

## Франц Герман

### К вопросу о существовании «винта» в Природе

#### Содержание

Вводная часть. О симметрии и теории групп.	стр. 1
Часть 1. Подгруппа симметрической группы $S_n$ , как группа винта. Формула $B_n \cong S_{n-1}$ .	стр. 8
Часть 2. Теория конкурентных прямых Паскаля	стр. 20
Заключительная часть. Асимметрия Природы	стр. 65
Дополнение. Группы симметричных конфигураций	стр. 73
Литература	стр. 84

#### Вводная часть. О симметрии и теории групп.

Скажем несколько слов о сути нашего исследования. Если по большому, то мы в данном исследовании намереваемся приоткрыть для читателя ещё одну загадку Природы. В природе всё устроено гармонично и правильно. А когда мы говорим о гармонии, то даже уже на уровне подсознания возникает понятие симметрии. По словам Г. Вейля «Симметрия - ... — является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство» ([2], стр. 37). Другой выдающийся учёный говорил: «Когда-то симметрию называли «гармонией мира»» ([10], стр.5). Немного расшифруем понятие симметрии. С этим словом знакомится каждый школьник, как только он начинает изучать геометрию. Такие понятия, как осевая или зеркальная симметрия, центральная симметрия, симметрия поворотов знакомы всем. Каждый, кто хоть раз столкнулся с восточными узорами в архитектуре, настенной и напольной мозаикой или завораживающими переплетениями на коврах (Рис. 1), невольно начинает понимать, что все эти хитросплетения относятся к симметрии, которую принято называть геометрической.



Рис. 1

А, между тем, мало кто задумывался, сколько же всего существует

разновидностей (типов) плоских орнаментов. В своё время такой вопрос поставили математики и выяснилось (например, [2], стр. 125), что существует всего 17 существенно различных типов плоских орнаментов. Не так уж и много. Их даже можно все показать, но мы не будем тратить на это время. В узорах древних архитекторов все они были использованы, хотя вряд ли кто из них в те далёкие времена мог об этом задумываться.

Симметрию, порой, не сразу можно и заметить. Симметрия, зачастую, бывает скрытой. Всем известны три знаменитых трансцендентных числа  $\pi$  (пи),  $e$  и  $\varphi$  (фи). Ни наука, ни искусство, ни сама жизнь не могут обойтись без этих чисел. Вернее – эти числа сами вдруг появляются в нашем поле зрения. Мы не ищем их специально, но они упорно дают о себе знать. Все эти числа трансцендентные – десятичный «хвост» каждого из этих чисел бесконечен. Какая уж здесь симметрия. А между тем, каждое из этих чисел по своему связано с симметрией. Число  $\pi$  – это отношение длины окружности к её диаметру. Уж более чем окружность нет на плоскости симметричной фигуры. И осевая – зеркальная, и центральная, и поворотная всё здесь. Подобным образом можно определить и число  $\varphi$  («золотая» пропорция) – отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне. Правильный пятиугольник – фигура тоже очень симметричная. А в живой природе симметрия пятого порядка, пожалуй, самая распространённая. А многочисленные вирусы почти все обладают симметрией икосаэдра, в основе которой также лежит симметрия пятого порядка. Так что числа  $\pi$  и  $\varphi$  напрямую связаны с симметрией (Рис.2).

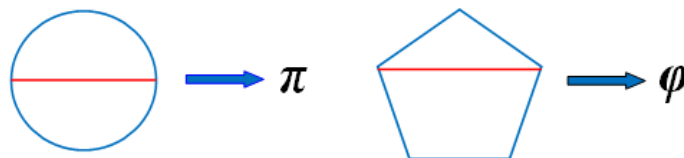


Рис. 2

Немного по другому обстоит дело с числом  $e$  – основанием натуральных логарифмов.

Оказывается, что существует не только геометрическая симметрия, но и алгебраическая. Сейчас вы всё поймёте. Неискушённый читатель вряд ли знаком с теоремой об «Исключении» ([11], стр. 160). Простыми словами, не прибегая к математическим вычислениям, эту теорему можно описать так. Рассмотрим действительные числа большие единицы. Оказывается, что для любого числа  $X > 1$  существует такое число  $Y > 1$  и не равное  $X$ , что выполняется равенство:  $X^Y = Y^X$ . Но исключением для данной теоремы как раз и является число  $e$ . Для числа  $e$  нет числа

отличного от  $e$ , чтобы выполнялось данное равенство.

$$X^Y = Y^X \rightarrow e$$

Рис. 3

Думаю, что каждый из вас видит алгебраическую симметрию уравнения теоремы об «Исключении».

Немного отвлечёмся и отметим, что числа  $\pi$  и  $e$  связаны между собой удивительной формулой Эйлера -  $e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$ . Кроме того. Есть исследования [12], где показано, что числа эти связаны с симметрией самого пространства-времени (П-В). Число  $\pi$  отвечает за изотропность П-В (одинаковость по всем направлениям), а число  $e$  связано с однородностью П-В.

Более хитро связаны между собой числа  $e$  и  $\phi$ . Это относится опять же к теореме об «Исключении». Но оказывается, что есть формула, которая связывает все три знаменитых числа вместе. Эта формула имеет вид:

$w = \frac{\phi \cdot e}{\pi}$ . Связана она с изучением паркетов и теорией вероятностей ([11], стр. 179). Но сегодня мы говорить об этом не будем.

Говоря о геометрической симметрии мы имели в виду симметрию на плоскости. Симметрия пространства связана в первую очередь с миром природы, миром кристаллов. Ведущую роль в исследовании пространственных кристаллографических групп сыграли работы известного российского учёного Е. С. Фёдорова ещё в позапрошлом веке. Таких групп симметрий оказалось ровно 230. Помните, на плоскости существует 17 групп, а в пространстве – 230. В нашем разговоре появилось слово «группа» и это не случайно, но об этом чуть позже.

Системно подошёл к исследованию симметрии французский учёный, лауреат Нобелевской премии (она получена не за изучение симметрии) Пьер Кюри. Он ввёл понятие: *предельная группа симметрии*. Оказалось, что предельных групп существует 7. Наглядно их можно представить тремя фигурами: Шаром (двух видов: стационарным и закрученным вокруг выбранного диаметра), конусом (двух видов: опять же стационарным и закрученным вокруг своей высоты) и цилиндром (трёх видов: стационарным, закрученным и скрученным, подробнее об этом см. [1]).

Как оказалось симметрии не только помогают увидеть скрытые стороны каких-то объектов, но и сами могут выступать в качестве элементарных объектов геометрических и алгебраических структур. Все мы знаем, что существует не мало различных геометрий. Всем нам знакома

геометрия Эвклида, которую мы изучаем в школе или геометрии Лобачевского и Римана, которые взяли на вооружение физики. Но оказывается можно построить геометрию, где в качестве точек будут использованы одни симметрии, а в качестве прямых – другие [13]. Пока – это экзотические исследования, но не исключаю возможности, что когда-нибудь и геометрия, построенная на основе понятия симметрии, будет востребована, например, в биологии или экологии.

Симметрия во многом помогает науке правильно понимать законы природы. Очень показательным в этом случае является создание теории электромагнетизма. Только вдумайтесь, ведь вся наша цивилизация построена на этой теории. Мы уже не можем представить себя без электричества, без интернета, без телефонов и телевизоров, без полётов в космос и пр.. «*Электромагнитное взаимодействие* лежит в основе большинства процессов окружающего нас мира – от масштабов нашей планеты до атомов и молекул» ([14], стр. 95). А в основе всего лежат уравнения Максвелла.

Максвелл, записывая свои уравнения, руководствовался тем, чтобы символы, которые описывают магнитные явления были симметричны в уравнениях символам, описывающих электрические явления. Он умышленно приводил свои уравнения в кватернионовом виде к симметричному представлению [15]. Чуть позже О. Хевиссайд, переписывая и подстраивая уравнения Максвелла для инженерных нужд уже в векторном виде, тоже старался придавать им симметричный вид [16]. В результате мы получили изумительную первую теорию поля. Не будь этой симметрии в уравнениях, возможно, и не случилось бы открытия электромагнитного поля. По сути – это теория симметрии электричества и магнетизма.

Сегодня теоретическая физика и особенно стандартная модель (СМ) вся пронизана экзотическими симметриями. Четыре силы взаимодействий, которые сегодня известны в науке (электромагнитное, слабое, сильное или ядерное и гравитационное), начали своё великое объединение благодаря открытию симметрий, которыми они описываются. Вообще вся современная квантовая механика очень тесно связана с теорией групп. Симметрии, которые описываются группами, используемыми в квантовой механике, имеют общее название калибровочных потому, что используют калибровочные преобразования. Одна из черт этих преобразований, которая привлекла физиков, это то, что калибровочная симметрия описывает дальнотействующие поля. А мы знаем, что свойством дальнотействия обладает и электромагнитное поле, и гравитационное.

Симметрия, которая объединила два взаимодействия электромагнитное и слабое в рамках СМ, называется унитарной симметрией и обозначается  $SU(2)$ . Ядерное взаимодействие описывается симметрией  $SU(3)$ . «Поиск новых симметрий стал главным средством, помогающим физике в наши дни продвигаться к пониманию мира» [22].

Может быть это будет какая-то новая симметрия  $SU(2) \times SU(3) = SU(5)$ .

Уже очерчены общие характерные контуры в свойствах и строении теории атомных ядер. Симметрия, описывающая эти свойства называется симметрией изотопического спина. По словам П. Девиса «...все взаимодействия существуют лишь для того, чтобы поддерживать в природе некий набор абстрактных симметрий» ([22], стр. 123).

Чтобы объединить все силы взаимодействия в одну требуется какая-то неизвестная пока *суперсимметрия*. Дело поиска этой суперсимметрии – задача математиков. Говоря в общем можно сказать, что «симметрия есть отражение той или иной инвариантности природы...» ([21], стр. 5).

Однако, вторя Е. Вигнеру, а его слова и сегодня очень актуальны, хочется задать вопрос: «почему теория групп описывает природу»?

Сегодня теорию групп, порой, называют теорией симметрии. Возможно, историки науки будут называть когда-нибудь XX век эпохой симметрии [21]. Сегодня вся передовая наука немыслима без теории групп. А началось всё наверное с «Эрлангенской программы», когда немецкий математик Ф. Клейн предложил рассматривать каждую геометрию в непосредственной связи с конкретной группой преобразований. В связи с этим можно например отметить, что каждой из семнадцати групп плоских орнаментов соответствует своя геометрия [17].

Начнём с того, что напомним читателю несколько основных понятий теории групп. Теория групп – это тот математический аппарат, при помощи которого удобно описывать симметрию. Кстати напомним, что по мнению А. Пуанкаре «... общее понятие группы существует раньше в нашем уме (*dans notre esprit*), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждения.» ([3], стр. 66).

Чтобы определить в общем виде, что такое группа, достаточно четырёх аксиом ([9], стр. 28). Если на множестве  $G$  с бинарной операцией, называемой, как правило *произведением*:

1. задан *закон композиции*, т. е. для любых элементов  $a$  и  $b$ , принадлежащих этому множеству  $G$  существует единственный элемент  $c = ab \in G$ .

2. справедлив *ассоциативный закон*. Для любых трёх элементов  $a$ ,  $b$  и  $c$  из  $G$  имеет место равенство  $ab \cdot c = a \cdot bc$ .

3. в  $G$  существует *единичный элемент*  $e$ , для которого  $ea = ae = a$ .

4. для каждого элемента  $a$  из  $G$  существует *обратный элемент*  $a^{-1}$  в  $G$ , для которого  $a^{-1}a = e$ .

Группы различаются между собой и по типу, и по внутреннему своему строению. Есть группы, имеющие подгруппы. Подгруппа – это подмножество основного множества группы с той же, как и у основной группы, бинарной операцией и тем же единичным элементом, для которого справедливы четыре аксиомы групп. Есть циклические группы, каждый

элемент которой есть степень одного и того же элемента. Существует понятие подгруппы  $H$ , которое называют *нормальным делителем* (см. например [3]). При наличии в группе нормального делителя  $H$  (условие нормального делителя -  $aH = Ha$  ([24], стр. 292-293)), можно определить фактор-группу, которая обозначается  $G/H$ . Группы бывают конечные и бесконечные в зависимости от количества элементов в группе. Этот параметр называется *периодом* группы. Мы будем обозначать этот параметр через  $P$ , в зависимости от того о какой группе идёт речь.

Группы бывают дискретные и непрерывные. Есть группы преобразований, среди которых большое внимание уделяется группам Ли. «Группы преобразований, естественно, появляются везде, где есть какая-либо симметрия (а она часто присутствует в скрытом виде даже там, где, казалось бы, её нет совсем» ([18], стр. 3).

Есть группы абелевы и неабелевы в зависимости от того коммутативна ли групповая операция на группе. Есть топологические группы. Надо отметить, что «всякая группа Ли является топологической группой» ([6], стр. 99). Приведём несколько примеров групп Ли ([19], стр. 131-132).

1. Полная линейная группа  $GL(n)$  состоит из неособых комплексных матриц порядка  $n$ .
2. Унимодулярная группа  $SL(n)$  состоит из всех комплексных матриц  $n$ -го порядка, определитель которых равен 1.
3. Унитарная группа  $U(n)$  состоит из унитарных матриц  $n$ -го порядка.
4. Унитарная унимодулярная группа  $SU(n)$  является подгруппой группы  $U(n)$ . Она состоит из унитарных матриц с определителем равным 1.
5. Ортогональная группа  $O(n)$  является вещественной подгруппой группы  $U(n)$ .
6. Группа вращений  $O^+(n)$  состоит из ортогональных матриц  $n$ -го порядка, определитель которых равен 1.

На основе теории групп возникают теории, которые помогают изучать группу как бы изнутри. К таким теориям можно отнести *теорию представлений*, которая изучает отображения групп на группы линейных операторов (матриц). «Вообще говоря, одна и та же группа может быть представлена различными матрицами» ([28], стр. 105). В теории представлений вводится характеристика элемента группы, которая называется *характером элемента  $a$* . А в матричном представлении характером называется след (сумма элементов на главной диагонали соответствующей матрицы ([28], стр. 107)).

Среди системных методов познания мира можно выделить так называемую общую теорию систем (ОТС), разработанную во второй половине XX-го столетия. Симметрия является одной из общих, фундаментальных закономерностей Мироздания, и её математические описания на языке теории групп и изучает ОТС. Например общие

системные преобразования представляют собой группу 8-го порядка ([8], стр. 59), а совокупность логических действий является группой 9-го порядка ([8], стр. 106). Такой же группой является и группа взаимоотношений внутри системы ([8], стр. 109).

Среди конечных групп большое значение имеют *симметрические группы* или группы подстановок. Что такое подстановка? Толковый математический словарь даёт такое определение подстановки: «Взаимно однозначное отображение множества из  $n$  символов ( $n$  – натуральное число) на себя ([23], стр. 94). Пример подстановки показан на Рис. 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Рис. 4

Подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов, которые её образуют. Покажем пример для  $n=6$ . Преобразование, показанное на Рис. 4 говорит нам, что число 1 (в верхнем ряду подстановки) переходит в число 3, расположенное под ним, число 3 (в верхнем ряду) переходит в число 1. Цикл замкнулся. Записывается это так: (13). 2 переходит в 2. Т. е. имеем цикл: (2). 4 переходит в 6, 6 - в 5, 5 - в 4. Получаем последний цикл (465). И теперь можем записать всю подстановку в виде произведения независимых циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (13)(2)(465)$$

Рис. 5

Существует интересная теорема Кэли. *Всякая конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы степени  $n$*  ([22], стр. 39). По сути, любую конечную группу можно рассматривать, как группу подстановок. Группа подстановок порядка  $n$  называется симметрической группой  $n$ -го порядка, как мы уже говорили выше, и обозначается  $S_n$ . Группы подстановок встречаются во многих отраслях науки. Например в кристаллофизике, конечных геометриях, теории Галуа, теории графов и пр.. «Симметрические группы также играют существенную роль в квантовой механике» ([4], стр. 81).

Как оказалось, существуют группы подстановок с довольно необычными свойствами, не похожими на все остальные группы. В известной автору литературе такие группы ещё не встречались. Представьте себе, что среди элементов группы есть не один выделенный

элемент (единичный), а два. Назовём этот второй элемент *уникальным*. Естественно возникает вопрос: для чего же нужен такой уникальный элемент? Помним, что единичный элемент  $e$  оставляет неизменным каждый элемент группы  $a \cdot e = e \cdot a = a$ . Можно предположить, что каждый элемент группы обладает неким свойством, условно говоря, зарядом или спином, а *уникальный элемент при умножении слева меняет это свойство на противоположное*. Вспомните, как это происходит в природе. Все электроны в мире обладают спином. Спин может быть направлен либо в верх, либо вниз. Под некоторым внешним воздействием спин электрона может изменить своё направление на противоположное. Если элементы группы обладают неким спином (внутренним свойством), то уникальный элемент должен менять спин элемента на противоположный.

Теперь и займёмся исследованиями таких групп.

### **Часть 1. Подгруппа симметрической группы $S_n$ , как группа винта.**

**Формула  $B_n \cong S_{n-1}$ .**

Рассмотрим симметрическую группу  $S_n$ . Обозначим множество подстановок этой группы через  $M_n$ . Рассмотрим подмножество  $M_B$  подстановок множества  $M_n$ , содержащих независимый цикл **(1)** (см. стр. 7). Не трудно понять, что это множество подстановок является подгруппой симметрической группы  $S_n$  (мы говорим о подстановках, элементы которых принадлежат множеству  $M_n : \{1, 2, \dots, n\}$ ).

#### **Определение:**

*Подгруппу симметрической группы  $S_n$ , каждая подстановка которой содержит цикл **(1)**, будем называть фундаментальной (или полной) группой винта и обозначать  $B_n$  (от русского слова «ВИНТ»).*

Индекс « $n$ » в обозначении  $B_n$  означает, что подстановки этой группы имеют порядок  $P = n$ . Не трудно понять, что согласно данному определению полная группа винта изоморфна симметрической группе:  $B_n \cong S_{n-1}$ . Символ « $\cong$ » означает, что группы в левой и правой части последнего выражения изоморфны. В силу этого можно сказать, что порядок  $P_n$  фундаментальной группы винта равен  $P_n = (n-1)!$  (восклицательный знак в последнем выражении называется факториалом и равен произведению чисел от 1 до  $(n-1)$ ). Подгруппы фундаментальной группы будем обозначать большими латинскими буквами и указывать в скобках число их порядка или тип, например,  $D(20)$  или  $G(II)$ .

То, что  $B_n$  является действительно подгруппой симметрической



группы не трудно доказать. Мы на этом останавливаться не будем и оставляем это доказательство читателю.

Рассмотрим элемент (подстановку) группы винта  $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & b_n \\ 1 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix}$ , где  $b_n \in \{2, 3, \dots, n\}$ . Введём обозначение для этого элемента. Если  $b_1 < b_{n-1}$ , то элемент группы винта будем обозначать через  $|b\rangle$  и говорить, что этот элемент обладает правым винтом (или *правым спином*). Если  $b_1 > b_{n-1}$ , то элемент группы винта будем обозначать через  $\langle b|$  и говорить, что этот элемент обладает левым винтом (*левым спином*).

В данных обозначениях единичный (нейтральный) элемент группы  $B_n$  будет иметь вид:  $|b_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ , а уникальный элемент -  $\langle b_0| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ .

Сделаем небольшую остановку и поговорим о том, почему мы используем термин «спин». Подстановку, например,  $\langle b| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  можно представить в таком наглядном виде:

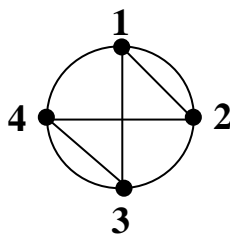


Рис. 6

Верхняя строка подстановки говорит нам, как (в какой последовательности) на окружности расположены элементы **1, 2, 3** и **4**, а нижняя строка подстановки **1-3-4-2** говорит нам о том, как эти элементы соединены отрезками в некоторую структуру (конфигурацию). В силу правила для обозначений элементов группы винта это будет левая подстановка (**3>2**), т. е. обход чисел в конфигурации начинается из **1** по левому отрезку **1-3** и, через точки **4** и **2**, возвращается снова в **1** (левый обход, левое вращение или левый спин). Если бы обход начинался по правому отрезку **1-2**, то, согласно правилам обозначений, это было бы правым вращением и подстановка имела бы такой вид:  $|b\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  и имела бы правый спин. Т. о., одна и та же конфигурация может

описываться двумя подстановками, как и один и тот же электрон (или фотон, или какая-то другая частица со спином) в природе может иметь разные спины. В связи с вышесказанным подстановки группы винта удобно называть *подстановками замкнутых конфигураций*.

Рассмотрим некоторые свойства группы винта. Справедлива следующая

**Теорема** (об изменении ориентации элемента группы).

*Левое произведение уникального элемента и любого произвольного элемента группы винта меняет в произведении ориентацию спина исходного элемента на противоположную.*

**Доказательство:**

Согласно данной теореме будем иметь:  $\langle b_0 | \cdot \langle b_k | = | b_k \rangle$  и  $\langle b_0 | \cdot | b_k \rangle = \langle b_k |$ . Докажем верность этих выражений. Рассмотрим в развёрнутом виде первое выражение:

$$\langle b_0 | \cdot \langle b_k | = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Т. к.  $\langle b_k |$  - это левый элемент, то  $b_2 > b_n$ , а после умножения получаем подстановку, в которой  $b_2$  и  $b_n$  поменялись местами значит в силу выражения  $b_2 > b_n$  в результате будет иметь правую подстановку, т. е.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_3 & b_2 \end{pmatrix} = | b_k \rangle. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

Аналогично доказывается и выражение  $\langle b_0 | \cdot | b_k \rangle = \langle b_k |$ .

Покажем ещё несколько элементарных свойств группы винта.

**Следствие** теоремы (об изменении ориентации элемента группы).

На основании выражений  $\langle b_0 | \cdot \langle b_k | = | b_k \rangle$  и  $\langle b_0 | \cdot | b_k \rangle = \langle b_k |$  не трудно получить равенство:  $| b_k \rangle = \langle b_k | \cdot | b_k \rangle^{-1} \cdot \langle b_k |$ . Вывод этого равенства не сложен и мы оставляем его читателям. Последнее равенство можно переписать в таком виде:  $| b_k \rangle \cdot \langle b_k |^{-1} = \langle b_k | \cdot | b_k \rangle^{-1}$ , которое читается как правило следствия о произведении – *произведение правого элемента  $| b_k \rangle$  на обратный элемент левого  $\langle b_k |^{-1}$  равно произведению левого элемента на обратный элемент правого*. Будем называть это правило *формулой произведения*:

$$| b_k \rangle \cdot \langle b_k |^{-1} = \langle b_k | \cdot | b_k \rangle^{-1}. \quad (1)$$

*Смешанным произведением* будем называть выражения:  $\langle b_k | \cdot | b_k \rangle$  и  $| b_k \rangle \cdot \langle b_k |$ . Справедлива следующая теорема:

**Теорема (о смешанном произведении)**

Если дано смешанное произведение произвольного элемента, то квадрат второго сомножителя равен противоположному элементу исходного произведения.

**Доказательство:**

Пусть дано смешанное произведение  $\langle b_k | \cdot | b_k \rangle = | b_m \rangle$ . Умножим данное выражение слева на уникальный элемент  $\langle b_0 | \cdot \langle b_k | \cdot | b_k \rangle = \langle b_0 | \cdot | b_m \rangle$ . В результате получаем:  $| b_k \rangle \cdot | b_k \rangle = \langle b_m |$  или  $| b_k \rangle^2 = \langle b_m |$ .

Что и требовалось доказать.

Очевидно, аналогично доказывается теорема и для второго выражения смешанного произведения.

Покажем ещё одну теорему.

**Теорема (о равенстве смешанных произведений)**

Если смешанное произведение одного элемента представлено в виде смешанного произведения другого элемента, например,  $| b_k \rangle \cdot \langle b_k | = \langle b_m | \cdot | b_m \rangle$ , то квадраты вторых сомножителей в этих произведениях равны между собой  $\langle b_k |^2 = | b_m \rangle^2$ .

Доказательство очевидно и мы оставляем его читателю.

Рассмотрим пример группы винта  $B_5$ . Для начала покажем все элементы этой группы.

