Франц Герман

К вопросу о свёрнутых измерениях

franz.h-n@yandex.ru

Известны были пространства параллельные и перпендикулярные,
пространства с прямым, обратным и ортогональным течением времени,
вероятностные пространства с числом измерений большим и меньшим трёх,
пространства, замкнутые на себя, и пространства, разомкнутые
в реальную бесконечность, и прочие головоломные, представляемые
только математически квази-, псевдо- и эсэкосмосы, которые
простому человеку,- какому-нибудь художнику или артисту,
не приведи бог пригрезиться в час отдыха после плотного обеда.
(А. и Б. Стругацкие)

Вопрос о свёрнутых измерениях наверное уже так знаменит, что находится на слуху не только у профессиналов, но и вообще у всех тех, кто сегодня интересуется естествознанием на самом популярном уровне. Тем не менее, мы всё-таки немного напомним о чём пойдёт речь.

Физика элементарных частиц развивается сегодня в двух направления. Это стандартная модель (СМ) и теория суперструн (ТС).

Теория струн пошла по пути, когда-то созданной пятимерной теории Калуци. Идея была в том, что при помощи дополнительного измерения можно было описать и электромагнитное, и гравитационное взаимодействие, исходя из одного универсального пятимерного метрического тензора.

С другой стороны, физики, которые изучали строение адронов и пытались заглянуть к ним во внутрь, заподозрили, что элементарные частицы могут быть и не точечного вида, а нитевидного. А описывать такие конструкции очень удобно при помощи $\boldsymbol{\beta}$ – функции Эйлера.

В конце концов сложилась десятимерная теория струн (меньше никак не получалось). Одно измерение временное и девять пространственных. Однако повседневный опыт говорит нам, что мы живём в трёх пространственных измерениях и одномерном временном. А куда девать ещё шесть? И, так как, мы их не видим и не ущущаем (имеется в виду, конечно, ощущения посредством экспериментальной физики), значит они (измерения) свёрнуты в маленькие шарики. По рассчётам такой шарик должен иметь диаметр примерно $\mathbf{10^{-32}}$ сантиметра [3].

Другой замкнутой элементарной фигурой является тор. Тор более сложная фигура, чем сфера (для его построения требуется два параметра, а для сферы один). Но именно тор и понадобился физикам для сворачивания дополнительных измерений.

В математике уже давно известны пространства Калаби-Яу. И физики (Э. Виттен и др.) доказали, что именно эти пространства подходят для теории струн. По своей сути – эти пространства являются многомерными торами. И они как раз и нужны на роль свёрнутых пространств. В одномерном случае пространство Калаби-Яу представляет собой тор $\boldsymbol{T^2}$. А такой тор рассматривается как эллиптическая кривая. Эллиптическая же кривая представляет собой множество точек проективной плоскости, удовлетворяющих в общем случае уравнению в однородных координатах:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i^2 x_j = 0 , \tag{1}$$

где $a_{ij} \neq a_{ji}$.

Рассмотрим частный случай, когда $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = 0$, $a_{13} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{32} = -a$, $a_{33} = -b$. Выражение (1) принимает в этом случае вид:

$$x_1^2 x_3 = x_2^3 + a x_2 x_3^2 + b x_3^3$$

Используя преобразования: $Y = \frac{x_1}{x_3}$, $X = \frac{x_2}{x_3}$ можно переписать последнее выражение в декартовых координатах (будем обозначать их заглавными буквами):

$$Y^2 = X^3 + aX + b \tag{2}$$

Уравнение (2) называется простейшим каноническим уравнением эллиптической кривой [1].

Нашей целью не является изучение этих кривых (заинтересованному читателю рекомендуем обратиться например к [1] и [2]). Приводя эти уравнения мы просто хотели показать, что пространства Калаби-Яу не так просты уже в одномерном случае. Трёхмерное пространство Калаби-Яу является как раз тором шести измерений T^6. Пространства эти ещё малоизучены, причём их так много (десятки тысяч), что непонятно, как выбрать подходящее для физики.

Но оказалось, что теория струн не полна. А обобщающая M-теория или теория суперструн (Э. Виттен) функционирует уже в 11-мерном пространстве. Здесь сворачивать надо уже семь дополнительных измерений. Число 7 (11 - 4) - нечётное и пространства Калаби-Яу тут уже не годятся.

