Франц Герман

«Золотые» уравнения и формулы

franz.h-n@yandex.ru

«Золотое сечение», порой возникает в самых неожиданных математических задачах. В данной заметке мы покажем несколько таких примеров, с которыми автор столкнулся на протяжении почти сороколетней математической деятельности. Ранее рассматриваемые примеры, в известной автору литературе, не встречались и это позволяет думать, что данная заметка будет интересна широкому кругу читателей.

Факт 1. Класс квадратных уравнений, которые мы сейчас рассмотрим, в полной мере можно назвать «золотым»:

$$X^2 - L_n \cdot X + (-1)^n = 0 \qquad (1)$$

Здесь коэффициент L_n - является n–ым членом числового ряда Люка. Напомним, числовой ряд Люка строится, точно также, как и ряд Фибоначчи по двум первым числам: $L_0 = 2$ и $L_1 = 1$:

$$\{L_n\}: 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ \cdots$$

Индекс n пробегает все значения целых чисел от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. ряд Люка может быть продолжен, как влево, так и вправо.

Уравнения (1) интересны тем, что при любом n его корнями будут числа:

$$X_1 = \Phi^n \text{ и } X_2 = \frac{1}{(-\Phi)^n},$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034\cdots$ - и есть известное «золотое» сечение.

Доказывается это не сложно, прямой подстановкой. Достаточно вспомнить, что $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}$ и $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$. Действительно, подставим $X_1 = \Phi^n$ в уравнение (1), получим верное тождество:

$$\Phi^{2n} - \left(\Phi^n + (-\Phi)^{-n}\right) \cdot \Phi^n + (-1)^n = 0$$

Для $X_2 = \frac{1}{(-\Phi)^n}$ получаем аналогично:

$$\frac{1}{\Phi^{2n}} - \left(\Phi^n + (-\Phi)^{-n}\right)\cdot\frac{1}{(-\Phi^n)} + (-1)^n = 0$$

Пример:

Пусть $n=4$, $L_4 = 7$. Получаем уравнение $X^2 - 7\cdot X + 1 = 0$. Решая данное уравнение, находим его корни: $X_1 = 2 + 3\Phi = \Phi^4$, $X_2 = 5 - 3\Phi = \frac{1}{(-\Phi)^4}$

На Рис. 1 показано, как выглядят графики функций, соответствующих некоторым уравнениям из класса уравнений (1)

