Франц Герман

Теория групп конфигураций

Содержание

Группы симметричных конфигураций

Конфигурацией $\boldsymbol{n}$-го порядка будем называть замкнутую ломаную линию, узлы которой находятся в вершинах правильного $\boldsymbol{n}$-угольника. Пример конфигураций 4-го порядка показан на Рис. 1. Для удобства узлы (точки) конфигурации будем показывать лежащими на окружности.

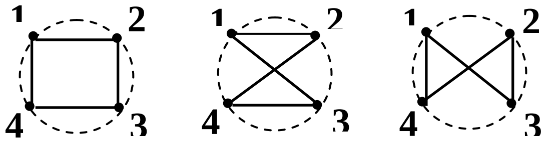


Рис. 1

Конфигурацию удобно задавать в виде цикла. Например: $\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1}$ или в виде перестановки **1243**. Эта перестановка соответствует второй конфигурации Рис. 1. Эту же конфигурацию можно задать и перестановкой **1342** или **4312** и т. д.. Очевидно, что одну и ту же конфигурацию можно задать восьмью различными перестановками.

Рассмотрим знакопеременную группу из чётных подстановок четвёртого порядка $\boldsymbol{A_4}$. Эта группа содержет 12 подстановок. Покажем все эти подстановки.

$$\boldsymbol{a_0} = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_5} = \begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_6} = \begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_7} = \begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{a_8} = \begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_9} = \begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_{10}} = \begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{a_{11}} = \begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}.$$

Нижний ряд чисел в подстановках можно рассматривать, как перестановку. Тогда каждому элементу $\boldsymbol{a}_i$ можно сопоставить одну из трёх конфигураций Рис. 1.

Рассмотрим подгруппы данной группы третьего порядка: $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_8\}$, $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_9\}$, $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_6, \boldsymbol{a}_{10}\}$, $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_7, \boldsymbol{a}_{11}\}$. Очевидно, все они между собой изоморфны, т. к. существует только одна группа третьего порядка. Но кроме того в каждой подгруппе находятся подстановки разных конфигураций. Такие группы будем называть *группами конфигураций*.

Группа $\boldsymbol{H}_0 = \{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ является нормальным делителем группы $\boldsymbol{A}_4$ (что такое нормальный делитель см., например, [3]). Тогда фактор-группа $\boldsymbol{A}_4/\boldsymbol{H}_0$ будет являться так же группой конфигураций, изоморфной группе третьего порядка. Элементами данной группы будут классы $\boldsymbol{H}_0 = \{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\boldsymbol{H}_1 = \{\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6, \boldsymbol{a}_7\}$, $\boldsymbol{H}_2 = \{\boldsymbol{a}_8, \boldsymbol{a}_9, \boldsymbol{a}_{10}, \boldsymbol{a}_{11}\}$. Подстановки класса $\boldsymbol{H}_0$ соответствуют первой конфигурации, показанной на Рис. 1. Соответственно подстановки классов $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ будут соответствовать второй и третьей конфигурации Рис. 1.

Известную [3] фактор-группу $\boldsymbol{S}_4/\boldsymbol{H}_0$ можно назвать удвоеной группой конфигураций. Эта группа $\boldsymbol{S}_4/\boldsymbol{H}_0$ изоморфна группе $\boldsymbol{S}_3$, которая является неабелевой группой шестого порядка. Т. е. группа $\boldsymbol{S}_4/\boldsymbol{H}_0$ будет содержать по два класса $\boldsymbol{H}_i$ подстановок, каждая из которых соответствует какой-то одной конфигурации четвёртого порядка. Т. е. имеем два класса подстановок, соответствующих первой конфигурации (см. Рис. 1), два класса подстановок, соответствующих второй конфигурации и два класса подстановок – третьей конфигурации.

Т. о., мы убедились в существовании различных групп конфигураций.

Исследуем конфигурации специального вида, которые будем называть *симметричными конфигурациям* (СК) относительно вертикальной оси. Причём ось симметрии всегда будет проходить, как минимум, через одну точку нашей конфигурации. Обозначим эту точку цифрой **1**. Среди конфигураций третьего и четвёртого порядков существует по дной такой симметричной конфигурации (Рис. 2).