Но физики припомнили [3], что математики давненько уже изучают семисферу S^7. Возможно эту фигуру и надо использовать для сворачивания дополнительных 7-ми измерений. Если представить, что наш мир описывается в координатах X_0, X_1, X_2, X_3, где X_0 - координата времени, то уравнение семисферы можно записать таким образом:

$$X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2 + X_{10}^2 = R^2 \tag{3}$$

Уравнение (3) описывает идеальную симметричную сферу (Не путайте со сферой Милнора. У нас всё проще - на интуиции), а физикам такая не нужна. Для физики нужна не идеальная сфера, а некоторый сфероид [3]. Это можно представить уравнением:

$$\sum_{i=4}^{10} \xi_i X_i^2 = R^2,$$

где не все коэффициенты ξ_i равны 1. Опять же много неясностей, какие из коэффициентов не равны 1?

А может быть надо рассматривать семитор?

Известно, что тор характеризуется двумя геометрическими параметрами. Радиусом окружности r, которую надо вращать относительно неподвижной оси (условие построения тора) и расстоянием R, от центра этой окружности до данной оси. Рассмотрим простейший тор, когда $r = R$ и одна из координат X является осью вращения. Тогда уравнение тора, знакомое нам из аналитической геометрии [4], будет иметь вид.

$$\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)^2 - 4R^2\left(X_1^2 + X_2^2\right) = 0, \tag{4}$$

здесь осью вращения тора является X_3. Исходя из общности уравнения (4) осью вращения могут быть и две другие оси. Глядя на данное уравнение можно предположить, как выглядит уравнение семитора в дополнительных координатах:

$$\left(X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2 + X_{10}^2\right)^2 - 4R^2\left(X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2\right) = 0$$

Учитывая, что осью вращения такого семитора может быть любая из дополнительных осей, общее число вариантов для свёртки многократно возрастает.

Пока физики не дают никаких рецептов по поводу компактификаций (свёрнутых измерений) дополнительных 7-ми размерностей. Более того, существуют и теории, построеные на 26-ти измерениях (22 из которых дополнительные) [5], [12]. Эта книга [5] не популярная, но довольно доступная для среднего математика. Сегодня даже самая постейшая теория суперструн должна включать в себя общую теорию относительности, а это возможно только в 26-мерном пространстве [13]. Но рецептов, как сворацивать дополнительные 22 измерения, не видно.

Это всё ещё только один вопрос – **как?** Имеется в виду, как сворачивать. Но есть и второй и не менее важный – **где?**. Имеется в виду, где сворачивать. Физики [3], [6] просто говорят: в каждой точке пространства. Т. е. что же – наше пространство-время квантовано? В основе всего лежит пространственная решётка, в «… каждой точке» которой находится свёрнутый шарик или бублик, или ещё что-нибудь пространственно замкнутое? Конечно есть идеи [7], [8], которые в основу всего кладут пространственные решётки, но они сегодня не популярны. Так как же быть?

Именно поэтому, пытаясь ответить на вопросы: «**как?** и **где?**», мы и решили высказать своё предположение на страницах этой заметки. Скорее всего нашу заметку можно будет назвать математическим эссе. Так как никакими строгими математическими и уж тем более физическими доказательствами мы не располагаем.

В основу нашей модели будут положены несколько аксиом.

Аксиома 1.

Свёрнутые измерения могут быть представлены суммой свёрнутых измерений меньшего порядка (меньшей размерности).

Записывать это будем так:

$$\langle n\rangle = \langle k\rangle + \langle m\rangle = \langle m\rangle + \langle k\rangle = \langle k,m\rangle = \langle m,k\rangle, \text{ где } n = k + m.$$

Подчеркнём, что принцип коммутативности присущ нашим представлениям, напрмер $\langle 1,1,2\rangle = \langle 2,1,1\rangle = \langle 1,2,1\rangle$.

Как вы уже наверное догадались – в скобках указывается число свёрнутых измерений. Возникает вопрос: определить все геометрические элементарные объекты, которые могут претендовать на роль свёрнутых размерностей.

