Франц Герман

Вложенный ромб

(неочевидные свойства треугольника)

franz.h-n@yandex.ru

Мы будем обращаться к теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника, поэтому есть смысл напомнить её содержание. Итак, если дан треугольник ABC и проведена биссектриса AD, то биссектриса делит сторону BC на части, пропорциональные смежным сторонам треугольника (Рис. 1).

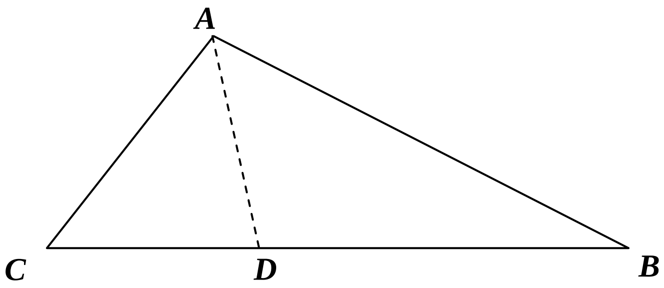

Рис. 1

Согласно теореме, можно записать: $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$ или

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DB}{AB}. \qquad (1)$$

Теперь дадим определение внутреннего перпендикуляра треугольника.

Определение 1:

Перпендикуляр будем называть ***биссектрисным*** (***внутренним***) ***перпендикуляром треугольника*** *если он восставлен из середины биссектрисы угла данного треугольника* (Рис. 2).

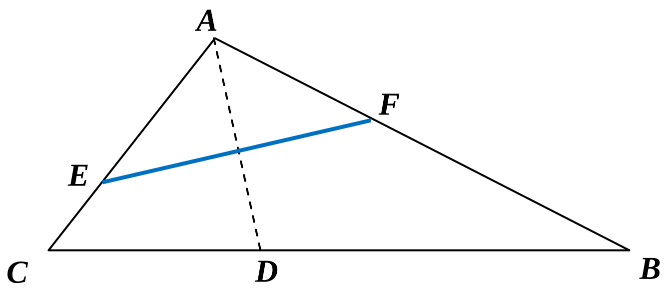

Рис. 2

Определение 2:

Стороны, ограничивающие внутренний перпендерпендикуляр будем называть ***замыкающими перпендикуляр сторонами****.*

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1:

Если дан внутренний перпендикуляр треугольника, то его концы отсекают от замыкающих сторон отрезки, длины которых соответственно пропорциональны квадратам длин замыкающих сторон.

Т. е., можем записать:

$$\frac{CE}{FB} = \frac{AC^2}{AB^2}. \qquad (2)$$

Отрезки, отсекаемые от замыкающих сторон будем называть ***отсекаемыми отрезками***.

Доказательство:

Сделаем дополнительные построения о обозначения (Рис. 3).

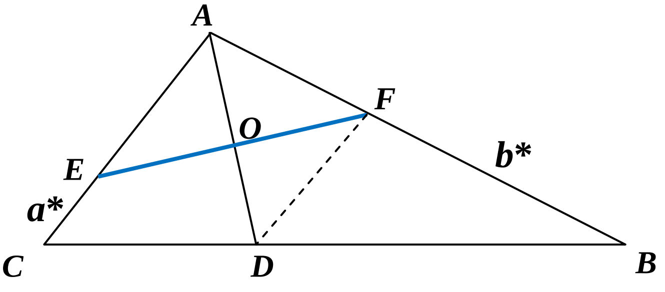

Рис. 3

Обозначим стороны треугольника $\boldsymbol{AC=a}$ и $\boldsymbol{AB=b}$, а отсекаемые отрезки $\boldsymbol{EC=a*}$ и $\boldsymbol{FB=b*}$. В силу наших данных ($\boldsymbol{AD}$ - биссектриса) и построений ($\boldsymbol{AO=OD,\ AD\perp EF}$) треугольник $\boldsymbol{AFD}$ – равнобедренный. На основании этого заключаем, что треугольники $\boldsymbol{CAB}$ и $\boldsymbol{DFB}$ подобны. Можем записать такое отношение: $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b-b*}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b*}}$ или $\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b*}(\boldsymbol{a+b})$.

Аналогично рассуждая, можно показать, что $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a*}(\boldsymbol{a+b})$. Из последних выражений получаем:

$$\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2}=\frac{\boldsymbol{a*}}{\boldsymbol{b*}}, \qquad (3)$$

что и требовалось доказать.

Кроме этого, складывая выражения $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a*}(\boldsymbol{a+b})$ и $\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b*}(\boldsymbol{a+b})$, получаем очевидное равенство:

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{a+b})\cdot(\boldsymbol{a*+b*}). \qquad (4)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник (Рис. 4). Как оказалось, *отношение длин квадратов катетов, равно, соответственно, отношению длин их проекций на гипотенузу.*

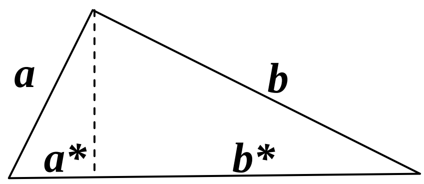

Рис. 4

Это отношение удобно выразить формулой:

$$\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2}=\frac{\boldsymbol{a*}}{\boldsymbol{b*}}. \qquad (5)$$

Как видим, формулы (3) и (5) совершенно идентичны. Оказывается, что если стороны $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в формулах (3) и (5), соответственно одинаковым обозначениям, равны, то равны и отрезки $\boldsymbol{a}*$ и $\boldsymbol{b}*$. Оставляем доказательство этого утверждения читателю.

Внимательный читатель уже мог сообразить, что построения на Рис. 3 определяют некоторый ромб $\boldsymbol{AFDE}$. Такой ромб будем называть ***вложенным в треугольник ромбом*** (Рис. 5), а диагональ-биссектрису будем называть ***определяющей диагональю вложенного ромба*** (на Рис. 5 диагональ ***AD*** является определяющей), а сторону треугольника, куда операется диагональ ***AD, опорной*** стороной треугольника.

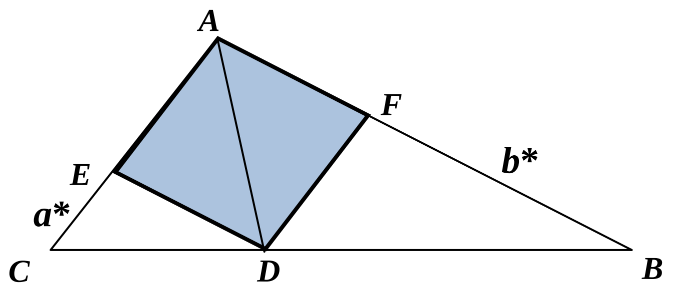

Рис. 5

Действительно, если дан угол и известна длина его биссектрисы, то по этим данным всегда можно единсвенным образом построить ромб. Очевидно, что всякий треугольник имеет три вложенных ромба. Т. е. Теорему 1 можно сформулировать не прибегая к определению внутреннего перпендикуляра. В данном случае вторая диагональ ромба будет являться внутренним перпендикуляром. Кроме того, теорему о биссектрисе внутреннего угла и теорему о внутреннем перпендикуляре треугольника можно объединить в одну.

Теорема 2:

Если дан треугольник и вложенный ром, то определяющая диагональ делит опорную сторону треугольника на части, пропорциональные смежным сторонам, а вторая диагональ вложенного ромба отсекает от смежных сторон отрезки, соответственно пропорциональные квадратам этих же сторон.

Для данной теоремы будет справедливо равенство:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB} = \frac{\sqrt{CE}}{\sqrt{BF}}. \qquad (6)$$