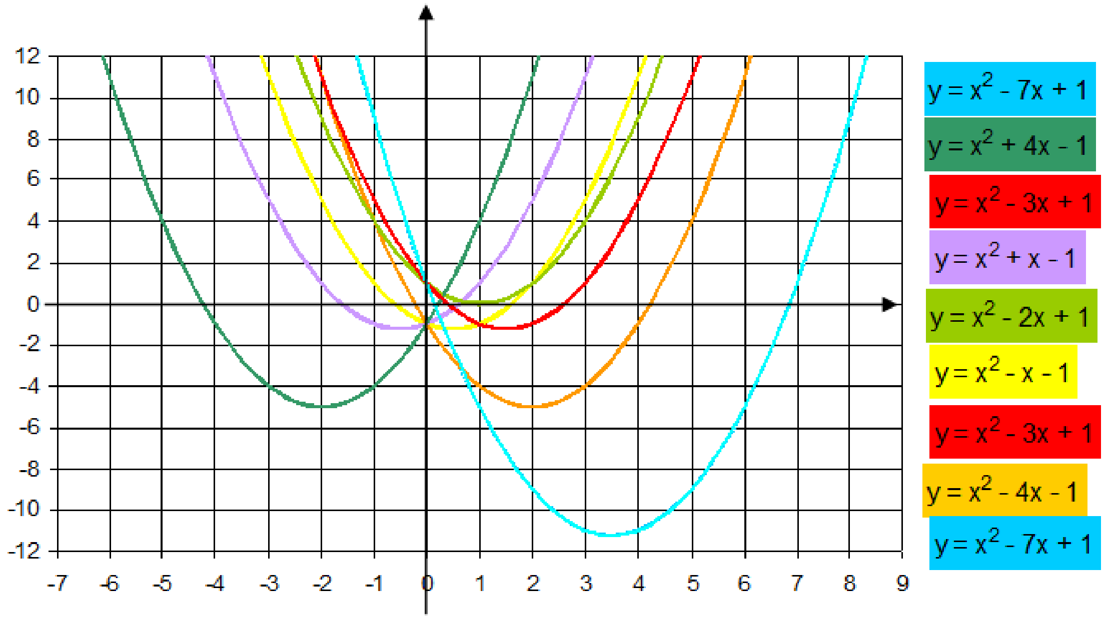


Рис.1

Заметим, что для чётных n и чётных $-n$ получается одно и то же уравнение. Функции таких уравнений выделены на Рис. 1 одним цветом. При $n = 1$ получаем классическое уравнение «золотого» сечения (функция показана жёлтым цветом).

Известно, что числа Люка и числа Фибоначчи связаны различными интересными формулами. Например: $L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ и др. Здесь через F_n обозначены члены ряда Фибоначчи, а сам ряд начинается при $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$. Поэтому, уравнения (1) могут быть переписаны в другом виде, с учётом вышепоказанных формул.

Факт 2. Рассмотрим ещё один класс «золотых» уравнений третьего порядка.

$$X^3 - (n+2)\cdot X^2 + n\cdot X + (n+1) = 0 \qquad (2)$$

Для нас эти уравнения интересны тем, что они имеют по два общих корня: $X_1 = \Phi$ и $X_2 = 1 - \Phi$. Графики функций таких уравнений показаны на Рис. 2.

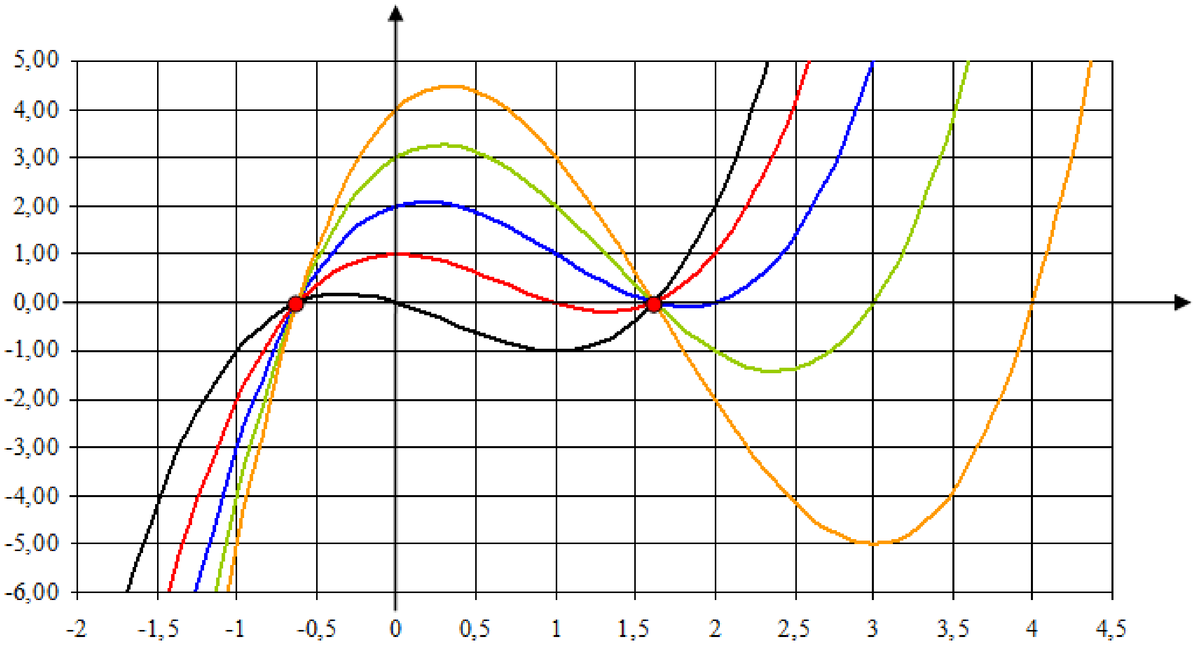


Рис. 2

Факт этот почти очевиден, т. к. уравнения (2) могут быть представлены в виде произведения двух уравнений:

$$\left(X^2 - X - 1\right) \cdot \left(X - n - 1\right) = 0$$

При $n = -1$ получаем классический случай «золотого» уравнения. Здесь третий корень будет равен нулю (график соответствующей функции показан на Рис. 2 чёрным цветом).