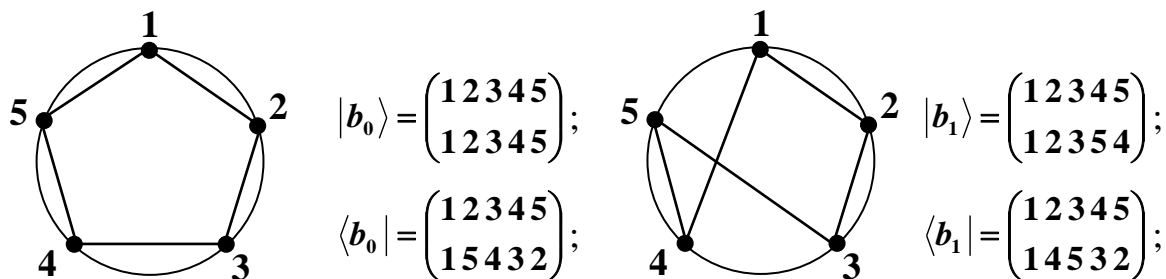


Рис. 7

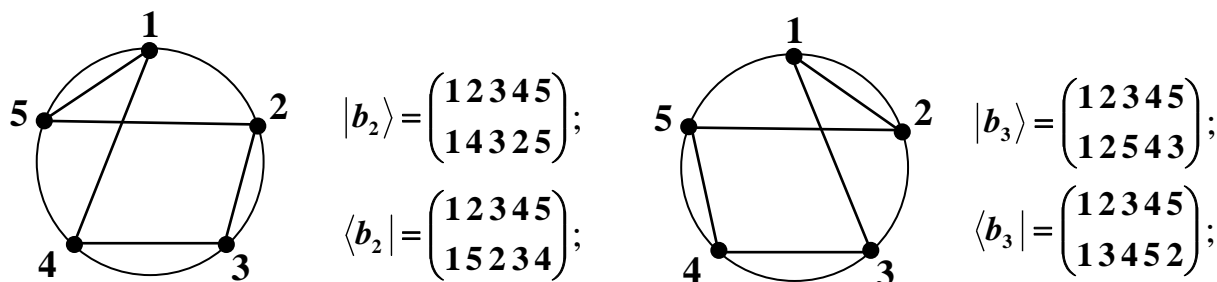


Рис. 8

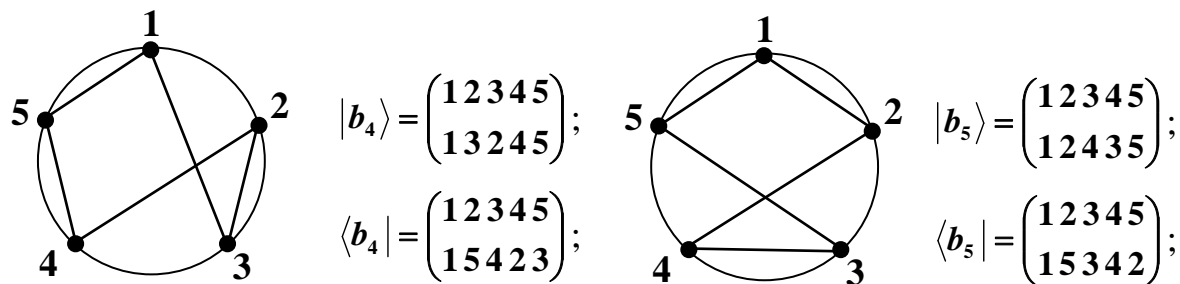


Рис. 9

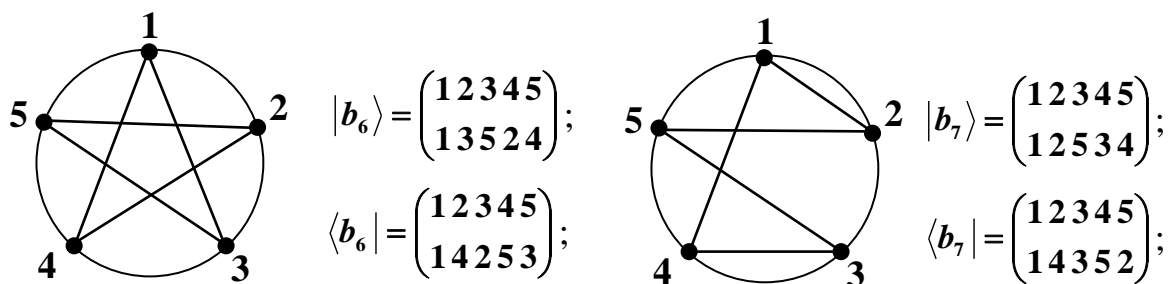


Рис. 10

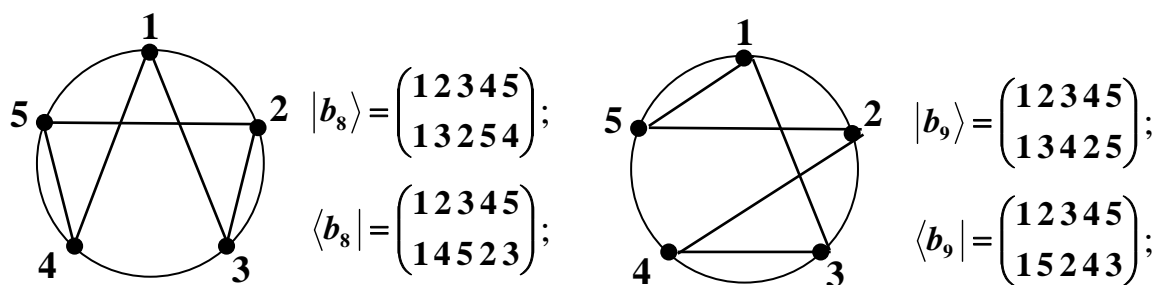


Рис. 11

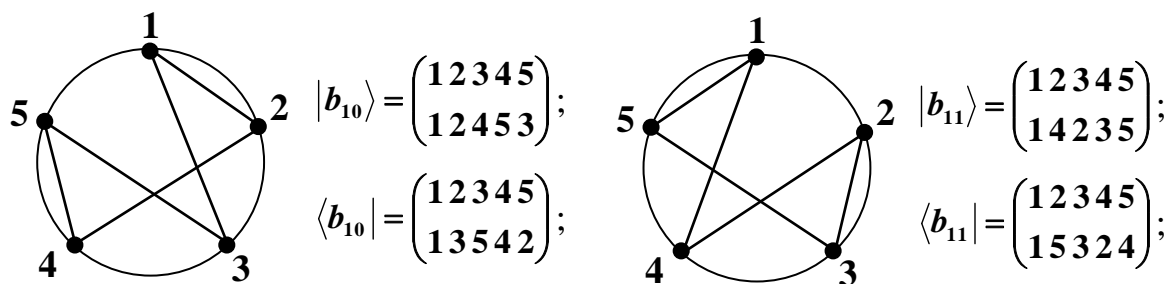


Рис. 12

Очевидно, что группа  $B_5$  имеет порядок  $P_5 = 24$ .

Рассмотрим, как строится связь неизоморфных групп одного порядка на примере подгрупп 4-го порядка в группе  $B_5$ .  $B_5$  - это группа

минимального порядка, у которой возможны неизоморфные подгруппы 4-го порядка.

Т. к. мы собираемся рассматривать подгруппы 4-го порядка, то есть смысл напомнить читателю, какие вообще типы групп 4-го порядка бывают. Группы 4-го порядка существуют только двух типов. Это группа Клейна (Рис. 13, слева) и циклическая группа, которую в математической литературе называют группой поворотов квадрата (Рис. 13, справа).

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	$a_1$	$a_0$	$a_3$	$a_2$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_0$	$a_1$
$a_3$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$

	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_0$
$b_2$	$b_2$	$b_3$	$b_0$	$b_1$
$b_3$	$b_3$	$b_0$	$b_1$	$b_2$

Рис. 13

Очевидное различие между этими группами видно уже по внешнему виду таблиц Кэли. Подгруппы, таблицы Кэли которых, показанны на Рис. 13, симметричны относительно главной диагонали. «Вообще абелевы группы и только они обладают таблицами Кэли, симметричными относительно главной диагонали» ([29], стр.113), но сами диагонали этих таблиц (на Рис. 13 главные диагонали выделены голубым цветом) различны. Имеется в виду, что диагональ левой таблицы состоит только из единичных элементов группы, а главная диагональ таблицы Кэли, показанная справа на Рис. 13, нет. Элементы в этой диагонали чередуются. Группы, таблица Кэли, которых показана на Рис. 13 слева, будем называть группами первого типа и обозначать  $G_i(I)$ , а группы, таблица Кэли которых показана на Рис. 13 справа, будем называть группами второго типа и обозначать  $G_i(II)$ .

Выпишем все элементы группы  $B_5$  по степеням  $n \geq 2$ . В нашей группе имеются элементы только второй, третьей и четвертой степени.

$$|b_1\rangle, |b_2\rangle, |b_3\rangle, |b_4\rangle, |b_5\rangle, |b_8\rangle, \langle b_0|, \langle b_5|, \langle b_8|.$$

Рис. 14

На Рис. 14 показаны все элементы второй степени, т. е. для них справедлива формула  $\langle b_i|^2 = |b_j\rangle^2 = |b_0\rangle$ .

Элементы третьей степени показаны на Рис. 15. Для них справедлива формула:  $\langle b_i |^3 = |b_j \rangle^3 = |b_0 \rangle$ .

$$|b_7 \rangle, |b_9 \rangle, |b_{10} \rangle, |b_{11} \rangle, \langle b_7 |, \langle b_9 |, \langle b_{10} |, \langle b_{11} |.$$

Рис. 15

На Рис. 16 показаны элементы четвёртого порядка. Этим элементам соответствует зависимость:  $\langle b_i |^4 = |b_j \rangle^4 = |b_0 \rangle$ .

$$|b_6 \rangle, \langle b_1 |, \langle b_2 |, \langle b_3 |, \langle b_4 |, \langle b_6 |.$$

Рис. 16

Всего нам удалось найти семь подгрупп 4-го порядка. Это четыре подгруппы типа **I** и три подгруппы типа **II**.

$$\begin{aligned} G_1(I) &\equiv \{|b_0 \rangle, |b_1 \rangle, |b_8 \rangle, |b_4 \rangle\}; \\ G_2(I) &\equiv \{|b_0 \rangle, |b_2 \rangle, |b_3 \rangle, \langle b_8 |\}; \\ G_3(I) &\equiv \{|b_0 \rangle, |b_5 \rangle, \langle b_0 |, \langle b_5 |\}; \\ G_4(I) &\equiv \{|b_0 \rangle, |b_8 \rangle, \langle b_8 |, \langle b_0 |\}. \end{aligned}$$

Рис. 17

$$\begin{aligned} G_1(II) &\equiv \{|b_0 \rangle, |b_6 \rangle, \langle b_0 |, \langle b_6 |\}; \\ G_2(II) &\equiv \{|b_0 \rangle, |b_8 \rangle, \langle b_1 |, \langle b_4 |\}; \\ G_3(II) &\equiv \{|b_0 \rangle, \langle b_2 |, \langle b_8 |, \langle b_3 |\}. \end{aligned}$$

Рис. 18

Не все из этих подгрупп являются группами винта. К группам винта относятся подгруппы  $G_3(I)$ ,  $G_4(I)$  и  $G_1(II)$  т. к. эти группы содержат уникальный элемент. Заметим, что *группа нечётного порядка не может быть группой винта*.

Обозначим множество элементов, из которых состоят группы первого типа через  $M_I$ , множество элементов, из которых состоят группы второго типа через  $M_{II}$ . Справедливо соотношение:

$$M_I \cap M_{II} \equiv G_4(I), \quad (2)$$

т. е. элементы, из которых состоит пересечение множеств  $M_I$  и  $M_{II}$  образуют группу  $G_4(I)$ . Выражение (2) - это первая зависимость, которую мы нашли, между неизоморфными подгруппами 4-го порядка. Если вы помните, мы ищем зависимости между неизоморфными группами (подгруппами) одного порядка.

Вообще, все связи между элементами двух подгрупп задаются таблицей Кэли основной группы и правилом бинарной операции, но вот выделить в общей массе какие-то локальные связи совсем не просто.

Рассмотрим простейшую связь:  $a \cdot b = c$ . Эту локальную связь будем изображать, как принято в теории графов.

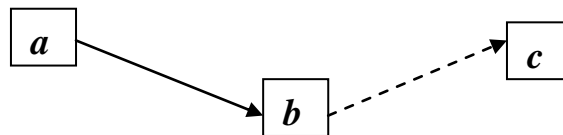


Рис. 19

Произведение  $a \cdot b$  показано сплошной стрелкой от левого сомножителя к правому. Знак «равенства» на графе Рис. 19 показан пунктирной стрелкой от правого элемента к элементу, который получается в результате произведённой операции. Т. к. в общем случае мы имеем неабелеву группу, то надо рассматривать и операцию  $b \cdot a = d$ . В этом случае получаем такой *граф связи*:

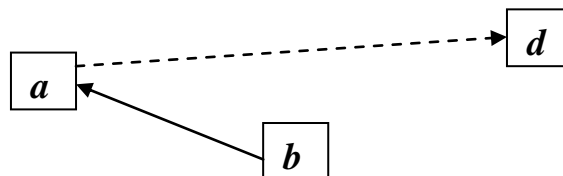


Рис. 20

Напомним, мы ищем связи между подгруппами  $G_i(I)$  и  $G_j(II)$  при условии, что *связь эта осуществляется посредством элементов, которые не входят в эти группы*, т. е. при помощи элементов третьей степени (других элементов этого порядка, не входящих в рассматриваемые группы, в группе  $B_5$  нет).

Покажем пример построения графа связей между подгруппой  $G_1(I)$

и  $G_1(II)$ . Мы будем строить этот граф по схеме, которая показана на Рис. 19. Элементом  $a$  будут элементы подгруппы  $G_1(I)$  или элементы подгруппы  $G_1(II)$ , элементом  $c$  будут элементы подгруппы  $G_1(II)$  или элементы подгруппы  $G_1(I)$ , соответственно. Элементы  $b$  будем искать среди элементов третьей степени группы  $B_5$ . На Рис. 21 показан граф связи, который нам удалось построить.

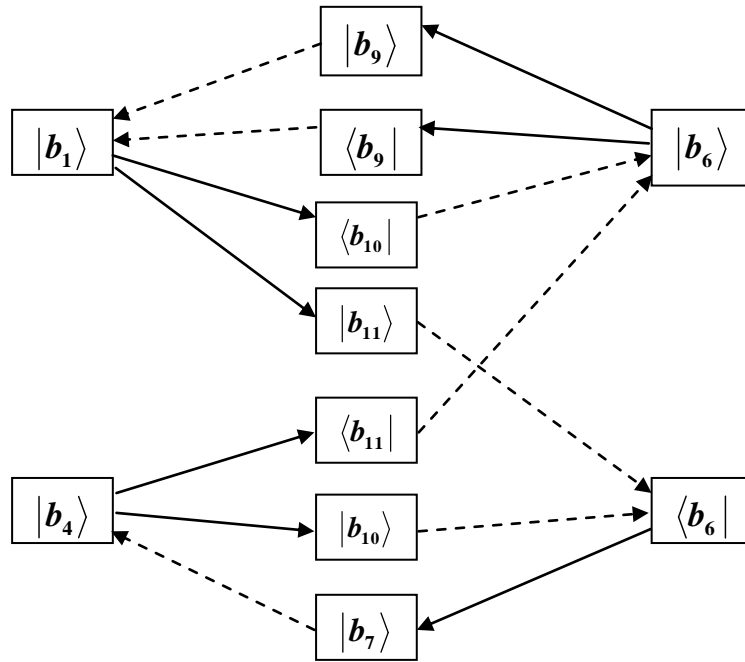


Рис. 21

Как видим, не все элементы подгрупп  $G_1(I)$  и  $G_1(II)$  участвуют в построении связей. И в одной, и в другой подгруппе отсутствует по одному элементу (очевидно, что и нейтральный элемент, который является общим для всех подгрупп данной группы, мы тоже не брали в расчёт).

Покажем ещё один пример построения графа связей между подгруппой  $G_3(I) \equiv \{|b_0\rangle, |b_5\rangle, \langle b_0|, \langle b_5|\}$  и подгруппой  $G_2(II) \equiv \{|b_0\rangle, |b_8\rangle, \langle b_1|, \langle b_4|\}$ . Как оказалось, в построении графа связей участвуют только по два элемента из каждой подгруппы, также как это было и в предыдущем случае (Рис. 21). Однако связей в графе получилось шесть, а не семь. Полученный граф показан на Рис. 22. Очевидно, что графы Рис. 21 и Рис. 22 не изоморфны.



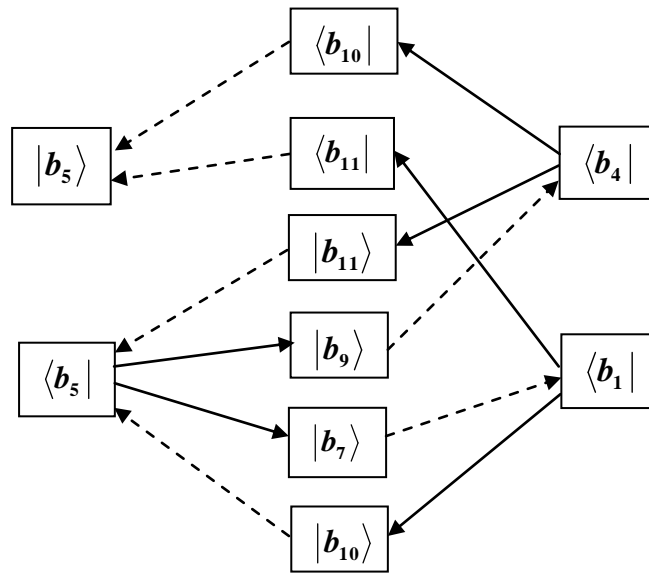


Рис. 22

Заинтересованный читатель может самостоятельно продолжить построение графов связей между другими подгруппами четвертого порядка.

Теперь выясним вопрос, какая подгруппа четвертого порядка является нормальным делителем. Известно, что такая подгруппа существует ([25], стр. 94). Напомним, что подгруппа  $H$  называется нормальным делителем если выполняется равенство  $aH=Ha$ , где  $a$  – любой элемент группы.

Проверка показала, что нормальным делителем группы  $B_5$  является подгруппа  $G_4(I)$ . Таким образом фактор-группа  $B_5/G_4(I)$  является группой шестого порядка и изморфна группе  $S_3$ . Покажем как можно конкретно увидеть группу  $S_3$  среди элементов фактор-группы. Выпишем все элементы группы  $B_5/G_4(I)$ . Элементы этой группы будем обозначать через  $H_i$ .

$$H_0 = G_4(I) = \{b_0, \langle b_0|, |b_8\rangle, \langle b_8|\};$$

$$H_1 = \{b_1, \langle b_1|, |b_4\rangle, \langle b_4|\};$$

$$H_2 = \{b_2, \langle b_2|, |b_3\rangle, \langle b_3|\};$$

$$H_3 = \{b_5\rangle, \langle b_5|, |b_6\rangle, \langle b_6|\};$$

$$H_4 = \{b_7\rangle, \langle b_7|, |b_9\rangle, \langle b_9|\};$$

$$H_5 = \{b_{10}\rangle, \langle b_{10}|, |b_{11}\rangle, \langle b_{11}|\}.$$

Рис. 23

Обратим внимание, что в каждом элементе  $H_i$  фактор-группы обязательно присутствует элемент вида:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1b_i & b_j & b_k & 5 \end{pmatrix}$ , т. е. элемент, имеющий циклы (1) и (5). «Сокращая» такие подстановки до вида  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1b_i & b_j & b_k \end{pmatrix}$ , получаем все подстановки, которые являются элементами группы винта  $B_4$ . Помня, что каждый элемент класса, к которому он принадлежит, может быть характеризующим элементом этого класса, можем записать, что полученная фактор-группа изоморфна группе винта четвертого порядка, т. е.  $B_5 / G_4(I) \cong B_4$ . Установим изоморфное соответствие между элементами этих групп. Элеметы группы  $B_4$  будем обозначать символами  $|c_i\rangle$  или  $\langle c_i|$ , а фактор-элементы фактор-группы винта – вы увидите, что фактор-группа будет именно группой винта – будут элементы вида  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1b_i & b_j & b_k & 5 \end{pmatrix}$  среди элементов фактор-группы и соответствующие им элементы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1b_i & b_j & b_k \end{pmatrix}$  группы  $B_4$ .

Очевидно, что нейтральный (единичный) элемент имеет вид:  $|c_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , а соответствует ему нормальный делитель:  $|B_0\rangle = \{b_0\rangle, |b_8\rangle, \langle b_0|, \langle b_8|\}$ . Т. е. можем записать соответствие:  $|B_0\rangle \cong |c_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Уникальный элемент обращения будет иметь вид:  $\langle c_0| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Посмотрим, какой элемент фактор-группы будет ему

соответствовать. Будем искать подстановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Это подстановка  $|b_2\rangle$  в классе  $H_2$ , поэтому соответствие будет иметь вид:  $\langle c_0 | \cong \langle B_0 | = H_2$ . Класс  $H_1$  назовём элементом фактор-группы  $|B_1\rangle$ . В этом классе есть элемент  $|b_4\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ , где в подстановке число 5 остаётся стоять на своём месте.

Т. о., получаем соответствие:  $|B_1\rangle \cong |c_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Для нахождения соответствия элементу  $\langle B_1 |$  надо найти подстановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Это элемент  $|b_{11}\rangle \in H_5$ . Т. е. можем записать такое соответствие:

$\langle b_1 | = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cong \langle B_1 | = H_5$ . В классе  $H_3$  есть нужный нам элемент  $|b_5\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . По аналогии с предыдущим получаем соответствие:

$H_3 = |B_2\rangle \cong |c_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Обратный ему элемент имеет вид  $\langle c_2 | = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ . Соответствует ему элемент  $|b_9\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in H_4$ , поэтому

имеем:  $H_4 = \langle B_2 | \cong \langle c_2 | = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

Все соответствия для изоморфизма  $B_5 / G_4(I) \cong B_4$  построены. Выпишем их все:  $|B_0\rangle = H_0 \cong |c_0\rangle$ ;  $\langle B_0 | = H_2 \cong \langle c_0 |$ ;  $|B_1\rangle = H_1 \cong |c_1\rangle$ ;  $\langle B_1 | = H_5 \cong \langle c_1 |$ ;  $|B_2\rangle = H_3 \cong |c_2\rangle$ ;  $\langle B_2 | = H_4 \cong \langle c_2 |$ .

Теперь рассмотрим пример действия элемента обращения в фактор-группе, как в группе винта.

Рассмотрим, например, произведение  $\langle B_0 | \cdot |B_2\rangle = \langle B_2 |$ . Возьмём любой элемент группы  $B_5$ , который принадлежит фактор-элементу  $\langle B_0 |$ . Например,  $|b_3\rangle$ . Также произвольно выбираем элемент, принадлежащий фактор-элементу  $|B_2\rangle = H_3$ . Пусть это будет элемент  $\langle b_5 | \in |B_2\rangle = H_3$ . Перемножив, получаем:  $|b_3\rangle \cdot \langle b_5 | = \langle b_9 | \in H_4 = \langle B_2 |$ . Т. е. исходное произведение  $\langle B_0 | \cdot |B_2\rangle = \langle B_2 |$  - верно.

## Часть 2. Теория конкурентных прямых Паскаля (опыт построения групп винта)

### 1. Введение

Одной из самых ключевых, и возможно самой красивой теоремой проективной геометрии, является теорема Паскаля. Написана не одна сотня работ посвящённых геометрическим исследованиям, связанным с этой теоремой. И, наверное, ни один из выдающихся геометров прошлого столетия не обошёл своим вниманием теорему Паскаля.

Формулировка теоремы красива и лаконична. Удивительно то, что теорема Паскаля почему-то не была открыта древними математиками, такими как Эвклид, Пифагор, Птолемей и др., хотя частный её случай – теорема Паппа – был уже известен в III веке. Но это уже вопрос истории науки.

Одной из проблем, связанных с теоремой Паскаля, посвящена и данная работа. Упоминания об этой проблеме можно встретить во многих книгах по геометрии и математических энциклопедиях [26], [27].

Суть проблемы проста. Если на произвольной конике взято шесть точек, то соединить их в замкнутый шестиугольник возможно 60-ю различными способами ([28], стр. 153, см. Приложение 1). Для каждого такого шестиугольника существует своя прямая Паскаля, определяемая теоремой Паскаля. Множество всех прямых Паскаля образуют сложную конфигурацию взаимных пересечений. Существуют точки, где пересекаются по три и по четыре прямых Паскаля. Отысканию этих точек и посвящена данная работа.

Известные геометры XIX века Я. Штейнер, Ю. Плюккер, Л. Гессе, Т. Киркман и др. более 20 лет занимались этой проблемой. Штейнер нашёл 20 точек, где пересекаются по три прямые Паскаля, а спустя 21 год Киркман отыскал ещё 60 таких точек [35].

В данной работе мы покажем, как можно было бы решить эту проблему в наше время, используя современный математический аппарат теории множеств, теории алгебраических подстановок и теории графов.

В заключение мы попробуем провести анализ и пофантазировать на тему, почему Якоб Штейнер нашёл только 20 точек.

### 2. Некоторые вспомогательные сведения

Для простоты и наглядности иллюстраций в качестве образа произвольной коники ниже будем использовать окружность, с расположенными на ней шестью точками. Точки будем обозначать для общности через  $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

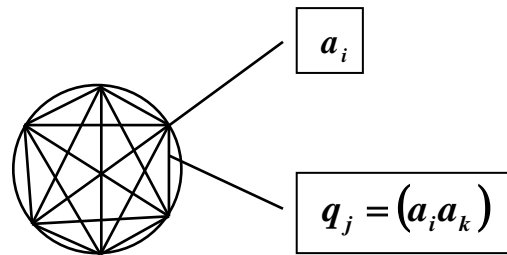


Рис. 24

Объектом нашего исследования также будет множество  $q_j$  сторон (рёбер) полного графа  $K_6 = \{q_1, q_2, \dots, q_{15}\}$  (Рис. 24).

