Франц Герман

Почти забытая теорема

franz.h-n@yandex.ru

Известный математик древности Папп Александрийский жил примерно в III веке нашей эры.

Почти все упоминания в интернете о Паппе связаны с известной теоремой Паппа:

Теорема: Если вершины шестиугольника расположены на двух произвольных прямых, то точки пересечения противоположных сторон данного шестиугольника лежат на одной прямой.

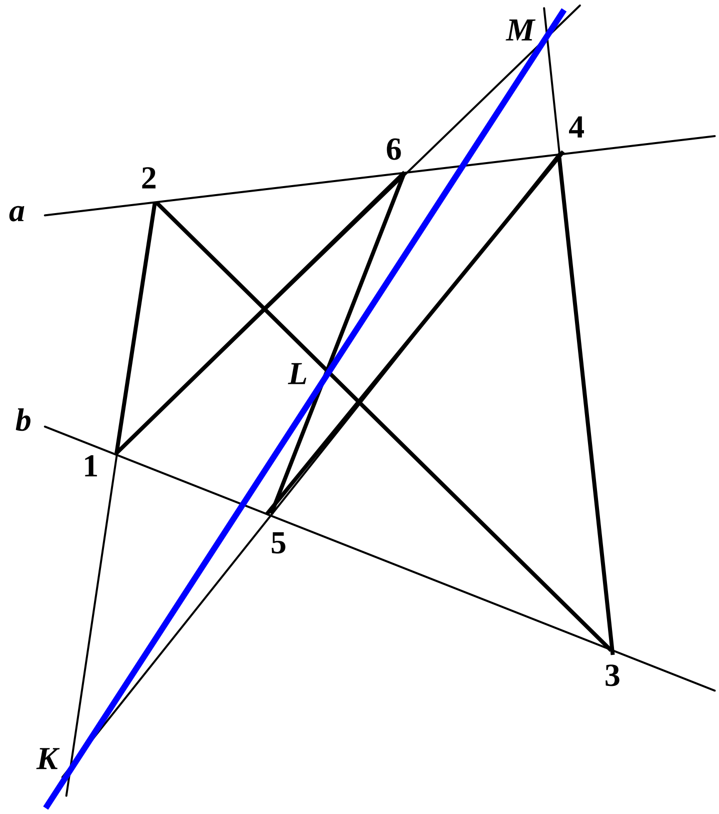

Рис. 1

Пусть даны две произвольные прямые: ***a*** и ***b***. Вершины шестиугольника **1, 2, 3, 4, 5, 6** лежат на данных прямых. Тогда, по теореме Паппа точки пересечения противоположных сторон $\boldsymbol{K \equiv 12 \cap 45}$, $\boldsymbol{L \equiv 23 \cap 56}$ и $\boldsymbol{M \equiv 34 \cap 61}$ лежат на одной прямой.

Более 1200 лет спустя обобщение этой теоремы открыл Паскаль. Теорема Паппа-Паскаля является одной из основных теорем проективной геометрии и звучит следующим образом:

Теорема: Если шестиугольник вписан в произвольную конику, то точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой (Рис. 2)

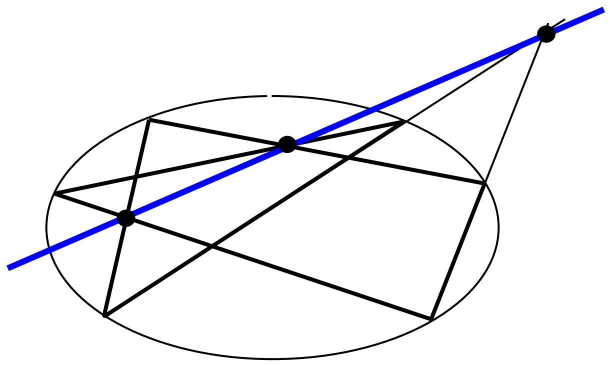

Рис. 2

Папп Александрийский является автором многих математических открытий. Его авторству принадлежит и теорема о сумме площадей параллелограммов, построенных на сторонах произвольного треугольника, (обобщение теоремы Пифагора), как нам кажется, незаслуженно забытая авторами интернетовских сайтов.

Теорема: Если на сторонах AB и BC произвольного треугольника ABC построены произвольные параллелограммы $ABED$ и $BCFG$ соответственно, то сумма их площадей равна площади параллелограмма $ACKL$, где сторона CK равна и параллельна отрезку BH, а $H \equiv DE \cap GF$ (Рис. 3).

