Франц Герман

От ошибки Гильберта к исчислению сфер

(franz.h-n@yandex.ru)

Если посмотреть на полках отдела геометрии библиотеки Дрезденского Университета, то можно с уверенностью сказать, что книги первой трети XX столетия будут на 90 процентов посвящены различным вопросам проективной геометрии.

Сейчас интерес к проективной геометрии сильно поутих, а кое-кто из учёных считают, что вопросы проективной геометрии надо относить уже к вопросам истории науки. Однако, новые красивые теоремы проективной геометрии продолжают открываться.

Занимаясь изучением проективной геометрии можно отметить, что проективные простанства «представляют собой самые простые после сферы компактные многообразия» ([1], стр. 113). Возможно, именно в силу этого, проективная плоскость допускает множество возможностей для построения её моделей, с помощью которых можно успешно изучать свойства самой проективной плоскости.

Среди них можно выделить аналитическую модель проективной плоскости Д. Гильберта ([2], стр. 338)

Гильберт строил свою модель, взяв за основу одну из топологических моделей. А именно, - единичную сферу, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки.

Уравнение такой сферы он рассмотрел в трёхмерном евклидовом пространстве, где в качестве координат выступают некие параметры.

$$\boldsymbol{u^2 + w^2 + v^2 = 1} \qquad (1)$$

Далее Гильберт задаёт условия для отождествления диаметрально противоположных точек в виде параметрических (от тех же параметров $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{v}$) функций координат $\boldsymbol{x_i}$ евклидова пространства четырёх измерений (меньше чем в пространство четырёх измерений невозможно «погрузить» проективную плоскость, чтобы не было самопересечений, здесь $\boldsymbol{i}$ пробегает значения от 1 до 4). Потом Гильберт доказывает корректность выбранных функций. А потом выводит два уравнения гиперповерхностей $\boldsymbol{F_1 = F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}$ и $\boldsymbol{F_2 = F_2(x_2, x_3, x_4)}$, пересечением которых и является аналитическое выражение для модели проективной плоскости в четырёхмерном евклидовом пространстве.

На этом глава в книге [2] заканчивается, что в своё время меня очень удивило. Почему?

Гильберт получил аналитическое выражение для модели проективной плоскости, почему бы с ним не поработать, почему бы его не поисследовать? Мы имеем «живые» уравнения. Задавая $\boldsymbol{x_i = 0}$ для какой-то координаты четырёхмерного пространства в уравнениях Гильберта $\boldsymbol{F_1 = F_1(x_i)}$ и $\boldsymbol{F_2 = F_2(x_i)}$, мы получаем «след» от проективной плоскости в нашем родном евклидовом трёхмерном пространстве. Что мы и проделали.

«След» оказался в виде нулевой точки, т. е. точки с координатами (0, 0, 0). В другом случае - в виде прямой $\boldsymbol{x_3 = x_4}$. И в третьем случае - в виде дуги полуокружности. Т. е. «след» был либо точечный, либо плоский (в плоскости) и несиметричный по отношению к координатной системе. Словом, ничего интересного.

Видимо поэтому, Гильберт и не привёл в этой главе каких-либо исследований своих уравнений. Сделали мы такой вывод и не вспоминали об этой модели лет 25.

Отвлечёмся немного от геометрии и поговорим о физике.

Ещё со времён Эйнштейна существует у физиков мечта – построить такую единую теорию, которая бы объединила все разделы физики и объяснила бы все явления природы.

К этой цели учёные идут с разных направлений. Это и квантовая гравитация, и физика элементарных частиц, и теория вакуума, и теория физических структур. Т. е. подошли к самой границе, за которой физика уже превращается в метафизику. Но оказывается, «пощупать» эту самую границу никак не удаётся. Экспериментальных данных для этого нет, а теория, мягко говоря, буксует. И физики разных направлений сходятся к единому, уже традиционному, мнению – надо обратиться к математике. Т. е. в фундаменте такой физической теории должна лежать фундаментальная математика, а именно - геометрия, но с чертами физических концепций, от которых физике уже никак не отказаться ни при каких условиях. Физики называют такую геометрию предгеометрией. Мы назовём её временно метагеометрией, чтобы было созвучно с метафизикой.

О чертах метагеометрии говорят известные американские учёные Ч. Мизнер, К. Торн, Дж Уилер ([3], стр. 474), академик Г. И. Шипов ([4], стр. 207), профессор МГУ Ю. С. Владимиров (со ссылкой на академика А. Д. Сахарова) ([5], стр. 334, 342, 418). Что же это за черты такие.

