Франц Герман

Формула Эйлера и топология полиэдров

franz.h-n@yandex.ru

Понятие диэдра было введено Феликсом Клейном в его удивительном исследовании «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени». Наверное, о том, что такое диэдр лучше всего сказал сам Ф. Клейн. «На самом деле его (*правильный* $\boldsymbol{n}$*-угольник, Ф. Г.*) также можно рассматривать как правильный многогранник – *диэдр*, две грани которого слиты вместе. В отличие от более привычных нам тел этот многогранник имеет нулевой объём. Если перенести диэдр с помощью центральной проекции на поверхность описанной сферы, мы получим $\boldsymbol{n}$ равноотстоящих точек на большом круге (который можно назвать экватором), соответствующих вершинам диэдра, и $\boldsymbol{n}$ дуг, на которые экватор делится этими точками. Две полусферы, ограниченные экватором, соответствуют двум граням диэдра, которые тем самым становятся различными». Диэдр с шестью вершинами показан на Рис. 1.

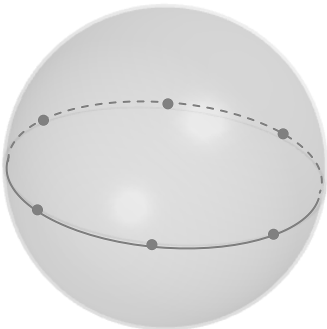

Рис. 1

Дуги, на которые точки (вершины) делят окружность большого круга, будем называть рёбрами диэдра. Очевидно, что любой правильный многогранник можно центрально спроектировать на сферу. Правильным многогранником мы называем Платоновы тела. Для многогранников, спроектированных на сферу, очевидно, справедлива формула Эйлера.

$$\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{2},$$

здесь $\boldsymbol{\Gamma}$ – число граней многогранника, $\boldsymbol{B}$ – число вершин многогранника, $\boldsymbol{P}$ – число рёбер многогранника. Не трудно убедиться, что вормула Эйлера справедлива и для любого диэдра.

Введём в наше исследование понятие степени. Через $\boldsymbol{C_\Gamma}$, $\boldsymbol{C_B}$ и $\boldsymbol{C_P}$ будем обозначать соответственно степень грани, степень вершины и степень ребра. Степень грани – это число рёбер, определяющих эту грань. Степень вершины – это число рёбер, сходящихся в этой вершине. Степень ребра – это число вершин ограничивающих данное ребро. Сразу можно сказать, что $\boldsymbol{C_P = 2}$ вообще для любого многогранника (ребро всегда определено двумя вершинами). Т. к. мы рассматриваем только правильные многогранники, то для каждого многогранника соответствующая степень будет величиной постоянной. Например, для тетраэдра $\boldsymbol{C_\Gamma = 3}$, $\boldsymbol{C_B = 3}$.

Не будем забывать о такой особенности. Для любого многогранника, который можно центрально спроектировать на сферу, всегда справедлива формула Эйлера, но не всегда числам, которые удовлетворяют формуле Эйлера, можно поставить в соответствие многогранник. В этом не трудно убедиться на простом примере. Возьмите $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{3}$, $\boldsymbol{B} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{P} = \mathbf{2}$. Эти значения удовлетворяют формуле Эйлера, однако, очевидно, что полиэдра с такими характеристиками не существует. Т. к. мы рассматриваем только правильные многогранники, центрально проектированные на сферу, то справедливо выражение:

$$C_B \cdot B = C_\Gamma \cdot \Gamma = 2P \tag{1}$$

Формулу Эйлера перепишем таким образом:

$$\Gamma + B - P = C_P. \tag{2}$$

С учётом (1) формула Эйлера может быть записана:

$$\frac{1}{C_\Gamma} + \frac{1}{C_B} - \frac{1}{C_P} = \frac{1}{P}. \tag{3}$$

Как видим формула Эйлера обладает симметрией относительно характеристик правильного многогранника $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{P}$ и обратных величин степеней C_Γ, C_B и C_P этих же характеристик. В этом не трудно убедиться, глядя на формулы (2) и (3). Но мы для нашего исследования будем пользоваться формулами, которые не сложно получить из формулы (3):

$$\Gamma = \frac{4 \cdot C_B}{2 \cdot (C_B + C_\Gamma) - C_B \cdot C_\Gamma}, \tag{4}$$

$$B = \frac{4 \cdot C_\Gamma}{2 \cdot (C_B + C_\Gamma) - C_B \cdot C_\Gamma}. \tag{5}$$

Многогранники на сфере называются сферическими полиэдрами.