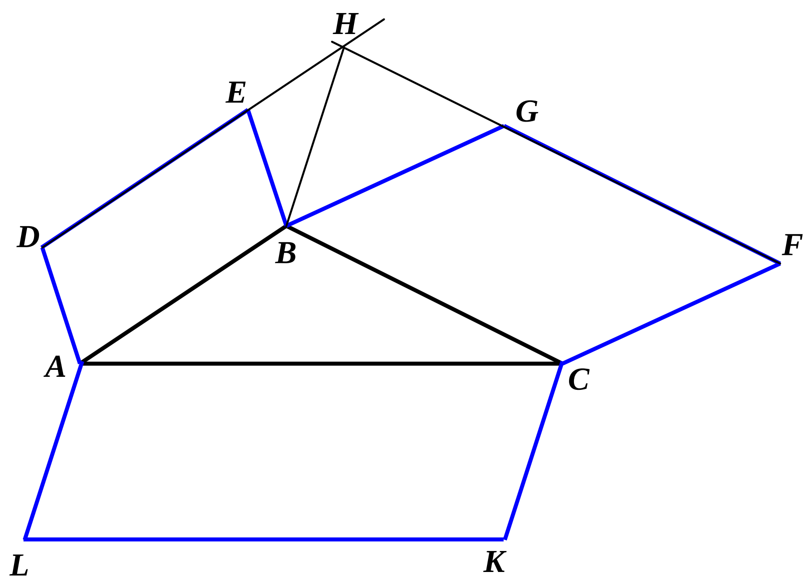

Рис. 3

Доказательство:

Перерисуем Рис. 3 следующим образом (Рис. 4). Здесь прямая EBG параллельна прямой $DACF$. При таком построении площади данных параллелограммов не изменятся. Из точки H опустим перпендикуляр на сторону AC.

Введём обозначения: $NM = h$ – высота данного треугольника ABC, S_1 - площадь параллелограмма $ABED$, S_2 - площадь параллелограмма $BCFG$, S_3 - площадь параллелограмма $ACKL$.

Тогда

$$S_1 + S_2 = S_{DHF} - S_{EHF} - S_{ABC} \qquad (1)$$

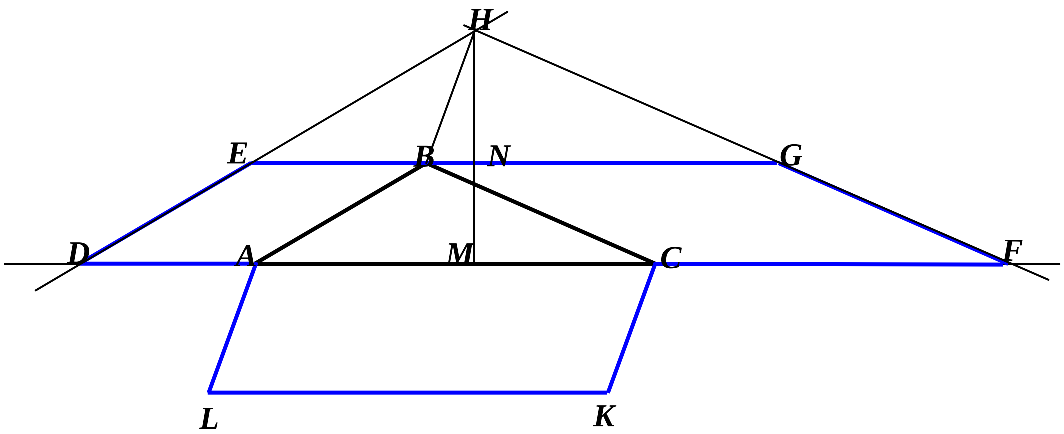

Рис. 4

Раскрыв выражение (1) с использованием формулы, для вычисления площади треугольника, получаем:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}h\cdot(AD + CF) + \frac{1}{2}NH\cdot AC = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) + \frac{1}{2}NH\cdot AC \qquad (2)$$

В силу того, что сторона CK равна и параллельна отрезку BH, NH будет являться высотой параллелограмма, построенного на стороне AC. Таким образом, выражение (2) примет вид:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) + \frac{1}{2}S_3 \text{ или}$$

$$S_1 + S_2 = S_3$$

Что и требовалось доказать.

Следствие теоремы Паппа (Теорема Пифагора).

Пусть треугольник ABC – прямоугольный, а на его катетах AB и BC построены квадраты. Сделаем построения, соответствующие теореме Паппа (Рис. 5).

Очевидно, что и на гипотенузе будет построен квадрат. Т. е. в силу теоремы Паппа данное следствие можно сформулировать следующим образом: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Т. е. получаем теорему Пифагора, как частный случай теоремы Паппа.

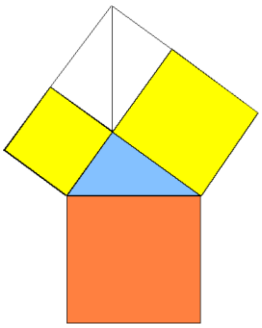

Рис. 5