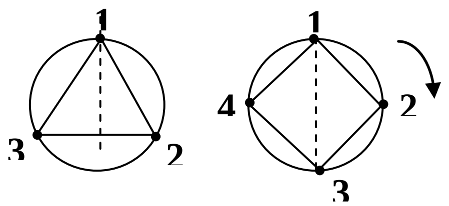


Рис. 2

Обход нумерации точек конфигурации всегда бедет по часовой стрелке. Как уже было сказано, окружность показана только для удобства изображения. Чтобы осуществлять операции над конфигурациями будем использовать подстановки специального вида. Например, конфигурациям, показанным на Рис. 2, соответствуют подстановки:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{123}\\ \mathbf{123}\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\ \mathbf{1234}\end{pmatrix}$$

Нижний ряд в подстановке описывает цикл конфигурации. Таким образом, подстановки $\begin{pmatrix}\mathbf{123}\\ \mathbf{132}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\ \mathbf{1432}\end{pmatrix}$ будут описывать те же самые конфигурации (Рис. 2).

Рассмотрим конфигурации пятого порядка. Не трудно убедиться, что интересующих нас симметричных конфигураций всего четыре штуки (Рис. 3).

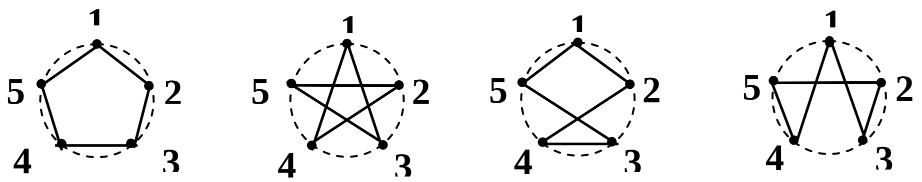


Рис. 3

Действительно, все они обладают осевой симметрией и ось симметрии проходит через точку **1**.

Покажем, что подстановки, описывающие эти конфигурации, образуют группу.

Очевидно, что единичной подстановкой будет подстановка, которая описывает первую конфигурацию на Рис. 3. Закон ассоциативности обеспечен правилом умножения подстановок [1]. Докажем, что перемножение двух подстановок даёт подстановку того же вида. Причём, докажем это в общем виде для подстановок любого порядка.

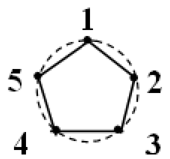
Рассмотрим произведение подстановок, каждая из которых соответствует некоторой симметричной конфигурации нечётного порядка.

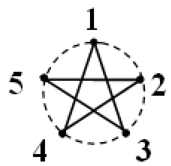
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\ \mathbf{2}\cdots\boldsymbol{a}_k\cdots & \cdots\boldsymbol{a}_{2n+1-k}\cdots\boldsymbol{a}_{2n-1}\\ \mathbf{1}\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_i\cdots & \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\ \mathbf{2}\cdots\boldsymbol{a}_i\cdots & \cdots\boldsymbol{a}_j\cdots\boldsymbol{a}_{2n-1}\\ \mathbf{1}\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_p\cdots & \cdots\boldsymbol{b}_q\cdots\ \boldsymbol{b}_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{c},$$

здесь $\boldsymbol{a}_{2n-1}=\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{b}_p+\boldsymbol{b}_q=\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$, т. е. $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_i$ симметричны относительно начала и конца ряда $\{\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \cdots,\ \mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}\}$ - это следует из симметричности конфигурации, $\boldsymbol{n}=\{\mathbf{2},\cdots\}$, $\boldsymbol{j}=\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}-\boldsymbol{i}$.

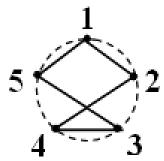
$$c = \begin{pmatrix} 1\,2 \cdots a_k \cdots & \cdots a_{2n+1-k} \cdots a_{2n-1} \\ 1 c_1 \cdots c_p \cdots & \cdots \quad c_q \quad \cdots \quad c_s \end{pmatrix}, \text{ где } c_p = b_p,\ c_q = b_q.$$

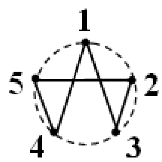
Как видим, в силу правила перемножения подстановок, полученная подстановка будет также соответствовать некоторой симметричной конфигурации. Т. е. множество подстановок, соответствующее симметричным конфигурациям, является замкнутым множеством относительно умножения подстановок. Т. к. множество замкнуто, то уравнение $a \cdot x = e$, где $e = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix}$ будет иметь решение $x = a^{-1}$. Т. о., все групповые аксиомы выполняются и мы будем иметь группу $G_8(5)$. Данное обозначение говорит, что это группа 8-го порядка и построена она на подстановках 5-го порядка. Введём обозначения для элементов группы и покажем её таблицу Кэли.





$$a_0 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix};\ a_1 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 15432 \end{pmatrix};\quad a_2 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 13524 \end{pmatrix};\ a_3 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 14253 \end{pmatrix};$$





$$a_4 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12435 \end{pmatrix};\ a_5 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 15342 \end{pmatrix};\ a_6 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 13254 \end{pmatrix};\ a_7 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 14523 \end{pmatrix}.$$

Рис. 4

Вся работа передана в РАН