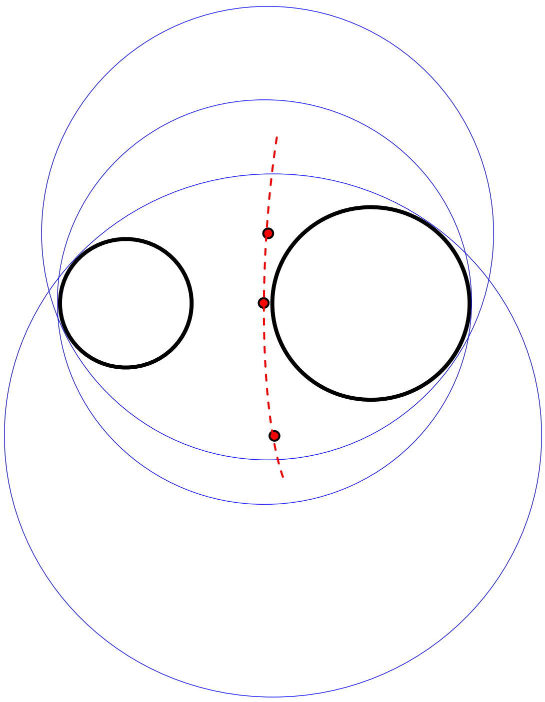

Рис. 4

Введём систему координат аналогичным образом, как мы делали это для первого случая.

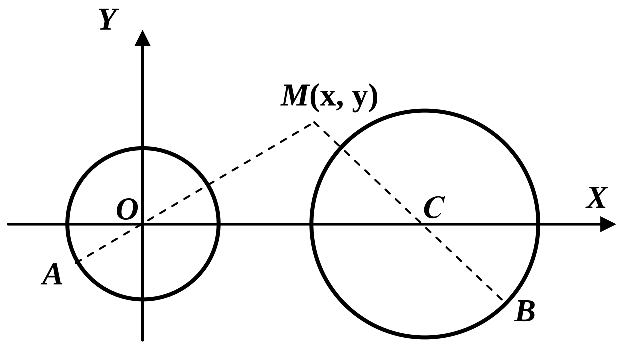

Рис. 5

В данном случае будем иметь: ***AM = MB***. Расписывая это равенство получаем такое выражение:

$$\boldsymbol{R - r = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(n - x)^2 + y^2}}\ . \qquad (3)$$

Не трудно заметить, что уравнение (3) отличается от уравнения (1) лишь тем, что слагаемые в правой части поменялись местами. Т. е. уравнение (3) – это правая ветвь гиперболы (2).

Объединяя (1) и (3) можем записать общее уравнение:

$$\boldsymbol{R - r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \mp \sqrt{(n - x)^2 + y^2}}\ . \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда касательная окружность касается одну из окружностей снаружи, а вторую изнутри (Пример, Рис. 6).

Вся работа передана в РАН