Прежде чем мы начнём наше исследование, необходимо более подробно поговорить о том, что мы понимаем под степенью грани. Пусть наша грань имеет вид треугольника (Рис. 2).

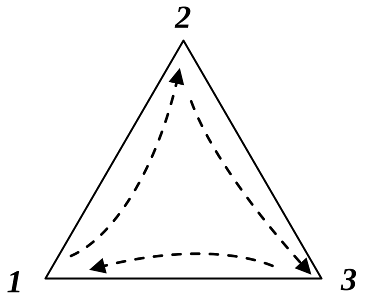

Рис. 2

Будем совершать обход нашей грани от вершины к вершине вдоль рёбер пока не вернёмся в исходную вершину. При этом наш обход должен проходить внутри грани, вдоль ребра, где не было ещё обхода и не пересекать при этом ни вершин, ни рёбер. Чуть позже станет понятно, к чему все эти сложности.

Как уже было сказано, в нашем исследовании мы будем пользоваться формулами (4) и (5). Очевидно, что значение степени (и грани, и вершины) может начинаться с единицы, т. е. $\boldsymbol{C_Г = 1}$, $\boldsymbol{C_В = 1}$. По формулам (4) и (5) находим значения для числа граней и числа вершин. Значение это получилось не целым числом, что не подходит для нашего исследования. При $\boldsymbol{C_Г = 2}$ и $\boldsymbol{C_В = 1}$ получаем $\boldsymbol{Г = 1}$, $\boldsymbol{В = 2}$. Сферический полиэдр с такими характеристиками показан на Рис. 2.

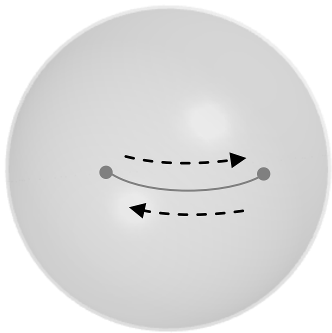

Рис. 2

Действительно, мы имеем у полиэдра одну грань (степени 2, обход грани показан на рисунке), две вершины (степени 1).

Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{C_Г = 1}$ и $\boldsymbol{C_В = 2}$. Получаем диэдр с характеритиками $\boldsymbol{Г = 2}$, $\boldsymbol{В = 1}$.

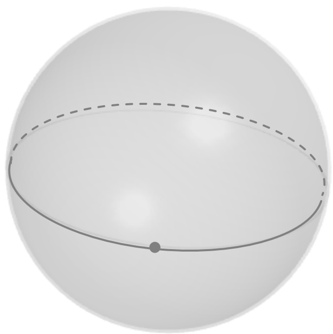

Рис. 3

Сведём в таблицу результаты наших вычислений.

$\boldsymbol{C_В}$	**1**	**2**	**2**	**…**	**2**	**…**	***k***	**3**	**3**	**4**	**3**	**5**
$\boldsymbol{C_Г}$	**2**	**1**	**2**	**…**	***k***	**…**	**2**	**3**	**4**	**3**	**5**	**3**
В	**2**	**1**	**2**	**…**	***k***	**…**	**2**	**4**	**8**	**6**	**20**	**12**
Г	**1**	**2**	**2**	**…**	**2**		***k***	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**

Обратите внимание, что последние пять столбцов содержат значения сферических полиэдров, соответствующие многогранникам, которые принято называть Платоновы тела. А вот шестой столбец с конца нашей таблицы имеет характеристики полиэдров, о которых мы пока не говорили. Назовём двойственными диэдрам и дадим имя – например, биэдры. Все они имеют две вершины. И степень каждой грани тоже равна двум. На Рис. 4 показан пример такого биэдра третьего порядка.