Очевидно, что первой такой элементарной фигурой может быть конечно окружность, которую обозначим через C. Всего же существует **шесть** простейших замкнутых многообразий (обратите на это внимание: *шесть*). Окружность мы уже определили. Далее – это классические сфера $\boldsymbol{S}$ и тор $\boldsymbol{T}$. И наконец – это проективная прямая $\boldsymbol{M}$, бутылка клейна $\boldsymbol{K}$ и проективная плоскость $\boldsymbol{P}$. Все эти объекты замкнуты. Чтобы не сбивать читателя мы отказались от использования здесь классических обозначений, т. к. в дальнейшем будем использовать эти объекты не руководствуясь их геометрической сутью, как в большинстве математической литературы, а – только их связью с размерностью.

Понятие размерности до сих пор точно не определено и его нельзя использовать на примитивно интуитивном уровне. Приведу пример [9]. Казалось бы отрезок прямой и квадрат являются разномощными объектами (у них разное число точек) и мощность может выступать как определение размерности. Но Кантор доказал, что эти объекты как раз равномощны. А значит и размерность это нечто более тонкое. Разговор о тонкостях наших элементарных замкнутых многообразий мы оставим на потом, а сейчас просто покажем с каким числом свёрнутых измерений мы их сопоставляем. Итак, перечислим ещё раз элементарные замкнутые геометрические объекты. Окружность - $\boldsymbol{C}\langle\mathbf{1}\rangle$, сфера $\boldsymbol{S}\langle\mathbf{2}\rangle$, тор - $\boldsymbol{T}\langle\mathbf{2}\rangle$, проективная прямая - $\boldsymbol{M}\langle\mathbf{1}\rangle$, бутылка Клейна - $\boldsymbol{K}\langle\mathbf{2}\rangle$, проективная плоскость - $\boldsymbol{P}\langle\mathbf{3}\rangle$. В скобках указывается число свёрнутых измерений. Тогда в силу Аксиомы 1, можем записать напрмер: $\boldsymbol{P}\langle\mathbf{3}\rangle \equiv \langle\mathbf{3}\rangle = \boldsymbol{M}\langle\mathbf{1{,}1{,}1}\rangle = \boldsymbol{S}\langle\mathbf{2}\rangle + \boldsymbol{M}\langle\mathbf{1}\rangle = \langle\mathbf{2{,}1}\rangle$. Разговор о том почему тот или иной объект связан именно с таким числом свёрнутых измерений тоже оставим на потом.

Итак, пришла пора сформулировать вторую аксиому нашей модели.

Аксиома 2

Элементарные свёрнутые измерения – суть кварки нашего Мироздания.

На сегодняшний день известно 6 кварков и 6 простейших замкнутых многообразий. Собственно на этом совпадении шести кварков и шести простейших замкнутых многообразий и построена наша гипотетическая модель.

Если вдуматься, то Аксиома 2 сразу отвечает на второй вопрос, поставленный в начале нашего эссе. Т. е. вся материя, как вещество, состоит из кварков (адроны: барионы и мезоны). А кварки – это свёрнутые измерения.

Прежде чем определить, какому кварку соответствует какая компактификация, определим, сколько вариантов Мирозданий можно представить в рамках наших аксиом.

Что нам известно. Число измерений – 26 и 22 из них свёрнуты.

$$\mathbf{26} = \mathbf{1} + \mathbf{3} + \langle \mathbf{22} \rangle = \mathbf{1} + \mathbf{3} + \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_k \rangle \tag{5}$$

Чему равно $\boldsymbol{n}_i\langle \boldsymbol{max}\rangle$?

Всякая компактификация в нашей модели должна представлять собой какую-нибудь элементарную частицу, состоящую из кварков. Предположим, что $\boldsymbol{n}\langle \boldsymbol{max}\rangle = \boldsymbol{n}\langle\mathbf{10}\rangle$. Каким минимальным представлением из элементарных компактификаций можно это представить? Очевидно только так: $\boldsymbol{n}\langle\mathbf{10}\rangle = \langle\mathbf{1{,}3{,}3{,}3}\rangle$. Известно [9] однако, что элементарные частицы могут состоять либо из 2-х, либо из 3-х кварков, но не из 4-х. (а у нас: $\langle\mathbf{1{,}3{,}3{,}3}\rangle$) Следовательно, компактификация $\boldsymbol{n}\langle\mathbf{10}\rangle$ не подходит. Таким образом $\boldsymbol{n}\langle \boldsymbol{max}\rangle = \boldsymbol{n}\langle\mathbf{9}\rangle$. Понятно, что $\boldsymbol{n}\langle \boldsymbol{min}\rangle = \boldsymbol{n}\langle\mathbf{4}\rangle$, т. к. $\boldsymbol{n}\langle\mathbf{3}\rangle$ - это уже элементарная компактификация, а по нашей модели – кварк.

