Франц Герман

Аналитическая теория поверхностей Мёбиуса

franz.h-n@yandex.ru

Содержание

1. Введение

О поверхности Мёбиуса (пМ) мы уже упоминали в других работах, например [2], стр.22-30, [14], стр.218. Напомним в двух словах, что мы имеем в виду, когда говорим о пМ.

Все конечно знают, что такое лист Мёбиуса. Берётся прямоугольная полоска бумаги, достаточной длины относительно её ширины, перекручивается на **180°** и склеивается противоположными (короткми) сторонами. Не путайте с односторонней поверхностью, о которой говорится в учебниках по дифф. геометрии, например [1]. Склееный лист Мёбиуса имеет кривизну поверхности равную нулю, как и у эвклидовой плоскости. Именно такой лист мёбиуса и является частью проверхности Мёбиуса.

Сделать самому пМ довольно трудно. Но если обрезать в развёртке длину некоторых образующих конусов, чтобы при изготовлении избежать самопересечений поверхности, то частичное подобие такой поверхности всё-таки построить можно. Мы даже попытались показать на ней, как выглядит традиционный лист Мёбиуса.

Как известно [2], состоит пМ из 4 полуконусов, плавно переходящих друг в друга (Рис.1).

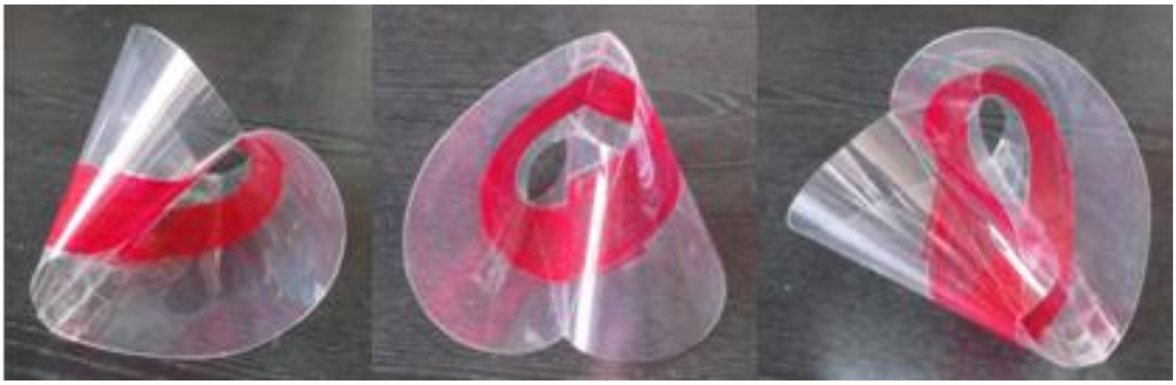

Рис. 1

В данной работе будет показан вывод уравнений такой поверхности.

Для удобства построения нам понадобится каркас, основа, на которой будет строиться вся поверхность.

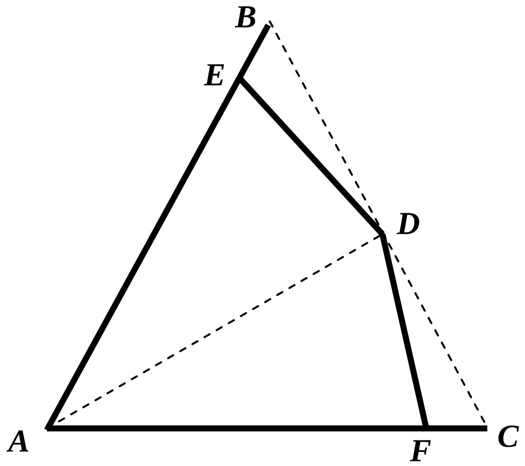

Рис. 2

Что представляет собой каркас. Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ – равносторонний, $\boldsymbol{AF = AD = AE}$. Очевидно, что $\boldsymbol{BD = DC}$. Жирными отрезками выделены будущие диаметры для оснований полуконусов. Напомним, все четыре полуконуса – являются правильными фмгурами (у правильного конуса образующая имеет постоянную длину). Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ прнадлежит будущей фигуре. В принципе, можно при построении каркас и не использовать, но с ним легче и понятней.