Факт 3. Существует квадратное уравнение, связывающее два последовательных члена ряда Фибоначчи:

$$F_{n+1}^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2 - (-1)^{n+1} = 0 \qquad (3)$$

Уравнение (3) интересно тем, что, зная значение члена ряда Фибоначчи и его порядковый номер, можно рекуррентно воспроизвести весь ряд. А т. к. корня два, то ряд воспроизводится в двух видах, где его члены либо положительны, либо все отрицательны.

Уравнение (3) просто выводится из известной формулы $F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (-1)^{n+1}$. Достаточно вспомнить, что $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$.

При $n \in \{0,-\infty\}$ получаем знакопеременный ряд Фибоначчи. Этот же ряд можно получить и для $n \in \{0,+\infty\}$, но использовать не правило сложения двух предыдущих членов для получения третьего, а правило вычитания: $F_n - F_{n+1} = F_{n+2}$. Тогда, по аналогии с уравнением (3), получаем такое уравнение:

$$F_{n+1}^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2 + (-1)^{n+1} = 0 \tag{4}$$

Аналогичные уравнения существует и для ряда Люка:

$$L_{n+1}^2 + L_n \cdot L_{n+1} - L_n^2 - 5(-1)^{n+1} = 0 \tag{5}$$

$$L_{n+1}^2 + L_n \cdot L_{n+1} - L_n^2 + 5(-1)^{n+1} = 0 \tag{6}$$

Факт 4. При исследовании взаимно-обратного показательно-степенного уравнения с двумя неизвестными:

$$X^Y = Y^X, \tag{7}$$

мы сталкиваемся с ещё двумя интересными, на наш взгляд, уравнениями

$$X^{\frac{1}{X-1}} = \left(1 + \frac{1}{X}\right)^X \tag{8}$$

$$X^{\frac{X}{X-1}} = \left(1 + \frac{1}{X}\right)^{X+1} \tag{9}$$

Дело в том, что уравнения (8) и (9) имеют единственное решение $X = \Phi$.

Известный популяризатор, канадский математик Росс Хонсбергер сказал: «хочется затаить дыхание, когда смотришь на эти уравнения».

Дважды «золотое» сечение встретилось автору в геометрических исследованиях.

Факт 5. Рассмотрим полуокружность Рис. 3.

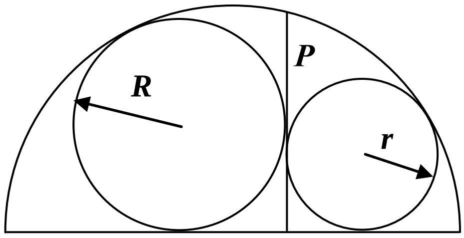


Рис. 3

Восставленный, в произвольной точке диаметра, перпендикуляр $\boldsymbol{P}$ делит полуокружность на две части. Очевидно, что в каждую из этих частей можно вписать окружности радиусов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$. Тогда уравнение «перпендикуляра» будет иметь вид:

$$\boldsymbol{P}^2 - (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{P} - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{r} = \mathbf{0} \qquad (10)$$

Это уравнение не сложно выводится и его вывод мы здесь не приводим.

Как выяснилось, если $\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}} = \Phi$, то $\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}} = \Phi^2$, а $\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{r}} = \Phi^3$.

Факт 6. Ещё пример из геометрии. Рассмотрим частные случаи Большой Теоремы Понселе для треугольника и для четырёхугольника (Рис. 4).