Т. о. первая формула Мироздания может иметь такой вид:

$$U_1 = \underbrace{1+3} + \langle 9,9,4\rangle$$

Пространство-время несвёрнутых измерений

Пространство свёрнутых измерений: 22=9+9+4

Для краткости будем просто обозначать: $U_1 = \langle 9,9,4\rangle$.

Всего можно построить 15 таких представлений. Покажем их все:

$$\begin{array}{lll}
U_1 = \langle 9,9,4\rangle & U_6 = \langle 9,5,4,4\rangle & U_{11} = \langle 7,5,5,5\rangle \\
U_2 = \langle 9,8,5\rangle & U_7 = \langle 8,6,4,4\rangle & U_{12} = \langle 6,6,6,4\rangle \\
U_3 = \langle 9,7,6\rangle & U_8 = \langle 8,5,5,4\rangle & U_{13} = \langle 6,6,5,5\rangle \\
U_4 = \langle 8,8,6\rangle & U_9 = \langle 7,7,4,4\rangle & U_{14} = \langle 6,4,4,4,4\rangle \\
U_5 = \langle 8,7,7\rangle & U_{10} = \langle 7,6,5,4\rangle & U_{15} = \langle 5,5,4,4,4\rangle
\end{array}$$

Мы не будем исследовать все комбинации U_i (все Мироздания, если хотите), а рассмотрим ту (может быть есть и другие?), в которой могут существовать все, известные на сегодняшний день элементарные частицы и, которая позволила определить, какому кварку соответствует какая элементарная компактификация.

Представим комбинацию U_{10} в развёрнутом в элементарные компактификации виде: $U_{10} = \langle 7,6,5,4\rangle = \langle 7\rangle + \langle 6\rangle + \langle 5\rangle + \langle 4\rangle$. Можно развернуть ещё более подробно:

$$U_{10} = \begin{cases} \langle 7\rangle = \langle 1,3,3\rangle = \langle 2,2,3\rangle \\ \langle 6\rangle = \langle 1,2,3\rangle = \langle 2,2,2\rangle = \langle 3,3\rangle \\ \langle 5\rangle = \langle 1,1,3\rangle = \langle 1,2,2\rangle = \langle 2,3\rangle \\ \langle 4\rangle = \langle 1,1,2\rangle = \langle 1,3\rangle = \langle 2,2\rangle \end{cases}, \qquad (6)$$

кроме того элементарные компактификации могут быть представлены: $\langle 2\rangle = \langle 1,1\rangle$, $\langle 3\rangle = \langle 1,1,1\rangle = \langle 1,2\rangle$.

Прежде чем определить искомое соответствие кварков и элементарных компактификаций поговорим об антикварках. Чем могут отличаться, например, кварк $C\langle 1\rangle$ и антикварк $\overline{C}\langle 1\rangle$. В нашей модели данный кварк – это окружность. Две конгруэнтных окружности могут отличаться направлением обхода.

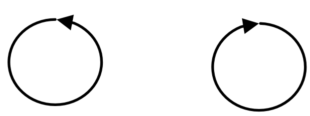

Рис. 1

Компактификациями сферы и тора $S\langle 2\rangle$ и $T\langle 2\rangle$ являются двусторонние поверхности. Поэтому можем предположить, что антивкарки этих поверхностей такие же фигуры только вывернутые наизнанку.

Как известно, лист Мёбиуса может быть двух видов: левозакрученный и правозакрученный. Причём никакими ухищрениями невозможно левозакрученный лист Мёбиуса перевести в правозакрученный и наоборот. А моделью проективной прямой является как раз осевая линия листа Мёбиуса. Поэтому можем для кварка принять обозначение $\boldsymbol{M}_+\langle\mathbf{1}\rangle$, а для антикварка - $\overline{\boldsymbol{M}_-}\langle\mathbf{1}\rangle$ в зависимости от того, как был закручен исходный лист Мёбиуса.

