

Франц Герман

# Закоулки и перекрёстки математики

LAP LAMBERT  
Academic Publishing

**Франц Герман**

## **Закоулки и перекрёстки математики**

LAP LAMBERT Academic Publishing

**Impressum / Выходные данные**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen Warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брэндах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено:  
[www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Verlag / Издатель:

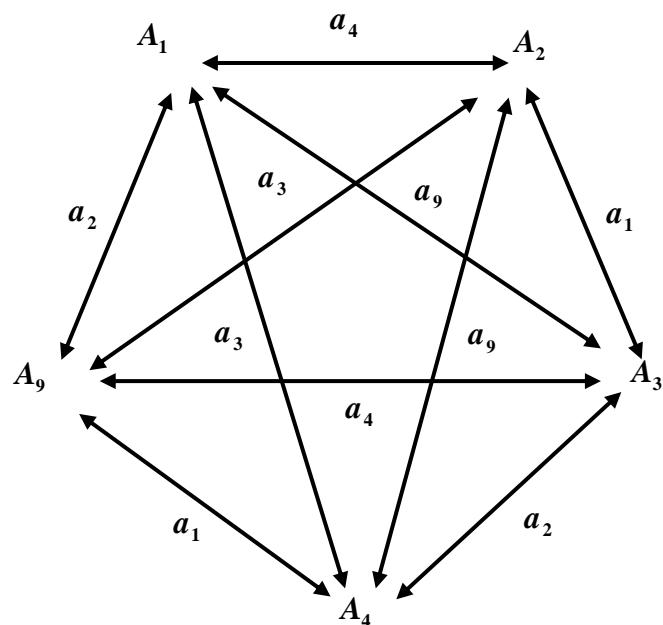
LAP LAMBERT Academic Publishing  
ist ein Imprint der / является торговой маркой  
OmniScriptum GmbH & Co. KG  
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия  
Email / электронная почта: [info@lap-publishing.com](mailto:info@lap-publishing.com)

Herstellung: siehe letzte Seite /  
Напечатано: см. последнюю страницу  
ISBN: 978-3-659-81379-5

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2015 OmniScriptum GmbH & Co. KG  
Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2015

**Франц Герман**

**Закоулки и перекрёстки математики**



**2015**

## Содержание

## **Часть I. Высшая геометрия**

- Кривая центров. Введение в теорию касательных сфер. стр. 1
  - Дифференциальное уравнение сопряжённых пространств стр. 33
  - Вторая квадратичная форма и конические сечения стр. 37
  - Геодезические линии стр. 40
  - Тороида стр. 48
  - Теория векторных функций некоторых геометрических преобразований стр. 55

## **Часть II. Нелинейная алгебра**

- Оператор обращения стр. 69
  - Теорема о разложении матрицы в линейную комбинацию её сопряжённых корней стр. 72
  - Доказательство существования бесконечного множества корней квадратных из матриц вида  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  стр. 75
  - О невозможности извлечения корня квадратного из матриц вида  $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$  и  $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$  стр. 76
  - Условие идемпотентности квадратных матриц второго порядка стр. 77
  - Нелинейные системы уравнений второго порядка, задаваемые матричными уравнениями стр. 78
  - Извлечение корня квадратного из матриц четвёртого порядка стр. 82

- Теорема о разложении матрицы второго порядка на коммутативные множители стр. 84
- Собственное уравнение матрицы второго порядка стр. 89
- Мнимые матрицы стр. 91
- Вычисление корней кубических из матриц второго порядка стр. 95
- К вопросу о вычислении корней квадратных и кубических из комплексного числа стр. 98
- К вопросу о вычислении корней квадратных и кубических из кватернионов стр. 100
- Разложение кватернионов на коммутативные множители стр. 102

### **Часть III. Теория групп**

- Теория циклического изоморфизма стр. 105
- Группы симметричных конфигураций стр. 126
- Группа СК седьмого порядка стр. 135
- Число различных конфигураций простого порядка стр. 137
- Представление групп 12-го порядка минимальными подстановками стр. 138
- Разложение группы  $G_3$  12-го порядка в прямое произведение своих подгрупп стр. 146

### **Приложение**

- За разностью потенциалов стр. 149
- Популярное пояснение автора стр. 189

### **Литература**

стр. 196

## Часть I

### Высшая геометрия

#### Кривая центров. Введение в теорию касательных сфер.

*Эти кривые могут быть определены  
многими различными способами*

Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер

В данной статье мы познакомим читателя с теорией кривых центров (ТКЦ), как с альтернативной теорией для теории конических сечений (ТКС).