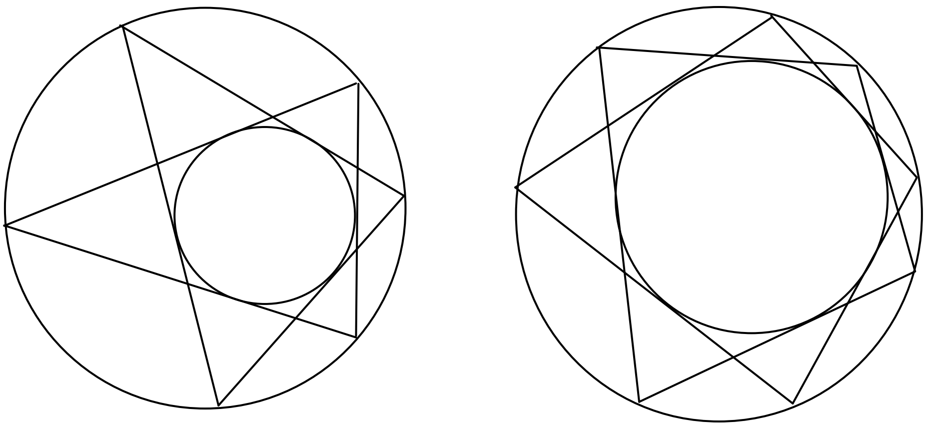


Рис. 4

Если даны вписанная и описанная окружности около данного треугольника, то существует бесконечно много треугольников, вписанных и описанных около данных окружностей (Рис. 4 слева).

Возьмём произвольную точку на описанной окружности и проведём из неё касательную к вписанной окружности до пересечения с описанной окружностью. Из новой точки вновь проведём касательную. И замкнув первую и последнюю точки, мы вновь получим касательную к вписанной окружности.

Такие же рассуждения справедливы и для четырёхугольника. Если четырёхугольник имеет вписанную и описанную окружности, то существует бесконечно много четырёхугольников вписанных и описанных около данных окружностей (Рис. 4 справа).

Рассмотрим случай, когда описанные окружности около треугольников и четырёхугольников равны и совпадают, а вписанные окружности концентричны. И, кроме этого, центр описанной окружности принадлежит вписанной окружности четырёхугольников.

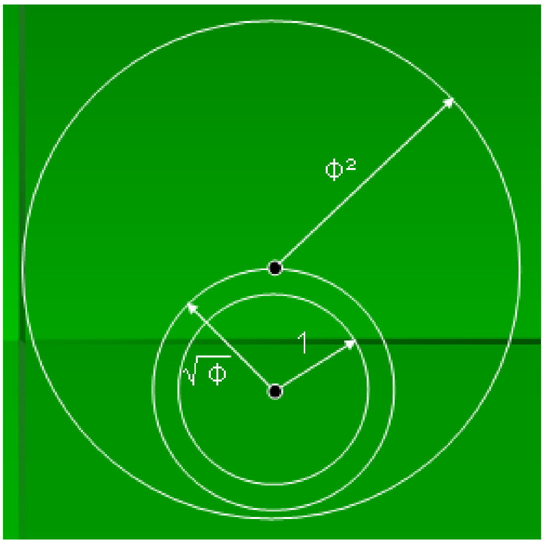


Рис. 5

В этом случае радиусы окружностей связаны «золотыми» значениями, как показано на Рис. 5. и реализованы в построении на Рис. 6.

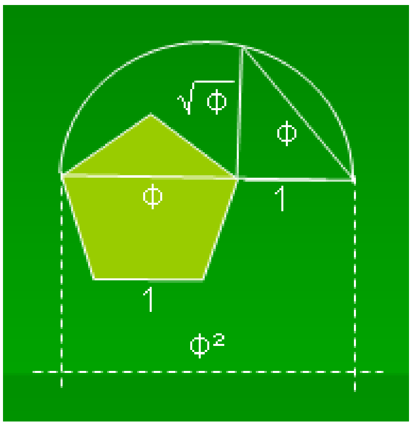


Рис. 6

В основе конструкции Рис. 6 лежит правильный пятиугольник с единичной стороной.

Факт 7. «Золотое» сечение появляется и в одной из задач, связанной с непериодическим замощением плоскости.

Примеры исследуемых замощений показаны на Рис. 7.