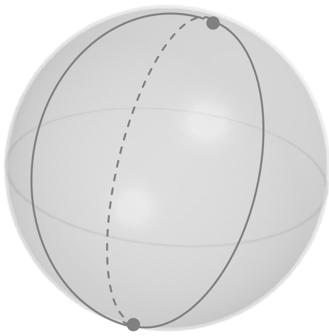

Рис. 4

Теперь продолжим наше исследование, перенеся все рассуждения со сферы на тор. Известно, что формула Эйлера для многогранников, топологически изоморфных тору, имеет вид:

$$\boldsymbol{\Gamma + B - P = 0}. \tag{6}$$

Соотношение (1) справедливо не только для сферы, но и для тора. Поэтому формула Эйлера (6) может быть представлена таким образом:

$$\boldsymbol{2 \cdot (C_B + C_\Gamma) - C_B \cdot C_\Gamma = 0} \tag{7}$$

Не трудно заметить, что существует только три шения уравнения (7). Напомним, что нас удовлетворяют только целые решения. Итак, **1)** $\boldsymbol{C_\Gamma = 4}$, $\boldsymbol{C_B = 4}$; **2)** $\boldsymbol{C_\Gamma = 3}$, $\boldsymbol{C_B = 6}$; **3)** $\boldsymbol{C_\Gamma = 6}$, $\boldsymbol{C_B = 3}$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1). При $\boldsymbol{C_\Gamma = C_B = 4}$ и с учётом формулы (1) получаем, $\boldsymbol{\Gamma = B = k}$, где $\boldsymbol{k \in N}$. ***Пример:*** $\boldsymbol{k = 1}$. В этом случае мы имеем тороидальный полиэдр, у которого одна вершина и одна грань, причём степень вершины и степень грани равна четырём.

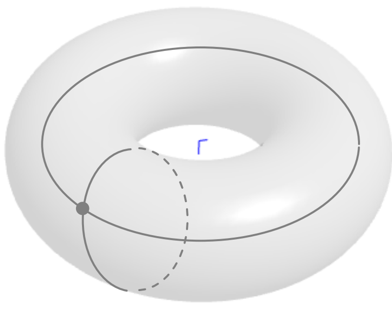

Рис. 5

На Рис. 5 хорошо видно, что степень единственной вершины действительно равна четырём. А вот степень грани просматривается как-то не очень ясно. Чтобы разобраться с этим вопросом сделаем развёртку нашего тора. Сначала разрежем тор вдоль малого ребра, т. е вдоль окружности, которая огибает тор поперёк. После такого разреза тор можно разогнуть и превратить его в кусок цилиндра. После этого сделаем второй разрез и развернём цилиндр на плоскость. Получим развёртку тора в виде прямоугольника.

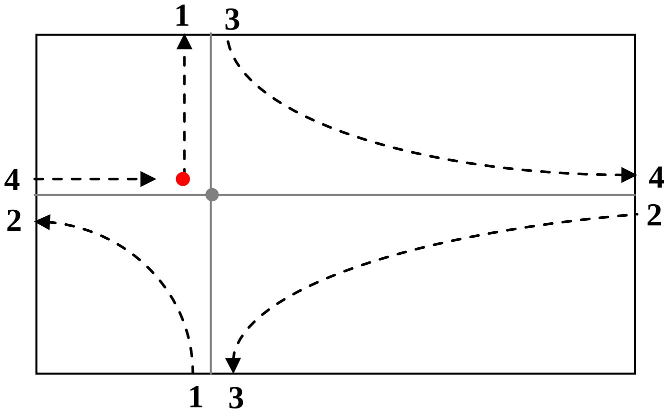

Рис. 6

Теперь, чтобы вновь получить тор, необходимо отождествить противоположные стороны прямоугольника. Начнём обход грани. Пусть начало обхода будет в красной точке в левом верхнем углу прямоугольника. Одинаковыми цифрами обозначена одна и та же точка на развёртке. Как видим из рисунка, обход нашей грани по развёртке состоит из четырёх частей. В результате обхода мы вернулись в исходную красную точку. Следовательно степень грани дествительно равна четырём. Используя метод разворачивания тора на плоскость, не трудно самостоятельно рассмотреть и другие примеры.

2). $\boldsymbol{C_Г = 3}$, $\boldsymbol{C_В = 6}$. В этом случае, согласно выражению (1), между числом вершин и граней тороидального полиэдра будет иметь место соотношение $\boldsymbol{Г = 2В}$.
Пример: $\boldsymbol{В = 3}$, $\boldsymbol{Г = 6}$.

