Франц Герман

О развёртках куба

franz.h-n@yandex.ru

…11 «развёрток куба» образуют самый обескураживающий набор.
(Мартин Гарднер)

Почти каждый, кто пытается самостоятельно найти все развёртки куба сталкмвается с вопросом: все ли развёртки найдены? Дело в том, что куб очень симметричная фигура и на подсознательном уровне нам кажется, что и число развёрток куба должно быть каким-то «красивым», похожим на другие характеристики куба (напомним, что куб имеет 12 рёбер, 8 вершин, 6 граней и 4 диагонали). Как оказалось, куб имеет 11 развёрток. И когда мы находим 11-ю развёртку, кажется, что не все ещё развёртки найдены и самые сложные ещё скрыты от нас.

В данной заметке мы покажем, что куб имеет именно 11 развёрток.

Покажем известные 11-ть развёрток куба.

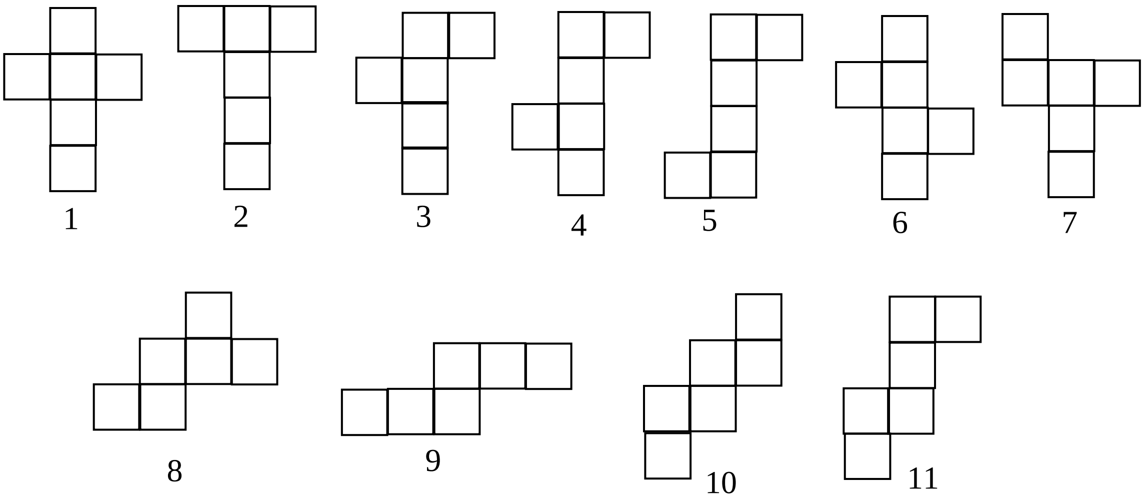


Рис. 1

Представим исследуемый куб в виде графа, вершинами которого являются грани нашего куба.

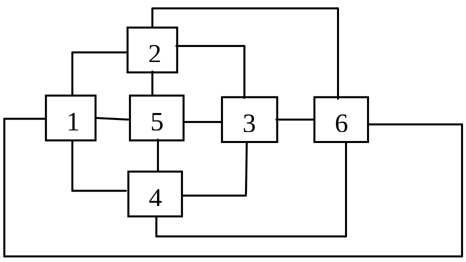
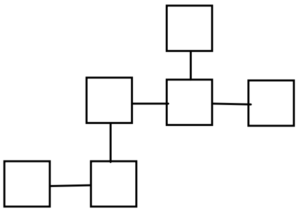


Рис. 2

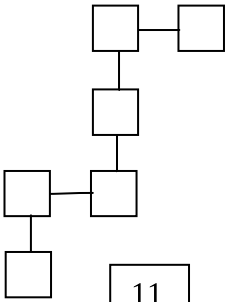
В дальнейшем все рассуждения будем вести для куба, грани которого пронумерованы так как показано на Рис. 2, т. е. никакие две грани нельзя поменять местами или как-то изменить нумерацию.

