Франц Герман

Задача о треугольниках

franz.h-n@yandex.ru

Может показаться, что треугольник
столь тщательно изученный в древности,
не таит в себе больше ничего неожиданного
(Мартин Гарднер)

Существует много задач и теорем планиметрии, где три точки образуют либо равносторонний треугольник, либо лежат на одной прямой. Именно одной из таких задач и посвящено наше небольшое исследование.

Рассмотрим окружность и два равных равносторонних треугольника (Рис. 1).

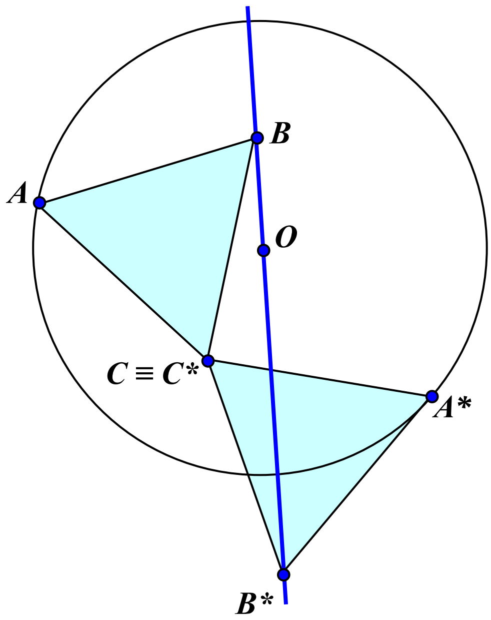

Рис. 1

Радиус окружности равен стороне треугольников и вершины ***A*** и ***A**** свободно перемещаются по данной окружности, а треугольники ***ABC*** и ***A*B*C**** произвольно вращаются вокруг вершин ***A*** и ***A****.

Задача 1). Если треугольники ***ABC*** и ***A*B*C**** имеют общую вершину ***C ≡ C****, то вершины ***B***, ***B**** и точка ***O*** – центр данной окружности - лежат на одной прямой.

Заметим, что наши треугольники одинаково ориентированы. Это значит, что обход по вершинам имеет одинаковое направление (Рис. 2).

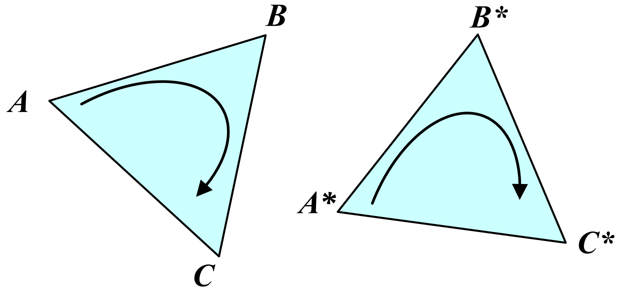

Рис. 2

Доказательство:

Сделаем дополнительные построения (Рис. 3).

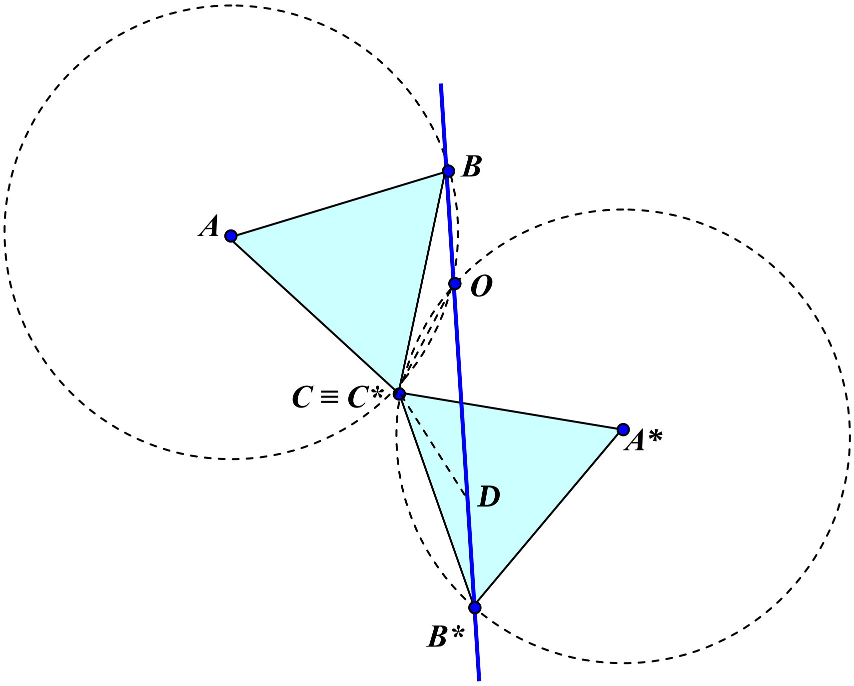

Рис. 3

Проводим окружности радиуса AB с центром в точках A и A^*. Рассмотрим углы $\angle CBO$ и $\angle CB^*O$. Эти углы равны, т. к. они вписаны и операются на одну и ту же хорду CO и окружности равны по построению.

Строим отрезок $B^*D = OB$, где точка $D \in OB^*$. Треугольники CDB^* и COB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно гол $\angle COB = \angle CDB^*$.Треугольник COD – равнобедренный, следовательнро $\angle COD = \angle CDO$. Можем записать: $\angle COB + \angle COD = \angle CDB^* + \angle CDO = 180°$. И, следовательнро, BOB^* - прямая линия. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим равные треугольники, как и в предыдущей задаче, но ориентированые по-разному (Рис. 3).