Для элементов множества  $K_6$  будем использовать операции теории множеств:

1.  $\cap$  - пересечение
2.  $\cup$  - объединение
3.  $\setminus$  - разность
4.  $\Delta$  - симметрическая разность

Напомним основные равенства для этих операций:

1.  $A \cap A = A$ ;
2.  $A \cap \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ;
3.  $A \cup A = A$ ;
4.  $A \cup \mathbf{0} = A$ ;
5.  $A \setminus A = \mathbf{0}$ ;
6.  $A \Delta A = \mathbf{0}$ ;
7.  $A \cup B = B \cup A$ ;
8.  $A \cap B = B \cap A$ ;
9.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;
10.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
11.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
12.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
13.  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

Равенство 13 является определением симметрической разности ([29], стр. 116).

Проиллюстрируем некоторые из этих правил. Пустым множеством в данном случае будет коника с шестью точками, т. е.

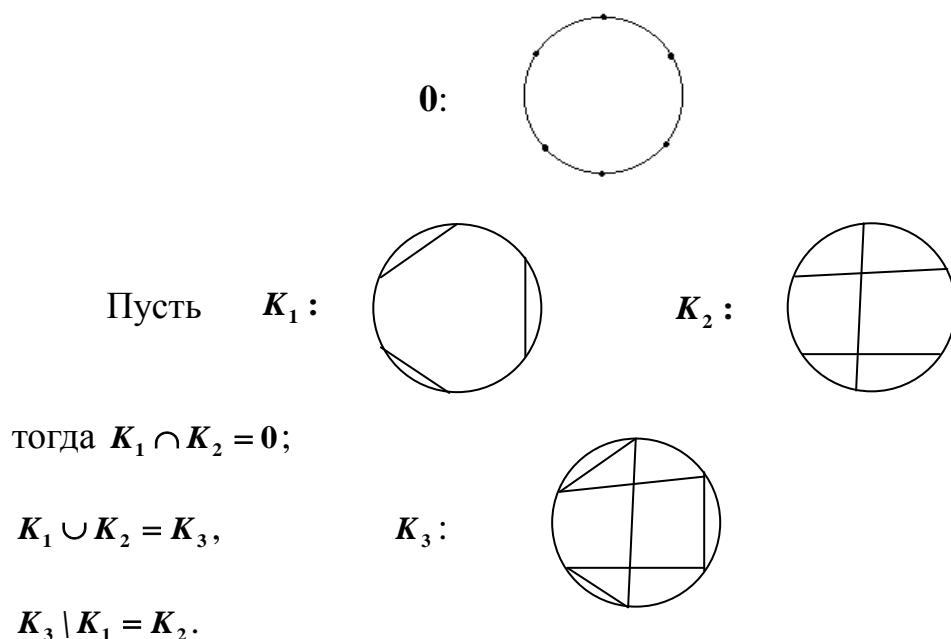


Рис. 25

### 3. Теорема о циклических шестиугольниках

Множество всех замкнутых шестиугольников обозначим через  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{60}\}$  (*Приложение 2*).

Покажем все варианты расположения трёх хорд (сторон шестиугольника) на конике, не имеющих общих граничных точек. Для вычисления числа вариантов  $V$  воспользуемся формулой (1) *Приложения 1*. Здесь  $n = 6$ ,  $k = 3$ .

$$V = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k C_{n-2(i-1)}^2 = \frac{1}{3!} \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 15$$

Обозначим их через  $K_i$ , как подмножества полного множества  $K$ .

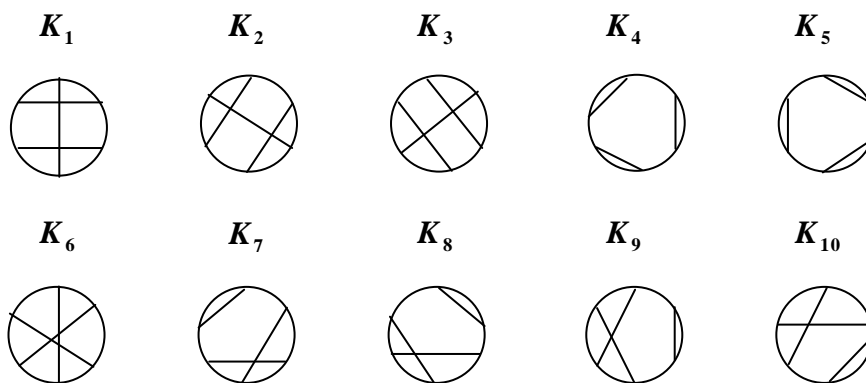


Рис. 26

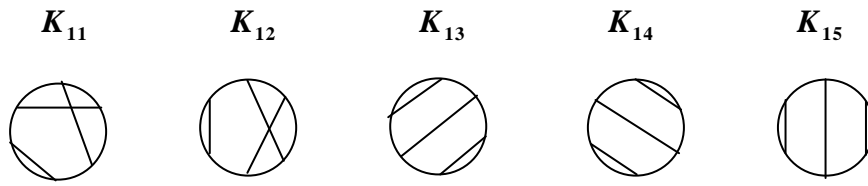


Рис. 27

Очевидно, что всякий шестиугольник  $A_k$  является объединением двух подмножеств  $K_i \cup K_j$ , причём такое объединение строго однозначно.

Будем говорить, что шестиугольники  $A_k$  принадлежат к классу  $[K_i]$  по конкретному подмножеству  $K_i$  если справедливы равенства:

1.  $K_i \cup K_j = A_k$ ,
2.  $K_i \cap K_j = \mathbf{0}$ .

Вообще говоря, равенства 1 и 2 равносильны, т. к. из  $K_i \cup K_j = A_k$  следует, что  $K_i \cap K_j = \mathbf{0}$  и обратно: из равенства 2 следует равенство 1.

Для примера выпишем все шестиугольники класса  $[K_4]$ .

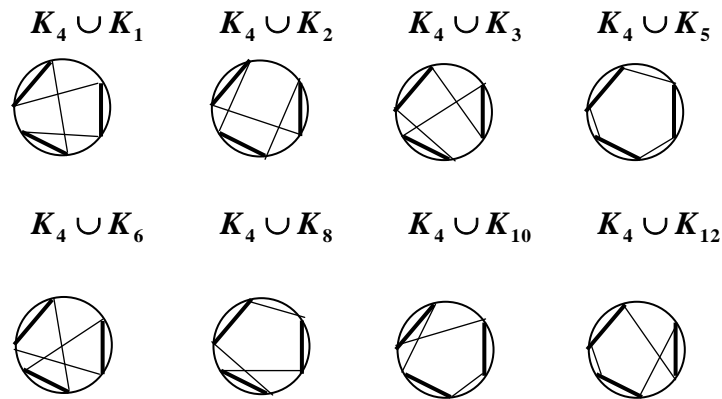


Рис. 28

$$[K_4] = \{A_{25}, A_{21}, A_{23}, A_1, A_{60}, A_7, A_3, A_5\}$$

Не трудно убедиться, что каждый класс  $[K_i]$  состоит из 8-ми элементов (шестиугольников).

Рассмотрим два элемента из класса  $[K_i]$ :  $(K_i \cup K_j)$  и  $(K_i \cup K_n)$  такие, что  $(K_j \cap K_n) = \mathbf{0}$ . Найдём симметрическую разность этих элементов.

$$\begin{aligned}
(K_i \cup K_j) \Delta (K_i \cup K_n) &= ((K_i \cup K_j) \cup (K_i \cup K_n) \setminus ((K_i \cup K_j) \cap (K_i \cup K_n))) = \\
&= (K_i \cup K_j \cup K_i \cup K_n) \setminus (((K_i \cup K_j) \cap K_i) \cup ((K_i \cup K_j) \cap K_n)) = \\
&= (K_i \cup K_j \cup K_n) \setminus (((K_i \cap K_i) \cup (K_j \cap K_i)) \cup ((K_i \cap K_n) \cup (K_j \cap K_n))) = \\
&= (K_i \cup K_j \cup K_n) \setminus (K_i \cup 0) = (K_j \cup K_n)
\end{aligned}$$

Как оказалось, элементы каждого класса  $[K_i]$  образуют между собой 16 симметрических разностей типа:

$$(K_i \cup K_j) \Delta (K_i \cup K_n) = (K_j \cup K_n); \quad (3)$$

при условии, что  $(K_j \cap K_n) = 0$ .

Равенство (3) обладает замечательным свойством *цикличности*, т. е.:

$$(K_i \cup K_j) \Delta (K_i \cup K_n) = (K_j \cup K_n);$$

$$(K_i \cup K_n) \Delta (K_j \cup K_n) = (K_i \cup K_j);$$

$$(K_j \cup K_n) \Delta (K_i \cup K_j) = (K_i \cup K_n).$$

В этом не трудно убедиться, глядя на предыдущие выкладки симметрической разности.

Шестиугольники равенства (3) будем называть *циклическими шестиугольниками*. Для них справедлива следующая **Теорема**.

**Теорема** (о циклических шестиугольниках)

*Прямые Паскаля циклических шестиугольников конкурентны.*

Доказательство этой теоремы мы приведём позже. А сейчас выясним, сколько всего существует троек циклических шестиугольников. Т. к. всего существует 15 классов  $[K_i]$  и элементы каждого класса образуют между собой 16 симметрических разностей типа (3), то получаем 240 троек циклических шестиугольников. Но в силу цикличности (3) получается, что каждое такое равенство может быть образовано элементами класса  $[K_i]$ , элементами класса  $[K_j]$  и также элементами класса  $[K_n]$ . Т. о., всего различных троек циклических шестиугольников будет **80**. Обозначим множество этих троек через  $T^3$ .

Рассмотрим подмножество  $K \setminus A_k$ . Докажем, что

$$K \setminus A_k = (K_i \cup K_j \cup K_n), \quad (4)$$



причём для каждого  $A_k$  представление разности  $K \setminus A_k$  в виде объединения трёх подмножеств  $(K_i \cup K_j \cup K_n)$  является единственно возможным.

**Доказательство:**

Как было сказано ранее, множество  $K$  - это полный граф, имеющий 6 вершин и 15 рёбер (сторон). Шестиугольник  $A_k$  представляет собой граф из 6 вершин, являющийся простым циклом. Тогда  $K \setminus A_k = X$  - это регулярный граф степени 3 ([30], стр. 28), т. е. имеем граф из 6-ти вершин и 9-ти рёбер, где степень каждой вершины равна 3.

Из графа  $X$  всегда можно выделить простой цикл  $A_m$  (теорема Смита, [30], стр. 87). Очевидно, что  $A_m \neq A_k$ . Тогда граф  $X \setminus A_m$  будет иметь 6 вершин и 3 ребра, причём каждая вершина имеет степень 1. А это ни что иное как  $K_i$ . В свою очередь  $A_m = (K_j \cup K_n)$ , следовательно  $K \setminus A_k = (K_i \cup K_j \cup K_n)$ .

Докажем единственность такого объединения.

Предположим противное, т. е.  $X = (K_i \cup K_j \cup K_n) = (K_p \cup K_q \cup K_r)$ . Здесь  $K_i \cap K_j = \emptyset$ ,  $K_i \cap K_n = \emptyset$ ,  $K_j \cap K_n = \emptyset$  и также  $K_p \cap K_q = \emptyset$ ,  $K_p \cap K_r = \emptyset$ ,  $K_q \cap K_r = \emptyset$ . И следовательно, имеем 6 различных шестиугольников, являющихся простыми циклами регулярного графа  $X$ .

Из теории графов известно, что всякий регулярный граф степени 3 из 6-ти вершин изоморфен либо графу  $G_1$ , либо графу  $G_2$ .

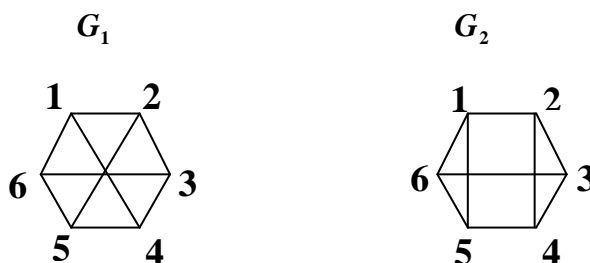


Рис. 29

Граф  $X$  не может быть изоморфен графу  $G_1$ , т. к.  $K / G_1 \neq A_k$ . Следовательно, граф  $X$  изоморфен графу  $G_2$ . А граф  $G_2$  имеет только 3 простых цикла:  $1-2-3-4-5-6-1$ ,  $1-2-4-3-6-5-1$ ,  $1-5-4-2-3-6-1$ .

Получаем противоречие, т. к. мы предполагали, что граф  $X$  имеет 6 простых циклов.

Следовательно равенство (3) имеет единственное объединение.

Т. к.  $K_i \cap K_j = \emptyset$ ,  $K_i \cap K_n = \emptyset$ ,  $K_j \cap K_n = \emptyset$ , то любые два элемента из  $K_i$ ,  $K_j$ ,  $K_n$  принадлежат классу третьего элемента.

Т. о. получаем тройку циклических шестиугольников:

$$(K_i \cup K_j) \Delta (K_i \cup K_n) = (K_j \cup K_n) .$$

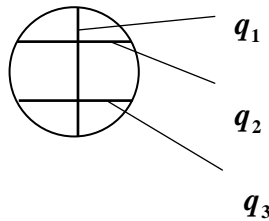
Т. к. существует **60** различных  $A_k$ , то мы будем иметь **60** различных объединений  $(K_i \cup K_j \cup K_n)$ , т. е. **60** различных троек циклических шестиугольников. Обозначим множество этих троек через  $H$ . Т. о.,  $H$  определяет множество точек Киркмана. Тогда  $T^3 \setminus H = S$  - это множество троек циклических шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекаются в точках Штейнера.

Теперь снова вернёмся к равенству (4).

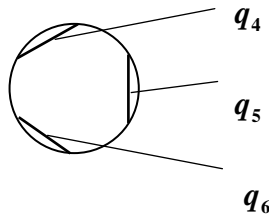
Пусть  $K_i = \{q_1, q_2, q_3\}$ ;  $K_j = \{q_4, q_5, q_6\}$ ;  $K_n = \{q_7, q_8, q_9\}$ . Тогда в шестиугольнике  $(K_i \cup K_j)$  стороны  $q_i \in K_i$  и  $q_j \in K_j$  будут чередоваться. Аналогично, для  $(K_i \cup K_n)$  чередуются стороны  $q_i \in K_i$  и  $q_n \in K_n$ , и для шестиугольника  $(K_j \cup K_n)$  будут чередоваться стороны  $q_j \in K_j$  и  $q_n \in K_n$ .

**Пример:**

$$K_1 = \{q_1, q_2, q_3\}:$$



$$K_4 = \{q_4, q_5, q_6\}:$$



$$K_2 = \{q_7, q_8, q_9\}:$$

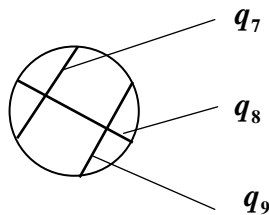


Рис. 30

Теперь приступим к описанию математического аппарата, который позволит доказать в общем виде теорему о циклических шестиугольниках и найти все конкретные тройки таких шестиугольников.

#### 4. Определения

**Определение 1**

Оператором цикла  $\sigma$  будем называть подстановку из 6-ти элементов, которая допускает разложение в произведение двух независимых циклов по три элемента в каждом.

Пример: 
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5).$$

**Определение 2**

Подстановку  $(b_i)$  будем называть тождественной подстановке

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

и обозначать  $(b_i) \equiv (a_i)$ , если у данных подстановок одинаковая последовательность элементов в нижнем ряду подстановок, представленных циклом, независимо от направления обхода, где  $a_i, b_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Пример:

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (b_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Последовательность элементов  $a_i$ : **1-3-4-6-2-5-1**, последовательность элементов  $b_i$ : **2-6-4-3-1-5-2**. Как видим, последовательности элементов  $a_i$  и  $b_i$  совпадают и противоположны по направлению обхода. Следовательно, по Определению 2  $(a_i) \equiv (b_i)$ .

Если на конике взять 6 точек и занумеровать их произвольным образом элементами  $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , то каждой подстановке  $(a_i)$  можно поставить в соответствие шестиугольник:  $A_k = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

Пример:

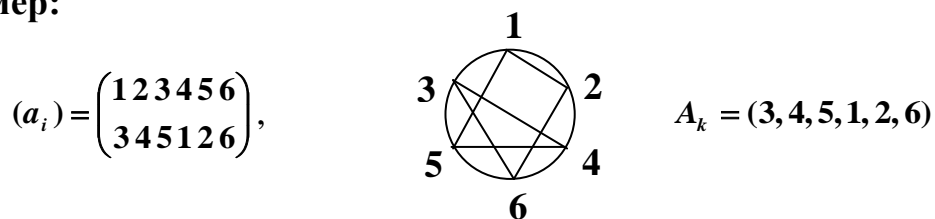


Рис. 31

Т. о. смысл тождественных подстановок заключается в том, что все

они определяют один и тот же шестиугольник. Очевидно, что тождественных подстановок ровно 12.

### Определение 3

*Подстановки  $(a_i)_1, (a_i)_2, (a_i)_3$  будем называть циклическими если*

$$(a_i)_1 \cdot \sigma = (a_i)_2 \quad (a_i)_2 \cdot \sigma = (a_i)_3 \quad (a_i)_3 \cdot \sigma = (a_i)_1,$$

*а подстановку  $(a_i)_1$  - базовой подстановкой, т. к. (забегая вперёд) именно она определяет оператор цикла  $\sigma$ .*

Каждая подстановка  $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$  порождает **40** операторов цикла  $\sigma_j$ , где индекс  $j \in \{1, 2, \dots, 40\}$  определяет тип оператора.

Действительно, число сочетаний  $C_6^3 = 20$ . А каждый оператор цикла состоит из произведения двух независимых циклов, т. е. элементы в этих циклах не повторяются и т. к. для независимых циклов  $(a_i, a_j, a_k)(a_p, a_q, a_r) = (a_p, a_q, a_r)(a_i, a_j, a_k)$ , то получаем 10 различных операторов  $\sigma_j$ . Если изменить направление обхода в одном из независимых циклов, то получим новый оператор  $\sigma_j$ . Т. е. число операторов увеличилось на 10. Если направление обхода изменить во втором независимом цикле, то число различных операторов  $\sigma_j$  увеличится ещё на 10. И, наконец, мы можем изменить направление обхода сразу в обоих независимых циклах, увеличив тем самым число операторов  $\sigma_j$  ещё на 10. Т. о., всего получаем 40 различных типов операторов цикла  $\sigma_j$ .

### Определение 4

*Сопряжёнными операторами цикла будем называть такие операторы  $\sigma_j$  и  $\sigma_k$ , которые для базовых тождественных подстановок порождают тождественные циклические подстановки.*

Т. е. если  $(a_i)_1 \equiv (b_i)_1$  и

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_j = (a_i)_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma_j = (a_i)_3; \quad (a_i)_3 \cdot \sigma_j = (a_i)_1;$$

$$(b_i)_1 \cdot \sigma_k = (b_i)_2; \quad (b_i)_2 \cdot \sigma_k = (b_i)_3; \quad (b_i)_3 \cdot \sigma_k = (b_i)_1,$$

где  $(a_i)_2 \equiv (b_i)_2$ ;  $(a_i)_3 \equiv (b_i)_3$  или  $(a_i)_2 \equiv (b_i)_3$ ;  $(a_i)_3 \equiv (b_i)_2$ , то  $\sigma_j \perp \sigma_k$ . Знаком « $\perp$ » будем обозначать сопряжение операторов цикла.

**Пример:**

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 431562 \end{pmatrix}_1; \quad \sigma_j = (416)(253) = \begin{pmatrix} 123456 \\ 652134 \end{pmatrix};$$

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_j = \begin{pmatrix} 123456 \\ 126345 \end{pmatrix}_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma_j = \begin{pmatrix} 123456 \\ 654213 \end{pmatrix}_3;$$

$$(b_i)_1 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 134265 \end{pmatrix}_1; \quad \sigma_k = (146)(523) = \begin{pmatrix} 123456 \\ 435621 \end{pmatrix};$$

$$(b_i)_1 \cdot \sigma_k = \begin{pmatrix} 123456 \\ 456312 \end{pmatrix}_2; \quad (b_i)_2 \cdot \sigma_k = \begin{pmatrix} 123456 \\ 621543 \end{pmatrix}_3;$$

$$(a_i)_1 \equiv (b_i)_1; \quad (a_i)_2 \equiv (b_i)_3; \quad (a_i)_3 \equiv (b_i)_2, \text{ следовательно } \sigma_j \perp \sigma_k.$$

Очевидно, что тип оператора  $\sigma_j$  определяется порядком расположения элементов  $a_i$  в его независимых циклах.

### Определение 5

*Самосопряжёнными операторами цикла будем называть такие однотипные операторы, которые в случае тождественных базовых подстановок порождают тождественные циклические подстановки.*

Т. е. множество самосопряжённых операторов является подмножеством сопряжённых операторов.

В предыдущем примере  $\sigma_j$  и  $\sigma_k$  как раз являются однотипными, т. к.

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 431562 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1; \quad \sigma_j = (416)(253) = (a_1 a_3 a_5)(a_6 a_4 a_2);$$

$$(b_i)_1 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 134265 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}_1; \quad \sigma_k = (146)(523) = (b_1 b_3 b_5)(b_6 b_4 b_2);$$

Индексы элементов  $a_i$  в независимых циклах оператора  $\sigma_j$  соответствуют индексам элементов  $b_i$  для  $\sigma_k$  (мы говорили, что именно базовая подстановка определяет тип оператора).

Как выяснилось, каждый из 40 операторов  $\sigma_j$  имеет сопряжённый

оператор. Рассмотрим оставшиеся 20 типов операторов, которые определяет подстановка  $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$ .

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6); & \sigma_2 &= (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4); \\ \sigma_3 &= (a_1 a_3 a_5)(a_2 a_4 a_6); & \sigma_4 &= (a_1 a_3 a_5)(a_6 a_4 a_2); \\ \sigma_5 &= (a_1 a_2 a_4)(a_3 a_5 a_6); & \sigma_6 &= (a_1 a_2 a_4)(a_6 a_5 a_3); \\ \sigma_7 &= (a_1 a_2 a_5)(a_3 a_4 a_6); & \sigma_8 &= (a_1 a_2 a_5)(a_6 a_4 a_3); \\ \sigma_9 &= (a_1 a_2 a_6)(a_3 a_4 a_5); & \sigma_{10} &= (a_1 a_2 a_6)(a_5 a_4 a_3); \\ \sigma_{11} &= (a_1 a_3 a_4)(a_2 a_5 a_6); & \sigma_{12} &= (a_1 a_3 a_4)(a_6 a_5 a_2); \\ \sigma_{13} &= (a_1 a_3 a_6)(a_2 a_4 a_5); & \sigma_{14} &= (a_1 a_3 a_6)(a_5 a_4 a_2); \\ \sigma_{15} &= (a_1 a_4 a_5)(a_2 a_3 a_6); & \sigma_{16} &= (a_1 a_4 a_5)(a_6 a_3 a_2); \\ \sigma_{17} &= (a_1 a_5 a_6)(a_2 a_3 a_4); & \sigma_{18} &= (a_1 a_5 a_6)(a_4 a_3 a_2); \\ \sigma_{19} &= (a_1 a_4 a_6)(a_2 a_3 a_5); & \sigma_{20} &= (a_1 a_4 a_6)(a_5 a_3 a_2); \end{aligned}$$

Оказывается, что и среди этих 20-ти операторов есть ещё сопряжённые операторы. Покажем эти операторы, но сначала дадим ещё три необходимых определения.

### Определение 6

Оператором сдвига будем называть подстановку  $(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда  $(\delta)^n \cdot (a_i)_j = (b_i)_k \equiv (a_i)_j$ , где  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Т. о., при помощи оператора сдвига можно получить 6 подстановок, тождественных данной.

### Определение 7

Подстановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$  будем называть тождественно-зеркальной подстановке  $(a_i)_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$  и обозначать её  $\overline{(a_i)_j}$ .

### Определение 8

Подстановку  $(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  будем называть оператором зеркального отражения.

Т. е.  $(\omega) \cdot (a_i)_j = \overline{(a_i)_j}$ .

Т. о., все 12 тождественных подстановок можно разбить на два класса подстановок  $(b_i)$  и  $(c_i)$ , где  $(b_i)_j = (\delta)^n \cdot (a_i)_j$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ;

$$(c_i)_j = (\omega) \cdot (b_i)_j = (\omega) \cdot (\delta)^n \cdot (a_i)_j.$$

Для тождественных подстановок справедливо **свойство**:

Если даны две тождественные подстановки  $(a_i) \equiv (b_i)$  и произвольная подстановка  $(\rho)$ , то

$$(a_i) \cdot (\rho) \equiv (b_i) \cdot (\rho). \quad (5)$$

Данное свойство справедливо в силу справедливости сочетательного закона умножения подстановок и закона транзитивности для тождественных подстановок.

Действительно: пусть:  $(a_i) \cdot (\rho) = (c_i)$ .

$$\begin{aligned} (a_i) &\equiv (b_i); \quad (b_i) = (\delta)^n \cdot (\omega)^k \cdot (a_i); \\ (b_i) \cdot (\rho) &= ((\delta)^n \cdot (\omega)^k \cdot (a_i)) \cdot (\rho) = (\delta)^n \cdot (\omega)^k \cdot ((a_i) \cdot (\rho)) = \\ &= (\delta)^n \cdot (\omega)^k \cdot (c_i) \equiv (c_i); \text{ т. е. } (b_i) \cdot (\rho) \equiv (c_i). \end{aligned}$$

Из  $(a_i) \cdot (\rho) = (c_i)$  можем записать, что  $(a_i) \cdot (\rho) \equiv (c_i)$ . И в силу закона транзитивности для тождественных подстановок получаем:  $(a_i) \cdot (\rho) \equiv (b_i) \cdot (\rho)$ .