С топологической точки зрения бутылка Клейна является склейкой двух разнозакрученных листа Мёбиуса ([14], стр. 306).

$$\boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{M}_+^2 \cup \boldsymbol{M}_-^2$$

В физике элементарных частиц большое значение имеет понятие коммутативности. Вернее – её отсутвия. И мы можем считать, что $\boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{M}_+^2 \cup \boldsymbol{M}_-^2$ и $\overline{\boldsymbol{K}}^2 = \boldsymbol{M}_-^2 \cup \boldsymbol{M}_+^2$ - это разные фигуры. А соответствующие им модели компактификаций являются кварком и антикварком $\boldsymbol{K}_+\langle\mathbf{2}\rangle$ и $\overline{\boldsymbol{K}_-}\langle\mathbf{2}\rangle$.

Чем могут отличаться кварк и антикварк, модели которых представлены проективной плоскостью.

Одна из моделей проективной плоскости описывается топологической фомулой:

$$\boldsymbol{RP}^2 = \left(\boldsymbol{S}^2 / \boldsymbol{D}^2\right) \cup \boldsymbol{M}^2,$$

в которую входит лист Мёбиуса, и следовательно мы можем эту формулу переписать двумя различными способами.

$$\boldsymbol{RP}^2 = \left(\boldsymbol{S}^2 / \boldsymbol{D}^2\right) \cup \boldsymbol{M}_+^2 \text{ и } \boldsymbol{RP}^2 = \left(\boldsymbol{S}^2 / \boldsymbol{D}^2\right) \cup \boldsymbol{M}_-^2.$$

В соответствии с этими формулами, будем различать и кварки $\boldsymbol{P}_+\langle\mathbf{3}\rangle$ и $\overline{\boldsymbol{P}_-}\langle\mathbf{3}\rangle$.

В ***Приложении*** мы найдём таблицы элементарных частиц и их кварковый состав. Операясь на эти таблицы будем строить соответствие между кварками, антикварками и элементарными компактификациями. Начнём с протона и нейтрона. Их кварковый состав имеет вид: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{uud}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{ddu}$.

Рассмотрим совокупность комбинаций (6). Здесь мы действительно находим компактификации $\langle\mathbf{2{,}2{,}1}\rangle$ и $\langle\mathbf{1{,}1{,}2}\rangle$. Можно предположить такие соответствия: $\boldsymbol{C}\langle\mathbf{1}\rangle \equiv \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{S}\langle\mathbf{2}\rangle \equiv \boldsymbol{u}$. Тогда $\overline{\boldsymbol{C}}\langle\mathbf{1}\rangle \equiv \overline{\boldsymbol{d}}$ и $\overline{\boldsymbol{S}}\langle\mathbf{2}\rangle \equiv \overline{\boldsymbol{u}}$.

Снова обратимся к ***Приложению*** и рассмотрим барион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{uds}$. Кварки $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{u}$ уже определены. Ничто не мешает нам определить кварк $\boldsymbol{s}$ как $\boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{T}\langle\mathbf{2}\rangle$. А соответствующая компактификация имеется - $\langle\mathbf{2{,}1{,}2}\rangle$. И т. д.

В самом конце таблицы барионов появляется кварк $\boldsymbol{c}$. Присвоим ему соответствующее представление: $\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{M}\langle\mathbf{1}\rangle$.

Кварк $\boldsymbol{b}$ появляется в таблице мезонов. Ему будет соответствовать очередная компактификация: $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{K}\langle\mathbf{2}\rangle$.

Кварк $\boldsymbol{t}$ не участвует в образовании ни барионов, ни мезонов. У нас осталась последняя элементарная компактификация. Поэтому $\boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{P}\langle\mathbf{3}\rangle$.

На основе таблиц ***Приложения***, каждый заинтересованный сможет определить, как выглядят элементарные частицы в образах наших компактификаций.

Предложенное соответствие является не единственным. Но в данном Универсуме $\boldsymbol{U_{10}}$ существуют запреты. Никакой из кварков ***u, d*** и ***s*** не может соответствовать компактификации $\boldsymbol{P\langle 3\rangle}$. В этом случае необходимы были бы компактификации $\boldsymbol{\langle 8\rangle = \langle 2,3,3\rangle}$ и $\boldsymbol{\langle 9\rangle = \langle 3,3,3\rangle}$, но они отсутствуют в $\boldsymbol{U_{10}}$.