Неразрезанный куб имеет 12 рёбер, что соответствует 12 связям графа, показанного на Рис. 2. Чтобы получить развёртку куба необходимо несколько рёбер куба разрезать (или разорвать несколько связей графа Рис.2). Любую развёртку легко представить в виде графа.

Например:



8



11

Рис. 3

Такие графы (не имеющие циклических связей) называются деревьями. Если дерево имеет $\boldsymbol{B}$ вершин, то у него должно быть $\boldsymbol{B}$**-1** связеё. Т. о всякая развёртка, представленная в виде графа будет иметь 5 связей. Следовательно 7 из 12 связей мы должны разорвать.

Рассмотрим сколькими вариантами это можно сделать.

$$\boldsymbol{V = C_{12}^{7} = \frac{12!}{7!\cdot(12-7)!} = 792}$$

Среди этих **792** вариантов находятся и все варианты 11-ти известных развёрток куба.

Рассмотрим сколькими способами можно разрезать граф куба, чтобы получить 11 известных развёрток.

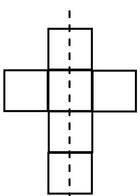
Определение:

Симметричной развёрткой будем называть такую развёртку, которая имеет либо центральную, либо зеркальную симметрию.

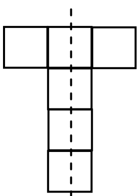
Если развёртка не обладает никакой из этих симметрий, то будем называть её **ассимметричной**.

Исходя из этого, 11 известных развёрток разобьются на два класса.

1) Симметричные



1



2

Рис. 4

На Рис. 4 показаны развёртки, обладающие зеркальной симметрией.

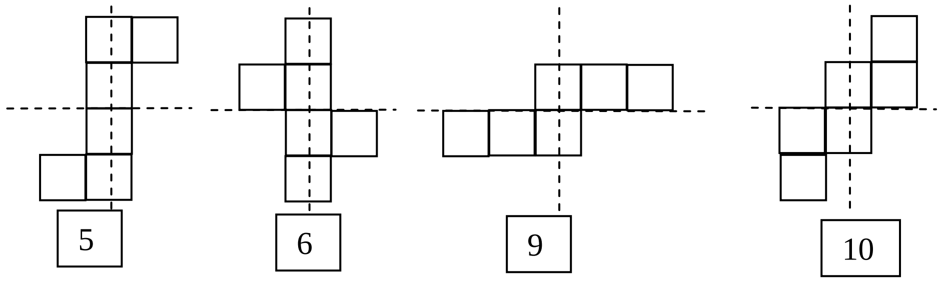


Рис. 5

На Рис. 5 показаны развёртки, обладающие центральной симметрией.

2) Ассимметричные

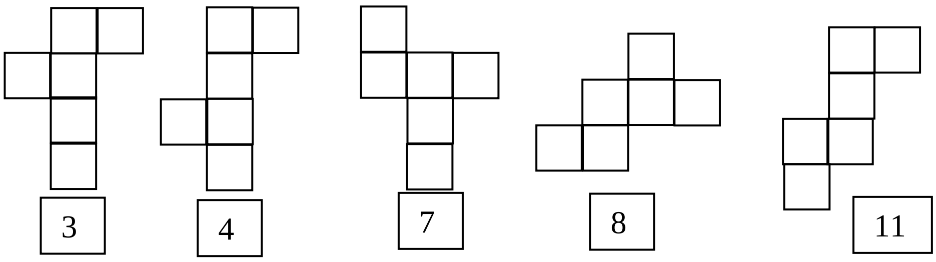


Рис. 6

Все 11 развёрток можно разбить ещё на два класса.

I) Развёртки, имеющие в своём графе хотя бы одну вершину (узел) с максимальным числом связей – тремя.

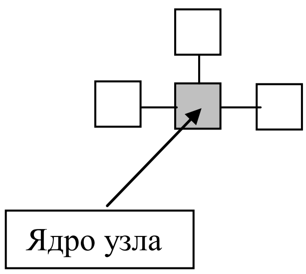


Рис. 7

II) Развёртки, имеющие максимальный узел вида

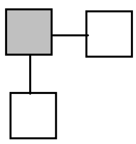


Рис. 8

Рассмотрим узел I).