Для операторов  $(\delta)$  и  $(\omega)$  справедливо *свойство коммутативности*:

$$(\delta)^n \cdot (\omega) \equiv (\omega) \cdot (\delta)^k; \quad n, k \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad (6)$$

При  $n + k = 6$  получаем следствие из свойства коммутативности:

$$(\delta)^n \cdot (\omega) = (\omega) \cdot (\delta)^k \quad (7)$$

Равенство (7) проверяется непосредственным вычислением. Докажем свойство (6). В силу тождественности  $(\delta)^n \equiv (\delta)^m$  и свойства (5) можем записать:  $(\delta)^n \cdot (\omega) \equiv (\delta)^m \cdot (\omega)$ . Но в силу равенства (7):  $(\delta)^n \cdot (\omega) = (\omega) \cdot (\delta)^k$ , при  $n + k = 6$  очевидно, что  $(\delta)^n \cdot (\omega) \equiv (\omega) \cdot (\delta)^k$ . И по закону транзитивности свойства тождественности получаем:  $(\delta)^m \cdot (\omega) \equiv (\omega) \cdot (\delta)^k$ , что и требовалось доказать.

Из равенства (7) в частности получаем  $(\delta) \cdot (\omega) \cdot (\delta) = (\omega)$ , и т. к.  $(\omega)^2 = (\varepsilon)$ , то  $((\delta) \cdot (\omega))^2 = ((\omega) \cdot (\delta))^2 = (\varepsilon)$ , где  $(\varepsilon)$  - нейтральная подстановка, такая, что  $(a) \cdot (\varepsilon) = (\varepsilon) \cdot (a) = (a)$ .

Теперь вернёмся к отысканию сопряжённых операторов среди  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{20}$ . Покажем, что каждый из операторов цикла типа  $\sigma_7, \sigma_8, \dots, \sigma_{20}$  будет обязательно сопряжён с каким-нибудь из операторов

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ .

Пусть  $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \mapsto \sigma_7$ . Знак « $\mapsto$ » здесь заменяет слова «порождает оператор цикла».

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_5 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подстановку, тождественную подстановке  $(a_i)_1$ .

$$(a_i)_1 \equiv \delta^2 \cdot (a_i)_1 = (b_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Найдём для этой подстановки оператор цикла типа  $\sigma_5$ . Т. е. первый независимый цикл оператора  $\sigma_5$  должен иметь 1, 2 и 4 элементы из нижнего ряда подстановки  $(b_i)_1$ , а второй соответственно – 3, 5 и 6 элементы. Получаем:

$$\sigma_5 = (a_3 a_4 a_6)(a_5 a_1 a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_5 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \sigma_7.$$

Т. к.  $\sigma_7 = \sigma_5$  и  $(a_i)_1 \equiv (b_i)_1$ , то в силу тождества (5) циклические подстановки будут соответственно тождественными:  $(a_i)_j \cdot \sigma_7 \equiv (b_i)_j \cdot \sigma_5$ , и, следовательно  $\sigma_7 \perp \sigma_5$ .

Аналогично доказывается, что  $\sigma_8 \perp \sigma_6$ .

Рассмотрим оператор цикла  $\sigma_9$ . Т. е.

$$(a_i)_1 \mapsto \sigma_9 = (a_1 a_2 a_6)(a_3 a_4 a_5) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подстановку  $(b_i)_1 \equiv (a_i)_1$ , где  $(b_i)_1 = (\delta)^5 \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ . Тогда  $(b_i)_1 \mapsto \sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} = \sigma_9$ , и, следовательно, как и в предыдущем случае, получаем, что  $\sigma_9 \perp \sigma_1$ .

Рассуждая аналогично, находим:

$$\sigma_1 \perp \sigma_9 \perp \sigma_{17}; \quad \sigma_2 \perp \sigma_{10} \perp \sigma_8;$$



$$\sigma_5 \perp \sigma_7 \perp \sigma_{11} \perp \sigma_{13} \perp \sigma_{15} \perp \sigma_{19};$$

$$\sigma_6 \perp \sigma_8 \perp \sigma_{12} \perp \sigma_{14} \perp \sigma_{16} \perp \sigma_{20}.$$

Для циклов типа  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  сопряжённых операторов не существует. Как будет показано ниже, среди операторов цикла типа  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  существуют самосопряжённые операторы.

## 5. Обоснование использования аппарата алгебраических подстановок

Ранее мы сформулировали теорему о циклических шестиугольниках. Сейчас мы дадим необходимое обоснование использования алгебраических подстановок, чтобы в дальнейшем с его помощью можно было доказать вышеназванную теорему и провести некоторые исследования.

Итак, мы выделили 6 типов несопряжённых операторов цикла для базовой подстановки  $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ :

$$\sigma_1 = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2 = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_3 = (a_1 a_3 a_5)(a_2 a_4 a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_4 = (a_1 a_3 a_5)(a_6 a_4 a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_5 = (a_1 a_2 a_4)(a_3 a_5 a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_4 & a_5 & a_1 & a_6 & a_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_6 = (a_1 a_2 a_4)(a_6 a_5 a_3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Найдём с помощью каждого из этих операторов подстановки циклических шестиугольников.

Для  $\sigma_1$  имеем:

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma_1 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_3.$$

Из теоремы о циклических шестиугольниках помним, что циклические шестиугольники состоят из парных объединений подмножеств  $K_i$ ,  $K_j$ ,  $K_n$ . Попробуем выделить такие подмножества среди полученных подстановок  $(a_i)_1$ ,  $(a_i)_2$  и  $(a_i)_3$ .

Введём обозначения.

$$\text{Для } (a_i)_1: \quad (a_1 a_2) = q_1; \quad (a_2 a_3) = q_2; \quad (a_3 a_4) = q_3; \\ (a_4 a_5) = q_4; \quad (a_5 a_6) = q_5; \quad (a_6 a_1) = q_6.$$

$$\text{Для } (a_i)_2: \quad (a_2 a_3) = q_2; \quad (a_3 a_1) = q_7; \quad (a_1 a_5) = q_8; \\ (a_5 a_6) = q_5; \quad (a_6 a_4) = q_9; \quad (a_4 a_2) = q_{10}.$$

$$\text{Для } (a_i)_3: \quad (a_3 a_1) = q_7; \quad (a_1 a_2) = q_1; \quad (a_2 a_6) = q_{11}; \\ (a_6 a_4) = q_9; \quad (a_4 a_5) = q_4; \quad (a_5 a_3) = q_{12}.$$

Чтобы наши циклические шестиугольники соответствовали упомянутой теореме необходимо, чтобы объединение  $K_i \cup K_j \cup K_n$  состояло только из 9-ти элементов  $q_i$  (стр. 26). При использовании оператора  $\sigma_1$  мы получаем шестиугольники, состоящие из 12-ти элементов  $q_i$ . Это противоречит теореме о циклических шестиугольниках.

Построим циклические шестиугольники, используя оператор цикла  $\sigma_2$ . Обозначения для  $q_i$  оставим, как и в предыдущем случае.

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_2 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3.$$

$$\text{Для } (a_i)_2: \quad (a_2 a_3) = q_2; \quad (a_3 a_1) = q_7; \quad (a_1 a_6) = q_6; \\ (a_6 a_4) = q_9; \quad (a_4 a_5) = q_4; \quad (a_5 a_2) = q_{13}.$$

$$\text{Для } (a_i)_3: \quad (a_3 a_1) = q_7; \quad (a_1 a_2) = q_1; \quad (a_2 a_5) = q_{13}; \\ (a_5 a_6) = q_5; \quad (a_6 a_4) = q_9; \quad (a_4 a_3) = q_3.$$

Т. е. получаем:  $K_i = \{q_1, q_3, q_5\}$ ;  $K_j = \{q_2, q_4, q_6\}$ ;  $K_n = \{q_7, q_9, q_{13}\}$ ,  
 $(a_i)_1 = K_i \cup K_j$ ;  $(a_i)_2 = K_j \cup K_n$ ;  $(a_i)_3 = K_i \cup K_n$ .

Таким образом, оператор  $\sigma_2$  годится для построения циклических

шестиугольников.

Исследуем циклические шестиугольники, получаемые при помощи оператора  $\sigma_3$ .

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_3 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma_3 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}_3.$$

Как видим,  $(a_i)_1$ ,  $(a_i)_2$ ,  $(a_i)_3$  тождественны между собой. Т. е. этот случай также как и первый не удовлетворяет условиям нашей теоремы.

Рассмотрим шестиугольники, получаемые при помощи оператора цикла  $\sigma_4$ .

$$(a_i)_1 \cdot \sigma_4 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}_2; \quad (a_i)_2 \cdot \sigma_4 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_4 & a_1 & a_6 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}_3.$$

$$\text{Для } (a_i)_2: \quad (a_3 a_6) = q_{14}; \quad (a_6 a_5) = q_5; \quad (a_5 a_2) = q_{13}; \\ (a_2 a_1) = q_1; \quad (a_1 a_4) = q_{15}; \quad (a_4 a_3) = q_3.$$

$$\text{Для } (a_i)_3: \quad (a_5 a_4) = q_4; \quad (a_4 a_1) = q_{15}; \quad (a_1 a_6) = q_6; \\ (a_6 a_3) = q_{14}; \quad (a_3 a_2) = q_2; \quad (a_2 a_5) = q_{13}.$$

$$\text{Получаем: } K_i = \{q_1, q_3, q_5\}; \quad K_j = \{q_2, q_4, q_6\}; \quad K_n = \{q_{13}, q_{14}, q_{15}\}$$

$$(a_i)_1 = K_i \cup K_j; \quad (a_i)_2 = K_i \cup K_n; \quad (a_i)_3 = K_j \cup K_n.$$

Аналогично, исследуя операторы  $\sigma_5$  и  $\sigma_6$ , получаем 12 и 15 элементов  $q_i$  соответственно, что противоречит условиям теоремы о циклических шестиугольниках.

Отметим, что теорема о циклических шестиугольниках объединяет в себе две части, соответствующие двум классам троек циклических шестиугольников, получаемых при помощи операторов  $\sigma_2$  и  $\sigma_4$ .

Ниже мы увидим, что при помощи оператора  $\sigma_2$  вычисляются все тройки циклических подстановок, соответствующие циклическим шестиугольникам множества  $H$ , а при помощи оператора  $\sigma_4$  - циклическим шестиугольникам множества  $S$ .

## 6. Доказательство теоремы о циклических шестиугольниках

Теперь приступим к доказательству теоремы о циклических шестиугольниках.

Доказательство разобьём на две части, для оператора  $\sigma_2$  и оператора

$\sigma_4$ .

**Доказательство:**

1. Пусть базовая подстановка имеет вид:

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1.$$

$$\text{Для этой подстановки } \sigma_2 = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Найдём  $(a_i)_2$  и  $(a_i)_3$ .

$$(a_i)_2 = (a_i)_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2$$

$$(a_i)_3 = (a_i)_2 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3.$$

Определим для каждого из циклических шестиугольников прямые Паскаля. Для этого найдём точки пересечения противоположных сторон. Для шестиугольника, соответствующего подстановке  $(a_i)_1$  будем иметь:

$$((a_1 a_2) \cap (a_4 a_5)) \equiv A; \quad ((a_2 a_3) \cap (a_5 a_6)) \equiv B; \quad ((a_3 a_4) \cap (a_6 a_1)) \equiv C.$$

Тогда по теореме Паскаля точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой (прямая Паскаля). Обозначим эту прямую  $\alpha$ .

Для  $(a_i)_2$  будем иметь свою прямую Паскаля.

$$((a_2 a_3) \cap (a_6 a_4)) \equiv M; \quad ((a_3 a_1) \cap (a_4 a_5)) \equiv N; \quad ((a_1 a_6) \cap (a_5 a_2)) \equiv K.$$

Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  лежат на одной прямой -  $\beta$ .

Для третьего шестиугольника  $(a_i)_3$  будем иметь такие точки пересечения противоположных сторон:

$$((a_3 a_1) \cap (a_5 a_6)) \equiv X; \quad ((a_1 a_2) \cap (a_6 a_4)) \equiv Y; \quad ((a_2 a_5) \cap (a_4 a_3)) \equiv Z.$$

Точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежат на одной прямой -  $\gamma$ .

Рассмотрим шестиугольник, вершины которого расположены на прямых  $(a_1 a_2)$  и  $(a_5 a_6)$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & a_2 & X & Y & a_6 \end{pmatrix}$ .

Найдём точки пересечения его противоположных сторон,

определяющие прямую Паскаля – Паппа для данного шестиугольника.

$$((AB) \cap (XY)) \equiv O; ((Ba_2) \cap (Ya_6)) \equiv R; ((a_2X) \cap (a_6A)) \equiv P.$$

Но  $(AB) \equiv \alpha$ ,  $(XY) \equiv \gamma$  следовательно можно записать  $\alpha \cap \gamma \equiv O$ .

Таким образом, нам необходимо доказать, что также и прямая  $\beta$  проходит через точку  $O$ .

Точка  $B \in (a_2a_3)$ , точка  $M \in (a_2a_3)$ , следовательно можно записать:  $M \in (Ba_2)$ .

Точка  $Y \in (a_6a_4)$ , точка  $M \in (a_6a_4)$ , следовательно можно записать:  $M \in (Ya_6)$ . Т. к.  $M \in (Ba_2)$  и  $M \in (Ya_6)$  заключаем, что  $M \equiv R$ .

Рассмотрим ещё один шестиугольник, вершины которого также расположены на прямых  $(a_1a_2)$  и  $(a_5a_6)$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & X & a_1 & a_6 & A & a_5 \end{pmatrix}$ .

Определим для него прямую Паскаля – Паппа.

$$((a_2X) \cap (a_6A)) \equiv P; ((Xa_1) \cap (Aa_5)) \equiv Q; ((a_1a_6) \cap (a_5a_2)) \equiv K.$$

Точка  $X \in (a_1a_3)$ , точка  $N \in (a_1a_3)$ , следовательно можно записать:  $N \in (Xa_1)$ .

Точка  $A \in (a_4a_5)$ , точка  $N \in (a_4a_5)$ , следовательно можно записать:  $N \in (Aa_5)$ .

Т. к.  $N \in (Xa_1)$  и  $N \in (Aa_5)$  заключаем, что  $N \equiv Q$ . Но т. к.  $(KN) \equiv \beta$ , то и  $P \in \beta$ . А т. к. точки  $O, M, P$  лежат на одной прямой и  $M \in \beta, P \in \beta$ , то и  $O \in \beta$ . Т. е. прямые Паскаля  $\alpha, \beta, \gamma$  пересекаются в одной точке  $O$ .

Что и требовалось доказать.

2. Аналогично проводится и доказательство для оператора цикла  $\sigma_4$ .

$$\sigma_4 = (a_1a_3a_5)(a_6a_4a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Имеем циклические шестиугольники, вернее – подстановки их определяющие  $(a_i)_1, (a_i)_2, (a_i)_3$ , а именно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_4 & a_1 & a_6 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}_3.$$

Для этих шестиугольников прямые Паскаля  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно будут определяться:

$$\alpha: \{ ((a_1a_2) \cap (a_4a_5)) \equiv A; ((a_2a_3) \cap (a_5a_6)) \equiv B; ((a_3a_4) \cap (a_6a_1)) \equiv C \};$$

$$\beta: \{ ((a_3a_6) \cap (a_2a_1)) \equiv M; ((a_6a_5) \cap (a_1a_4)) \equiv N; ((a_5a_2) \cap (a_4a_3)) \equiv K \};$$

$$\gamma: \{ ((a_5a_4) \cap (a_6a_3)) \equiv X; ((a_4a_1) \cap (a_3a_2)) \equiv Y; ((a_1a_6) \cap (a_2a_5)) \equiv Z \}.$$

Рассмотрим шестиугольник, вершины которого расположены на прямых  $(a_2a_3)$  и  $(a_1a_6)$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ BC & a_3 & Y & Z & a_2 \end{pmatrix}$ .

Определим прямую Паскаля – Паппа для этого шестиугольника:

$$((BC) \cap (YZ)) \equiv O; ((Ca_3) \cap (Za_2)) \equiv R; ((a_3Y) \cap (a_2B)) \equiv P.$$

$$(BC) \equiv \alpha, (YZ) \equiv \gamma \text{ следовательно } \alpha \cap \gamma \equiv O.$$

Точка  $C \in (a_3a_4)$ , точка  $K \in (a_3a_4)$  следовательно  $K \in (Ca_3)$ . Точка  $Z \in (a_2a_5)$ , точка  $K \in (a_2a_5)$  следовательно  $K \in (a_2Z)$  и следовательно  $K \equiv R$ .

Рассмотрим ещё один шестиугольник на прямых  $(a_2a_3)$  и  $(a_1a_6)$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & Y & a_1 & a_2 & B & a_6 \end{pmatrix}$ . Его прямая Паскаля определяется точками:  $P, Q, M$ .

$$((a_3Y) \cap (a_2B)) \equiv P; ((Ya_1) \cap (Ba_6)) \equiv Q; ((a_1a_2) \cap (a_6a_3)) \equiv M.$$

Точка  $Y \in (a_1a_4)$ , точка  $N \in (a_1a_4)$  следовательно  $N \in (Ya_1)$ . Точка  $B \in (a_5a_6)$ , точка  $N \in (a_5a_6)$  следовательно  $N \in (Ba_6)$  и следовательно  $N \equiv Q$ . Следовательно точки  $M, N, P$  принадлежат прямой  $\beta$ , но т.к.  $K \in \beta$  и  $P \in \beta$ , то и точка  $O \in \beta$ . Следовательно прямые Паскаля  $\alpha, \beta, \gamma$  пересекаются в одной точке  $O$ .

Что и требовалось доказать.

Для второй части теоремы существует ещё одно очень оригинальное и более «прозрачное» доказательство. Покажем его здесь.

2\*. Рассмотрим такой шестиугольник  $(a_i)_1$ :  $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_6 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}_1$ .

Найдём для него прямую Паскаля:

$$((a_1a_2) \cap (a_6a_5)) \equiv U; ((a_2a_3) \cap (a_5a_4)) \equiv V; ((a_3a_6) \cap (a_4a_1)) \equiv W.$$

Рассмотрим два треугольника, образованные прямыми  $(a_1a_2)$ ,  $(a_3a_6)$ ,

$(a_4a_5)$  и прямыми  $(a_5a_6)$ ,  $(a_1a_4)$ ,  $(a_2a_3)$ .

Используя уже принятые выше обозначения – это будут треугольники:  $\triangle AMX$  и  $\triangle BNY$ . И т. к.

$$((a_1a_2) \cap (a_4a_5)) \equiv A; \quad ((a_3a_6) \cap (a_1a_2)) \equiv M; \quad ((a_4a_5) \cap (a_3a_6)) \equiv X;$$

$$((a_2a_3) \cap (a_5a_6)) \equiv B; \quad ((a_5a_6) \cap (a_1a_4)) \equiv N; \quad ((a_1a_4) \cap (a_2a_3)) \equiv Y,$$

можем записать:  $((AM) \cap (BN)) \equiv U$ ;  $((AX) \cap (BY)) \equiv V$ ;  $((MX) \cap (NY)) \equiv W$ .

Из этого заключаем, что стороны треугольников  $\triangle AMX$  и  $\triangle BNY$ , попарно пересекаясь, образуют точки  $U, V, W$ , лежащие на одной прямой (ось перспективы), а следовательно, по теореме Дезарга эти треугольники должны иметь центр перспективы. Т. е. прямые, проходящие через соответствующие в треугольниках вершины, будут пересекаться в одной точке. В нашем случае имеем соответствие:  $A \leftrightarrow B$ ,  $M \leftrightarrow N$ ,  $X \leftrightarrow Y$ , т.е. прямые  $(AB)$ ,  $(MN)$  и  $(XY)$  пересекаются в одной точке. А это ни что иное, как прямые Паскаля циклических шестиугольников, определяемых подстановками:  $(a_i)_1$ ,  $(a_i)_2$ ,  $(a_i)_3$ .

Что и требовалось доказать.

Данное доказательство ценно тем, что оно позволяет отыскивать парные тройки  $(a_i)_j$  и  $(a_i)_j^*$  циклических шестиугольников на множестве  $S$ .

Взяв подстановку  $(a_i)_1^*$  за базовую, найдём для неё оператор цикла  $\sigma_4$ :

$$\sigma_4 = (a_1a_3a_5)(a_2a_4a_6) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим  $(a_i)_2^* = (a_i)_1^* \cdot \sigma_4$ .

$$(a_i)_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_3 & a_6 & a_1 & a_2 & a_5 \end{pmatrix}_2^*.$$

И теперь, отталкиваясь от подстановки  $(a_i)_2^*$ , можем вновь построить аналогичное доказательство второй части теоремы о циклических шестиугольниках.

Подобное же доказательство можно провести и с подстановкой  $(a_i)_3^* = (a_i)_2^* \cdot \sigma_4$ .

Т. о., множество  $S$  распадается на 10 пар троек циклических шестиугольников.

Вышедоказанная теорема даёт аналитический метод исследования

(может быть, и не самый удобный), но который всё-таки позволяет заменить прямые геометрические построения, во время которых очень трудно избежать погрешностей и, как правило, частных случаев.

### 7. Аналитическое исследование множества $T^3$ .

Рассмотрим каждую из циклических подстановок как базовую. Как выяснилось, циклические подстановки порождают один и тот же оператор цикла.

Действительно:

$$\text{Пусть } (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1, \text{ тогда } (a_i)_1 \mapsto \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Найдём  $(a_i)_2 = (a_i)_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2$ . Для данной подстановки, как для базовой построим оператор цикла типа  $\sigma_2$ .

$$(a_i)_2 \mapsto \sigma'_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналогичные операции для подстановки  $(a_i)_3$ , не трудно убедиться, что порождаемый ею оператор цикла типа  $\sigma_2$  равен предыдущему.

Это свойство справедливо и для оператора цикла типа  $\sigma_4$ .

Рассмотрим две тройки циклических подстановок:  $(a_i)_1, (a_i)_2, (a_i)_3$  с оператором цикла  $\sigma_a$  и  $(b_i)_1, (b_i)_2, (b_i)_3$  с оператором цикла  $\sigma_b$ , где  $\sigma_a$  и  $\sigma_b$  операторы цикла типа  $\sigma_2$  либо - типа  $\sigma_4$ .

Рассмотрим такой случай. Пусть две какие-нибудь подстановки, по одной из каждой тройки, не тождественны между собой, например подстановки  $(a_i)_1$  и  $(b_i)_1$ , а остальные четыре – попарно тождественны, например  $(a_i)_2 \equiv (b_i)_2$  и  $(a_i)_3 \equiv (b_i)_3$ .

Тогда:  $(b_i)_2 = (\omega)^k \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2$ ;  $(b_i)_3 = (\omega)^m \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3$ , где  $k, m \in \{1, 2\}$ ,  $p, q \in \{1, 2, \dots, 6\}$ .

Для  $k$  и  $m$  возможны четыре случая:

1).  $k = m = 2$ ;

2).  $k = m = 1$ ;



$$3). \quad k = 2, m = 1;$$

$$4). \quad k = 1, m = 2.$$

Рассмотрим случай 1.

$$(\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$(a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{6-p} \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{6-p} \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^\nu \cdot (a_i)_3, \quad (8)$$

где  $\nu \equiv (6 - p + q) \bmod 6$ , и  $1 \leq \nu \leq 6$ .

$$\text{Случай 2.} \quad (\omega) \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\omega) \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3.$$

Если умножим обе части последнего равенства слева на  $(\omega)$ , то снова придём к выражению (8).

$$\text{Случай 3.} \quad (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\omega) \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\delta)^{6-p} \cdot (\omega) \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\omega) \cdot (\delta)^p \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3;$$

$$\sigma_b = (a_i)_2^{-1} \cdot (\omega) \cdot (\delta)^\nu \cdot (a_i)_3, \quad (9)$$

где  $\nu \equiv (p + q) \bmod 6$ , и  $1 \leq \nu \leq 6$ .

$$\text{Случай 4.} \quad (\omega) \cdot (\delta)^p \cdot (a_i)_2 \cdot \sigma_b = (\delta)^q \cdot (a_i)_3.$$

Очевидно, что последнее выражение легко можно свести к равенству (8).

Зная  $(a_i)_1$ , можно найти  $\sigma_a$ ,  $(a_i)_2$ ,  $(a_i)_3$ ,  $(a_i)_2^{-1}$  и исследовать (8) и (9) при различных  $p$  и  $q$ , и различных типах оператора  $\sigma_a$  (помним, что  $\sigma_a$  может быть либо типа  $\sigma_2$ , либо типа  $\sigma_4$ ).

Среди всех решений уравнений (8), (9) нас будут интересовать случаи, когда  $\sigma_b$  (это и есть неизвестное наших уравнений) будет типа  $\sigma_2$ , либо типа  $\sigma_4$ . В этом случае прямые Паскаля шестиугольников, соответствующих подстановкам  $(a_i)_1$ ,  $(a_i)_2$ ,  $(a_i)_3$  и  $(b_i)_1$  будут пересекаться

в одной точке, т. к. подстановки  $(a_i)_1$  и  $(b_i)_1$  нетождественны по условию.

Рассмотрим уравнение (8).