Не исключено, что ещё какие-то $\boldsymbol{U_i}$ кроме $\boldsymbol{U_{10}}$ могут претендовать на роль нашего Мирозания в рамках нашего моделирования, но нам кажется – это маловероятно, т. к. компактификации $\boldsymbol{\langle 4\rangle}$, $\boldsymbol{\langle 5\rangle}$ и $\boldsymbol{\langle 6\rangle}$ одновременно присутствуют только в $\boldsymbol{U_{10}}$.

Таким образом, мы ответили и на вопрос: **как?**.

Теперь скажем несколько слов о наших элементарных компактификациях.

Мы руководствовались числом измерений, свёрнутых на наших фигурах, равным числу параметров, при помощи которых задаются аналитические уравнения этих фигур. Описание трёхпараметрического уравнения проективной плоскости можно найти, например, в [10].

Модель проективной прямой, как осевой линии листа Мёбиуса, может быть задана двумя способами. С точки зрения дифференциальной геометрии – это окружность, лежащая в плоскости $\boldsymbol{Z = 0}$. С точки зрения классической аналитической геометрии – это линия, не принадлежащая одной плоскости [11]. Длина такой линии $\boldsymbol{L}$ вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{L = R(Cos(\alpha) + 2Sin(\alpha))},$$

где $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, $\boldsymbol{R}$ – условный радиус листа Мёбиуса.

Почему вообще были привлечены к моделированию некоторые элементы проективной геометрии? Во-первых, проективная геометрия по большому счёту является основой всех прочих геометрий. В том числе и эвклидовой. Во вторых, - некоторые образы проективной геометрии «присутствуют» и в нашей жизни.

Рис. 2

На Рис.2 мы видим бесконечно удалённую точку проективной плоскости в виде точки пересечения железнодорожных рельс. А линия горизонта – это образ бесконечно удалённой прямой.

Некоторые модели наших компактификаций можно представить и наглядно. Например, модель нейтрона $\boldsymbol{n = ddu \equiv C\langle 1\rangle C\langle 1\rangle S\langle 2\rangle}$ и протона $\boldsymbol{p = uud \equiv S\langle 2\rangle S\langle 2\rangle C\langle 1\rangle}$ могут выглядеть так (Рис.3):

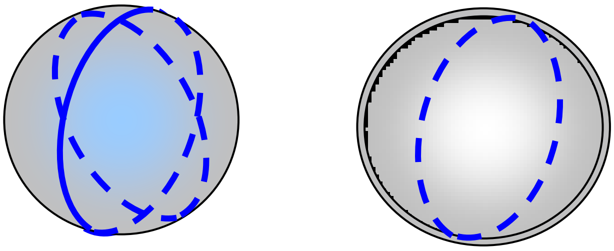

Рис. 3

А модель мезона $\boldsymbol{D^0 = c\bar{u} \equiv M\langle 1\rangle \bar{S}\langle 2\rangle}$ можно показать следующим обзразом (Рис. 4).

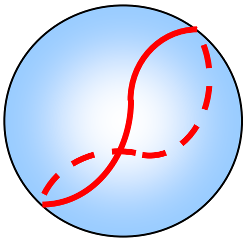

Рис. 4

Надо отметить, что в нашем моделировании мы не использовали свойство кварков: принимать различное цветовое состояние.

Приложение

Барионы (B = 1, L = 0)