Теперь немного развернём каркас образующих и покажем каркасы оснований полуконусов (полуокружности), которые образуют искомую поверхность (Рис. 3).

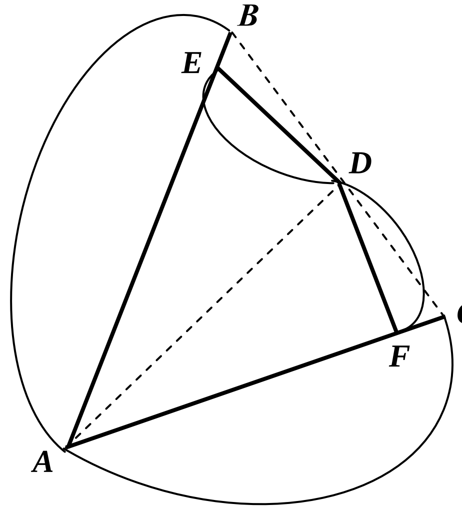

Рис. 3

Полуконус $\boldsymbol{ABC}$ с вершиной в точке $\boldsymbol{B}$ лежит над плоскостью рисунка (плоскостью каркаса образующих). Полуконус $\boldsymbol{BCA}$ с вершиной в точке $\boldsymbol{C}$ лежит под плоскостью рисунка и его поверхность является продолжением первого полуконуса. У них общая образующая $\boldsymbol{BC}$. Поверхность полуконуса $\boldsymbol{FAD}$ продолжает поверхность второго полуконуса и лежит над плоскостью рисунка. Чентвёртый полуконус $\boldsymbol{DAE}$ лежит под плоскостью рисунка и его поверхность замыкает всю фигуру, плавно переходя в первый полуконус.

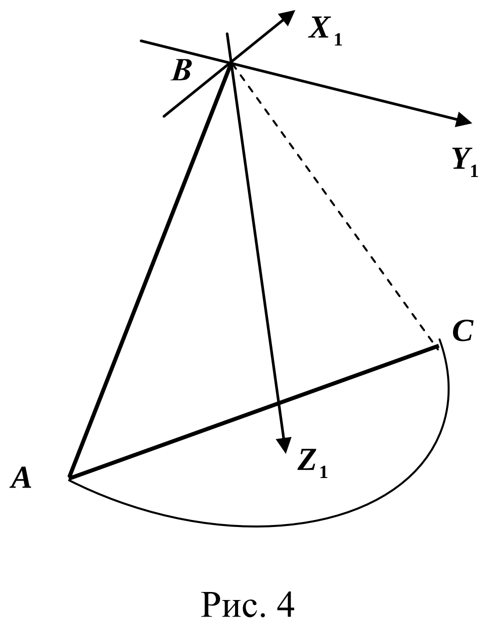

Рис. 4

2. Уравнения полуконусов.

Введём систему координат, как показано на Рис. 4. Ось $\boldsymbol{Z}$ проходит через середину отрезка $\boldsymbol{AC}$ и точку $\boldsymbol{B}$. Тогда уравнение прямого кругового конуса в общем виде будет иметь вид:

$$\boldsymbol{Z}^2 = \frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2}\left(\boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{Y}^2\right), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AD}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{DC}$ (Рис. 3) для первых двух полуконусов и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{Cos}(\mathbf{15°})$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{Sin}(\mathbf{15°})$ для третьего и четвёртого полуконусов.

В циллиндрических координатах ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{Z}$) будем иметь уравнения [8]:

$$\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{Z}_n \cdot \boldsymbol{Tg}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right), \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ - угол при вершине конуса.

Очевидно, что уравнение полуконуса будет выглядеть точно так же только при этом необходимо указывать границы координаты $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Т. о. уравнение первого полуконуса будет иметь вид: $\boldsymbol{R}_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{Z}_1$. Второй полуконус имеет точно такое же уравнение. Уравнение третьего полуконуса имеет выражение: $\boldsymbol{R}_3 = \left(\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}\right) \cdot \boldsymbol{Z}_3$. Аналогично, и уравнение четвёртого полуконуса.