Пусть  $(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1$ , и  $\sigma_a$  имеет тип  $\sigma_2$ , т. е.

$$\sigma_a = \sigma_2 = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим циклические подстановки  $(a_i)_2$  и  $(a_i)_3$ , а также подстановку  $(a_i)_2^{-1}$ .

$$(a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2; (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3; (a_i)_2^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}_2^{-1}.$$

Будем рассматривать уравнение (8) при различных значениях  $\nu$ :  
 $\nu = 1$ .

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3,$$

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_6 \end{pmatrix} = (a_1 a_5 a_3 a_2)(a_4)(a_6).$$

$\nu = 2$ .

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_6 & a_2 & a_5 & a_3 & a_1 & a_4 \end{pmatrix} = (a_1 a_6 a_4 a_3 a_5)(a_2).$$

$\nu = 3$ .

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = (a_1 a_4)(a_2 a_5)(a_3 a_6).$$

$\nu = 4$ .

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_4 & a_2 & a_5 & a_1 \end{pmatrix} = (a_1 a_3 a_4 a_2 a_6)(a_5).$$

$\nu = 5$ .

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_4 & a_3 & a_5 & a_6 & a_2 \end{pmatrix} = (a_1)(a_2 a_4 a_5 a_6)(a_3).$$

$\nu = 6$ .

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = (a_1 a_2 a_3)(a_6 a_5 a_4).$$

Как видим, при  $\nu = 6$  мы получили оператор цикла  $\sigma_b = \sigma_a$ , но мы не знаем какой вид имеет базовая подстановка  $(b_i)_1$ , поэтому пока ничего нельзя сказать какой тип имеет оператор  $\sigma_b$ .

Рассмотрим уравнение  $(b_i)_3 = (\omega)^m \cdot (\delta)^q \cdot (a_i)_3$ .

$m = 2$ , следовательно  $(\omega)^2 = (\varepsilon)$ ,  $(a_i)_3$  - нам известно. Необходимо найти  $q$ .

При  $\nu = 6$  и  $p \leq 6$ ,  $q \leq 6$  можем заключить, что выражение  $\nu \equiv (6 - p + q) \bmod 6$  справедливо при  $p = q$  (т. е. нам подходит любое значение  $q$  от 1 до 6).

Найдём  $(b_i)_3$  при  $q = 1$ .

$$(b_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_3.$$

Зная  $(b_i)_3$ , находим  $(b_i)_1 = (b_i)_3 \cdot \sigma_b$ .

$$(b_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 \end{pmatrix}_1,$$

т. е.  $(b_i)_1 \equiv (a_i)_1$ , но это противоречит нашим условиям.

Не трудно убедиться, что и при остальных значениях  $q$  мы будем всегда получать  $(b_i)_1 \equiv (a_i)_1$ .

Как видим, ни при каких значениях  $\nu$  подстановка  $\sigma_b$  не является нужным нам оператором цикла.

Аналогичное заключение получим и при решении уравнения (9).

Для оператора цикла  $\sigma_a$  типа  $\sigma_4$  получаем такие же результаты.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что в рамках доказанной теоремы о циклических шестиугольниках не удаётся найти хотя бы одну четвёрку шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекались бы в одной точке. Вообще, такие четвёрки шестиугольников существуют. Мы покажем это в *Приложении 3*.

Продолжим исследование нашего множества  $T^3$ .

Построим цепочку конкретных троек шестиугольников из

подмножества  $H$  по следующему алгоритму.

1. Возьмём конкретный  $A_k \in A$
2. Найдём для него объединение  $K_i \cup K_j \cup K_n = K \setminus A_k$
3. Определим тройку циклических шестиугольников

$$A_p = (K_i \cup K_j); \quad A_q = (K_i \cup K_n); \quad A_r = (K_j \cup K_n).$$

4. Выберем шестиугольник  $A_m$  из числа найденных, но ещё не использованных для нахождения объединения  $K_i \cup K_j \cup K_n = K \setminus A_k$ .

5. Переход к пункту 2

Т. к. множество  $H$  конечно, то следуя этому алгоритму, мы построим конечную цепочку объединений и, следовательно, конечную цепочку троек циклических шестиугольников.

Начнём с шестиугольника  $A_1$ .

$$K \setminus A_1 = K_1 \cup K_2 \cup K_3;$$

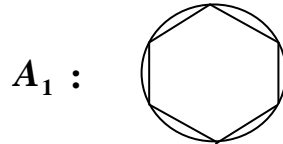


Рис. 32

$$(K_1 \cup K_2) = A_{57}; \quad (K_1 \cup K_3) = A_{58}; \quad (K_2 \cup K_3) = A_{56}.$$

т. е. объединение для  $A_1$  порождает тройку циклических шестиугольников  $(A_{56}, A_{57}, A_{58})$ . И так далее...

Выпишем полученную цепочку троек циклических шестиугольников:

$$\begin{array}{lll} A_1 & \rightarrow & (A_{56}, A_{57}, A_{58}); \\ A_{56} & \rightarrow & (A_1, A_{22}, A_{25}); \\ A_{57} & \rightarrow & (A_1, A_{20}, A_{23}); \\ A_{58} & \rightarrow & (A_1, A_{21}, A_{24}); \\ A_{22} & \rightarrow & (A_{56}, A_{23}, A_{21}); \end{array}$$

$$\begin{aligned}
A_{25} &\rightarrow (A_{56}, A_{20}, A_{24}); \\
A_{20} &\rightarrow (A_{57}, A_{25}, A_{21}); \\
A_{23} &\rightarrow (A_{57}, A_{22}, A_{24}); \\
A_{21} &\rightarrow (A_{58}, A_{20}, A_{22}); \\
A_{24} &\rightarrow (A_{58}, A_{23}, A_{25}).
\end{aligned}$$

Как видим, наша цепочка состоит из 10-ти троек, порождаемых 10-ю шестиугольниками.

Теперь построим такую цепь в самом общем виде.

Предварительно рассмотрим случаи самосопряжений операторов цикла типа  $\sigma_2$ , порождаемых 12-тью тождественными подстановками.

Покажем, что подстановки  $(a_i)_1$  и  $\overline{(a_i)_1}$  порождают самосопряжённые операторы цикла типа  $\sigma_2$ .

Действительно:

$$\begin{aligned}
(a_i)_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}; \\
\overline{(a_i)_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\sigma_2' = \sigma_2.$$

Т. к.  $\sigma_2' = \sigma_2$  и базовые подстановки тождественны, то  $(a_i)_j \cdot \sigma_2 \equiv \overline{(a_i)_j} \cdot \sigma_2'$  и, следовательно,  $\sigma_2$  и  $\sigma_2'$  являются самосопряжёнными операторами цикла.

Рассмотрим тождественные подстановки  $(\delta)^n \cdot (a_i)_1$  и  $(\delta)^{n+3} \cdot (a_i)_1$  при  $n \in \{0, 1, 2\}$ .

Пусть

$$((\delta)^n \cdot (a_i)_1)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
((\delta)^{n+3} \cdot (a_i)_1)_1 &= (\delta)^3 ((\delta)^n \cdot (a_i)_1)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_2' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$((\delta)^n \cdot (a_i)_1)_1 \cdot \sigma_2 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2;$$

$$(a_i)_2 \cdot \sigma_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3.$$

$$((\delta)^{n+3} \cdot (a_i)_1)_1 \cdot \sigma_2' = (a_i)_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_6 & a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}_2';$$

$$(a_i)_2' \cdot \sigma_2' = (a_i)_3' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_4 & a_5 & a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}_3'.$$

Как видим,  $(a_i)_2 \equiv (a_i)_3'$ ,  $(a_i)_3 \equiv (a_i)_2'$  следовательно операторы  $\sigma_2$  и  $\sigma_2'$  являются самосопряжёнными.

Следовательно, среди всех 12-ти тождественных подстановок не самосопряжённые операторы цикла типа  $\sigma_2$  порождаются только базовыми подстановками:

$$(a_i)_1; \quad ((\delta) \cdot (a_i)_1)_1; \quad ((\delta)^2 \cdot (a_i)_1)_1.$$

Это значит, что для каждого шестиугольника может быть построено три различных тройки циклических шестиугольников при помощи оператора цикла типа  $\sigma_2$ . Это также даёт нам возможность построения цепочки троек циклических шестиугольников, т. к. вышеописанный алгоритм неприменим для абстрактных построений.

Теперь рассмотрим самосопряжения среди операторов цикла типа  $\sigma_4$ , порождаемых тождественными подстановками.

Рассмотрим подстановки  $(a_i)_1$  и  $\omega \cdot (a_i)_1$ .

Пусть

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix};$$

$$\omega \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}_1 \mapsto \sigma_4' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Т. е. операторы цикла  $\sigma_4$  и  $\sigma_4'$  являются самосопряжёнными. Кроме этого заметим, что подстановка оператора цикла типа  $\sigma_4$  для всех тождественных подстановок  $((\delta)^n \cdot (a_i)_1)$  одна и та же. Проверить это не

трудно. А это значит, что все тождественные подстановки  $((\delta)^n \cdot (a_i)_1)$  порождают самосопряжённые операторы цикла типа  $\sigma_4$ .

Вывод: для всех 12-ти тождественных подстановок, взятых в качестве базовых, операторы цикла типа  $\sigma_4$  самосопряжены.

Из всего вышеизложенного заключаем, что цепь из троек циклических подстановок возможно построить, используя только оператор цикла типа  $\sigma_2$ .

Приступая к конкретным вычислениям, сделаем одно важное замечание, которое позволит облегчить работу с подстановками.

Ранее везде речь шла о правом операторе цикла (имеется в виду умножение на оператор цикла справа), который порождается базовой подстановкой. Между тем, существуют, и для вычислений более удобно использовать, левые операторы цикла типа  $\tau_2$  и  $\tau_4$ .

Дело в том, что левые операторы являются универсальными и не зависят от конкретной базовой подстановки.

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (123)(654);$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (135)(642).$$

Можно было бы с самого начала изложения нашей работы использовать только левые операторы цикла, но в этом случае многие общие понятия и свойства остались бы вне рассмотрения.

Теперь приступим к вычислению цепочки циклических подстановок. Обозначим шестиугольник, соответствующий подстановке

$$(a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_1 \text{ через } H_1, \text{ тогда}$$

$$1. \quad H_2 : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_3 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_3.$$

Получаем первую тройку циклических шестиугольников:  $(H_1, H_2, H_3)$ .

2. Теперь в качестве базовой (исходной) возьмём подстановку  $((\delta) \cdot (a_i)_1)_1$ .

$$H_4: \tau_2 \cdot ((\delta) \cdot (a_i)_1)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_5: \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 \end{pmatrix}_3.$$

Получаем тройку циклических шестиугольников:  $(H_1, H_4, H_5)$ .

3. И ещё раз в качестве исходной возьмём подстановку, соответствующую шестиугольнику  $H_1: ((\delta)^2 \cdot (a_i)_1)_1$ .

$$H_6: \tau_2 \cdot ((\delta)^2 \cdot (a_i)_1)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_5 & a_3 & a_2 & a_6 & a_1 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_7: \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_6 \end{pmatrix}_3.$$

Имеем такую новую тройку:  $(H_1, H_6, H_7)$ .

4. Теперь в качестве исходной возьмём подстановку шестиугольника  $H_2: (a_i)_1 = \left( (\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \right)_1$ . Мы не стали рассматривать в качестве исходной подстановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ , т. к. в этом случае получили бы уже известную тройку шестиугольников, как в пункте 1.

$$\tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_6 & a_3 & a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}_2.$$

Этой подстановке соответствует шестиугольник  $H_5$ .

$\tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}_3$  - это новая подстановка. Обозначим соответствующий ей шестиугольник  $H_8$ . Получаем такую тройку:  $(H_2, H_5, H_8)$ .



5. Теперь за исходную возьмём подстановку  $(a_i)_1 = \left( (\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_6 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \right)_1$ .

$$H_9 : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_4 & a_1 & a_3 & a_5 & a_2 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_6 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_1 & a_6 & a_2 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}_3.$$

Получаем тройку шестиугольников:  $(H_2, H_9, H_6)$ .

6. Теперь рассмотрим подстановки шестиугольника  $H_3$ .

$$H_3 : (a_i)_1 = \left( (\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_1;$$

$$H_8 : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_5 & a_1 & a_3 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_4 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_6 \end{pmatrix}_3;$$

$(H_3, H_8, H_4)$ .

$$7. \quad H_3 : (a_i)_1 = \left( (\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_5 & a_6 & a_4 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}_1;$$

$$H_7 : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_6 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_9 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_2 & a_5 & a_3 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}_3;$$

$(H_3, H_7, H_9)$ .

8. Для шестиугольника  $H_4$  будем иметь:

$$H_4 : (a_i)_1 = \left( (\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix}_1;$$

$$H_7 : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_{10} : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_6 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}_3;$$

$(H_4, H_7, H_{10})$ .

Подстановка  $(a_i)_1 = \left( (\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \right)_1$  шестиугольника  $H_4$

новую тройку циклических шестиугольников не порождает, т. к. данная подстановка совпадает с подстановкой  $(\omega) \cdot (\delta)^3 \cdot (a_i)_3$  шестиугольника  $H_3$ .

9. Для шестиугольника  $H_5$  будем иметь:

$$H_5 : (a_i)_1 = \left( (\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}_1;$$

$$H_{10} : \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_6 & a_2 & a_4 & a_1 & a_5 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_6 : \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}_3;$$

$(H_5, H_{10}, H_6)$ .

Как выяснилось, подстановка  $\left( (\delta)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_6 & a_1 & a_5 \end{pmatrix} \right)_1$

шестиугольника  $H_5$  новую тройку шестиугольников не порождает. А также и подстановки шестиугольников  $H_6$ ,  $H_7$ ,  $H_9$  и  $H_{10}$ .

10. Последняя тройка циклических шестиугольников в построенной цепочке.

$$H_8 : (a_i)_1 = \left( (\delta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_6 & a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} \right)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 & a_6 \end{pmatrix}_1;$$

$$H_{10}: \tau_2 \cdot (a_i)_1 = (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_5 & a_3 & a_6 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}_2;$$

$$H_9: \tau_2 \cdot (a_i)_2 = (a_i)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_5 & a_3 & a_1 & a_4 & a_6 & a_2 \end{pmatrix}_3;$$

$(H_8, H_{10}, H_9)$ .

Т. о. получили цепь из 10-ти троек циклических шестиугольников, составленную из 10 шестиугольников, причём каждый из них встречается в кортежах ровно 3 раза.

$$(H_1, H_2, H_3); (H_1, H_4, H_5); (H_1, H_6, H_7); (H_2, H_5, H_8); (H_2, H_9, H_6); \\ (H_3, H_8, H_4); (H_3, H_7, H_9); (H_4, H_7, H_{10}); (H_5, H_{10}, H_6); (H_8, H_{10}, H_9).$$

Т. к. множество  $A$  состоит из 60-ти шестиугольников, а мы использовали в построении только 10, то всего можно построить 6 подобных конкретных цепочек, и, следовательно, - 60 троек циклических шестиугольников. А это значит, что при помощи оператора цикла типа  $\sigma_2$  (или  $\tau_2$ ) можно находить циклические шестиугольники, относящиеся к подмножеству  $H$ .

При внимательном рассмотрении можно заметить, что наша *цепочка троек является конфигурацией Дезарга*. Конфигурация Дезарга является уникальной конфигурацией, где десять точек пересекаются в точках, которые по три расположены на этих прямых ([32], стр. 134).

Действительно, сопоставим каждому шестиугольнику  $H_i$  его прямую Паскаля, а каждой тройке шестиугольников  $(H_m, H_n, H_k)$ , - точку пересечения их прямых Паскаля, получим конфигурацию Дезарга.

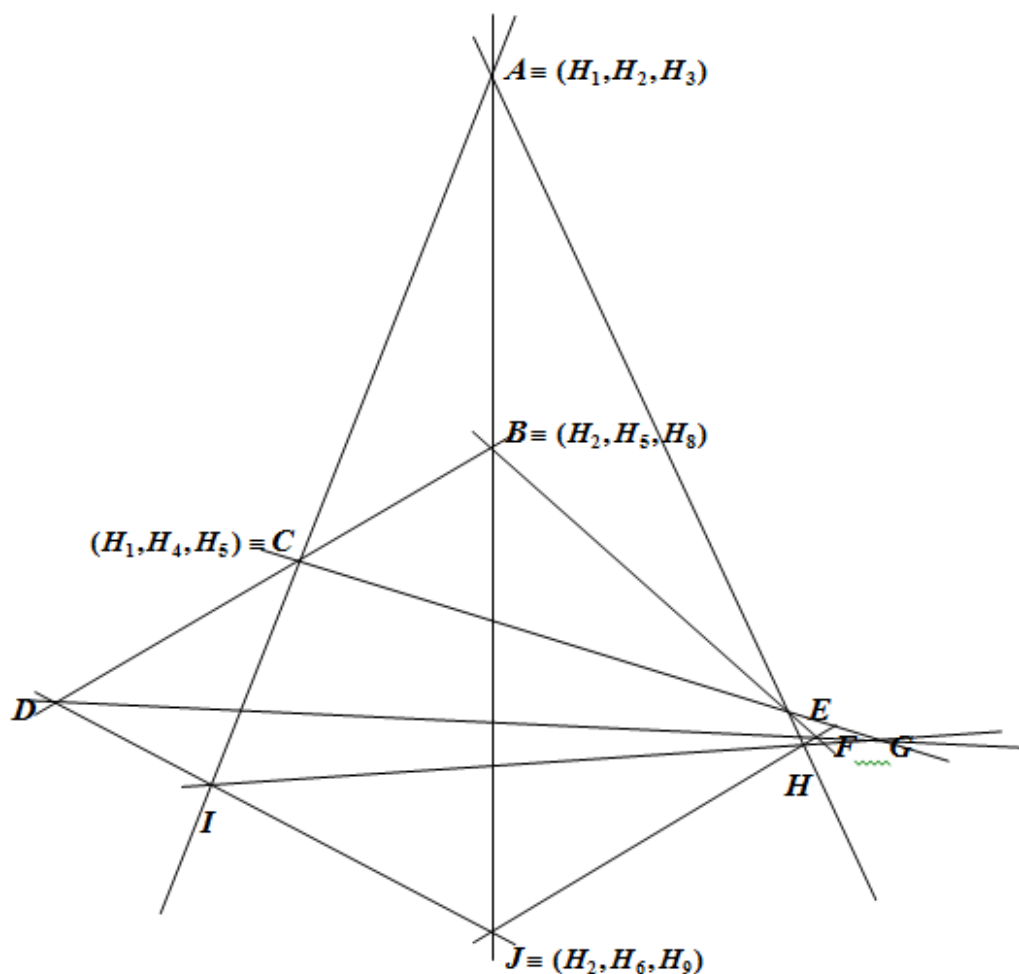


Рис. 33

$$\begin{aligned}
 A &\equiv (H_1, H_2, H_3); B \equiv (H_2, H_5, H_8); C \equiv (H_1, H_4, H_5); \\
 D &\equiv (H_5, H_6, H_{10}); E \equiv (H_3, H_8, H_4); F \equiv (H_8, H_9, H_{10}); \\
 G &\equiv (H_4, H_7, H_{10}); H \equiv (H_3, H_7, H_9); I \equiv (H_1, H_6, H_7). \\
 J &\equiv (H_2, H_6, H_9).
 \end{aligned}$$

Каждая прямая на Рис 33 - это прямая Паскаля шестиугольника, который является общим для троек, образующих точки данной прямой. Например, прямая  $(DFG)$  – является прямой Паскаля шестиугольника  $H_{10}$ .

Покажем все конкретные тройки шестиугольников подмножества  $H$  с учётом обозначений принятых на множестве  $A$  (**Приложение 2**). Шестиугольники объединены в множества соответствующих конфигураций Дезарга:

$$\begin{aligned}
 &(A_1, A_{25}, A_{22}); (A_{25}, A_{23}, A_{58}); (A_{22}, A_{57}, A_{24}); (A_{23}, A_{21}, A_{56}); (A_{58}, A_{22}, A_{20}); \\
 &(A_{57}, A_{21}, A_{25}); (A_{24}, A_{56}, A_{20}); (A_{21}, A_1, A_{24}); (A_{56}, A_{57}, A_{58}); (A_{20}, A_{23}, A_1); \\
 &(A_2, A_{55}, A_{59}); (A_{55}, A_{38}, A_{51}); (A_{59}, A_{53}, A_6); (A_{38}, A_{40}, A_{42}); (A_{51}, A_{59}, A_4);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A_{53}, A_{42}, A_{55}); (A_6, A_{40}, A_4); (A_{42}, A_6, A_2); (A_{40}, A_{53}, A_{51}); (A_4, A_2, A_{38}); \\
& (A_3, A_5, A_{39}); (A_5, A_{60}, A_{52}); (A_{39}, A_{43}, A_{41}); (A_{60}, A_7, A_{54}); (A_{50}, A_{52}, A_{39}); \\
& (A_{43}, A_{50}, A_{54}); (A_{41}, A_5, A_7); (A_7, A_3, A_{43}); (A_{54}, A_{52}, A_{41}); (A_{50}, A_3, A_{60}); \\
& (A_{13}, A_{10}, A_{35}); (A_{10}, A_{26}, A_{15}); (A_{35}, A_{48}, A_{45}); (A_{26}, A_{31}, A_{33}); (A_{15}, A_{35}, A_{18}); \\
& (A_{48}, A_{18}, A_{33}); (A_{45}, A_{31}, A_{10}); (A_{31}, A_{13}, A_{48}); (A_{33}, A_{45}, A_{15}); (A_{18}, A_{13}, A_{26}); \\
& (A_8, A_{49}, A_{29}); (A_{49}, A_{36}, A_{46}); (A_{29}, A_{34}, A_{27}); (A_{36}, A_{19}, A_{16}); (A_{46}, A_{11}, A_{29}); \\
& (A_{34}, A_{49}, A_{19}); (A_{27}, A_{16}, A_{11}); (A_{19}, A_8, A_{27}); (A_{16}, A_{34}, A_{46}); (A_{11}, A_{36}, A_8); \\
& (A_9, A_{28}, A_{14}); (A_{28}, A_{12}, A_{17}); (A_{14}, A_{32}, A_{44}); (A_{12}, A_{30}, A_{47}); (A_{17}, A_{37}, A_{14}); \\
& (A_{32}, A_{28}, A_{30}); (A_{44}, A_{47}, A_{37}); (A_{30}, A_9, A_{44}); (A_{47}, A_{32}, A_{17}); (A_{37}, A_{12}, A_9).
\end{aligned}$$

Используя оператор цикла  $\tau_4$ , получим все тройки циклических шестиугольников подмножества  $S$ .

$$\begin{aligned}
& (A_1, A_{59}, A_{60}) \leftrightarrow (A_{27}, A_{26}, A_{28}); (A_6, A_{20}, A_{46}) \leftrightarrow (A_{10}, A_{17}, A_{41}); \\
& (A_2, A_{22}, A_{48}) \leftrightarrow (A_{12}, A_{43}, A_{19}); (A_7, A_{47}, A_{21}) \leftrightarrow (A_{11}, A_{18}, A_{42}); \\
& (A_3, A_{23}, A_{49}) \leftrightarrow (A_{13}, A_{14}, A_{38}); (A_{29}, A_{33}, A_{58}) \leftrightarrow (A_{51}, A_{54}, A_{37}); \\
& (A_4, A_{24}, A_{44}) \leftrightarrow (A_8, A_{15}, A_{39}); (A_{30}, A_{34}, A_{56}) \leftrightarrow (A_{35}, A_{52}, A_{55}); \\
& (A_5, A_{25}, A_{45}) \leftrightarrow (A_{40}, A_9, A_{16}); (A_{31}, A_{32}, A_{57}) \leftrightarrow (A_{36}, A_{50}, A_{53}).
\end{aligned}$$

Подмножество  $S$  представлено парами троек циклических шестиугольников в соответствии с доказательством второй части теоремы о циклических шестиугольниках.

Рассмотрим пример построения циклических шестиугольников. Пусть

$$A_{23}: (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_1:$$

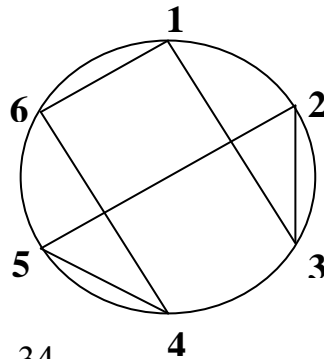
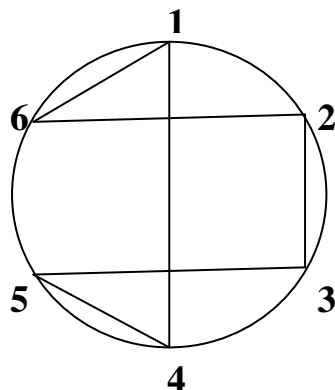


Рис. 34

$$(a_i)_2 = \tau_2 \cdot (a_i)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}_2;$$

$$(a_i)_2 : A_{25}$$



$$(a_i)_3 = \tau_2 \cdot (a_i)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}_3;$$

$$(a_i)_3 : A_{58}$$

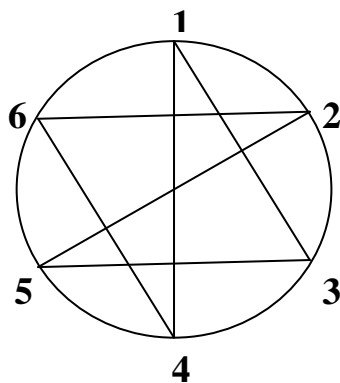


Рис. 35

Очевидно, что прямые Паскаля достаточно определять двумя точками.  $(AB) \equiv \alpha$ ;  $(MN) \equiv \beta$ ; и  $(XY) \equiv \gamma$ . Прямые  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  пересекаются в одной точке  $O$ .