Каждая грань куба (вершина графа) имеет 4 связи. Ядро узла I) имеет 3 связи, следовательно получаем $\boldsymbol{C_4^3 = 4}$ различных вариантов (сочетаний) связей. Причём надо учесть, что при зеркальном отражении связей в узле получаются разные развёртки (здесь учитывается нумерация вершин графа, т. к. приходится разрывать различные связи). Т. е. развёрток будет в 2 раза больше.
Например:

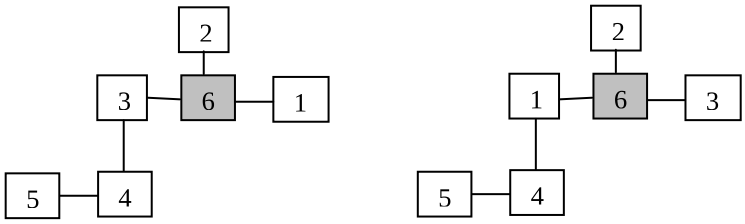


Рис. 9

Итого получаем: $\boldsymbol{6 \cdot \left(2 \cdot C_4^3\right) = 48}$ вариантов каждой развёртки с узлом типа I) (коэффициент 6 говорит о том, что куб имеет 6 граней).

Рассмотрим узел II).

Ядро узла II) имеет 2 связи, причём соседние. Т. е. из 6-ти сочетаний ($\boldsymbol{C_4^2 = 6}$) необходимо выбросить 2 сочетания, когда ядро не имеет соседние связи. Аналогично играет роль и порядок нумерации связанных с ядром граней.
Например:

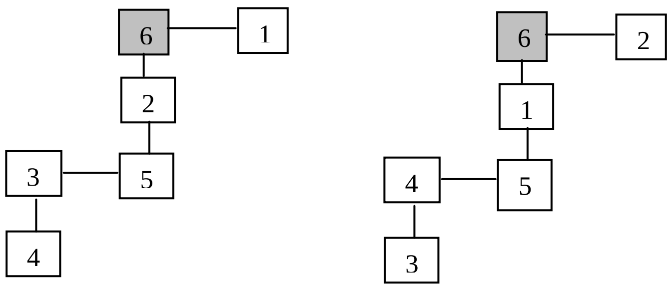


Рис. 10

Т. е. получаем $\boldsymbol{6 \cdot 2 \cdot \left(C_4^2 - 2\right) = 48}$ вариантов.

Т. к. 6 из 11 развёрток обладают либо зеркальной, либо центральной симметрией, то каждая из них будет иметь не 48, а 24 различных варианта.

Обозначим через $\boldsymbol{V_1}$ число возможных разрезаний куба (графа), при которых получаются известные 11 развёрток. Т. е. с учётом того, что симметричных развёрток 6, а ассимметричных 5 будем иметь:

$$\boldsymbol{V_1 = 6 \cdot 24 + 5 \cdot 48 = 384}$$

Теперь рассмотрим такие варианты разрезов 7-ми связей графа, при которых развёрток вообще не получается. Граф просто распадается на две части (эти варианты тоже входят в общее число разрезов – **792**).
Имеется три таких случая.

Первый случай, когда одна грань куба отрезается совсем.