В такой метагеометрии должно быть:

1. Естественным образом задаваться заряд электрона, т. е. как-то должно быть выделено значение –1 (минус единица, о единицах измерения в геометрии говорить абсурдно). Отказаться от заряда электрона физика никогда и ни при каких условиях не сможет.

2. Спин электрона. Т. е. как-то должно проявляться в этой метагеометрии число $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

3. Такая метагеометрия должна быть свободна от метрики. Т. е. - невозможность вычислить расстояние.

4. Но вместе с этим всё-таки должна определяться «слабая» метрика в точке. Т. е. каждая точка кроме своих координат должна ещё определять по какому-то закону и некое число, которое можно было бы уникально связать с данной точкой.

5. Время не должно носить координатный (направленный) характер, а должно выступать в виде некоторого параметра. Т. е. понятие свободного параметра должно естественно присутствовать в такой метагеометрии.

Мы добавим ещё и 6-ой пункт.

6. Такая метагеометрия должна быть фундаментом, первоосновой для других геометрий. Думаю, физики не будут возражать против этого пункта.

Ну что же, да простят нас физики, которые сами же поставили такие условия, надо быть слепым, чтобы не увидеть, что все эти черты присущи проективной геометрии. С этого момента мы упраздняем терминологию – «метагеометрия» или «предгеометрия» и называем вещи своими именами – проективная геометрия.

Рассмотрим каждый пункт. Мы постараемся здесь дать конкретное объяснение о таком категорическом нашем заключении, чтобы у читателя не возникло ощущения, что это самое заключение «притянуто за уши».

Пункт 1. Откуда появляется в проективной геометрии число –1.

Проективная геометрия очень свободна от инвариантов. Единственный инвариант проективной геометрии – это сложное отношение четырёх точек на прямой.

Координатный репер на проективной плоскости задаётся четырьмя произвольными точками. Проще говоря, - произвольным четырёхугольником $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, E}$ (Рис. 1).

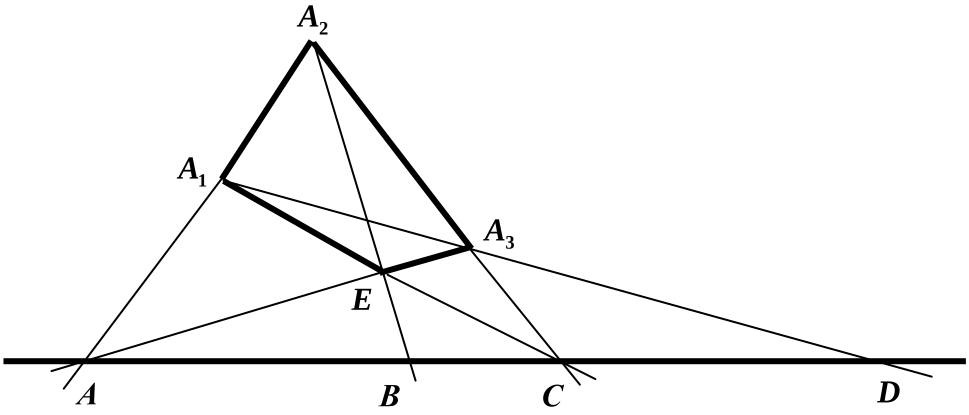

Рис. 1

Каким бы образом мы не задавали наш четырёхугольник, сложное, инвариантное отношение четырёх точек $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ всегда будет иметь значение –1 (наш мир держится на электронах, а проективная геометрия - на сложном отношении). Такая четвёрка точек в проективной геометрии называется гармонической. Как вычисляется такое отношение можно найти в любой книге по геометрии, где есть раздел, посвящённый проективной геометрии.

Пункт 2. Доказано, что любая прямая на проективной плоскости гомеоморфна осевой линии классического (т. е., грубо говоря, склееннного из прямоугольной полоски бумаги) листа Мёбиуса. А это значит, что такая прямая имеет кручение. И значение этого кручения равно $\mathbf{\frac{1}{2}}$. А мы знаем, что понятие спина електрона связано как раз с кручением равным $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Пункт 3. Проективная геометрия – именно та геометрия, где отсутствует понятие метрики (как инварианта расстояния). Неметрическая геометрия.