Рассмотрим две произвольные непересекающиеся окружности. Очевидно, что построить касательную окружность к этим двум данным окружностям можно различными четырьмя способами (Рис. I.1).

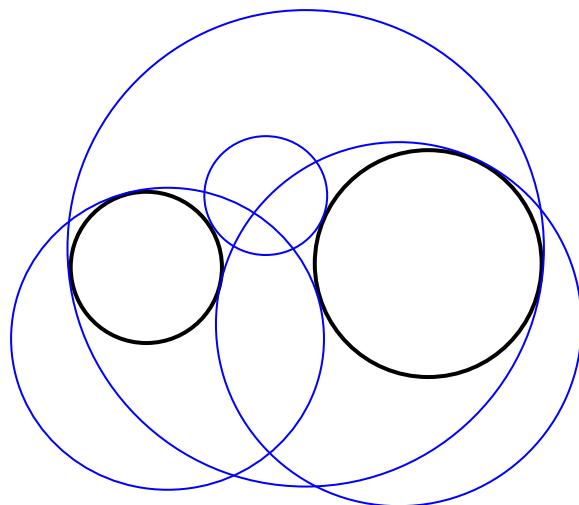


Рис. I.1

Построенная окружность может касаться двух данных снаружи. А может - и изнутри. Кроме того, построенная окружность может касаться одну данную окружность снаружи, другую при этом – изнутри. И наоборот. Т. е., как и было сказано, - четырьмя различными способами. И, кроме того, в каждом из этих четырёх случаев построенная окружность не является единственной.

Рассмотрим первый случай, когда окружность касается двух данных снаружи.

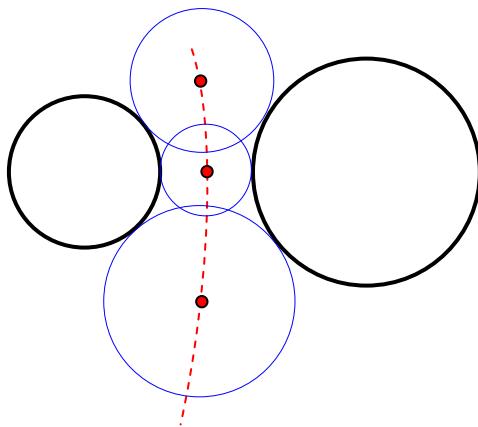


Рис. I.2

На Рис. I.2 показан пример - три окружности первого типа. Очевидно, что построить таких окружностей можно бесконечно много. Нас будет интересовать задача поиска геометрического места точек, где лежат центры построенных окружностей. Т. е. аналитический вид такой кривой. Мы будем называть её ***кривой центров***.

Введём систему координат, как показано на Рис. I.3.

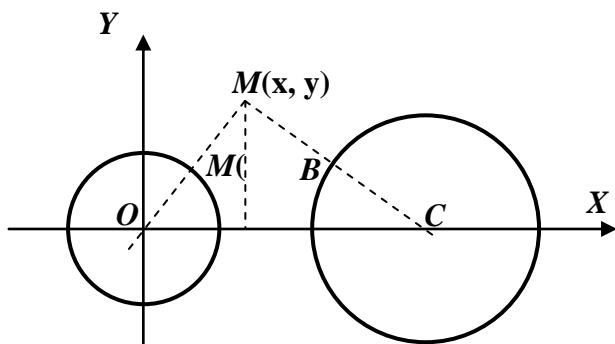


Рис. I.3

Пусть  $OC = n$ ,  $OA = r$ ,  $CB = R$ .  $M$  – текущая точка искомой кривой, т. е. центр некоторой окружности, касающейся двух данных внешним образом. Тогда можем записать:  $\sqrt{x^2 + y^2} = r + AM$ , но т. к. точка  $M$  – центр окружности, которая касается двух данных, то  $AM = MB = \sqrt{(n-x)^2 + y^2} - R$ . Подставляя  $AM$  в первое выражение получаем:

$$R - r = \sqrt{(n-x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (I.1)$$

Выражение (I.1) и будет уравнением кривой центров.