Очевидно, что уравнения наших конусов связаны простым коэффициентом: $\boldsymbol{k} = \sqrt{\mathbf{3}} \cdot \left(\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}\right)$, т. е. $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R}_1$.

Т. о., пМ можно описать совокупностью таких уравнений и действий:

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{R}_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{Z}_1 \\ (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Z}_1) \xrightarrow{A_1} (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Z}_2), \boldsymbol{R}_1 \\ (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{A_2} (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Z}_3), \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R}_1 \\ (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Z}_3) \xrightarrow{A_3} (\boldsymbol{X}_4, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{Z}_4), \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R}_1 \end{array}\right. , \qquad (3)$$

здесь $\boldsymbol{A}_i$ - матрица перехода от одной координатной системы к другой.

В ***Приложении* 1** будет показан вывод векторного уравнения полуконуса. Это понадобится нам для того, чтобы показать, как на пМ строится лист Мёбиуса.

3. Преобразование ортогональных пространственных координат.

Теперь надо увязать вместе все наши четыре полуконуса.

Каждый из четырёх полуконусов описывается в собственной системе координат. Это можно понять из устройства каркаса (Рис. 2). Помним, что все системы координат одинакого ориентированы, как на Рис. 4.

Будем обозначать ось, перпендикулярную к плоскости рисунка и направленную вверх значком: ● , а направленную вниз - ○ .

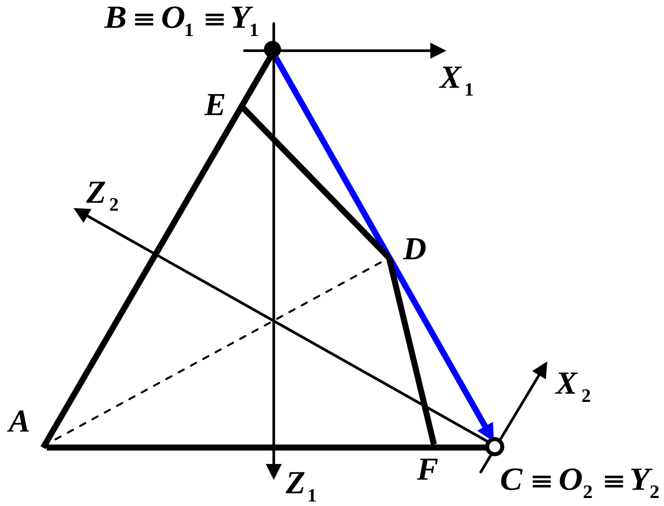

Рис. 5

На Рис. 4 показаны координатные системы первого и второго полуконусов X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 соответственно. Вектор $\overrightarrow{s_{12}} = \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2} l \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \vec{k} + \vec{i}\right)$ - вектор сдвига от центра (точка O_1) одной координатной системы к центру (точка O_2) другой. Здесь $l = AB$ - длина образующей полуконусов (Рис. 3).

Не на долго оставим наше исследование и рассмотрим в общем виде вопрос о преобразовании координат при переходе от одной системы к другой. Условимся считать, что системы координат имеют общее начало (с этой целью мы и ввели вектор сдвига) и одинакого ориентированы.

Можно по-разному строить такие преобразовании.

В болшинстве учебников по аналитической геометрии расматривается метод Эйлера. Для построения таких преобразований используется промежуточная ось вращения [4]. Мы будем строить преобразования используя вращения вокруг уже существующих осей. На наш взгляд такой подход проще для практических расчётов.

Построим матрицу перехода от одной системы координат к другой

Итак, имеем две одинакого ориентированные системы координат: X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 (Рис. 5). Начало координат у них общее.

Введём обозначения для дополнительных плоскостей: $\boldsymbol{P \equiv X_1OY_1}$, $\boldsymbol{Q \equiv Z_2OX_2}$, $\boldsymbol{R \equiv Z_1OY_2}$,

Для перехода от одной системы координат к другой достаточно трёх поворотов. Сейчас мы в этом убедимся.