Пункт 4. Здесь мы должны немного порассуждать, т. к. «слабая» метрика – понятие неконкретное и что за ним может скрываться не понятно. Будем ориентироваться на классическую уже физику пространства-времени.

У нас есть материальная точка $\boldsymbol{M}$. С этой точкой можно связать её мировую линию (Рис. 2).

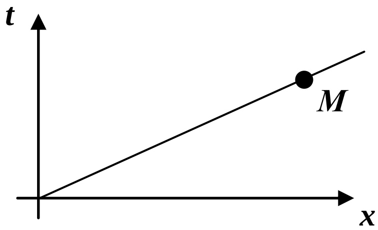

Рис. 2

На проективной плоскости тоже можно взять точку, но как построить её мировую линию (начало координат проективного репера не принадлежит проективной плоскости)?

Но особая точка на проективной плоскости всё-таки есть. Это единичная точка или точка нормирования $\boldsymbol{E(1:1:1)}$. Будем считать, что мировая линия точки $\boldsymbol{M}$ проходит именно через эту точку (Рис. 3).

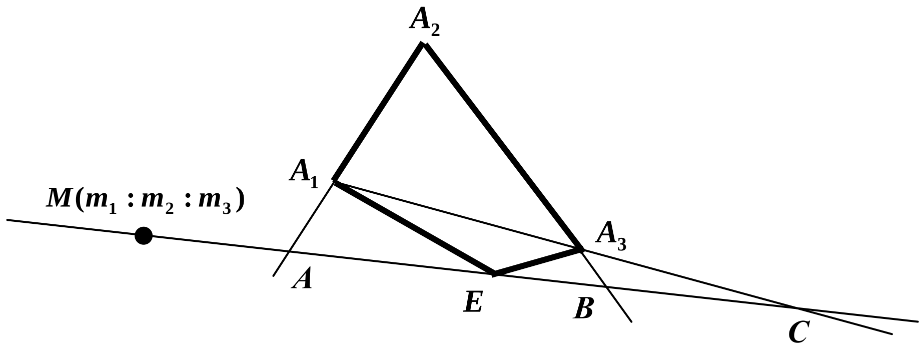

Рис. 3

Тогда прямая $\boldsymbol{ME}$ пересечёт прямые координатного репера $\boldsymbol{A_i A_j}$ в точках $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Мы можем вычислить координаты этих точек, а затем вычислить сложное отношение точек $\boldsymbol{M}$**,** $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Получим конкрктное число $\boldsymbol{m}$, связанное именно с точкой $\boldsymbol{M}$. Почему бы не назвать это число «слабой метрикой» в этой точке. Формула, по которой можно вычислить слабую метрику очень проста (мы не показываем здесь её вывод).

$$\boldsymbol{m = \frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3}} \tag{2}$$

Естественно, что на проективной плоскости может быть две $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ точки (вообще говоря, бесконечно много точек), которые имеют одинаковую «слабую метрику». Т. е. можем записать:

$$\boldsymbol{\frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} = \frac{n_1 - n_3}{n_2 - n_3}}.$$

Не правдо ли, это выражение внешне сильно напоминает уравнение прямой, проходящей через две точки $\boldsymbol{A(x_1, y_1)}$ и $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$ на эвклидовой плоскости:

$$\boldsymbol{\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}}$$

Будем самокритичны. Мы думаем, что это просто лишь красивое совпадение. Но, может быть, стоит и поискать общие корни такого совпадения?

Итак, мы показали одну из возможностей определения «слабой метрики» в точке по координатам этой точки, используя метод вычисления всё того же единственного инварианта проективной геометрии, т. е. – сложного отношения.

Пункт 5. Здесь всё очень просто. Проективная геометрия – это в каком-то смысле параметрическая геометрия. Точки с координатами $\boldsymbol{(x_1 : x_2 : x_3)}$ и

$(\boldsymbol{t\cdot x_1 : t\cdot x_2 : t\cdot x_3})$ определяют одну и ту же точку. Число $\boldsymbol{t}$ может принимать любые значения, кроме нуля (нулевой точки нет на проективной плоскости). Почему бы не предположить, что такой параметр будет отвечать за время в будущей физической теории? Мы и обозначили его специально через букву $\boldsymbol{t}$.