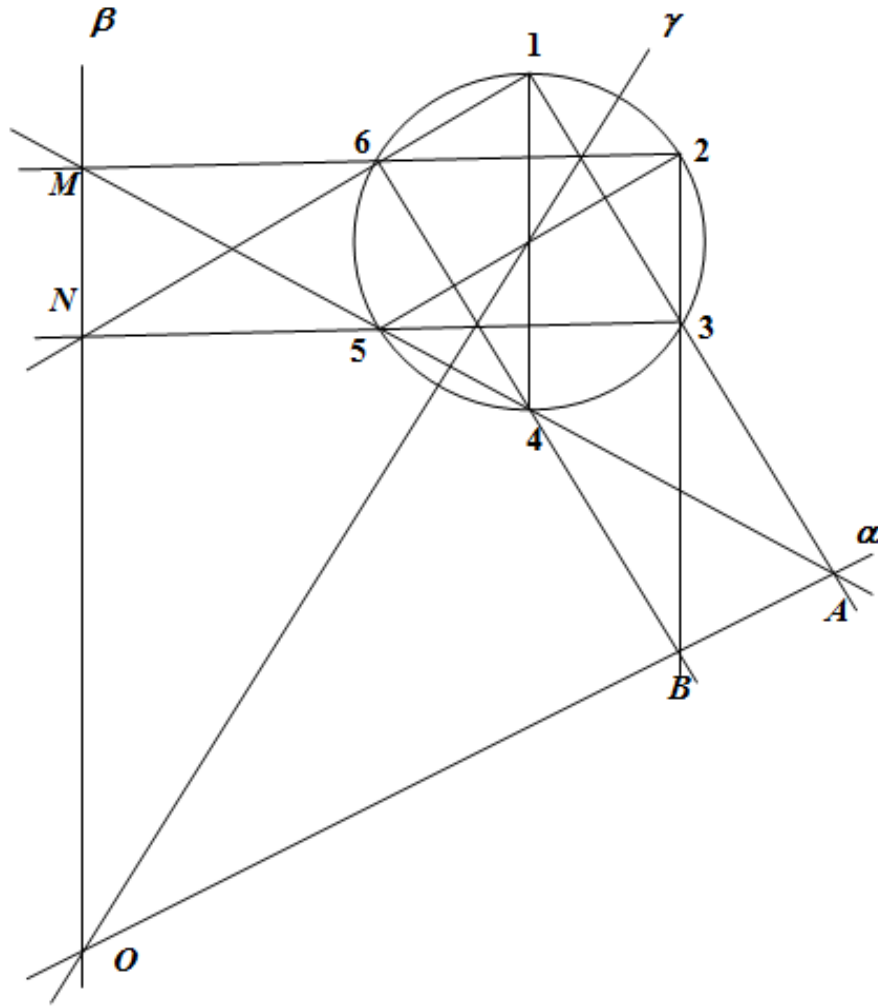


Рис. 36

Здесь  $(62) \cap (13) \equiv X$ ,  $(64) \cap (53) \equiv Y$ .

## 8. Заключение

Теперь вернёмся к Штейнеру, и попробуем понять, почему же им (Штейнером) было найдено только 20 точек.

Якоб Штейнер, безусловно, принадлежал к числу самых ярких геометров своего времени. Он поистине был наделён божественным даром математической интуиции. Практически, являясь самоучкой, Штейнер получил признание математиков лишь в зрелом возрасте и всегда очень ревностно относился к приоритету своих математических открытий.

Руководствуясь в геометрии интуицией и силой своего воображения, Штейнер не любил использовать алгебраические средства и методы, и был ярким противником алгебраизации геометрии. Коллеги Штейнера, сторонники алгебраических методов, получали от него много несправедливой критики в свой адрес, а такой выдающийся математик, как Юлиус Плюккер даже вынужден был из-за этого оставить занятия

геометрией.

Одним из главных принципов в математическом творчестве Штейнера был, так называемый, критерий красоты: если теория красива – значит она верна, и наоборот.

Занимаясь исследованием множества прямых Паскаля, Якоб Штейнер, как нам кажется, натолкнулся на тройку циклических шестиугольников из множества  $S$ . Доказав теорему о циклических шестиугольниках (это наше предположение, и мы думаем, что на самом деле это была только вторая часть общей теоремы и доказательство было с использованием теоремы Дезарга) и ощутив всю её красоту, Штейнер, видимо, решил, что все возможные интересующие его пересечения прямых Паскаля найдены. Т. к. всё множество  $A$  шестиугольников было исчерпано и поделено на 20 троек циклических шестиугольников. Т. о., у Штейнера могло возникнуть ощущение полноты решаемой проблемы. Хотя трудно поверить в то, что Штейнер не заметил почти очевидную тройку шестиугольников  $(A_{56}, A_{57}, A_{58})$ , которая выпадает из его двадцатки.

Зная острый ум Штейнера и одновременно его тяжёлый характер, никто из математиков того времени, наверное, и не пытался продолжить исследования, а может быть и решили, что данная проблема решена окончательно и больше к ней уже не возвращались.

Оставшиеся же 60 точек были найдены спустя более чем 20 лет после открытия Штейнера и уже после его смерти.

В заключение заметим, что каждый из 60-ти шестиугольников из множества  $A$  присутствует в 4-х тройках и 3-х четвёрках шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекаются в одной точке. Отсюда получаем:

$$\frac{3}{4}T^3 = \frac{4}{3}T^4 = A,$$

где  $T^4$  - множество четвёрок шестиугольников, прямые Паскаля которых пересекаются в одной точке (**Приложение 3**).

Пример для шестиугольника  $A_2$ :

$$\begin{array}{ll} (A_2, A_{55}, A_{59}); & (A_2, A_1, A_5, A_{35}); \\ (A_2, A_6, A_{42}); & (A_2, A_{18}, A_{20}, A_{29}); \\ (A_2, A_4, A_{38}); & (A_2, A_{13}, A_{24}, A_{32}); \\ (A_2, A_{22}, A_{48}). & \end{array}$$



**Приложение 1. Задача о расположении хорд на окружности**

Пусть на окружности имеем множество из  $n$  точек, взятых произвольным образом.

**Задача:**

Сколько существует способов (вариантов) взаимного расположения  $k$  хорд на данной окружности, не имеющих общих граничных точек (граничные точки хорд принадлежат множеству  $n$ ).

Очевидно, что  $k \leq \frac{n}{2}$ .

**Решение:**

Одну хорду на данной окружности можно расположить  $C_n^2$  способом. Тогда  $k$  хорд, не имеющих общих граничных точек, можно расположить  $V$  способами:

$$V = \frac{1}{k} C_n^2 \cdot V_1,$$

где  $V_1$  - число способов расположения  $k-1$  хорды, среди оставшихся  $n-2$  точек окружности. Т. е.

$$V_1 = \frac{1}{k-1} C_{n-2}^2 \cdot V_2,$$

и т. д..

В конце концов мы дойдём до случая, когда останется разместить одну хорду среди оставшихся  $n-2(k-1)$  точек. Это можно будет сделать  $V_{k-1}$  способом:

$$V_{k-1} = C_{n-2(k-1)}^2.$$

Т. о., получаем произведение из  $k$  сомножителей, которое можно записать общей формулой:

$$V = \prod_{i=0}^{k-1} \left( \frac{1}{k-i} C_{n-2i}^2 \right) = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k C_{n-2(i-1)}^2 \quad (1)$$

**Пример 1.**  $n = 4, \quad k = 2.$

$$V = \frac{1}{2} C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 3.$$

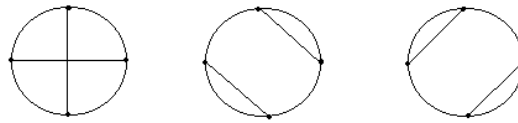


Рис. 1

**Пример 2.**  $n = 5, \quad k = 2.$

$$V = \frac{1}{2} C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 15.$$

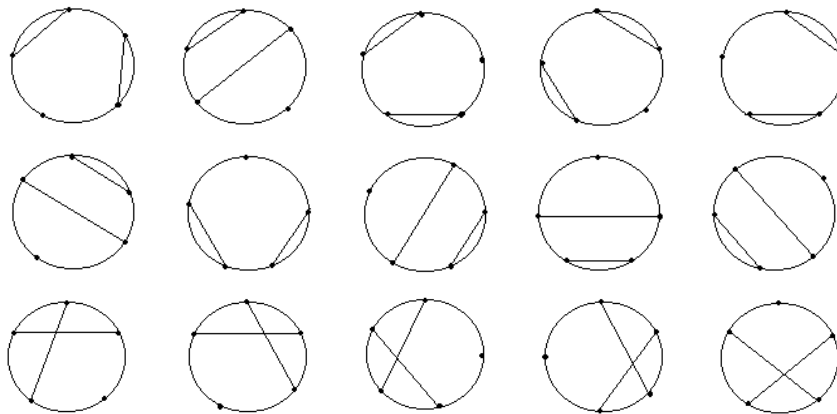
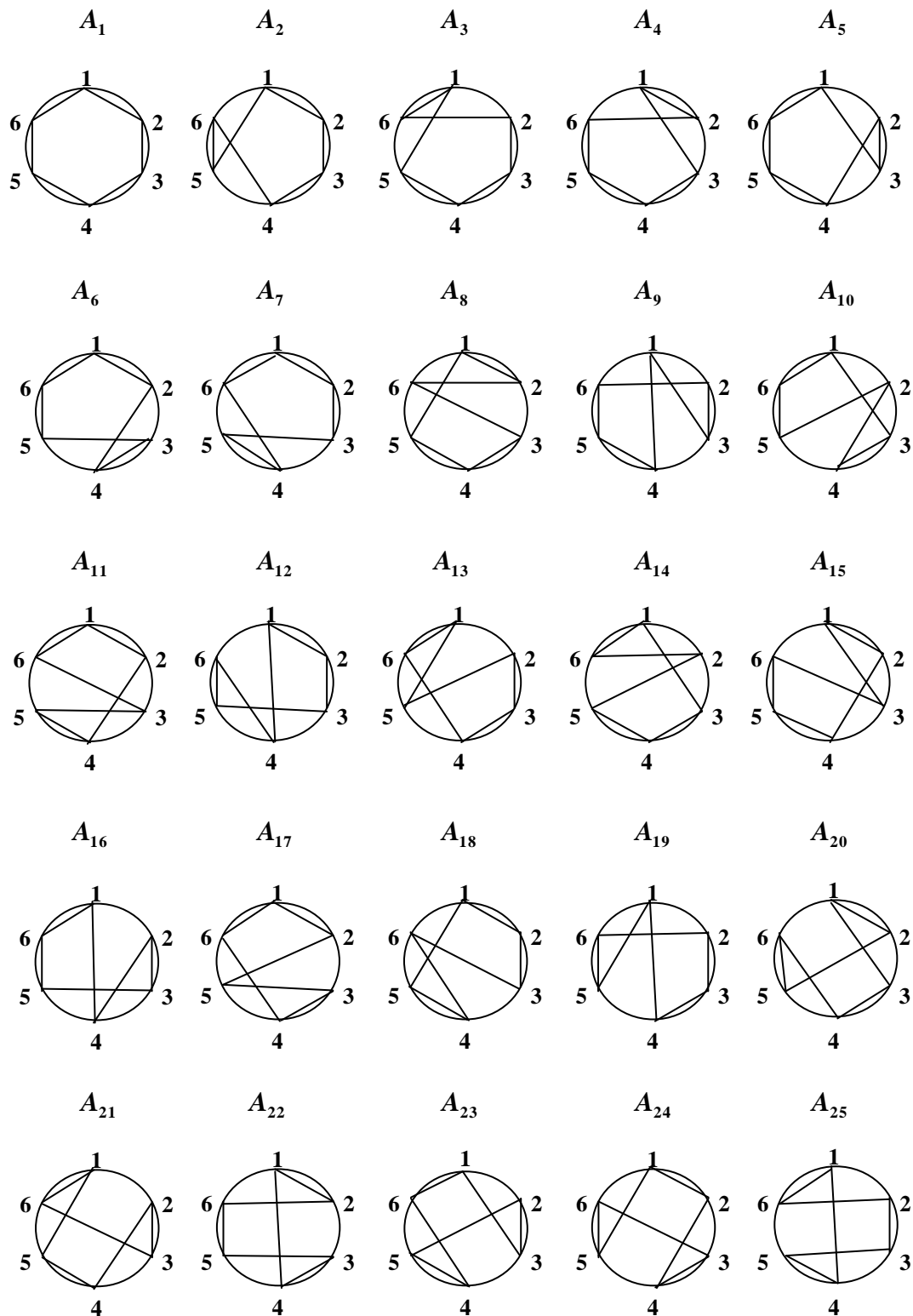
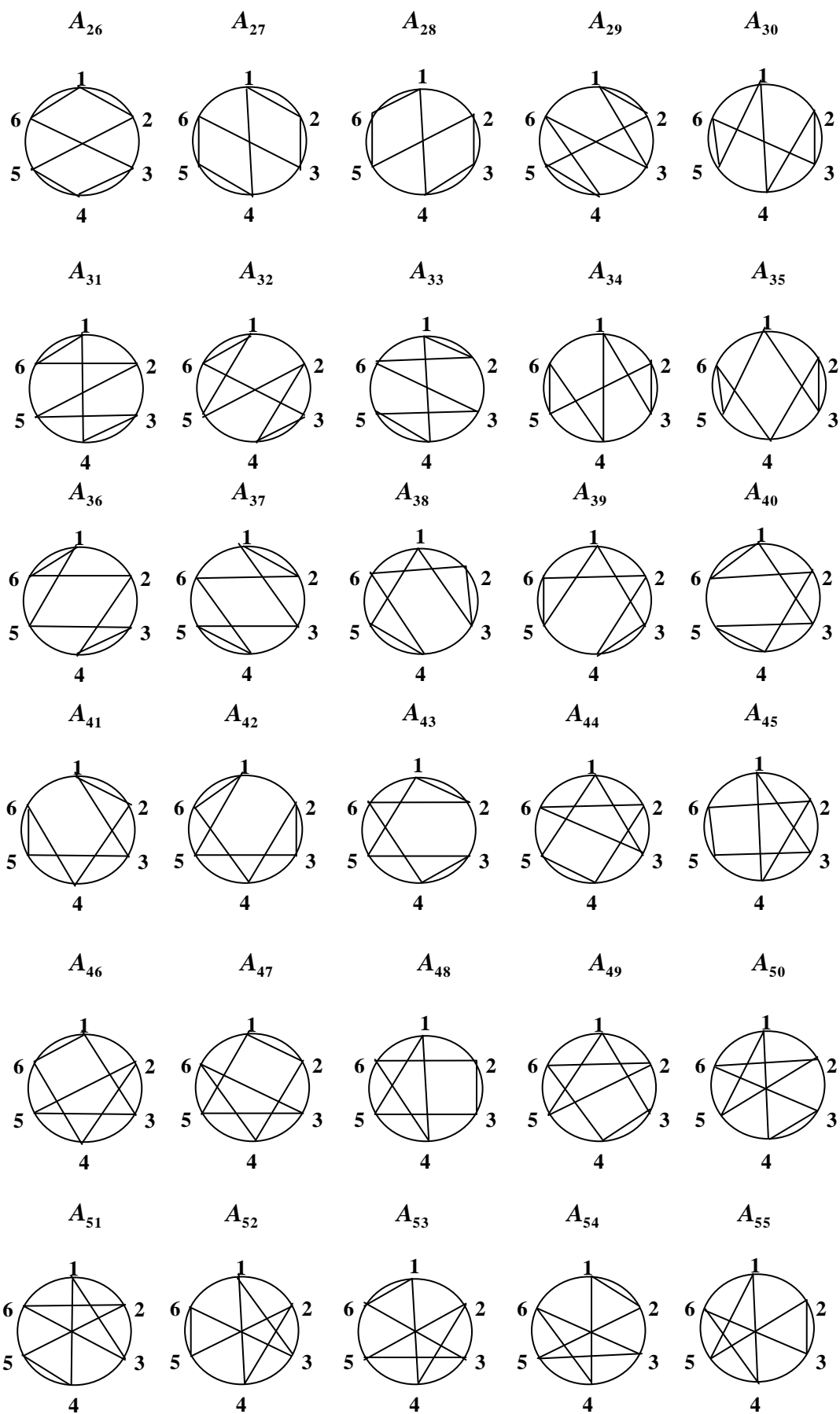
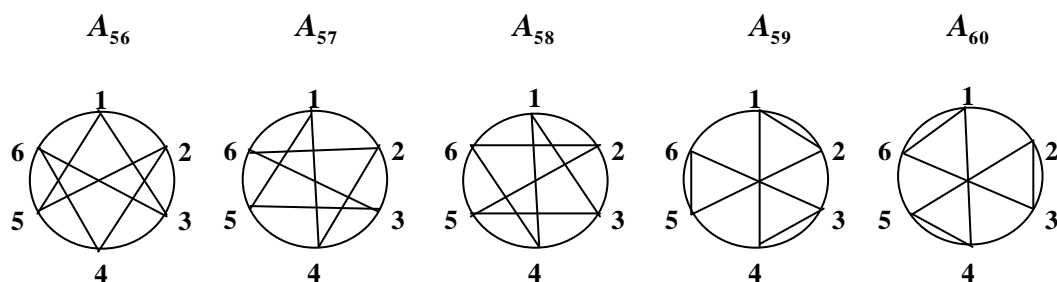


Рис. 2

**Приложение 2. Множество  $A$  всех шестиугольников**







По существу – каждая конфигурация шестиугольника описывается двумя подстановками с противоположной ориентацией обхода по вершинам. Множество всех этих подстановок обозначим через  $A^*$ . Это множество  $A^*$  – является фундаментальной группой винта  $B_6$ , которая изоморфна симметрической группе подстановок  $S_5$ , т. е.  $B_6 \cong S_5$ . Единичным элементом группы является подстановка  $|A_1\rangle$ . Группу  $B_6$  будем называть *группой Паскаля*. Очевидно, что каждому шестиугольнику соответствует своя прямая Паскаля.

С появлением левых и правых элементов группы появляются дополнительные групповые свойства, связанные с уникальным элементом  $\langle A_1|$ , которые ранее в теории групп не выделялись, поэтому, вновь открытые свойства, можно отнести к общим свойствам групп.

Ранее было показано, что множество  $A$  можно разбить на непересекающиеся подмножества. Рассмотрим первое из этих подмножеств, которое назовём  $A^1$ .

$$(A_1, A_{25}, A_{22}); (A_{25}, A_{23}, A_{58}); (A_{22}, A_{57}, A_{24}); (A_{23}, A_{21}, A_{56}); (A_{58}, A_{22}, A_{20}); \\ (A_{57}, A_{21}, A_{25}); (A_{24}, A_{56}, A_{20}); (A_{21}, A_1, A_{24}); (A_{56}, A_{57}, A_{58}); (A_{20}, A_{23}, A_1);$$

Рис. 1

Как оказалось, подстановки, описывающие конфигурации этого множества, являются подгруппой 20-го порядка группы  $B_6$ . Будем называть эту подгруппу *группой Дезарга*, т. к. прямые Паскаля подмножества  $A^1$  (Рис. 33, стр. 52) образуют конфигурацию Дезарга. Пример построения подобной конфигурации мы показывали ранее. Группу Дезарга будем обозначать  $D(20)$ , а её элементы – через  $d_i$ . Тогда  $d_0 = |A_1\rangle$  – единичный элемент группы Дезарга. Индекс элемента присваивается последовательно, по мере появления конфигурации шестиугольника в подмножестве  $A^1$  (Рис. 1). Покажем обозначения всех элементов группы Дезарга:

$$\begin{aligned}
d_0 = |A_1\rangle, \quad d_1 = \langle A_1|, \quad d_2 = |A_{25}\rangle, \quad d_3 = \langle A_{25}|, \quad d_4 = |A_{22}\rangle, \quad d_5 = \langle A_{22}|, \quad d_6 = |A_{23}\rangle, \\
d_7 = \langle A_{23}|, \quad d_8 = |A_{21}\rangle, \quad d_9 = \langle A_{21}|, \quad d_{10} = |A_{24}\rangle, \quad d_{11} = \langle A_{24}|, \quad d_{12} = |A_{20}\rangle, \quad d_{13} = \langle A_{20}|, \\
d_{14} = |A_{58}\rangle, \quad d_{15} = \langle A_{58}|, \quad d_{16} = |A_{57}\rangle, \quad d_{17} = \langle A_{57}|, \quad d_{18} = |A_{56}\rangle, \quad d_{19} = \langle A_{56}|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим элементы группы Дезарга по их степеням (о понятиях степени элемента и порядке группы см., например, [20]). Как выяснилось, элементов второго порядка в группе Дезарга существует пять штук:  $d_1, d_6, d_{10}, d_{15}, d_{17}$ . Элементов четвёртой степени – десять штук:  $d_2, d_3, d_4, d_5, d_8, d_9, d_{12}, d_{13}, d_{18}, d_{19}$ . Оставшиеся четыре элемента – это элементы пятого порядка:  $d_7, d_{11}, d_{14}, d_{16}$ . Для обозначения групп будем использовать букву  $G$  с верхним и нижним индексом. Верхний индекс нужен для обозначения порядка группы, а нижний для различия групп одного порядка. Например,  $G_1^2 = \{d_0, d_1\}$ ;  $G_2^2 = \{d_0, d_6\}$ ;  $G_3^2 = \{d_0, d_{10}\}$ ;  $G_4^2 = \{d_0, d_{15}\}$ ;  $G_5^2 = \{d_0, d_{17}\}$ . – это подгруппы второго порядка. Мы перечислили их все. Кроме этого группа  $D(20)$  имеет пять подгрупп четвёртого порядка:  $G_1^4 = \{d_0, d_{18}, d_{11}, d_{19}\}$ ;  $G_2^4 = \{d_0, d_{12}, d_{10}, d_4\}$ ;  $G_3^4 = \{d_0, d_9, d_{17}, d_5\}$ ;  $G_4^4 = \{d_0, d_{13}, d_{15}, d_3\}$ ;  $G_5^4 = \{d_0, d_8, d_6, d_2\}$ . Известно, что группа пятого порядка имеет четыре элемента пятой степени. Эти четыре элемента и входят в подгруппу пятого порядка:  $G_1^5 = \{d_0, d_7, d_{11}, d_{16}, d_{14}\}$ . Кроме этих подгрупп существует и подгруппа 10-го порядка, которая является прямым произведением подгрупп:  $G_i^2 \otimes G_1^5 = G^{10}$ . Покажем таблицу Кэли для этой подгруппы.

	$d_0$	$d_1$	$d_6$	$d_{10}$	$d_{15}$	$d_7$	$d_{11}$	$d_{16}$	$d_{14}$	$d_{17}$
$d_0$	$d_0$	$d_1$	$a_2$	$d_{10}$	$d_{15}$	$d_7$	$d_{11}$	$d_{16}$	$d_{14}$	$d_{17}$
$d_1$	$d_1$	$d_0$	$d_7$	$d_{17}$	$d_{14}$	$d_6$	$d_{10}$	$a_4$	$d_{15}$	$d_{16}$
$d_6$	$d_6$	$d_{11}$	$d_0$	$d_{16}$	$d_7$	$d_{15}$	$d_1$	$d_{10}$	$d_{17}$	$d_{14}$
$d_{10}$	$d_{10}$	$d_7$	$d_{14}$	$d_0$	$d_{16}$	$d_1$	$d_{17}$	$d_{15}$	$d_6$	$d_{11}$
$d_{15}$	$d_{15}$	$d_{16}$	$d_{11}$	$d_{14}$	$d_0$	$d_{17}$	$d_6$	$d_1$	$d_{10}$	$d_7$
$d_7$	$d_7$	$d_{10}$	$d_1$	$d_{17}$	$d_6$	$d_{14}$	$d_0$	$d_{11}$	$d_{16}$	$d_{15}$
$d_{11}$	$d_{11}$	$d_6$	$d_{15}$	$d_1$	$d_{17}$	$d_0$	$d_{16}$	$d_{14}$	$d_7$	$d_{10}$
$d_{16}$	$d_{16}$	$d_{15}$	$d_{17}$	$d_6$	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{14}$	$d_7$	$d_0$	$d_1$
$d_{14}$	$d_{14}$	$d_{17}$	$d_{10}$	$d_{15}$	$d_1$	$d_{16}$	$d_7$	$d_0$	$d_{11}$	$d_6$
$d_{17}$	$d_{17}$	$d_{14}$	$d_{16}$	$d_7$	$d_{11}$	$d_{10}$	$d_{15}$	$d_6$	$d_1$	$d_0$

Рис. 2

Кроме этого замечаем, что группа Дезарга является прямым произведением подгруппы пятого порядка и любой подгруппы четвёртого порядка:

$$G_i^4 \otimes G_1^5 = D(20) \quad (1)$$

Отметим, что группа  $D(20)$  - это пример группы 20-го порядка в теории циклического изоморфизма ([33], стр. 105). Пример системы уравнений циклического изоморфизма в этих обозначениях имеет вид:

$$\begin{cases} d_{15} \cdot G_2^2 \cdot d_{15} = G_1^2 \\ d_6 \cdot G_1^2 \cdot d_6 = G_3^2 \\ d_{17} \cdot G_3^2 \cdot d_{17} = G_4^2 \\ d_{10} \cdot G_4^2 \cdot d_{10} = G_2^2 \end{cases}, \quad (2)$$

Этим уравнениям отвечает следующая диаграмма:

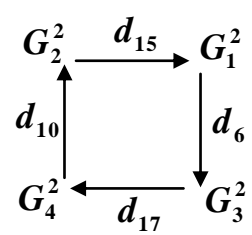


Рис. 3



### Приложение 3. Точки четвёртого порядка, где пересекаются четыре прямые Паскаля.

В данном приложении мы покажем все точки, где пересекаются по четыре прямые Паскаля.

