Теоремы о восставленном перпендикуляре

Начнём с теоремы, которая всем известна ещё со школьно скамьи, хотя в школе мы рассматривали её просто как задачу.

***Теорема* 1.**
Перпендикуляр *P*, восставленный на диаметре полуокружности, является средним геометрическим длин отрезков (*a* и *b*), на которые основание перпендикуляра делит диаметр данной полуокружности.

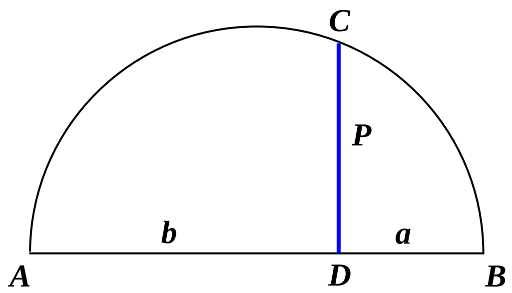

Рис. 1

Из подобных треугольников ***ACD*** и ***DCB*** имеем такое отношение $\frac{a}{P}=\frac{P}{b}$, из которого получаем: $P=\sqrt{ab}$. Вот и всё доказательство.

Гораздо необычнее вторая теорема.

***Теорема* 2.**
Если перпендикуляр *P*, произвольно восставленный на диаметре полуокружности, делит эту полуокружность на две части (Рис. 2)**, в каэждую из которых вписаны окружности радиусов *R* и *r*, то справедливо выражение:** $P^2 - P\left(R+r\right) - Rr = 0$.

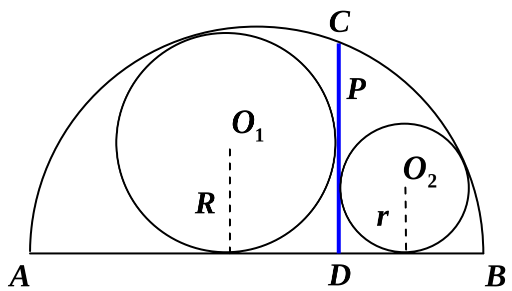

Рис. 2

Доказательство:

Сделаем дополнительные построения. Из точки $\boldsymbol{O}$ – центра данного диаметра $\boldsymbol{d}$ полуокружности - через центры вписанных окружностей проведём радиусы данной полуокружности (Рис. 3).

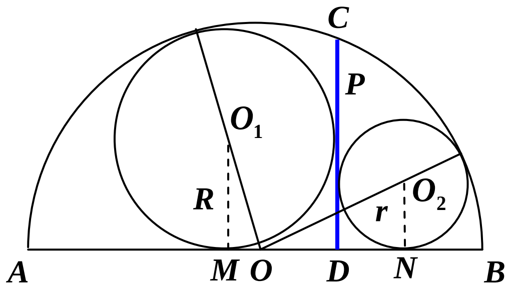

Рис. 3

Тогда можем записать: $\boldsymbol{OD = \frac{d}{2} - a}$, а также - $\boldsymbol{OD = b - \frac{d}{2}}$. Также получаем $\boldsymbol{OM = R - OD = R - \frac{d}{2} + a}$. И из прямоугольного треугольника $\boldsymbol{OO_1M}$ имеем: $\boldsymbol{OO_1^{\,2} = R^2 + OM^2}$. Основываясь на проведённых построениях, можем записать: $\boldsymbol{OO_1 = \frac{d}{2} - R}$. Подставляя полученные данные в квадратное равенство треугольника $\boldsymbol{OO_1M}$, получаем выражение: $\boldsymbol{\left(\frac{d}{2} - R\right)^2 = R^2 + \left(R - \frac{d}{2} + a\right)^2}$. После упрощения последнего выражения получаем: $\boldsymbol{R = \sqrt{ad} - a}$.

Аналогично рассуждая, находим: $\boldsymbol{r = \sqrt{bd} - b}$.

Складывая последние выражения, получаем: $\boldsymbol{R + r = \sqrt{d}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) - d}$. Полученное выражение можно ещё упростить:

$$\boldsymbol{R + r = \sqrt{d\left(d + 2P\right)} - d}. \tag{1}$$

Перемножая выражения для $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$, находим:

$$\boldsymbol{Rr = dP + P^2 - P\sqrt{d\left(d + 2P\right)}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) окончательно получаем:

$$\boldsymbol{P^2 - P\left(R + r\right) - rR = 0}. \tag{3}$$

Теорема доказана.