Пункт 6. Кто-то может сказать, что этот пункт специально притянут нами, чтобы сделать акцент на нашей любимой проективной геометрии. Как хотите, но факты упрямая вещь. Дело в том, что и геометрия Евклида, и Лобачевского, и Римана, и Галилея, и Минковского, и различные афинные геометрии, и флаговая, и вообще все прочие – это лишь частные случаи проективной геометрии. В своё время это доказал выдающийся английский геометр Артур Кэли [6]. По его же словам: «проективная геометрия – это вся геометрия» ([7], стр. 208)

Для нас нет сомнений в том, что столь фундаментальная геометрия обязательно должна играть определяющую роль в естественных науках. Кстати, надо отметить, что проективная геометрия играет первостепенную роль во многих классических разделах математики и, кроме того, «проективные пространства возникают естественным образом также в квантовой механике» ([1], стр. 113-114).

И вот здесь мы снова (через 25 лет) возвращаемся к аналитической модели проективной плоскости Давида Гильберта. Если предположить, что проективная геометрия столь фундаментальна, то почему её модель проективной плоскости не даёт никаких интересных результатов в процессе её исследования?

И мы решили самостоятельно пройти всю цепочку рассуждений и выкладок, как это делал Давил Гильберт.

Итак, мы имеем уравнение (1) и параметрические функции координат евклидова пространства четырёх измерений: (Мы немного унифицировали обозначения: $\boldsymbol{x_1 = x;\ x_2 = y;\ x_3 = z;\ x_4 = t}$).

$$\boldsymbol{x_1 = u^2 - v^2;} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x_2 = uv;} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x_3 = uw;} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x_4 = vw.} \tag{6}$$

Теперь находим уравнения для гиперповехностей $\boldsymbol{F_1 = F_1(x_i)}$ и $\boldsymbol{F_2 = F_2(x_i)}$. Получаем:

$$\boldsymbol{F_1 :}\quad \boldsymbol{x_2\left(x_3^2 - x_4^2\right) = x_1 x_3 x_4} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{F_2 :}\quad \boldsymbol{x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 = x_2 x_3 x_4} \tag{8}$$

Сравниваем результаты и видим, что у Гильберта немного не так!

$$\boldsymbol{F_1 :}\quad \boldsymbol{x_2\left(x_3 - x_4\right) = x_1 x_3 x_4}.$$

Квадраты степерей при $\boldsymbol{x_3}$ $\boldsymbol{x_4}$ в уравнении (7) потеряны. Полиграфическая ошибка, опечатка? Смотрю первое издание 1936 года. И там ошибка. Вообще, ошибкой это, конечно, не назовёшь. Это скорее всего лишь досадная описка.

Но как бы там не было, надо вновь, спустя 25 лет, попытаться исследовать «следы» аналитической модели проективной плоскости, задавая по очереди $x_i = 0$.

Снова получаем три «следа». Но те «следы», которые были не симметричны, стали теперь обладать симметрией.

Первым «следом» по-прежнему остаётся нулевая точка с координатами (0, 0, 0).

Второй «след» - это пара прямых:

$$x_3 = \pm\ x_4\,. \tag{9}$$

Третий «след» представляет собой окружность (две половинки одной окружности):

$$2x_2^2 \mp x_2 + x_4^2 = 0\,. \tag{10}$$

Сделав подстановку

$$x_2 = \frac{Y}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{4}\,, \tag{11}$$

получаем выражение окружности в каноническом виде: (знаки в (10) и (11) должны быть согласованы).

$$Y^2 + x_4^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{12}$$

Т. е. третьим «следом» является окружность с радиусом $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Что представляют собой такие «следы» с точки зрения физики (если они, конечно, вообще имеют отношение к физике) сказать трудно. Мы можем только пофантазировать и построить какие-то аналогии.

Первое, что сразу приходит на ум – это то, что «след» в виде окружности может быть в свою очередь «следом» компактификаций (свёрнутых размерностей пространства) [8], [9].

Величина же $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ довольно популярна в современной физике. Достаточно посмотреть, например, теории пространства-времени в спинорном изложении [10]. А квадрат этой величины, т. е. значение $\dfrac{1}{2}$, так часто встречается в физике пространства-времени, что об этом подробно и говорить не приходится [11]. Кроме того мы помним, что спин электрона как раз равен $\dfrac{1}{2}$.

Что же касается второго «следа» (Рис. 4), то такой след может быть «следом» некоторого конуса (мы дорисовали окружности в виде эллипсов для наглядности конусов).

