

Уравнение $X^Y = Y^X$ (Первая Теорема)

Наверное, многие из читателей сталкивались с выражением $2^4 = 4^2$ и задавались вопросом: а есть ли ещё такие числа. Среди натуральных чисел подобных выражений больше не существует, но среди действительных чисел подобные выражения имеются, например, $\sqrt{3}^{\sqrt{27}} = \sqrt{27}^{\sqrt{3}}$. Причём, чисел таких бесконечно много. По сути дела, поиск таких чисел и будет темой нашей заметки.

Рассмотрим простейшее взаимно-обратное показательно-степенное уравнение с двумя неизвестными:

$$X^Y = Y^X \quad (1)$$

Исследуем это уравнение.

Во-первых, при $X=Y$, получаем бесконечное множество тривиальных решений. Этот случай мы рассматривать не будем.

Также, мы думаем, что для читателя не составит труда найти единственное решение уравнения (1) для X и Y - натуральных чисел.

Преобразуем уравнение (1) следующим образом: $Y \cdot \log_X X = X \log_X Y$ или $\frac{Y}{X} = \log_X Y$

Представим последнее уравнение в виде системы двух параметрических уравнений: $X = X(t)$ и $Y = Y(t)$. Для этого введём параметр $t = \frac{Y}{X} = \log_X Y$. Можем записать такие параметрические уравнения: $Y = X \cdot t$, $Y = X^t$, откуда получаем $X(X^{t-1} - t) = 0$.

Чтобы не сталкиваться с неопределённостями, которые нашему читателю ещё не знакомы, возьмём область допустимых значений для X и Y , $X > 1$, $Y > 1$. Для нашей цели это как раз подходит, т. к. и число e и число ϕ попадают в эту область. Тогда из последнего уравнения получаем: $X = t^{\frac{1}{t-1}}$.

Как раньше было показано $Y = X \cdot t$, тогда с учётом $X = t^{\frac{1}{t-1}}$, имеем: $Y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Получаем систему таких параметрических уравнений:

$$\begin{cases} X = t^{\frac{1}{t-1}} \\ Y = t^{\frac{t}{t-1}} \end{cases}$$

Исследуем уравнение $X = t^{\frac{1}{t-1}}$.

Введём новую переменную $n = \frac{1}{t-1}$. Определим отсюда t : $t = 1 + \frac{1}{n}$, т. е. для новой переменной получаем такое уравнение:

$$t^{\frac{1}{t-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2)$$

Заметим, что правая часть этого уравнения является выражением, которое под знаком предела даёт выражение для определения известного трансцендентного числа: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Выясним к какому значению должно стремиться t в выражении (2) при $n \rightarrow \infty$ (значок « \rightarrow » заменяет слово «стремится»). Переменные n и t связаны выражением: $t = 1 + \frac{1}{n}$.

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Следовательно $t \rightarrow 1$.

Для более наглядной картины заменим переменные n и t на переменную x , и запишем очевидно справедливое равенство.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (3)$$

Рассмотрим уравнение, которое получилось бы, если бы мы отбросили знаки пределов в выражении (3):

$$x^{\frac{1}{x-1}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (4)^1$$

Уравнение (4) имеет единственное решение при $x = \varphi$. Читатель может в этом самостоятельно убедиться, сделав непосредственную подстановку и помня, что $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Мы проиллюстрируем это на рисунке:

¹⁾Р. Хонсбергер (Университет «Ватерлоо») сказал, что хочется затаить дыхание при виде уравнений (4) и (5).

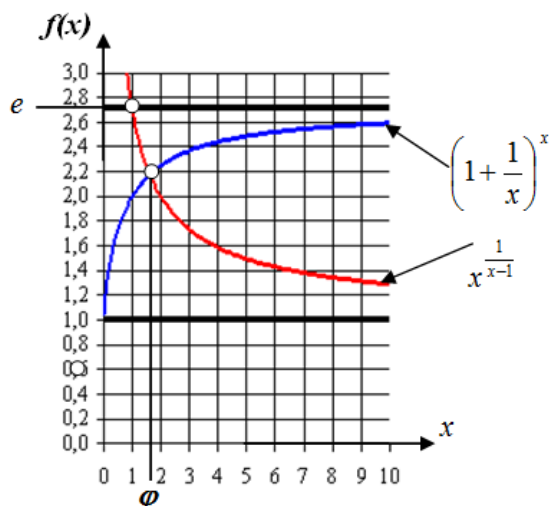


Рис. 1

Асимптотой для синей кривой является прямая $f(x) = e$, а асимптотой для красной – прямая $f(x) = 1$.

Выражения (3) и (4) определяют *косвенную связь между числами e и φ* .

Насколько нам известно, пока ещё не найдена формула, связывающая эти два числа в явном виде. Например для числа e и числа π существует такая формула. Формула Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

здесь $i = \sqrt{-1}$.

Формула эта – почти математическое чудо. Но она объяснима и, надеемся, что когда-нибудь читатель встретится с этой формулой на страницах математической литературы. Формула эта выходит за рамки элементарной математики, поэтому мы ей здесь заниматься не будем.

Аналогично исследуем и уравнение $Y = t^{\frac{t}{t-1}}$.

Введём новую переменную: $n = \frac{1}{t-1}$ и определим отсюда $t = 1 + \frac{1}{n}$.

С учётом новой переменной можем записать:

$$t^{\frac{t}{t-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (5)$$

Рассмотрим предел последовательности, общая формула которой является правой частью выражения (5), при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e = e$$

Т. е., также, как и в первом случае, получаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

Выясним к какому числу стремится переменная t в то время, как переменная $n \rightarrow \infty$.