Оставшийся граф будет иметь в этом случае 8 связей, из которых по условиям задачи надо разрезать ещё 3, чтобы получить общим числом 7 разорванных связей. Получаем: $\boldsymbol{C_8^3 = 56}$. А т. к. граней в кубе 6, то общее число для первого случая будет: $\boldsymbol{6 \cdot C_8^3 = 336}$. Но среди этих вариантов есть 12 повторяющихся вариантов. Действительно, вырезав одну грань (вершину), например номер 6, остаётся ещё четыре грани с номерами 1, 2, 3 и 4, которые имеют три связи. А мы можем из оставшихся 8-ми связей разорвать как раз три. Т. е. символически это можно проиллюстрировать так:

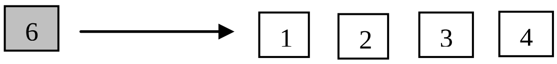


Рис. 11

Вырезая грань с номером 5, мы снова подвергаем полному вырезанию те же четыре грани (Рис. 12)

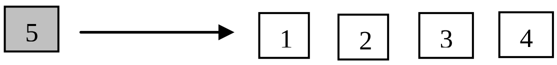


Рис. 12

Аналогичные схемы вырезания граней показаны на Рис. 13

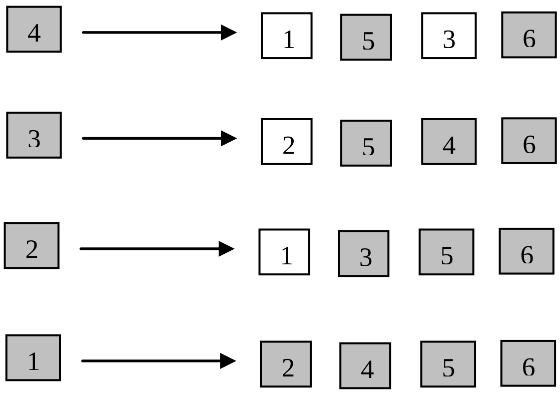


Рис. 13

На Рис. 11 – 13 показаны для всех шести граней 12 неповторяющихся комбинаций (квадратики не окрашены в серый цвет), когда две грани могут быть целиком вырезаны. Т. о. окнчательно для первого случая имеем **336 – 12 = 324** возможных варианта вырезания одной грани целиком.

Второй случай, когда вырезаются две связанные между собой грани.

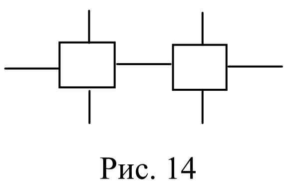


Рис. 14

При этом разрываются 6 связей. Т. е. таких пар может быть $\boldsymbol{C_6^2 - 3 = 12}$. Т. к. три пары граней в кубе не имеют общих связей. Это грани 1 и 3, 2 и 4, 5 и 6 (см. Рис. 2).

Связь между вырезанными гранями разрывать нельзя. Иначе снова получим первый случай. Таким образом, в оставшемся графе из 5-ти связей можно разрезать только одну. Это можно сделать пятью способами. Окончательно для случая два имеем $\mathbf{12 \cdot 5 = 60}$ вариантов вырезания двух связанных граней.

Третий случай, когда куб разрезается на одинаковые части (Рис. 15)

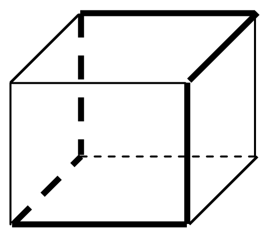


Рис. 15

При таком разрезе разрываются 6 связей. Линия разреза на рисунке выделена жирным. При этом заметим: сохраняются две вершины, связи которых не нарушены. Куб имеет 8 вершин. Следоваиельно так разрезать куб можно 4-мя способами. В двух полученных частях остаётся 6 рёбер (связей), из которых разрешается разрезать только одну. Это можно сделать 6-ю различными способами. Итого для третьего случая имеем $\mathbf{4 \cdot 6 = 24}$ варианта. Обозначим через $\boldsymbol{V_2}$ число вариантов раскроя куба, когда вообще развёрток не получается.

$$\boldsymbol{V_2} = \mathbf{324 + 60 + 24 = 408}$$

Таким образом, получаем $\boldsymbol{V_1 + V_2} = \mathbf{384 + 408 = 792} = \boldsymbol{V}$, т. е. все варианты раскроя куба исчерпаны. Следовательно куб не может иметь дополнительных развёрткок, кроме тех 11-ти, которые нам уже известны.