Не трудно понять, что (I.1) является уравнением второго порядка, а это значит, что наша кривая принадлежит к классу линий конического сечения (исключая, конечно, вырожденные случаи). Попробуем разобраться, что же это за линия.

Правая часть выражения (I.1) – это ни что иное, как разность расстояний текущей точки искомой кривой до двух фиксированных точек  $C$  и  $O$ . Причём разность эта есть величина постоянная – ( $R - r$ ). Именно таким свойством обладает гипербола [1]. Глядя на Рис. I.2 понятно, что найденная кривая центров ни что иное, как левая ветвь гиперболы, а точки  $O$  и  $C$  – её фокусы. Пусть  $x_0$  – точка пересечения кривой центров с

осью абсцисс. Т. е.  $x_0 = \frac{n - R + r}{2}$ . Пользуясь классической терминологией

[3] введём обозначения:  $n = 2c$  – межфокусное расстояние, а  $R - r = 2a$  – абсолютная разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов. Теперь сделаем преобразования координат:  $Y^* = Y$ ,  $X^* = X - \frac{n}{2}$ .

Переходя к новым координатам и используя принятые обозначения получаем:

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} - \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1, \quad (\text{I.2})$$

здесь  $b^2 = c^2 - a^2$ . Т. е. получаем канонический вид уравнения гиперболы.

Рассмотрим второй случай, когда построенная окружность касается данные окружности изнтри.

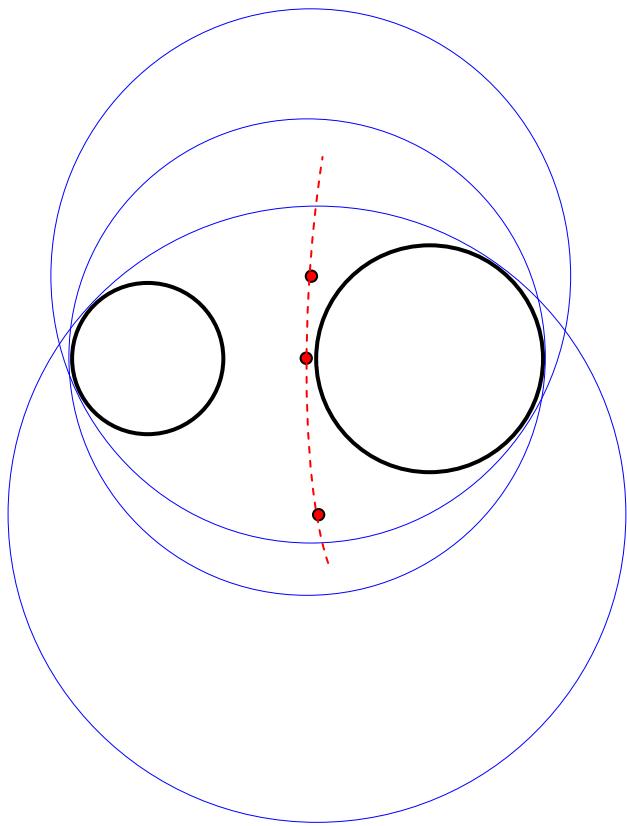


Рис. I.4

Введём систему координат аналогичным образом, как мы делали это для первого случая.

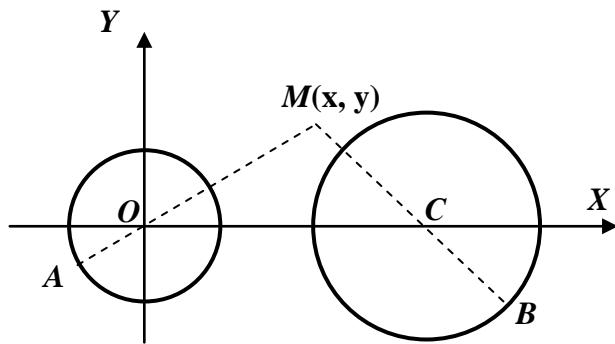


Рис. I.5

В данном случае будем иметь:  $AM = MB$ . Расписывая это равенство получаем такое выражение:

$$R - r = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(n-x)^2 + y^2}. \quad (\text{I.3})$$