Первый поворот осуществляем вокруг оси $\boldsymbol{OZ_1}$ против часовой стрелки до совмещения оси $\boldsymbol{OY_1}$ с плоскостью $\boldsymbol{R}$. При этом ось $\boldsymbol{OY_1}$ переходит в ось $\boldsymbol{OY^*}$, ось $\boldsymbol{OX_1}$ - в ось $\boldsymbol{OX^*}$. Обозначим угол $\angle \boldsymbol{Y_1OY^* = \alpha}$.

Второй поворот совершаем вокруг вновь образованной оси $\boldsymbol{OX^*}$ также против часовой стрелки до совмещения оси $\boldsymbol{OY^*}$ с осью $\boldsymbol{OY_2}$. При этом ось $\boldsymbol{OZ_1}$ переходит в ось $\boldsymbol{OZ^*}$. Обозначим угол $\angle \boldsymbol{Y^*OY_2 = \beta}$.

Третий поворот надо осуществить снова против часовой стрелки вокруг оси $\boldsymbol{OY_2}$ до совмещения осей $\boldsymbol{OX^*}$ и $\boldsymbol{OZ^*}$ с осями $\boldsymbol{OX_2}$ и $\boldsymbol{OZ_2}$ соответственно. Обозначим угол $\angle \boldsymbol{Z^*OZ_2 = \gamma}$.

Оси промежуточной координатной системы ($\boldsymbol{X^*, Y^*, Z^*}$) можно определить через дополнительные плоскости: $\boldsymbol{X^* \equiv Q \cap P}$, $\boldsymbol{Y^* \equiv P \cap R}$, $\boldsymbol{Z^* \equiv R \cap Q}$.

Теперь, зная исходную, промежуточную и конечную системы координат можно легко определить углы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

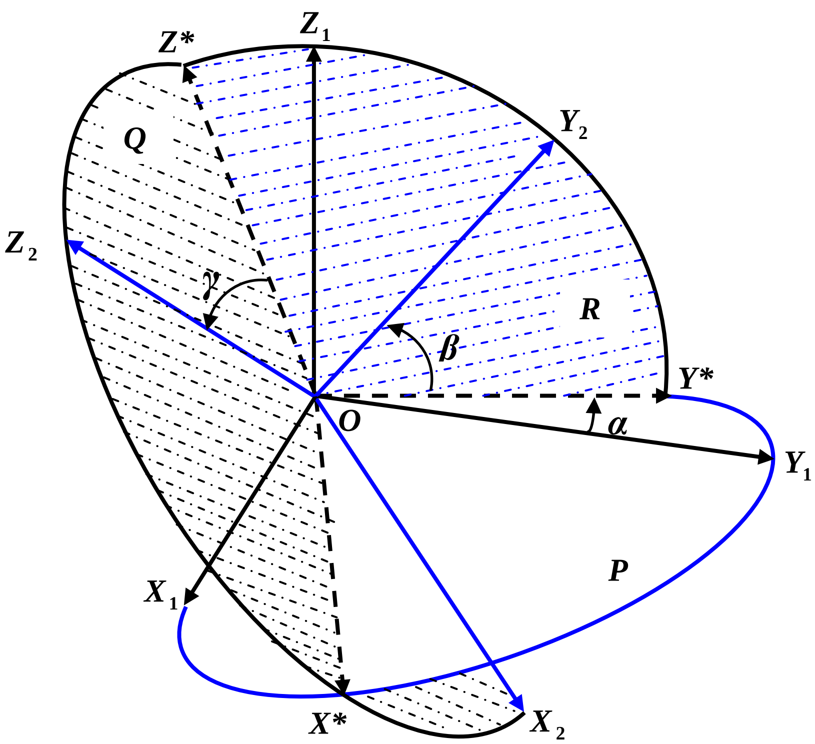

Рис. 6

Теперь опишем наши преобразования (повороты) на математическом языке.