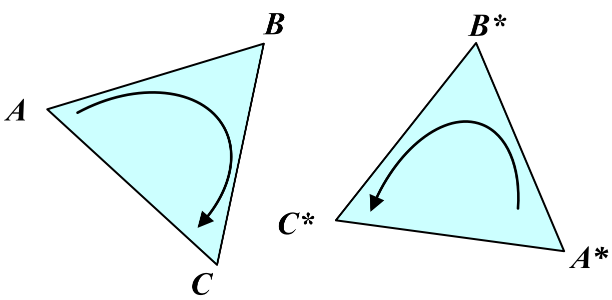

Рис. 3

Т. е. обход вершин идёт по разному. В одном случае по часовой стрелке, в другом – против.

Дана окружность и два равных равносторонних треугольника (Рис. 4).

Как и в предыдущей задаче, радиус окружности равен стороне треугольников и вершины ***A*** и ***A**** свободно перемещаются по данной окружности, а треугольники ***ABC*** и ***A*B*C**** произвольно вращаются вокруг вершин ***A*** и ***A****.

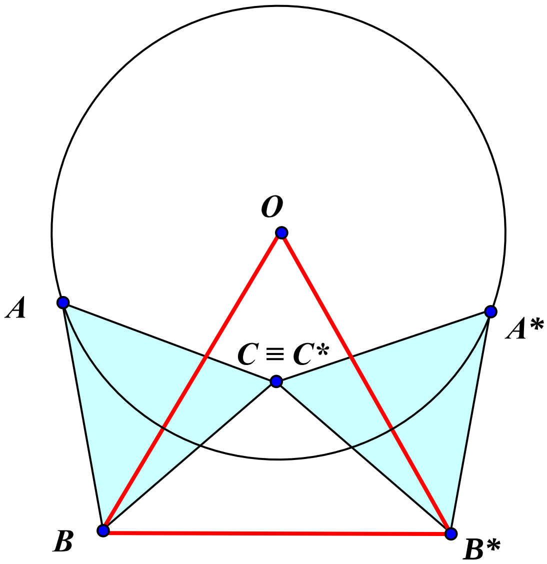

Рис. 4

Задача 2). Если треугольники ***ABC*** и ***A*B*C**** имеют общую вершину ***C ≡ C****, то вершины ***B***, ***B**** и точка ***O*** – центр данной окружности являются вершинами равностороннего треугольника.

Доказательство:

Сделаем дополнительные построения (Рис. 5). Проведём две окружности радиуса ***AB***. Одну с центром в точке ***A***, другую – в точке ***C***.

Докажем, что треугольник ***BOB**** - равносторонний.

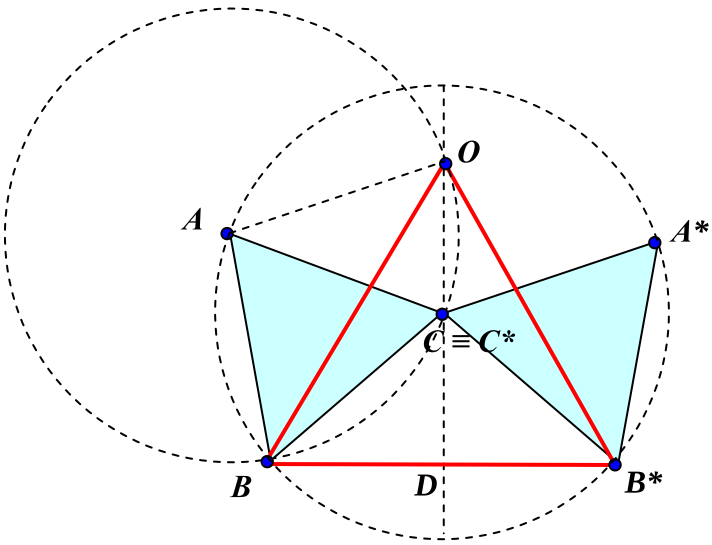

Рис. 5

Сторона ***BO = OB**** в силу симметричности построений. Докажем, что угол ***BAO*** равен углу ***BCB****.

Угол BCD является внешним для угла BCO. Можем записать: $\frac{1}{2}\angle BCB^* = \angle BCD = 180° - (60° + \angle ACO)$. Рассмотрим треугольник ACO. Т. к. этот треугольник равнобедренный, то $\angle ACO = \frac{1}{2}(180° - \angle OAC)$. С учётом этого получаем: $\frac{1}{2}\angle BCB^* = 120° - \frac{1}{2}(180° - \angle OAC)$ или $\frac{1}{2}\angle BCB^* = 30° + \frac{1}{2}\angle OAC$. $\angle OAC = \angle OAB - 60°$. Подставим в последнее выражение: $\frac{1}{2}\angle BCB^* = 30° + \frac{1}{2}(\angle OAB - 60°)$. Откуда получаем: $\angle BCB^* = \angle OAB$. Т. к. углы равны, то они операются на равные хорды. Следовательно $BO = BB^*$ и, следовательно треугольник BOB^* - равносторонний.

Что и требовалось доказать.

Заинтересованному читателю для самостоятельных исследований оставляем задачу: найти чему равна максимально возможная длина стороны BO.