Рассмотрим некоторое подмножество  $K_1$  множества  $K$ , состоящее из двух элементов:

$$K_1 = \{q_i, q_j\},$$

такое, что стороны  $q_i$  и  $q_j$  не имеют общих граничных точек. Пусть это будут стороны  $q_i = (a_1a_2)$ ,  $q_j = (a_3a_4)$ .

**Возникает задача:**

Сколькими способами можно построить шестиугольники на данной конике так, чтобы стороны  $(a_1a_2)$  и  $(a_3a_4)$  в каждом из них были бы противоположны.

Противоположными, при последовательном обходе шестиугольника по сторонам, являются первая и четвёртая, вторая и пятая, третья и шестая стороны.

**Решение:**

После того как мы определили две стороны  $q_i$  и  $q_j$ , у нас осталось ещё две свободные точки  $a_5$  и  $a_6$ . Т. е. точку  $a_2$  можно соединить с другими точками только двумя способами: либо с точкой  $a_5$ , либо с точкой  $a_6$ . А каждую из точек  $a_5$  и  $a_6$  можно также соединить с другими точками только двумя способами: либо с точкой  $a_3$ , либо с точкой  $a_4$ . Получаем четыре шестиугольника, у которых стороны  $(a_1a_2)$  и  $(a_3a_4)$  противоположны:

$$(a_1, a_2, a_5, a_3, a_4, a_6);$$

$$(a_1, a_2, a_5, a_4, a_3, a_6);$$

$$(a_1, a_2, a_6, a_3, a_4, a_5);$$

$$(a_1, a_2, a_6, a_4, a_3, a_5).$$

Не трудно заметить, что если бы мы вели рассуждения не относительно точки  $a_2$ , а относительно любой другой из точек  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ , то всё равно получили бы те же самые четыре шестиугольника.

Т. о. точка  $O \equiv ((a_1a_2) \cap (a_3a_4))$  будет точкой пересечения прямых Паскаля для полученных шестиугольников.

Выясним, сколько же всего существует таких точек.

Ответ на этот вопрос даёт решение задачи, рассмотренной в **Приложении 1**.

Мы имеем 6 точек на конике, следовательно  $n = 6$ . Стороны  $q_i$  и  $q_j$  не имеют общих граничных точек, т. е.  $k = 2$ . По формуле (1) получаем:

$$V = \frac{1}{2} \cdot C_6^4 \cdot C_6^2 = 45$$

Т. о. существует 45 точек или 45 четвёрок шестиугольников, для которых прямые Паскаля пересекаются в одной точке.

Выписывать все четвёрки шестиугольников нет нужды, т. к. раньше мы уже определили их в общем виде. Обозначим множество всех таких точек через  $T^4$ .

### **Заключительная часть. Асимметрия Природы.**

В предыдущих частях нашего исследования мы познакомились с различными группами винта. Можно сделать некоторые общие выводы. Во первых фундаментальная группа винта  $n$ -го порядка  $B_n \cong S_{n-1}$  – это некоторая подгруппа симметрической группы  $S_n$ . *Группа винта всегда имеет единственный уникальный элемент. Кроме этого винтовая группа имеет чётный порядок.*

Напомним о существовании интересной теоремы Кэли. *Всякая конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы степени  $n$*  ([29], стр. 39). По сути, любую конечную группу можно рассматривать, как группу подстановок. С учётом теоремы Кэли можно сказать, что группа винта довольно распространена среди множества существующих групп.

Теперь скажем несколько слов об асимметрии.

Мы говорили о симметрии в окружающем нас мире и что большую, даже основополагающую роль в описании симметрии играет теория групп. Но всмотримся в то, что нас окружает в повседневной жизни. Глядя в зеркало мы видим, что наше тело в общем-то симметрично и при этом помним, что у нас например, одно сердце и одна печень, но расположены они в организме не симметрично. Сердце - слева, печень – справа. Листья на деревьях похожи один на другой. Это называется симметрией подобия, но, всмотревшись в них повнимательнее замечаем, что каждый лист индивидуален. А вот миллионы и миллиарды электронов неразличимы между собой (Правда недавно появились сообщения, что электрон состоит из трёх виртуальных частиц  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  и, возможно, скоро каждый электрон получит свои уникальные отличия). Неразличимость электронов (и элементарных частиц) – это одна из причин почему квантовой механике

понадобились группы. Элементы группы тоже неразличимы, но бинарные отношения между элементами играют существенную роль. Кстати, говоря о группах, надо помнить, что внутренняя структура группы двояка. Есть группы с симметричной структурой, они называются *абелевы*. И есть группы асимметричные - *неабелевы*. Если рассматривать два элемента группы  $A$  и  $B$ , то для абелевых групп характерно выражение произведения  $AB = BA$ , а для неабелевых групп существенно неравенство:  $AB \neq BA$ . Последнее выражение очень актуально для квантовой механики. Молодой Гейзенберг чуть рассудка не лишился не понимая, как это может быть, что реальные физические операции  $A$  и  $B$  могут быть не коммутативны, т. е.  $AB \neq BA$ .

Кстати, рассуждая над последним неравенством можно записать:  $AB - BA = \hbar$  – какая-то малая величина (квантовая механика описывает ведь микромир). А обозначив:  $A = \Delta p$ ,  $B = \Delta x$  (имея в виду импульс и координату соответственно) и, сделав необходимые преобразования, получаем  $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ . Возможно именно такие рассуждения привели Гейзенберга к важнейшему закону квантовой механики - принципу неопределённостей.

Автору не известно, каких групп больше абелевых или неабелевых. И тех, и других очень много и существенную роль, видимо, играют асимметричные группы, т. е. неабелевы. Если вдуматься, то именно асимметрия делает наш мир таким каким мы его воспринимаем (и визуально, и через приборы). Не зря было сказано: «природа не терпит точных симметрий» ([31], стр. 121)

Появившаяся в физике асимметричность поначалу очень удивляла учёных. Но потом эта асимметричность была строго доказана и все приняли это за закон природы. Очень показателен в этом асимметричный процесс  $\beta$  – распада, когда из зеркально симметричной установки электроны вылетают асимметрично.

Каждый из нас наверно задумывался, почему не существует антимир? Ведь существуют же античастицы. Из них точно так же могут складываться атомы и молекулы и в конечном итоге – жизнь. Оказалось, что и в этом надо винить (или благодарить) закон рождения частиц и античастиц. На каждые 100000 античастиц рождалось 100000+1 частица. Потом 100000 частиц и античастиц аннигилировали, превратившись в фотоны, а одна частица оставалась. И таким образом сформировался наш мир. Не исключено, что существует Вселенная, где работает закон обратной асимметрии, где на 100000 частиц рождалось 100000+1 античастица. В такой Вселенной существовал бы антимир.

Или вспомним проблему с магнитным монополюсом. Элементарный целый электрический заряд существует – это заряд электрона. А частицы с элементарным магнитным зарядом не существует, хотя может быть его ещё просто не открыли.

Порой, проявление асимметрии настолько незначительно, что

казалось об этом и говорить не стоит. Как в случае с космологической постоянной. Оказывается она существует ([36]. стр. 200). Причём, её первые 119 десятичных цифр равны нулю, а отлична от нуля только 120-ая. Только представьте себе: если бы первой значащей цифрой была 119-ая, то мир бы разлетелся и никакие галактики так и не могли бы сформироваться. А если бы значащей была 121 десятичная цифра, то всё во Вселенной после Большого Взрыва, только начав расширяться, схлопнулось бы вдруг в одну большую чёрную дыру. Страшно подумать на каком волоске держится Мироздание. И держится довольно устойчиво.

Практически вся биология асимметрична (ДНК и прочие спирали).

А взять снежинки. Каждая снежинка обладает симметрией шестого порядка, но двух одинаковых не найти их просто не бывает. Сплошная асимметрия.



Рис. 1

Отдельно хотелось бы поговорить об одной научной задаче - асимметрии на плоскости. Имеется в виду мозаика из плоских плиток, выложенная на полу без пробелов. Симметрия таких мозаик хорошо изучена. Потом взялись изучать асимметрию плоских мозаик. Вопрос стоял так: существуют ли плитки из которых всегда выкладывается асимметричная (непериодическая) мозаика? Набор первых таких плиток был очень большим. Потом его удалось уменьшить до 104 плиток. Потом уменьшили до шести, потом - до трёх (Рис. 2, слева), потом - до двух (Рис. 2, в центре), а потом и до одной плитки (Рис. 2, справа).

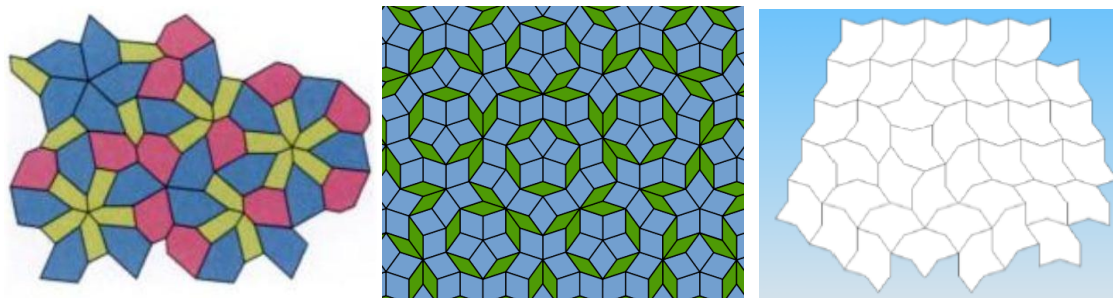


Рис. 2

Как бы мы не присоединяли плитки друг к другу, мозаика всегда получалась асимметричной.

А потом вдруг произошло невероятное. Израильский химик Д. Шехтман обнаружил в природе квазикристалл (Рис. 3). Асимметрия квазикристалла Шехтмана очень напоминает квазикристалл Пенроуза (Рис. 2, в центре). Д. Шехтман в 2011 году получил за это открытие Нобелевскую премию.

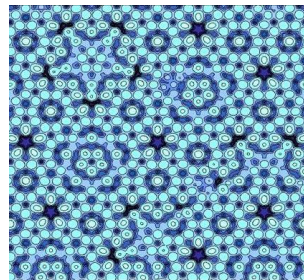


Рис. 3

Так что асимметрия в природе встречается довольно часто.

Если предположить, что асимметрия играет главенствующую роль в мире, то это как-то должно проявляться и в самой математике. Действительно, это так и есть.

Всё в математике началось с числа, а уж потом появилась геометрия. Возьмём натуральный ряд чисел. Этот замечательный ряд глубоко асимметричен. И эту асимметрию вносят в него простые числа, которые непонятным образом разбросаны между другими числами.

А как быть с геометрией? Очень трудно разыскать фундаментальную асимметрию в евклидовой геометрии. Стоп! Евклидова геометрия – это не фундаментальные основы геометрии. Евклидова геометрия – это производная геометрия от геометрии проективной. Именно проективная геометрия является основой всякой другой геометрии и геометрии Эвклида, геометрии Лобачевского, и геометрии Римана, и многих других геометрий. Основной и единственным инвариант (неизменный объект при преобразованиях) в проективной геометрии – это сложное отношение четырёх точек на проективной прямой. Этот инвариант характеризуется шестью числовыми значениями, которые образуют группу шестого порядка. И эта группа неабелева. Тут и проявилась фундаментальная асимметрия в геометрии. Напомним, что эта группа изоморфна группе винта  $B_4$ . Элементы группы винта  $B_4$  изоморфны элементам группы которую образуют значения сложного отношения четырёх точек на прямой ([7], стр. 49).

Но вернёмся к теории групп. Возникает вопрос: существуют ли ещё группы, имеющие единственный уникальный элемент или это свойство присуще только симметрическим группам конфигураций.

Рассмотрим множество рациональных чисел отличных от нуля. Это множество образует мультипликативную бесконечную группу с операцией умножения  $\{Q \setminus 0\}$  ([35], стр. 28). Эта группа также является группой винта. В этой группе существует естественно единичный элемент  $|b_0\rangle = 1$ . Не сложно понять, что здесь же имеется и уникальный элемент  $\langle b_0| = -1$ , для которого, например,  $\langle b_0|b_k\rangle = \langle b_k|$  или  $\langle b_0|\langle b_m| = |b_m\rangle$ , а т. к. группа  $\{Q \setminus 0\}$  – абелева, то свойство уникального элемента распространяется и на групповое умножение справа. Т. е., чтобы представить группу  $\{Q \setminus 0\}$  группой винта надо считать все рациональные положительные элементы правыми, а отрицательные – левыми.

Зная, что все комплексные числа, равные по абсолютной величине единице, образуют группу по умножению, которая изоморфна группе вращений окружности ([29], стр. 34), можно построить изоморфную группу винта. Оставляем эту задачу читателям.

Те, кто занимается исследованием естествознания знают, что большую роль здесь играют так называемые группы Ли. Это группы над множеством элементов векторного поля, наделённые специальным свойством,  $([a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 0)$  и в качестве бинарной операции выступает здесь векторное произведение векторов, которое обозначается  $[ab]$ . Здесь  $a$  и  $b$  – обыкновенные векторы. Рассмотрим подробнее всю эту кухню групп Ли. Сразу надо сказать, что Группы Ли – это непрерывные группы в отличие, например, симметрических дискретных групп или кристаллографических. Группы Ли – неабелевы и записывается это таким выражением  $[ab] = -[ba]$ . А закон ассоциативности записывается умножением числа на векторное произведение:  $\lambda \cdot [ab] = [\lambda a, b]$ .

Чтобы найти векторное произведение двух векторов  $[ab]$ , достаточно ([5], стр. 52):

1. спроектировать вектор  $a$  на плоскость, перпендикулярную второму вектору  $b$ .
2. полученный вектор  $a_1$  повернуть в этой плоскости на прямой угол так, чтобы поворот наблюдался из конца вектора  $b$  по ходу часовой стрелки.
3. повернутый вектор  $a_2$  умножить на модуль второго вектора  $b$ .

Полученный вектор  $c$  и будет векторным произведением  $[ab] = c$  (Рис. 4). Тройка векторов  $a$   $b$  и  $c$  (или  $-a$   $b$  и  $-c$ ) образуют правую тройку векторов.

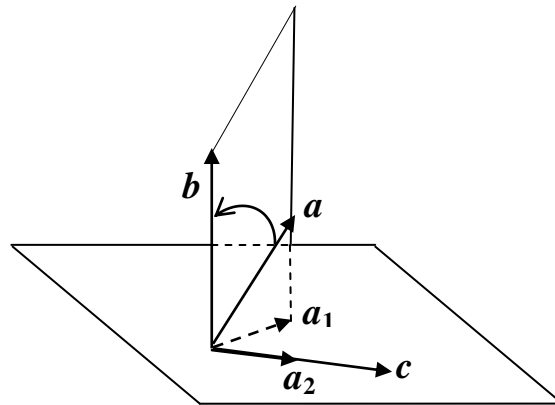


Рис. 4

Аналогично строится и векторное произведение  $[-ab] = -c$  (Рис. 5). Помним, что  $[ba] = -c$  в силу антикоммутативности векторного произведения.

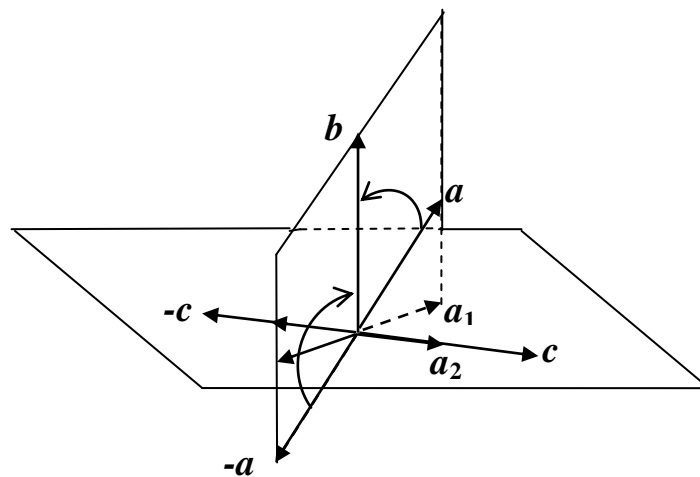


Рис. 5

Глядя на все эти построения становится понятным, что уникальным элементом в группе Ли будет вектор  $\langle b_0 | = -1$ . Т. о., группы Ли наделены не только специальной алгеброй ли, но и свойствами группы винта. По сути говоря, Группы Ли также можно назвать группами винта.

Остаётся понять, что же здесь может выполнять роль спина? Представим себе, что через концы исходных векторов  $a$  и  $b$  проходит прямая (Рис 6).

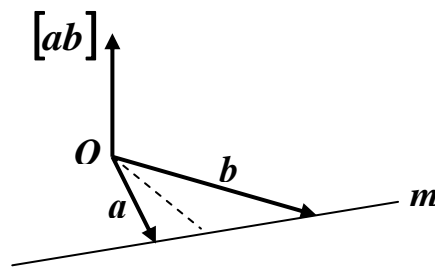


Рис. 6

Вектор  $[ab]$ , с опущенным перпендикуляром из точки  $O$  на прямую  $m$ , с приложенной вдоль него силой, создаёт крутящий момент вдоль этой прямой. Т. о., кручение прямой можно принять за спин элементов группы винта (группы Ли). Очевидно, что математическую (физическую) сущность спина элементов группы винта не всегда можно легко обнаружить. Это может быть отдельной задачей для каждой группы винта.

Мы видим, что группы винта довольно широко представлены в теории групп.

Итак, что можно сказать резюмируя. Мы видим, что Природа, окружающий нас Мир построен по законам математики и во многом он симметричен. А математический аппарат, описывающий симметрию – это теория групп в огромном своём разнообразии. Однако, если вглядываться в этот наш Мир более пристально, то становится ясно, что законы Природы как раз работают таким образом, что истина начинает проявляться именно тогда, когда симметрия нарушается и показателем такого нарушения является существование винта в Природе от спина элементарных частиц до вращения целых галактик. Но как же тогда математика, как же теория групп, описывающая симметрию? Поэтому существование свойства винта в группах должно существовать с необходимостью и то, что учёные этого до сих пор не замечали является досадной случайностью мира науки.



### Дополнение. Группы симметричных конфигураций

Конфигурацией  $n$ -го порядка будем называть замкнутую ломаную линию, узлы которой находятся в вершинах правильного  $n$ -угольника. Пример конфигураций 4-го порядка показан на Рис. 1. Для наглядности узлы (точки) конфигурации будем показывать лежащими на окружности.

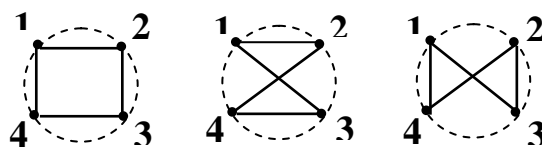


Рис. 1

Конфигурацию удобно задавать в виде цикла. Например:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  или в виде перестановки **1243**. Эта перестановка соответствует второй конфигурации Рис. 1. Эту же конфигурацию можно задать и перестановкой **1342** или **4312** и т. д.. Очевидно, что одну и ту же конфигурацию можно задать восьмью различными перестановками.

Рассмотрим знакопеременную группу из чётных подстановок четвёртого порядка  $A_4$ . Эта группа содержит 12 подстановок. Покажем все эти подстановки.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}; & a_1 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}; & a_2 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}; & a_3 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}; \\
 a_4 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}; & a_5 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix}; & a_6 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}; & a_7 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix}; \\
 a_8 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix}; & a_9 &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix}; & a_{10} &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 3241 \end{pmatrix}; & a_{11} &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Нижний ряд чисел в подстановках можно рассматривать, как замкнутый цикл, показанный на Рис. 1. Тогда каждому элементу  $a_i$  можно сопоставить одну из трёх этих конфигураций.

Рассмотрим подгруппы данной группы третьего порядка:  $\{a_0, a_4, a_8\}$ ,  $\{a_0, a_5, a_9\}$ ,  $\{a_0, a_6, a_{10}\}$ ,  $\{a_0, a_7, a_{11}\}$ . Очевидно, все они между собой изоморфны, т. к. существует только одна группа третьего порядка. Но кроме того в каждой подгруппе находятся подстановки разных конфигураций. Такие группы будем называть *группами конфигураций*.

Группа  $H_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  является нормальным делителем группы  $A_4$  (что такое нормальный делитель см., например, [20]). Тогда фактор-

группа  $A_4/H_0$  будет являться так же группой конфигураций, изоморфной группе третьего порядка. Элементами данной группы будут классы из подстановок:  $H_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ ,  $H_1 = \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$ ,  $H_2 = \{a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$ . Подстановки класса  $H_0$  соответствуют первой конфигурации, показанной на Рис. 1. Соответственно подстановки классов  $H_1$  и  $H_2$  будут соответствовать второй и третьей конфигурации Рис. 1.

Известную [20] фактор-группу  $S_4/H_0$  можно назвать *удвоенной группой конфигураций*. Эта группа  $S_4/H_0$  изоморфна группе  $S_3$ , которая является неабелевой группой шестого порядка. Т. е. группа  $S_4/H_0$  будет содержать по два класса  $H_i$  подстановок, каждая из которых соответствует какой-то одной конфигурации четвёртого порядка. Т. е. имеем два класса подстановок, соответствующих первой конфигурации (см. Рис. 1), два класса подстановок, соответствующих второй конфигурации и два класса подстановок третьей конфигурации.

Т. о., мы убедились в существовании различных групп конфигураций.

Исследуем конфигурации специального вида, которые будем называть *симметричными конфигурациям* (СК) относительно вертикальной оси. Причём ось симметрии всегда будет проходить, как минимум, через одну точку нашей конфигурации. Обозначим эту точку цифрой 1. Среди конфигураций третьего и четвёртого порядков существует по дной такой симметричной конфигурации (Рис. 2).

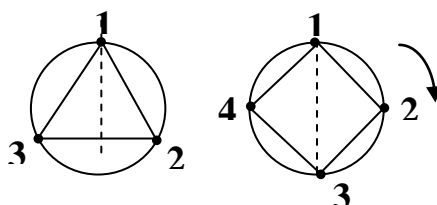


Рис. 2

Обход нумерации точек конфигурации всегда будет по часовой стрелке. Как уже было сказано, окружность показана только для удобства изображения. Чтобы осуществлять операции над конфигурациями будем использовать подстановки специального вида. Например, конфигурациям, показанным на Рис. 2, соответствуют подстановки:

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}.$$

Нижний ряд в подстановке описывает цикл конфигурации. Таким образом, подстановки  $\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1234 \\ 1432 \end{pmatrix}$  будут описывать те же самые конфигурации (Рис. 2).

Рассмотрим конфигурации пятого порядка. Не трудно убедиться, что интересующих нас симметричных конфигураций всего четыре штуки (Рис. 3).

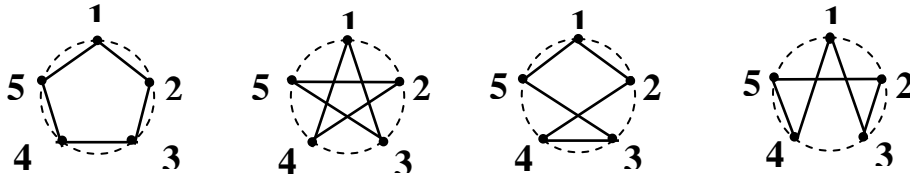


Рис. 3

Действительно, все они обладают осевой симметрией и ось симметрии проходит через точку 1.

Покажем, что подстановки, описывающие эти конфигурации, образуют группу.

Очевидно, что единичной подстановкой будет подстановка, которая описывает первую конфигурацию на Рис. 3. Закон ассоциативности обеспечен правилом умножения подстановок [35, стр. 16]. Докажем, что перемножение двух подстановок даёт подстановку того же вида. Причём, докажем это в общем виде для подстановок любого порядка.

Рассмотрим произведение подстановок, каждая из которых соответствует некоторой симметричной конфигурации нечётного порядка.

$$a \cdot b = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & a_k & \dots & a_{2n+1-k} & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & a_1 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_t \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & b_1 & \dots & b_p & \dots & b_q & \dots & b_r \end{array} \right) = c,$$

здесь  $a_{2n-1} = 2n-1$ ,  $a_1 + a_t = a_i + a_j = b_1 + b_r = b_p + b_q = 2n+1$ , т. е.  $a_i$  и  $b_i$  симметричны относительно начала и конца ряда  $\{2, 3, \dots, 2n-1\}$  - это следует из симметричности конфигурации,  $n = \{2, \dots\}$ ,  $j = 2n+1-i$ .

$$c = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & a_k & \dots & a_{2n+1-k} & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & c_1 & \dots & c_p & \dots & c_q & \dots & c_s \end{array} \right), \text{ где } c_p = b_p, c_q = b_q.$$

Как видим, в силу правила перемножения подстановок, полученная подстановка будет также соответствовать некоторой симметричной конфигурации. Т. е. множество подстановок, соответствующее симметричным конфигурациям, является замкнутым множеством относительно умножения подстановок. Т. к. множество замкнуто, то уравнение  $a \cdot x = e$ , где  $e = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix}$  будет иметь решение  $x = a^{-1}$ . Т. о., все групповые аксиомы выполняются и мы будем иметь группу  $G_8(5)$ .