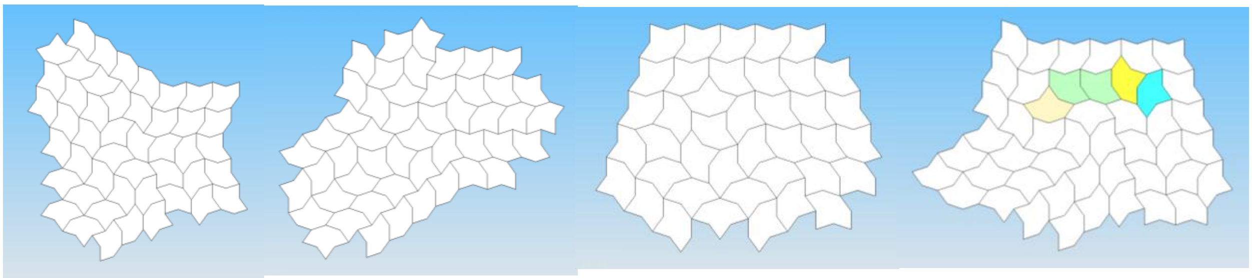


Рис. 7

Здесь «клеткой» замощения является фигура, показанная на Рис. 8.

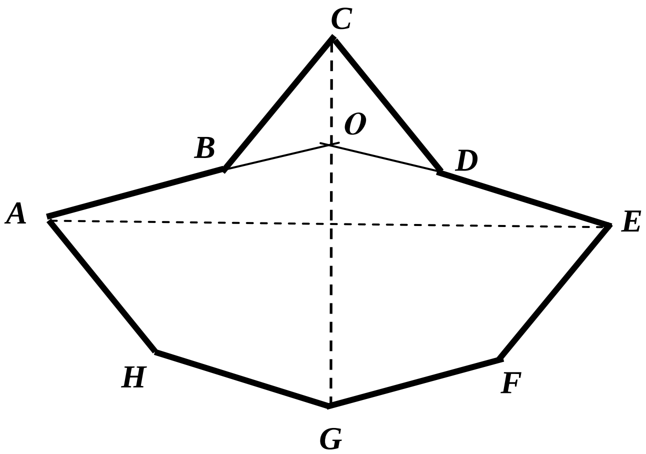


Рис. 8

Наша «клетка», как геометрическая фигура, имеет **20** диагоналей, которые можно разделить на 7 типов относительно их длин. Диагонали будем обозначать через d_i. Самая короткая по длине диагональ d_1, самая длинная - d_7.

Диагонали d_1 - (***BD, DF, BH***), d_2 - (***BG, GD***), d_3 - (***EG, DH, FH, FB, AG, CE, CA***), d_4 - (***HC, AD, BE, CF***), d_5 - (***CG***), d_6 - (***HE, AF***), d_7 - (***AE***).

Длины диагоналей вычисляются по формулам:

$$d_1 = a\sqrt{3-\Phi}, \qquad d_2 = a\sqrt{4-\Phi},$$

$$d_3 = a\sqrt{5-\Phi}, \qquad d_4 = a\sqrt{6-\Phi},$$

$$d_5 = a\Phi(3-\Phi), \qquad d_6 = a\Phi^2, \qquad d_7 = a\Phi\sqrt{5-\Phi}.$$

«Клетка» замощения является перестройкой двух правильных пятиугольников.

Факт 8. Представьте себе, что ваш пол выложен паркетной плиткой, которая имеет размеры «золотого» прямоугольника.