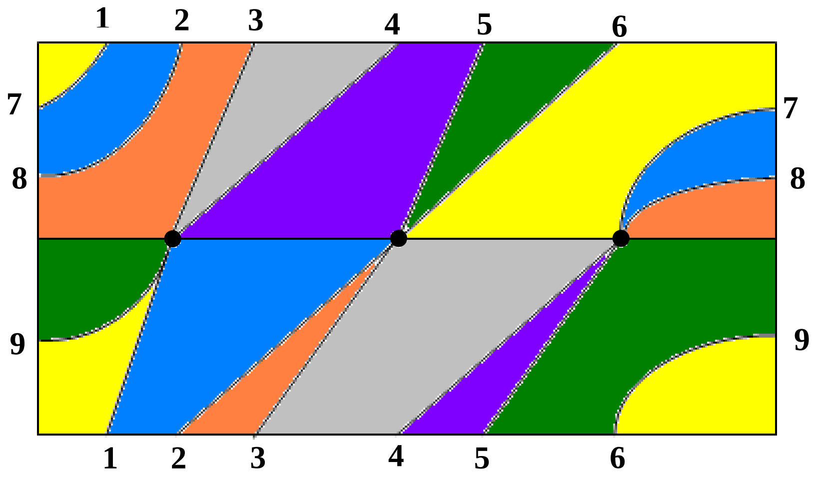

Рис. 7

На рисунке 7 показана развёртка полученного тороидального полиэдра. Каждая из шести граней- изоморфна треугольнику и показана своим цветом. Мы предполагаем, что для данного случая – это наименьший из возможных полиэдров.

3). $\boldsymbol{C_Г = 6}$, $\boldsymbol{C_В = 3}$. Здесь между числом вершин и граней тороидального полиэдра будет иметь место соотношение $\boldsymbol{2Г = В}$. В минимальном случае мы будем иметь одну грань и две вершины (Рис. 8).

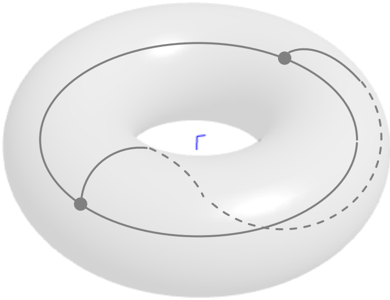

Рис. 8

Чтобы убедиться, что наша грань действительно шестого порядка, сделаем развёртку данного полиэдра.

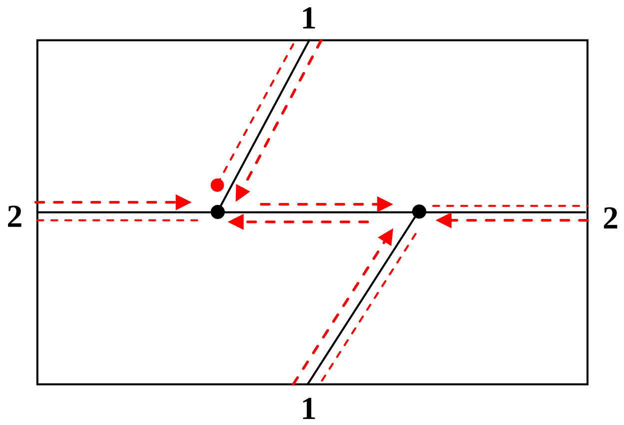

Рис. 9

Начало обхода грани показано на развёртке красной точкой. А завершение обхода ребра отмечено красной стрелкой. После возвращения в исходную точку мы получаем шесть стрелок, что и соответствует степени грани.

Рассмотрим ещё один пример для данного случая. Возьмём три грани степени шесть и шесть вершин степени три. Т. е. тороидальный полиедр, двойственный полиэдру случая 2).

Покажем его развёртку.

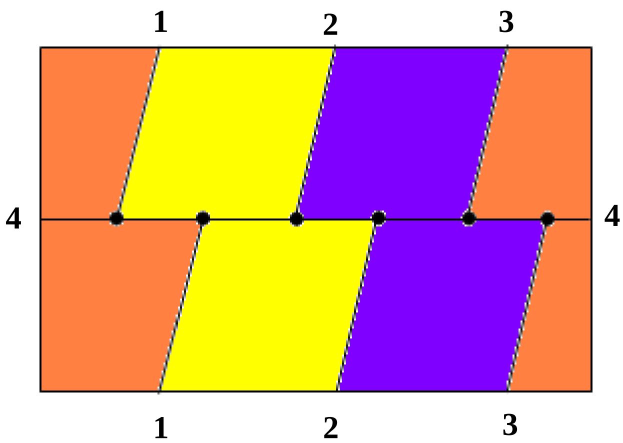

Рис. 10