**Франц Герман**
franz.h-n@yandex.ru

# Принцип неопределённости Гейзенберга и дифференциальная геометрия.

*Открытое Гейзенбергом соотношение неопределённостей утверждает, что координату и скорость частицы определить с одинаковой точностью невозможно и что точно можно определить только одну из этих двух величин – координату или скорость.*
(А. Эйнштейн)

Как известно [2] в квантовой механике отсутствует понятие траектории частицы. Однако существует понятие и координваты и скорости, как отношения этой координаты ко времени.

Автора данной заметки всегда занимал вопрос, а существует ли в математике некий аналог принципу неопределённости Гейзенберга. И где этот аналог искать? А искать его надо там, где речь может идти о координатах и скоростях. И хотя понятие траектории в квантовой механике и отсутствует отталкиваться надо от движения материальной точки. Траекторией точки может быть пространственная кривая, которая описывается в дифференциальной геометрии формулами Френе [3].

Рассмотрим сопровождающий [11] базис (Рис. 1) для пространства трёх измерений (многомерный случай можно найти, например в [4]).

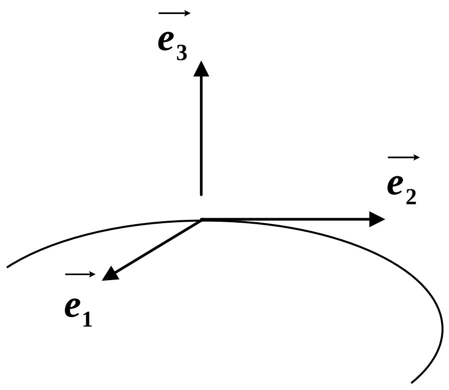


Рис. 1

Здесь $\vec{e}_1$ - вектор главной нормали кривой [7], $\vec{e}_2$ - касательный вектор кривой и $\vec{e}_3$ - вектор бинормали. Все три вектора образуют подвижный басис, расположенный в текущей точке кривой. Этому триэдру [6] соответствует система дифференциальных уравнений, которые обычно называют формулами Френе [9].

Каждый вектор можно разложить по координатным векторам системы остчёта: $\overrightarrow{e_n} = ax_1\vec{i} + bx_2\vec{j} + cx_3\vec{k}$. Для упрощения системы Френе сопоставим базисным единичным векторам $\overrightarrow{e_i}$ соответствующие единичные координаты $x_i$. По аналогии с системой Френе получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{ds} = k_1(s)\cdot x_1(s) \\ \dfrac{dx_1}{ds} = -k_1(s)\cdot x_2(s) + k_2(s)\cdot x_3(s) \\ \dfrac{dx_3}{ds} = -k_2(s)\cdot x_1(s) \end{cases} \tag{1}$$

Величины $k_1$ и $k_2$ принято называть кривизной и кручением данной кривой, соответственной.

Сделаем следующие преобразования. Первое уравнение запишем в виде $k_1 = \frac{1}{x_1}\cdot\frac{dx_2}{ds}$, а третье – в виде $k_2 = -\frac{1}{x_1}\cdot\frac{dx_3}{ds}$ и подставим эти равенства во второе уравнение системы (1). После преобразований получим:

$$x_1\frac{dx_1}{ds} + x_2\frac{dx_2}{ds} + x_3\frac{dx_3}{ds} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) будем называть естественным представлением формул Френе для данной кривой.

Заменим естественный параметр на текущий [5], временной: $s = t$. Тогда выражение $\frac{dx_i}{dt} = v$ - естественно назвать скоростью изменения текущей координаты $x_i$.

Переходя к приращениям получаем:

$$\sum \Delta x_i \cdot \Delta v_i = \Delta 0. \tag{3}$$

Можем предположить, что приращение нуля – это некая малая величина, но не ноль. С точки зрения квантовой механики такой предельный переход к макромиру возможен, «... при предельном переходе, отвечающем переходу в область макроскопических явлений, в которой допустимо пренебречь дикскретностью действия в силу малости $h$, а потому можно считать его равным нулю...» ([12], стр. 15). Для одномерного случая выражение (3) естественно переписать следующим образом:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \varepsilon$$

Последнее выражение как раз и есть математическая запись принципа неопределённости Гейзенберга при условии, что малая величина $\varepsilon = \frac{\hbar}{2}$.

Дифференциальное уравнение (2) освобождает нас от упоминания таких понятий как кривизна и кручение, которые характерны для понятия пространственной траектории точки, что позволило нам от понятий дифференциальной геометрии перейти к фундаментальным понятиям квантовой механики.

А может быть величины $k_i$ имеют аналог, некий скрытый квантовомеханический смысл? Как говорит Б. А. Розенфельд, $k_i$ - это мера пространственного отклонения [11]. Поставим на этом точку.

**Литература**

1. А. Эйнштейн, «Собрание научных трудов», Т. III, М., «НАУКА», 1966
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, «Т. III, Квантовая механика», М., «НАУКА», 1974
3. П. К. Рашевский, «Курс дифференциальной геометрии», М., «Издательство технико-теоретической литературы», 1956
4. П. К. Рашевский, «Риманова геометрия и тензорный анализ», М., «НАУКА», 1967
5.Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», М., «НАУКА», 1979
6. Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, «Дифференциальная геометрия», М., «Издательство московского университета», 1990
7. М. М. Постников, «Линейная алгебра и дифференциальная геометрия», М., «НАУКА», 1979
8.Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия, II», М., «Просвещение», 1987
9.А. Д. Алексанлров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «НАУКА», 1990
10. Л. С. Атанасян, Г. Б. Гуревич, «Геометрия, II», М., «Просвещение», 1976
11. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
12. «Принцип соответствия», М., «Наука», 1979