Квадратные уравнения – довольно частое явление как в математике, так и в естествознании. Например, равноускоренное движение в классической механике имеет вид ([1], стр. 14): $T^2 - T\left(\frac{2V_0}{g}\right) - \frac{2\Delta Z}{g} = 0$. Мы не будем здесь рассматривать аналогичные квадратные уравнения.

Все помнят, что отношение длины диагонали правильного пятиугольника к длине его стороны равно $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033...$ - «золотое сечение»**.** Известно, что и с полуокружностью тоже связано проявление в геометрии «золотого сечения» (Рис. 4).

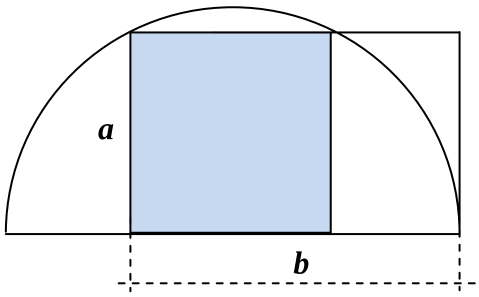

Рис. 4

Если в полуокружность вписан квадрат со стороной a, то отношение $\frac{b}{a} = \varphi$ (Рис. 4).

«Золотое сечение» интересно проявляется и в ***Теореме* 2**.

Пусть отношение $\frac{P}{R} = \varphi$**.** Из уравнения (3) находим: $P = \frac{(R+r) \pm \sqrt{(R+r)^2 + 4Rr}}{2}$. Тогда предполагаемое отношение можно записать так: $\frac{(R+r) + \sqrt{(R+r)^2 + 4Rr}}{2} = \varphi \cdot R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot R$. А после упрощения получаем $\frac{R}{r} = \varphi^2$. Т. о., можем сформултровать *частный случай Теоремы* 2.

Если $\frac{P}{R} = \varphi$ то $\frac{R}{r} = \varphi^2$. Из чего имеем такую зависимость:

$$\boldsymbol{abr = R^3}. \tag{4}$$

Надо заметить, что появление кубических величин в планиметрии крайне редко. В качестве пимера можно привести теорему Мёбиуса ([2], стр. 95).

Если через точку $\boldsymbol{M}$, лежащую внутри треугольника $\boldsymbol{ABC}$, проведены прямые, проходящие через вершины треугольника и пересекающие стороны в точках $\boldsymbol{A^*}$, $\boldsymbol{B^*}$ и $\boldsymbol{C^*}$, то площадь данного треугольника $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет кубическому уравнению:

$$\boldsymbol{S^3 + S^2(p+q+r) - 4pqr = 0}. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ – площади треугольников, отсекаемых отрезками $\boldsymbol{A^*B^*}$, $\boldsymbol{B^*C^*}$ и $\boldsymbol{A^*C^*}$ соответственно.

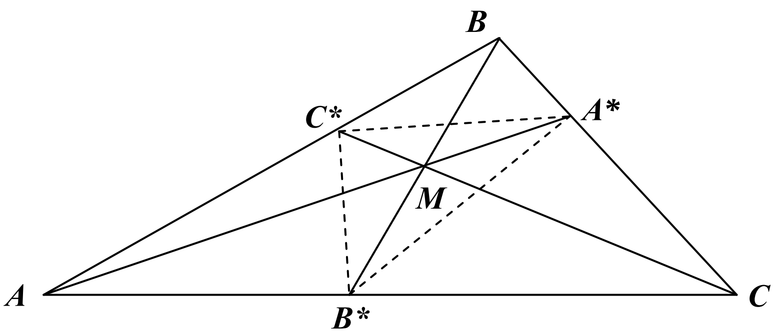

Рис. 5

Не правда ли уравнение (5) очень напоминает уравнение (3). По сути, в некотором смысле – оно является его обобщением при переходе от второй степени к третьей.

Доказательство мы оставляем читателям.

Литература

1. Б. И. Спасский «Физика для философов», Из. МГУ, 1989
2. М. Б. Балк, В. Г. Болтянский «Геометрия масс», М., «Наука», 1987

Ф. Г.