Первый поворот имеет систему преобразований:

$$\begin{cases} X^* = X_1 \cdot Cos(\alpha) + Y_1 \cdot Sin(\alpha) \\ Y^* = -X_1 \cdot Sin(\alpha) + Y_1 \cdot Cos(\alpha). \\ Z_1 = Z_1 \end{cases}$$

Второй поворот соответственно:

$$\begin{cases} Y_2 = Y^* \cdot Cos(\beta) + Z_1 \cdot Sin(\beta) \\ Z^* = -Y^* \cdot Sin(\beta) + Z_1 \cdot Cos(\beta). \\ X^* = X^* \end{cases}$$

Третий поворот:

$$\begin{cases} Z_2 = Z^* \cdot Cos(\gamma) + X^* \cdot Sin(\gamma) \\ X_2 = -Z^* \cdot Sin(\gamma) + X^* \cdot Cos(\gamma). \\ Y_2 = Y_2 \end{cases}$$

Освобождаясь от промежуточных координат ***X****, ***Y**** и ***Z**** окончательно получаем:

$$\begin{cases} X_2 = a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot Y_1 + a_{13} \cdot Z_1 \\ Y_2 = a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot Y_1 + a_{23} \cdot Z_1 \\ Z_2 = a_{31} \cdot X_1 + a_{32} \cdot Y_1 + a_{33} \cdot Z_1 \end{cases}, \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= Cos(\alpha) \cdot Cos(\gamma) - Sin(\alpha) \cdot Sin(\beta) \cdot Sin(\gamma); \\ a_{12} &= Cos(\gamma) \cdot Sin(\alpha) + Cos(\alpha) \cdot Sin(\beta) \cdot Sin(\gamma); \\ a_{13} &= -Cos(\beta) \cdot Sin(\gamma); \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -Sin(\alpha) \cdot Cos(\beta); \\ a_{22} &= Cos(\alpha) \cdot Cos(\beta); \\ a_{23} &= Sin(\beta); \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= Cos(\alpha) \cdot Sin(\gamma) + Sin(\alpha) \cdot Sin(\beta) \cdot Cos(\gamma); \\ a_{32} &= Sin(\alpha) \cdot Sin(\gamma) - Cos(\alpha) \cdot Sin(\beta) \cdot Cos(\gamma); \\ a_{13} &= Cos(\beta) \cdot Cos(\gamma). \end{aligned} \qquad (7)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется матрицей преобразования координатной системы.

Вернёмся к нашей задаче и снова посмотрим на Рис. 5. Посредством вектора сдвига можно привести системы X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 к общему началу координат O_2.

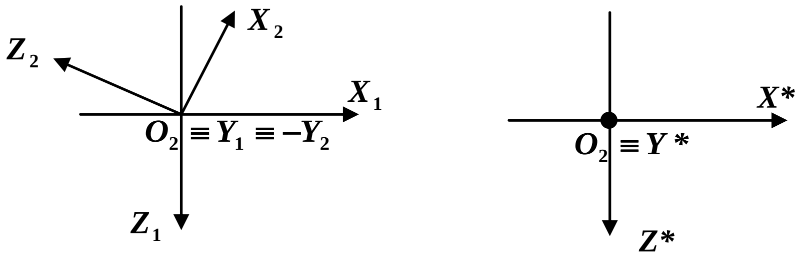

Рис. 7

Здесь плоскость Q – это плоскость рисунка, плоскость P проходит через ось X_1 и перпендикулярно плоскости рисунка, плоскость R проходит через ось Z_1 и тоже перпендикулярно плоскости рисунка. Откуда находим: $\alpha = \beta = 0°$, $\gamma = 60°$.

Матричные элементы задаются формулами (5), (6), (7). Можем найти матрицу перехода.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразование координат, связывающие уравнения первого и второго полуконусов можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Выражение (8) соответствует записи во второй строчке совокупности (3) $(X_1, Y_1, Z_1) \xrightarrow{A_1} (X_2, Y_2, Z_2)$.

Для $(X_2, Y_2, Z_2) \xrightarrow{A_2} (X_3, Y_3, Z_3)$ вектор сдвига будет иметь вид: $\overrightarrow{s_{23}} = \overrightarrow{O_2 O_3} = \dfrac{1}{2} l \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \vec{k} - \vec{i}\right)$, матрица перехода $A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Вся работа передана в РАН