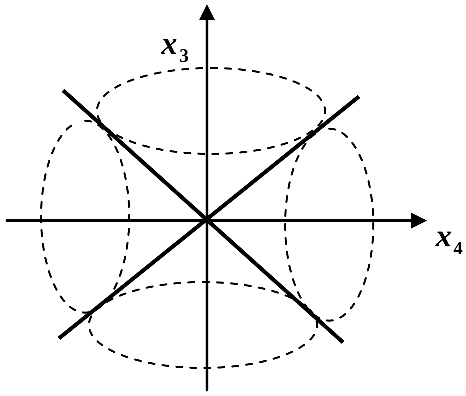

Рис. 4

Где же в физике мы сталкиваемся с конусами.

Не вдаваясь в большие подробности, сразу можно привести несколько известных примеров проявления «конусности» в практической и теретической физике. В первую очередь можно назвать эффект Черенкова ([13], стр. 242).

В теории пространства-времени существует понятие светового конуса [11], [12]. Кстати, там же рассматриваются и временны`е сечения таких конусов в виде окружностей, лежащих, в ортогональной плоскости.

По мере своего развития, физическая наука включает в арсенал своих методов исследования всё более сложные и абстрактные математические объекты. Сначала это были скаляры и векторы. Затем в ход пошли матрицы, тензоры, спиноры. Причём последующие объекты заключают в себе предыдущие, как частные случаи. Например из спинора можно получить тензор и вектор, но не наоборот. Сейчас на переднем крае физикам понадобились струны. Струна может быть стянута в точку, а может быть и вытянута до бесконечности и стать объектом, гомеоморфным прямой линии (теория струн находится сегодня в стадии становления). Если следовать такому усложнению, то может случиться, что на очередном витке развития физикам понадобится математический аппарат, чтобы манипулировать целыми проективными плоскостями. Вот здесь бы как раз и пригодилась модель Гильберта. Так как сфера с отождествлёнными диаметрально противоположными точками – суть проективная плоскость. Конечно же, в этом случае необходимо будет разработать новый математический аппарат, чтобы можно было манипулировать такими сферами. Например складывать их, перемножать, находить пересечения и обединения, дифференцировать... Может быть возникнет необходимость построения каких-то новых математических операций в виде расширения и сжатия сферы... В принципе, для этого всё есть. Есть аналитические уравнения в координатах и параметрические уравнения. Одна сфера от другой должна отличаться неким параметром. На эту роль, естественно, просится радиус сферы (Гильберт работал с единичной сферой). Вводя значение радиуса, третий «след» сферы наверняка получит некоторое обобщение. Вообще говоря, сфера не чужда физике. Например, фронт гравитационной волны является сферой. Со сферой связаны исследования электрического поля точечного заряда (эквипотенциальные поверхности для точечного заряда являются сферами).

Хочу заметить, что спинор - довольно экзотический математический объект. Определяется он парой комплексных чисел (ξ_1, ξ_2) и при повороте координатной системы на 360 градусов переходит в диаметрально противоположный спинор $(-\xi_1, -\xi_2)$. Именно это свойство спиноров и привлекло внимание физиков. Что касается нашей сферы, то здесь вращать систему координат вовсе не требуется. Диаметрально противоположные точки уже отождествены.

Мы думаем, что даже если физиков и не заинтересует проективная геометрия. Построение операционного исчисления сфер уже сама по себе, с точки зрения математики, очень интересная задача.

Литература:

[1] М. Берже, «Геометрия», Т. 1, М., «Мир», 1984

[2] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М., «Наука», 1981

[3] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер, «Гравитация», Т. 3, М., «Мир», 1977

[4] Г. И. Шипов, «Теория физического вакуума», М., НТ-центр, 1993

[5] Ю. С. Владимиров, «Метафизика», М., «Бином», 2002

[6] Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин, «От проективной геометрии – к неевклидовой», М., «Просвещение», 1979

[7] Ф. Клейн, «Элементарная математика с точки зрения высшей», Т. 2, М., «Наука», 1987

[8] Ю. С. Владимиров, «Пространство-время: явные и скрытые размерности», М., «Наука», 1989

[8] П. Девис, «Суперсила. Поиски единой теории природы», М., «Мир», 1989

[10] Р. Пенроуз, В. Риндлер, «Спиноры и пространство-время», М., «Мир», 1987

[11] С. Хокинг, Дж. Эллис, «Крупномасштабная структура пространства-времени», М., «Мир», 1977

[12] У. Бёрке, «Пространство-время, геометрия, космология», М., «Мир», 1985

[13] И. В. Савельев, «курс общей физики», Т. 3, М., «Наука», 1971