Замыкание сложного отношения

Сложное отношение четырёх точек на проективной прямой является единственным инвариантом проективной группы для этих четырёх точек. Если точек пять или больше, то можно построить другие инварианты, но все они могут быть выражены через сложное отношение четырёх точек. Поэтому сложное отношение четырёх точек называют ещё и основным инвариантом проективной группы [1].

Рассмотрим два отрезка на проективной прямой: (12) и (34). Как известно любая проективная прямая замкнута (Рис. 1). В силу этого, две точки на прямой делят прямую на два отрезка.

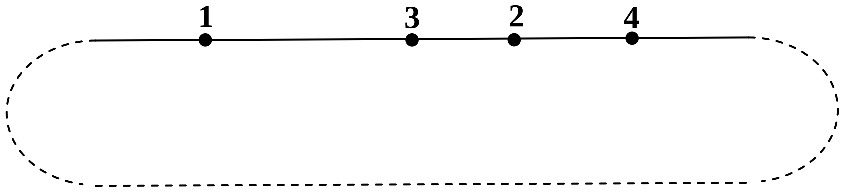

Рис. 1

Точки на прямой расположены таким образом, что концы одного отрезка (например, отрезок (34)) делят другие отрезки на две части, т. е. точка 3 находится между точками 1 и 2 и точка 4 находится на другом отрезке (12). Отрезки на прямой имеют свойство направленности. Если в формуле участвует отрезок (12), то отрезок (21) надо учитывать со знаком «-».

Сложное отношение вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{w} = (1234) = \frac{(13)}{(32)} : \frac{(14)}{(42)} = \frac{(13)\cdot(42)}{(32)\cdot(14)}$$

Очевидно, что можно вычислить 24 сложных отношения для данных точек по числу перестановок из четырёх чисел. Но различными значениями будут только шесть отношений. Покажем их все:

$$(2134) = \frac{1}{w};\quad (1324) = 1 - w;\quad (3124) = \frac{1}{1-w};\quad (2314) = \frac{w-1}{w};\quad (3214) = \frac{w}{w-1};$$

Примеры вычислений сложного отношения можно найти, например, в [2].

Все шесть значений полученного сложного отношения образуют группу, которую мы назовём $\boldsymbol{R}_6$ (от слова «relation» – отношение).

$$\boldsymbol{R}_6 : \left\{ r_0 = w,\ r_1 = \frac{1}{\mathrm{w}},\ r_2 = 1 - \mathrm{w},\ r_3 = \frac{1}{1-\mathrm{w}},\ r_4 = \frac{\mathrm{w}-1}{\mathrm{w}},\ r_5 = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}-1} \right\}.$$

С групповой операцией на этой группе мы познакомим читателя в конце заметки.

Оказалось, что эта группа изоморфна неабелевой группе шестого порядка, которая в свою черёдь изоморфна группе подстановок третьего порядка (симметрической группе $\boldsymbol{S}_3$), т. е. $\boldsymbol{R}_6 \cong \boldsymbol{S}_3$.

Как оказалось представить элементы группы $\boldsymbol{S_3}$, соответствующие элементам группы $\boldsymbol{R_6}$ очень просто. Достаточно взять выражение сложного отношения и поставить ему в соответствие подстановку четвёртого порядка. Напрмер:

$$\boldsymbol{w = (1234) \mapsto w_{00} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}}.$$

Главное, чтобы порядок чисел в сложном отношении совпадал с порядком чисел в нижнем ряду подстановки. Получаем такую группу. Знак «$\mapsto$» означает соответствие.

$$\boldsymbol{S_3 : \left\{ w_{00} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}, w_{10} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix}, w_{20} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix}, w_{30} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}, w_{40} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix}, w_{50} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix} \right\}}.$$

Заметим, что в этой группе уже действует традиционная операция умножения для перестановок.

Теперь покажем все сложные отношения, значение которых равно $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w = (1234) = (3412) = (2143) = (4321).}$$

Выяснилось, что если этим выражениям сложного отношения поставить в соответствие подстановки четвёртого порядка, как мы это делали в предыдущем случае, то мы получим известную группу Клейна $\boldsymbol{V_4}$ [3] (группа $\boldsymbol{V_4}$ названа именем Ф. Клейна, т. к. он впервые её описал в своей книге [4]):

$$\boldsymbol{V_4 : \left\{ w_{00} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}, w_{01} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}, w_{02} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}, w_{03} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} \right\}}.$$

Также выяснилось, что прямое произведение группы Клейна и группы $\boldsymbol{S_3}$ даёт всё множество (включая исходные группы) подстановок четвёртого порядка, т. е. симметрическую группу $\boldsymbol{S_4}$.

$$\boldsymbol{V_4 \otimes S_3 = S_4}.$$

Здесь элемент таблицы $\boldsymbol{w_{ij} = w_{0j} \cdot w_{i0}}$. Очевидно, что каждому такому элемену можно поставить в соответствие сложное отношение, причём каждый столбец полученной таблицы будет содержать тождественные по значению сложные отношения (нулевой столбец – это элементы группы Клейна, а нулевая строка – это элемпенты группы $\boldsymbol{S_3}$). Каждый столбец такой таблицы – это левый класс по соответствующему элементу из $\boldsymbol{S_3}$: $\boldsymbol{w_{i0} \cdot V_4 = [w_{i0}]}$.