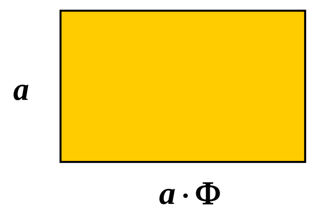
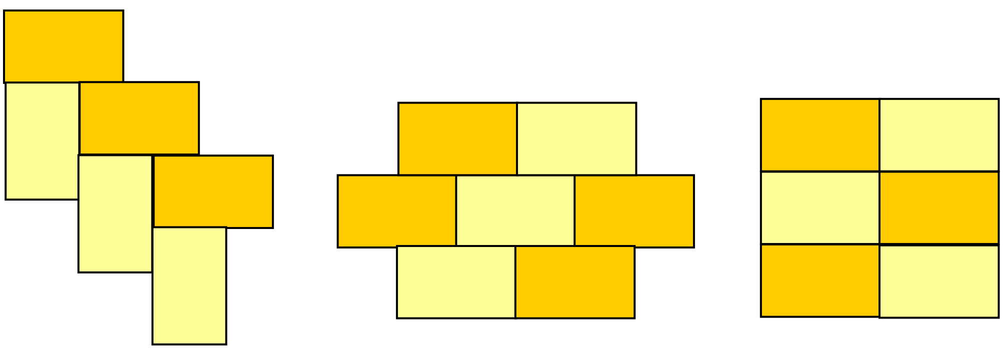


Рис. 9

Каким узором выложен ваш паркет – неважно. Это может быть традиционный узор паркетных полов (Рис. 10а), может быть узор в виде кирпичной кладки (Рис. 10б) или просто – в виде сетки (Рис. 10в).



а б в

Рис. 10

Кроме того у вас в руках карандаш определённой длины, а именно: $L = \frac{1}{2} a \cdot e$, где $e = 2.71828182...$ - основание натуральных логарифмов.

Случайным образом ваш карандаш падает на пол. Спрашивается: какова вероятность W того, что карандаш при падении пересечёт линии паркетного узора?

Обозначим через D_i число пересечений карандашом паркетных линий. Индекс i - это номер проводимого эксперимента - падения карандаша на пол.

Возможны следующие ситуации. Карандаш не пересёк ни одной линии (Рис. 11 а), $D_i = 0$. Карандаш пересёк только одну линию (Рис. 11 б), $D_i = 1$. Карандаш пересёк две линии (Рис. 11 в), $D_i = 2$. И, наконец, возможна ситуация, когда карандаш будет пересекать три линии (Рис. 3г), $D_i = 3$.

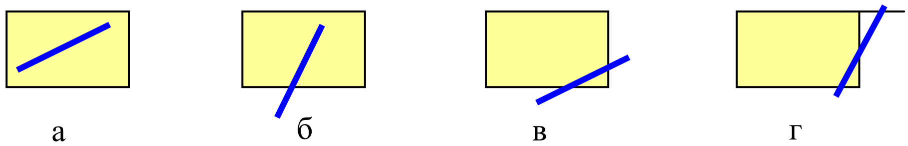

а б в г

Рис. 11

Предположим, что мы провели N таких экспериментов. Тогда вероятность этого события можно подсчитать и записать в виде следующего выражением:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{N} D_i}{N}$$

Однако, как оказалось, для вероятности данного события существует точная формула:

$$\boxed{W = \frac{\Phi \cdot e}{\pi}} \qquad (11)$$

Мы специально взяли такие размеры паркетной плитки и карандаша, чтобы заинтриговать читателя и показать, как не совсем тривиальным способом *можно объединить в одной формуле три фундаментальных числа*.

Факт 9. Как оказалось, «золотое» сечение можно встретить не только в науке, технике, архитектуре, искусстве, музыке, окружающем нас мире, но и в спорте.

Тот кто играл или играет в футбол почти всегда чувствует, что одно футбольное поле по своим размерам более удобно чем другое. Как вы, наверное, знаете, точного стандарта для размеров футбольного поля не существует. В этом можно убедиться, взяв в руки любой учебник по футболу. И, как оказывается, наиболее удобным футбольным полем будет именно «золотой» прямоугольник. Из учебника по футболу мы имеем:

М 1 : 1000

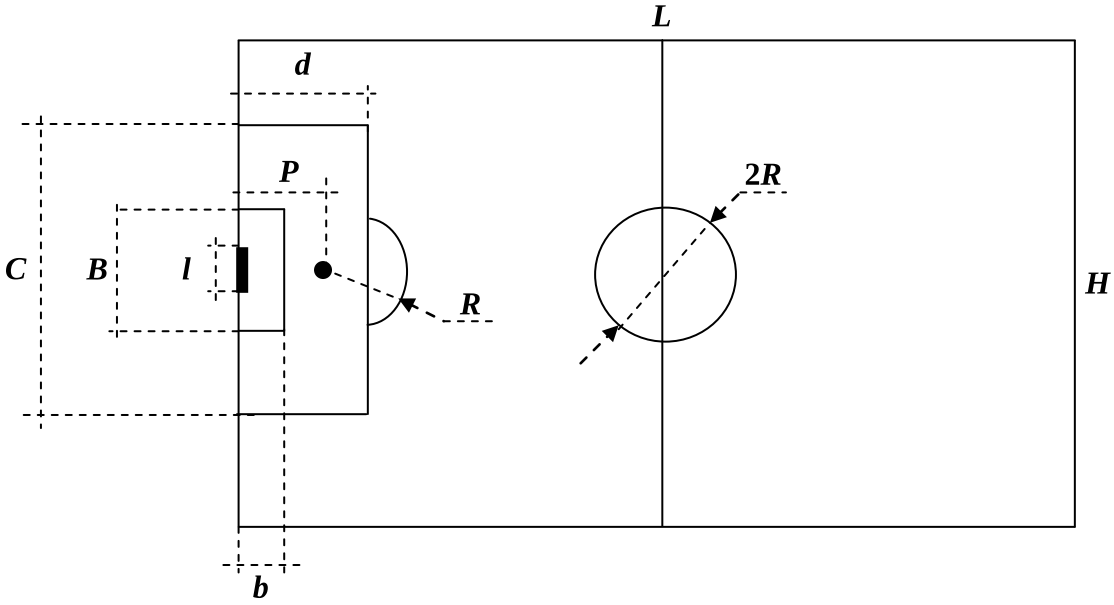


Рис. 12

B - ширина вратарской площадки, **3*b* = *d*** - ширина штрафной площади, **2*b* + *l* = *B*** - длина вратарской площадки, $2d + l = C$ - длина штрафной площади, $\frac{B}{2} = R$ - радиус центрального круга, **2*b* = *P*** - расстояние пенальти. Но размеры футбольных ворот имеют точный стандарт.

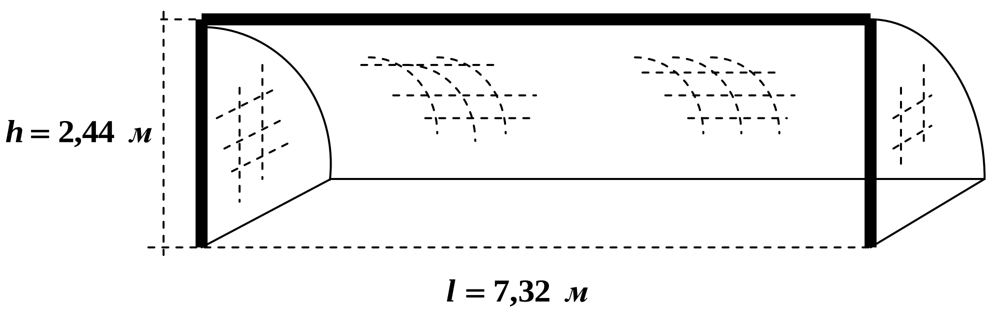


Рис. 13

Чтобы вычислить величины ***b, d, B, C*** и ***R*** надо знать число ***P***. Обозначим через ***S*** площадь ворот, т. е. $S = h \cdot l$.

Как оказалось:

$$P = \Phi^2 \cdot \sqrt{S} = 11[\text{м}]\ 6[\text{см}] \qquad (12)$$

Это главная формула футбольного поля. Теперь не трудно вычислить все другие размеры. Кроме того, выяснилось, что $H = \Phi \cdot C$, т. е.

$\boldsymbol{H} \approx \mathbf{65{,}4\ м}$. Тогда самая «удобная» длина поля будет $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{H} \approx \mathbf{105{,}8\ м}$. В учебнике по футболу мы находим: $\boldsymbol{H} \approx \mathbf{45 \div 90\ м}$, $\boldsymbol{L} \approx \mathbf{90 \div 120\ м}$. Вычисленные нами размеры для $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{H}$ лежат почти точно в середине указанных в учебнике размеров.