Переменные n и t связаны выражением $t = 1 + \frac{1}{n}$. Как и в предыдущем случае, при $n \rightarrow \infty$ $t \rightarrow 1$. Заменяя n и t на x , можем записать такое справедливое равенство:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^{\frac{x}{x-1}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e \quad (6)$$

Отбросив знаки пределов, рассмотрим такое уравнение:

$$x^{\frac{x}{x-1}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad (7)$$

Опять же получаем $x = \phi$ - единственное решение уравнения (7). Это ещё одна косвенная связь числа e и числа ϕ . На рисунке это выглядит так:

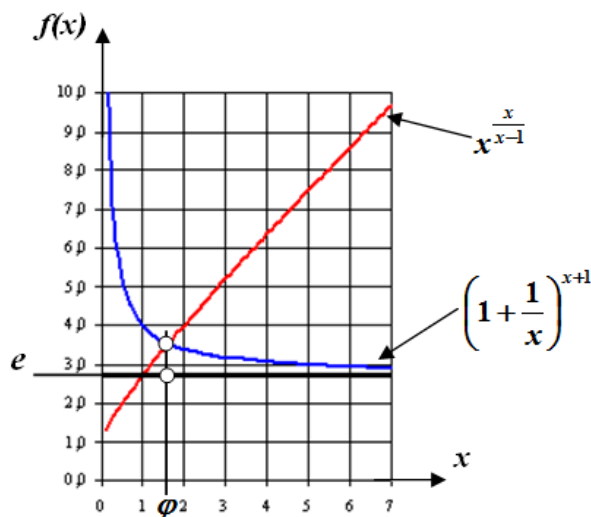


Рис. 2

Теперь вернёмся к системе наших параметрических уравнений:

$$\begin{cases} X = t^{\frac{1}{t-1}} \\ Y = t^{\frac{t}{t-1}} \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя в эти уравнения различные значения параметра t , будем получать значения X и Y , для которых справедливо уравнение (1): $X^Y = Y^X$.

Из уравнений системы (8) заключаем, что область допустимых значений для t – это $t > 0$ и $t \neq 1$.

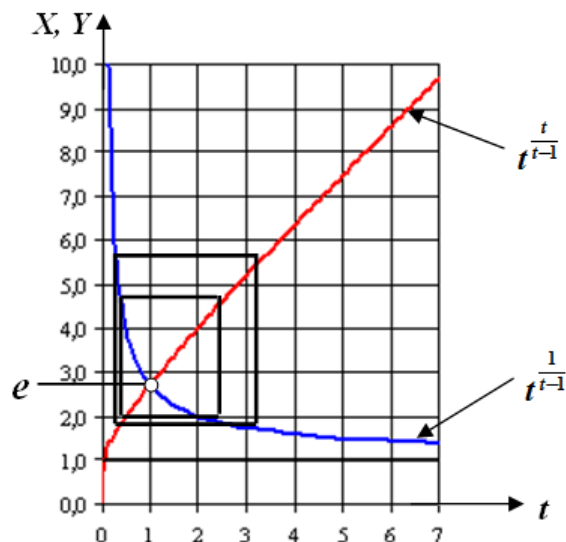


Рис. 3

Мы не случайно на Рис. 3 выделили прямоугольники. Оказывается, что при значении t и $\frac{1}{t}$ значения функций X и Y меняются местами, т. е.

$X(t) = Y\left(\frac{1}{t}\right)$ и $X\left(\frac{1}{t}\right) = Y(t)$. Действительно, найдём выражение $X\left(\frac{1}{t}\right)$:

$$X\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\left(\frac{1}{\frac{1}{t}-1}\right)} = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{1-t}} = \left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{t}{t-1}\right)} = t^{\frac{t}{t-1}} = Y(t)$$

Читатель самостоятельно может убедиться в том, что $Y\left(\frac{1}{t}\right) = X(t)$.

Вспоминая, что $t = \frac{Y}{X}$, можем утверждать, что существует «золотое» решение системы (8). А именно: при $t = \varphi$, $Y = \varphi \cdot X$. Аналогичное же решение получаем и при $t = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

И, наконец, можно сформулировать такую *теорему*:

Теорема (об исключении)

Для любого действительного числа $X > 1$ существует такое действительное число $Y \neq X$ и $Y > 1$, что будет справедливо равенство:

$$X^Y = Y^X$$

Исключением из этого утверждения является число $e = 2,7182818...$

Глядя на Рис. 3, мы видим, что при $x = e$ не существует $Y \neq X$ и наоборот. Т. е. для e справедливо только тривиальное выражение: $e^e = e^e$.

В заключение ещё раз заострим внимание читателя на функции $x^{\frac{x}{x-1}}$. Вводя новую переменную $n = \frac{x}{x-1}$, мы получаем функцию $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$, т. е. Мы видим, что основание степени и её показатель поменялись местами. Интересно, существуют ли ещё показательно-степенные функции $f_1(x)^{f_2(x)}$, для которых некоторое преобразование $n = n(x)$ давало бы выражение, обратное данному, т. е. - $f_2(n)^{f_1(n)}$.

Мы не занимались исследованием этого вопроса, но может быть им заинтересуется кто-нибудь из читателей.

По существу, этот вопрос не обязательно связывать с основанием степени и её показателем. Можно задачу поставить в общем виде. Существует ли для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ преобразование $n = n(x)$, такое, что при замене переменных, мы получаем такие же функции $f_1(n) = f_2(x)$ и $f_2(n) = f_1(x)$. Мы думаем, что это возможно, в первую очередь, среди тригонометрических функций.

Ф. Г.

04.06. 1979