Данное обозначение говорит, что это группа 8-го порядка и построена она на подстановках 5-го порядка. Введём обозначения для элементов группы и покажем её таблицу Кэли.

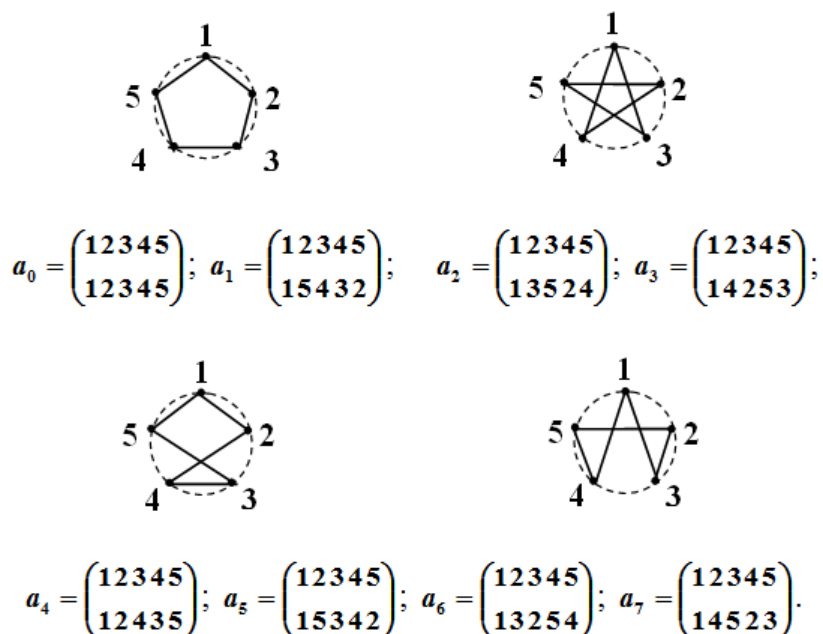


Рис. 4

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_1$	$a_1$	$a_0$	$a_3$	$a_2$	$a_5$	$a_4$	$a_7$	$a_6$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_1$	$a_0$	$a_6$	$a_7$	$a_5$	$a_4$
$a_3$	$a_3$	$a_2$	$a_0$	$a_1$	$a_7$	$a_6$	$a_4$	$a_5$
$a_4$	$a_4$	$a_5$	$a_7$	$a_6$	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_2$
$a_5$	$a_5$	$a_4$	$a_6$	$a_7$	$a_1$	$a_0$	$a_2$	$a_3$
$a_6$	$a_6$	$a_7$	$a_4$	$a_5$	$a_2$	$a_3$	$a_0$	$a_1$
$a_7$	$a_7$	$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$

Рис. 5

Всего групп 8-го порядка пять [34, стр. 73-74]. Три абелевых и две неабелевых. Определяющие уравнения этой группы имеют вид:

$$(a_2)^4 = a_0, \quad (a_4)^2 = a_0, \quad a_2 \cdot a_4 = a_4 \cdot (a_2)^3$$

Группа  $G_2(5) \equiv \{a_0, a_1\}$  является нормальным делителем  $H_0$  для группы  $G_8(5)$ . Тогда фактор-группа  $G_8(5)/G_2(5) = K_4(5)$  будет абелевой группой конфигураций 4-го порядка для СК 5-го порядка (Группа Клейна [33], стр. 24). Элементами этой группы будут классы  $H_i$  элементов:  $H_0 \equiv \{a_0, a_1\}$ ,  $H_1 \equiv \{a_2, a_3\}$ ,  $H_2 \equiv \{a_4, a_5\}$ ,  $H_3 \equiv \{a_6, a_7\}$ .

Введём новые обозначения для элементов  $a_i$ , как это было принято ранее для групп винта:  $a_0 = |b_0\rangle$ ,  $a_1 = \langle b_0|$ ,  $a_2 = |b_1\rangle$ ,  $a_3 = \langle b_1|$ ,  $a_4 = |b_2\rangle$ ,  $a_5 = \langle b_2|$ ,  $a_6 = |b_3\rangle$ ,  $a_7 = \langle b_3|$ , получаем группу винта восьмого порядка, которая является подгруппой полной группы винта  $B_5$ . Покажем пример работы с элементами этой группы винта:

$\langle b_0| \cdot \langle b_3| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = |b_3\rangle$ . Как видим – уникальный элемент работает как и положено, т. е. изменяет направление винта элемента после произведения слева (см. Рис. 4).

Рассмотрим СК 6-го порядка. Как это ни удивительно, таких конфигураций оказалось всего четыре (Рис. 6).

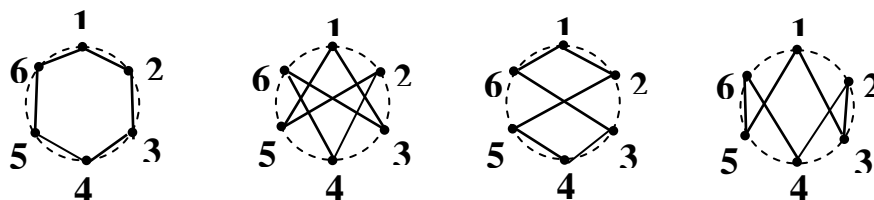


Рис. 6

Введём общее обозначение для числа СК:  $C(i)$ , где  $i$  – порядок конфигурации (число узлов). Тогда заметим, что  $C(3)=1$ ,  $C(4)=1$  и  $C(5)=C(6)=4$ . Возникает предположение, что  $C(2n-1)=C(2n)$ . Действительно это так. Покажем преобразование симметричной конфигурации третьего порядка в симметричную конфигурацию четвёртого порядка. Для начала выясним из каких элементарных частей состоит симметричная конфигурация.

Рассмотрим, например, конфигурацию пятого порядка (Рис. 7).

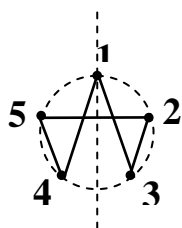


Рис. 7

Грубо говоря, конфигурация – это цикл в который объединены 5 точек отрезками прямых. Какая бы конфигурация ни была, она не может содержать внутреннего цикла. Напомним, что мы рассматриваем конфигурации, симметричные относительно вертикальной оси, проходящей через точку 1. Всякая нечётная конфигурация имеет только один горизонтальный отрезок независимо от порядка конфигурации. В противном случае мы получали бы самостоятельный цикл, отличный от данной конфигурации. Горизонтальные отрезки будем обозначать через  $L_i$ , а всё множество таких отрезков – через  $L$ . Т. о., конфигурации пятого порядка состоят из элементов множества  $L = \{L_1, L_2\}$ , где  $L_1$  – отрезок 52, а  $L_2$  – отрезок 34. Кроме этого всякая СК в своём цикле имеет несколько пар симметричных отрезков, которые будем обозначать:  $P_i$ . А множество таких пар обозначим через  $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ , где  $P_1$  – это отрезки 12 и 15,  $P_2$  – это отрезки 23 и 45,  $P_3$  – это отрезки 13 и 14,  $P_4$  – это отрезки 42 и 35. Тогда любую СК пятого порядка можем записать формулой:

$$C_m = P_i \cup P_j \cup L_k. \quad (1)$$

Конфигурация, показанная на Рис. 7, будет иметь формулу:  $C_4 = P_2 \cup P_3 \cup L_1$ .

Теперь вернёмся к преобразованию СК третьего порядка в СК четвёртого порядка.

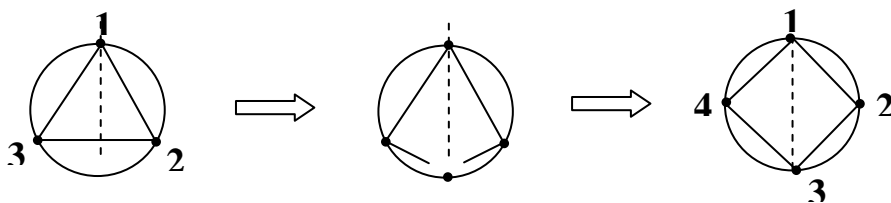


Рис. 8

Процесс преобразования показан на Рис. 8. На первом этапе отрезок 23 разрывается. Потом добавляется дополнительная точка. И свободные концы, разорванного отрезка, присоединяются к новой точке. Однозначно получаем СК большего на единицу порядка.

Аналогичным образом СК пятого порядка можно преобразовать в СК шестого порядка. Возникает вопрос: сколько вообще существует различных  $C(2n-1)$ ? Сначала выясним, как вычислять количество элементов для множеств  $L$  и  $P$ .

Всего точек в конфигурации  $2n-1$ , где  $n = \{2, \dots\}$ . Одна точка принадлежит оси симметрии. Остальные парами объединяются в элементы  $L_i$ . Тогда можем записать:  $\frac{(2n-1)-1}{2} = n-1$ .

$$L(2n-1) = n-1 \quad (2)$$

Множество  $P$  состоит из симметричных пар отрезков. Из числа сочетаний  $2n-1$  точек конфигурации по две точки надо вычесть горизонтальные отрезки, т. е. множество  $\frac{1}{2}L$ :

$$\frac{1}{2} \left( C_{2n-1}^2 - \frac{1}{2}L \right) = \frac{(2n-1)(2n-2) - (n-1)}{2} = (n-1)^2.$$

$$P(2n-1) = (n-1)^2. \quad (3)$$

**Пример:**  $n=3$ ,  $L(5)=2$ ,  $P(5)=4$

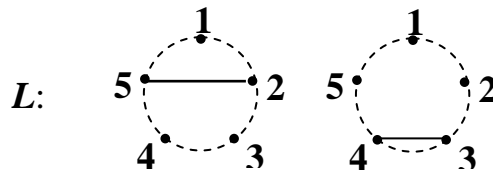


Рис. 9

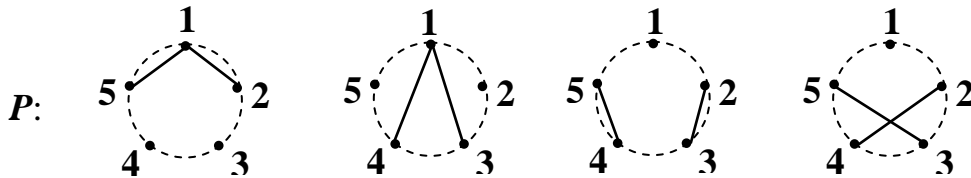


Рис. 10

Т. о., между этими двумя множествами получается простая зависимость:

$$P = L^2. \quad (4)$$

Теперь можем рассмотреть схему построения СК.

Сначала покажем рекуррентную формулу перехода от конфигурации порядка  $2n - 3$  к конфигурации порядка  $2n - 1$  (Рис. 11).

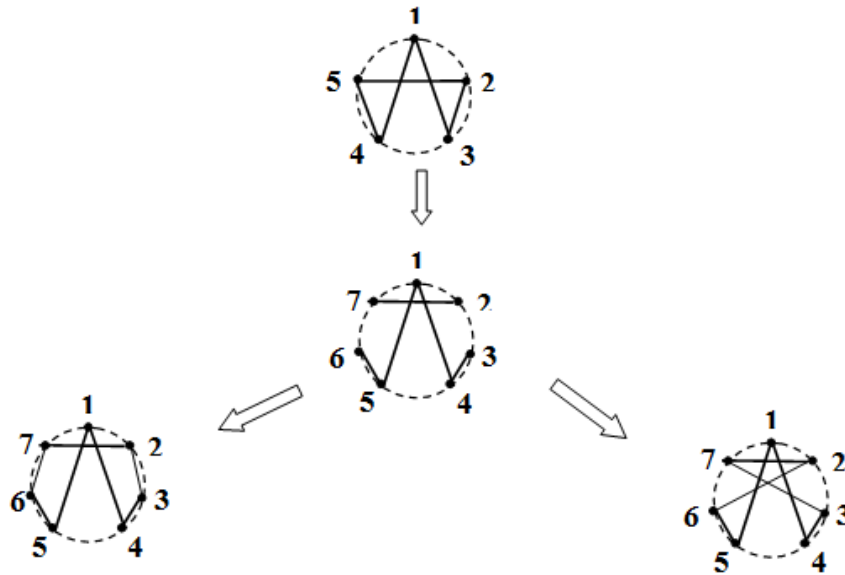


Рис. 11

На Рис. 11 показан пример преобразования конфигурации пятого порядка в две конфигурации седьмого порядка (все СК седьмого порядка мы покажем в приложении). На первом этапе происходит дополнение двух точек по отрезку 52. Получаем новый элемент 72 из множества  $L$  для конфигураций седьмого порядка. На втором этапе получаем две новых конфигурации (отсюда коэффициент 2 в рекуррентной формуле (5)). Очевидно, такое преобразование однозначно. Количество элементов множества  $L$  - величина известная, можем записать рекуррентную формулу.

$$C(2n - 1) = 2 \cdot L(2n - 1) \cdot C(2n - 3). \quad (5)$$

**Пример:**  $n = 6$ ,  $L = 5$ .

$$C(2n - 1) = C(11) = 2 \cdot 5 \cdot C(9);$$

$$C(11) = 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 4 \cdot C(7)) = 2 \cdot 5(2 \cdot 4(2 \cdot 3 \cdot C(5))) = 2 \cdot 5(2 \cdot 4(2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot C(3))))),$$

Помним, что  $C(3) = 1$ ,  $C(11) = 2^4 \cdot 5! = 1920$ .

Обобщая полученный результат, можем записать общую формулу:

$$C(2n - 1) = 2^{n-2} \cdot (n - 1)! \quad (6)$$

В качестве резюме к нашему исследованию можем записать, что



подстановки симметричных конфигураций объединены фактор-группой конфигураций:

$$G_{2C(2n-1)}(2n-1) / G_2(2n-1) = K_{C(2n-1)}(2n-1). \quad (7)$$

### Множество СК седьмого порядка

Покажем все СК седьмого порядка.

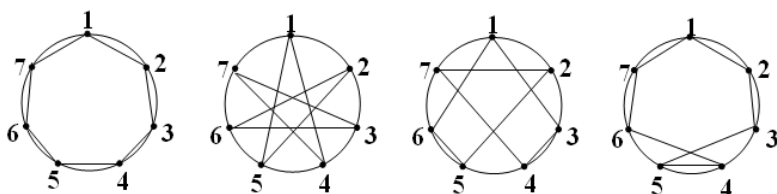


Рис. 12

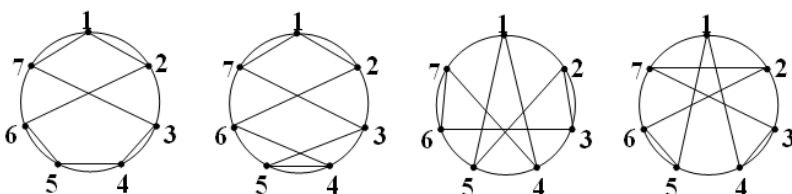


Рис. 13

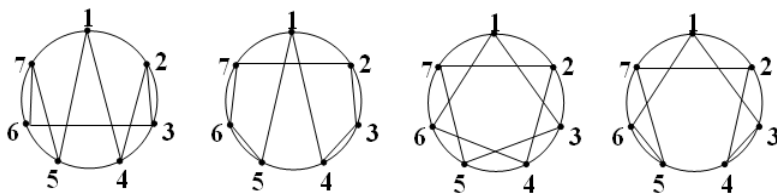


Рис. 14

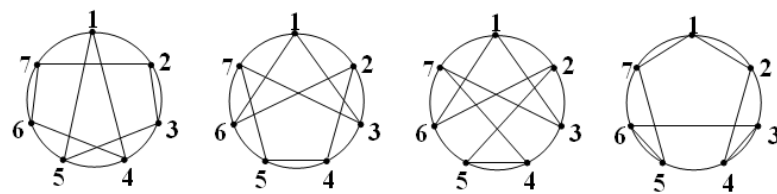


Рис. 15

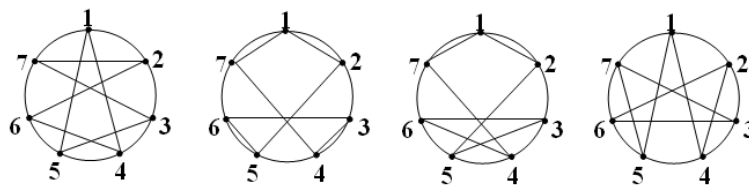


Рис. 16

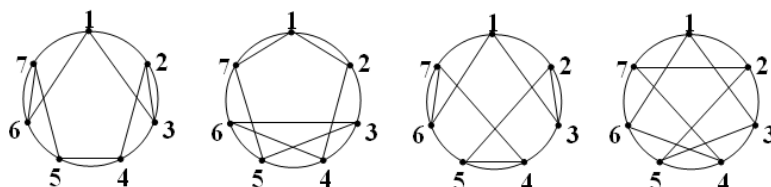


Рис. 17

Элементы множеств  $P$  и  $L$  имеют вид:

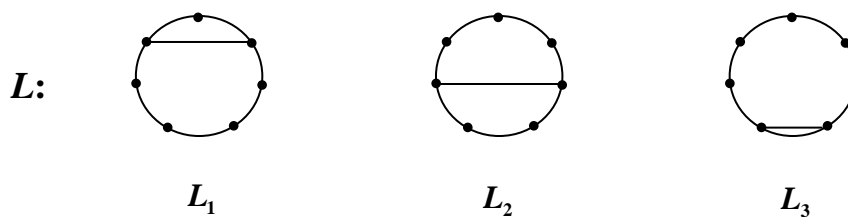


Рис. 18

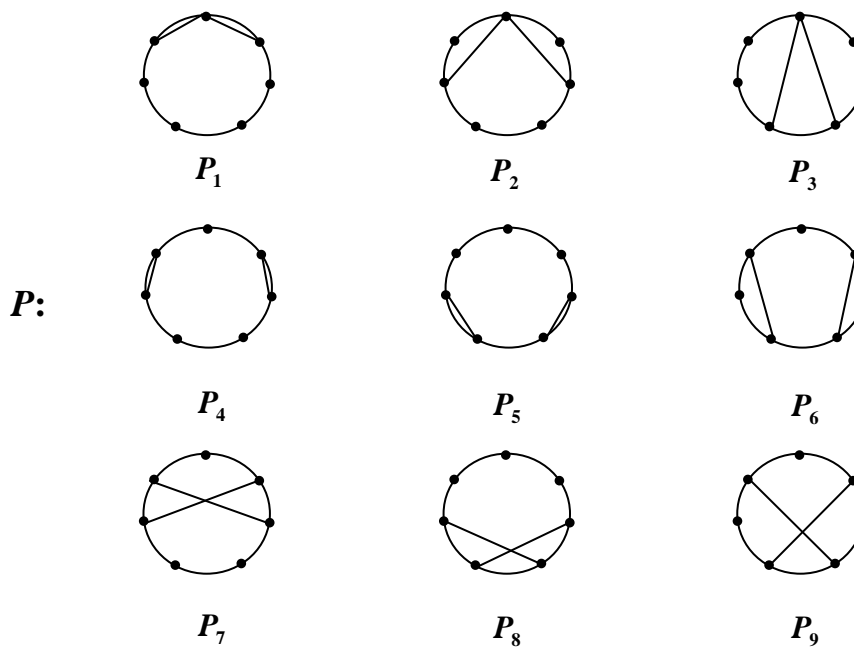


Рис. 19

Общая формула СК седьмого порядка имеет вид:  
 $C_m = P_i \cup P_j \cup P_k \cup L_s$ .

**Пример:**  $C_3 = P_2 \cup P_5 \cup P_9 \cup L_1$

Подстановки, описывающие эту СК имеют вид:  $a_3 = \begin{pmatrix} 1234545 \\ 1347256 \end{pmatrix}$ ,  
 $\overline{a_3} = \begin{pmatrix} 1234545 \\ 1652743 \end{pmatrix}$ .

Число симметричных конфигураций можно вычислить по формуле:  
 $C(2n-1) = 2^{n-2} \cdot (n-1)! = C(7) = 2^2 \cdot 3! = 24$  (см. Рис. 12-17).

Все эти подстановки объединены фактор группой:  $G_{48}(7)/G_2(7)$ . Эта группа изоморфна симметричной группе 24-го порядка  $S_4$ . Всего таких групп 15. Какая из них изоморфна нашей фактор-группе мы выяснять здесь не будем.

### Число различных конфигураций простого порядка

Известно, что число конфигураций  $Q$  можно подсчитать по формуле:

$$Q(n) = \frac{(n-1)!}{2}. \quad (8)$$

Например, при  $n=4$  получаем  $Q(4)=3$ , т. е. различных конфигураций. Эти конфигурации мы видим на Рис. 1. Но по сути, вторая и третья конфигурации эквивалентны с точностью до поворота. А как вычислить, сколько истинно различных конфигураций  $R$ ?

Обозначим через  $S$  число конфигураций, которые совпадают сами с собой (совмещаются) при повороте на угол  $\frac{360^\circ}{n}$ . Для пятиугольников – это первая и вторая конфигурации Рис. 1.3. Для семиугольников – это первая, вторая (Рис. 12) и третья (Рис. 14) конфигурации. Очевидно, что для  $n$  простого числа таких конфигураций можно посчитать по формуле  $S(n) = \frac{n-1}{2}$ . Тогда для простого  $n$  формула для числа различных конфигураций будет:  $R(n) = \frac{1}{n}(Q(n) - S(n)) + S(n)$  или:

$$R(n) = \frac{(n-1)! + (n-1)^2}{2n} \quad (9)$$

Если перейти к новым обозначениям:  $m = 2n - 1$ , где  $m$  – простое, а

$n = 2, \dots$ , то в обозначениях нашего исследования последнюю формулу можно переписать таким образом:

$$R(m) = \frac{[2 \cdot L(m)]! + 2 \cdot P(m)}{2m}. \quad (10)$$

## Литература

1. А. С. Сонин, «Постижение совершенства», М., «Знание», 1987
2. Г. Вейль, «Симметрия», М., «Наука», 1978
3. А. Пуанкаре, «О науке», М., «Наука», 1990
4. Е. Вигнер, «Теория групп и её приложения к квантовомеханической теории атомных спектров», Новокузнецк, «НФМИ», 2000
5. Г. Ф. Лаптев, «Элементы векторного исчисления», М., «Наука», 1975
6. Э. Б. Винберг, «Линейные представления групп», М., «Наука», 1985
7. Н. М. Бескин, «Деление отрезка в данном отношении», М., «Наука», 1973
8. В. С. Тюхтин, Ю. А. Урманцев, «Система. Симметрия. Гармония», М., «Мысль», 1988
9. Б. Л. ван дер Варден, «Алгебра», М., «Наука», 1976
10. Е. Вигнер, «Этюды о симметрии», М., «Мир», 1971
11. Ф. Герман, «Поэзия разума», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
12. Б. Горобец, «Мировые константы и в основных законах физики и физиологии», «Наука и жизнь» №2, 2004
13. Ф. Бахман, «Построение геометрии на основе понятия симметрии», М., «Наука», 1969
14. Ю. С. Владимиров, «Пространство-время: явные и скрытые размерности», М., «Наука», 1989
15. П. Девис, «Суперсила», М., «Мир», 1989
16. В. М. Дуков, «Электродинамика», М., «Высшая школа», 1975
17. В. В. Никулин, И. Р. Шафаревич, «Геометрии и группы», М., «Наука», 1983
18. С. В. Дужин, Б. Д. Чеботаревский, «От орнаментов до дифференциальных уравнений», Минск, «высшая школа», 1988
19. М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов, «Применение теории групп в квантовой механике», М., «Наука», 1967
20. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, «Основы теории групп», М., «Наука», 1977
21. И. С. Желудев, «Физика кристаллов и симметрия», М., «Наука», 1987
22. А. Г. Курош, «Теория групп», М., «Наука», 1967
23. А. М. Микиша, В. Б. Орлов, «Толковый математический словарь», М., «Русский язык», 1989
24. Л. И. Головина, «Линейная алгебра и некоторые её приложения», М.,

«Наука», 1985

25. П. С. Александров, «Введение в теорию групп», М, «НАУКА», 1980
26. Н. А. Глаголев, «Проективная геометрия», М., «Высшая школа», 1963
27. «Enzyklopedie der mathematische Wissenschaften...» Leipzig, 1898-1934
28. М. Берже, «Геометрия. Том второй», М., «Мир», 1984
29. Дж. Л. Келли, «Общая топология», М., «Наука», 1981
30. Ф. Харари, «Теория графов», М. «Мир», 1973
31. А. Б. Мигдал, «Поиски истины», М., «Молодая гвардия», 1982
32. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М, «Наука», 1981
33. Ф. Герман, «Закоулки и перекрёстки математики», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
34. О. Ю. Шмидт, «Абстрактная теория групп», Киев, «Изд. Киевского ун-та», 1916
35. Э. Фрид, «Элементарное введение в абстрактную алгебру», М., «Мир», 1979
36. Л. Сасскинд, «Космический ландшафт», Издательство «Питер», 2015