Группа $\boldsymbol{S_4}$ имеет много интересных свойств. Например, она изоморфна группе всех поворотов куба [5] и группе всех движений тетраэдра. Мы не будем здесь на этом останавливаться.

Известно, что группа Клейна является единственным нормальным делителем (о нормальном делителе руппы можно прочитать, например, в [6]) четвёртого порядка в группе $\boldsymbol{S_4}$. А фактор-группа $\boldsymbol{S_4 / V_4}$ изоморфна симметрической группе третьего порядка, а значит - и группе сложного отношения $\boldsymbol{R_6}$.

$$R_6 \Rightarrow S_4/V_4 \cong R_6 \qquad (1)$$

Мы начинали с группы сложного отношения и к ней же и вернулись, поэтому выражение (1) можно назвать *замыканием сложного отношения*.

По сути дела, можно сказать, что мы получили изоморфное расширение множества (Рис. 2).

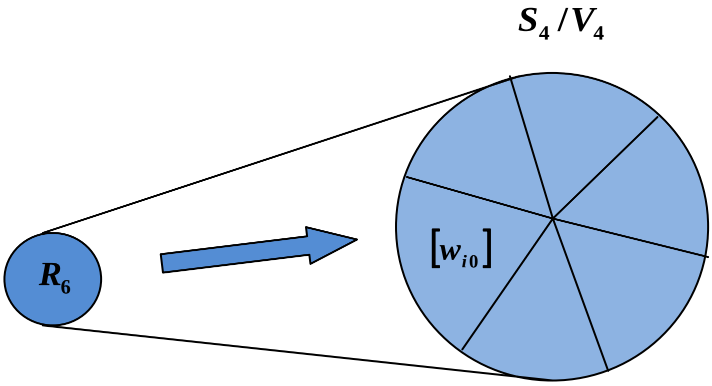

Рис. 2

В итоге также имеем изоморфизм композиций сложного отношения и композиций вращения куба (Рис. 3)

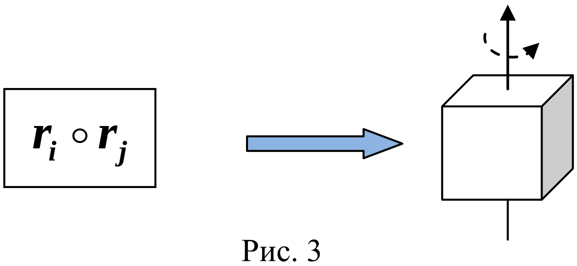

Рис. 3

Известно [7], что для описания композиций вращения куба в теоретической физике может быть использован спинорный анализ. А, может быть, использование сложного отношения будет проще и наглядней?

Нам кажется, что какой-то глубинный смысл сложного отношения ещё до конца не раскрыт. Очевидно, например, что $\prod_{i=0}^{5} r_i = 1$, но вот, что $\sum_{i=0}^{5} r_i = 3$ сразу в глаза не броатся.

Теперь познакомим читателя с операцией умножения в группе R_6. Операцию умножения будем обозначать значком «$\circ$».

Пример:

$$r_3 \circ r_2 = \left(\frac{1}{1-w}\right) \circ (1-w)$$

Чтобы умножить эти два элемента, надо правый элемент подставить на место буквы «*w*» в левом элементе и упростить, полученное выражение:

$$\boldsymbol{r}_3 \circ \boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{1}{1-w}\right) \circ (1-w) = \left(\frac{1}{1-(1-w)}\right) = \frac{1}{w} = \boldsymbol{r}_1$$

Можно сделать проверку:

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}_1$$

Литература.

1. Н. В. Ефимов, «Высшая геометрия», М., «Наука», 1971

2. Н. М. Бескин, «Деление отрезка в данном отношении», М., «Наука», 1973

3. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, «Основы теории групп», М., «Наука», 1977

4. Ф. Клейн, «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени», М., «Наука», 1989

5. П. С. Александров, «Введение в теорию групп», М., «Наука», 1980

6. Э. Фрид, «Элементарное введение в абстрактную алгебру», М., «Мир», 1979

7. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, «Гравитация. т. III», М., «Мир», 1977

Франц Герман