Частица	Кварковый состав	Масса, mc^2 (МэВ)	Время жизни (сек) или ширина (МэВ)	Спин-четность, изоспин $J^P(I)$	Основные моды распада
p	uud	938.27	>1031 лет	$1/2^+(1/2)$	
n	ddu	939.57	887±2	$1/2^+(1/2)$	$pe\bar{\nu}$
Λ	uds	1116	$2.6\cdot10^{-10}$	$1/2^+(0)$	$p\pi^-$, $n\pi^0$
Σ^+	uus	1189	$0.80\cdot10^{-10}$	$1/2^+(1)$	$p\pi^0$, $n\pi^+$
Σ^0	uds	1193	$7.4\cdot10^{-20}$	$1/2^+(1)$	$\Lambda\gamma$
Σ^-	dds	1197	$1.5\cdot10^{-10}$	$1/2^+(1)$	$n\pi^-$
Ξ^0	uss	1315	$2.9\cdot10^{-10}$	$1/2^+(1/2)$	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	dss	1321	$1.6\cdot10^{-10}$	$1/2^+(1/2)$	$\Lambda\pi^-$
Ω^-	sss	1672	$0.82\cdot10^{-10}$	$3/2^+(0)$	ΛK^-, $\Xi^0\pi^-$
Δ^{++} Δ^+ Δ^0 Δ^-	uuu uud udd ddd	1230-1234	115-125	$3/2^+(3/2)$	(n или p) + π
$\Sigma^+(1385)$	uus	1383	36	$3/2^+(1)$	$\Lambda\pi$, $\Sigma\pi$
$\Sigma^0(1385)$	uds	1384	36		
$\Sigma^-(1385)$	dds	1387	39		
$\Xi^0(1530)$	uss	1532	9.1	$3/2^+(1/2)$	$\Xi\pi$
$\Xi^-(1530)$	dss	1535	9.1		
N(1440)	N^+ uud N^0 udd	1430-1470	250-450	$1/2^+(1/2)$	$n(p)+\pi(2\pi),\Delta\pi$
N(1520)	N^+ uud N^0 udd	1515-1530	110-135	$3/2^-(1/2)$	$n(p)+\pi(2\pi),\Delta\pi$

Λ_c^+	udc	2285	$2.0\cdot10^{-13}$	$1/2^+(0)$	(n или p) + другие
Σ_c^{++}	uuc	2453	2.2	$1/2^+(1)$	$\Lambda_c^+\pi$
Σ_c^{+}	udc	2454	<4.6		
Σ_c^{0}	ddc	2452	2.2		

Мезоны (B=0, L=0)

Частица	Кварковый состав	Масса, Mc^2 (МэВ)	Время жизни (сек) или ширина	Спин-четность, изоспин $J^P(I)$	Основные моды распада
π^+,π^-	$u\bar d$, $d\bar u$	139.57	$2.6\cdot10^{-8}$	$0^-(1)$	$\nu\mu^+$, $\bar\nu\mu^-$
π^0	$u\bar u$-$d\bar d$	134.98	$8.4\cdot10^{-17}$	$0^-(1)$	2γ
K^+,K^-	$u\bar s$, $s\bar u$	494	$1.2\cdot10^{-8}$	$0^-(1/2)$	$\nu\mu^+$, $\bar\nu\mu^-$, $\pi^0\pi^\pm$
$K^0,\bar K^0$	$d\bar s$, $s\bar d$	498	$0.89\cdot10^{-10}$ K_S^0	$0^-(1/2)$	$\pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$
			$5.2\cdot10^{-8}$ K_L^0	$0^-(1/2)$	$\pi e\nu$, $\pi\mu\nu$, $3\pi^0$, $\pi^0\pi^+\pi^-$
η	$u\bar u$+$d\bar d$, $s\bar s$	547	1.2 кэВ	$0^-(0)$	2γ, $3\pi^0$, $\pi^0\pi^+\pi^-$
η'	$u\bar u$+$d\bar d$, $s\bar s$	958	0.20 МэВ	$0^-(0)$	$\eta\pi^+\pi^-$, $\rho^0\gamma$, $\pi^0\pi^0\eta$
$\rho^\pm$ ρ^0	$u\bar d$, $d\bar u$ $u\bar u - d\bar d$	770	151 МэВ	$1^-(1)$	$\pi\pi$
ω	$u\bar u$+$d\bar d$	782	8.4 МэВ	$1^-(0)$	$\pi^+\pi^-\pi^0$
φ	$s\bar s$	1020	4.4 МэВ	$1^-(0)$	K^+K^-, $\pi^+\pi^-\pi^0$
$D^\pm$	$c\bar d$, $d\bar c$	1869	$1.1\cdot10^{-12}$	$0^-(1/2)$	K + другие частицы,
$D^0,\bar D^0$	$c\bar u$, $u\bar c$	1865	$4.2\cdot10^{-13}$	$0^-(1/2)$	e + другие, μ + другие
$D_s^\pm$	$c\bar s$, $s\bar c$	1969	$4.7\cdot10^{-13}$	0-(0)	K + другие
$B^\pm$ $B^0,\bar B^0$	$u\bar b$, $b\bar u$ $d\bar b$, $b\bar d$	5279	$1.6\cdot10^{-12}$	$0^-(1/2)$	D^0+др, D*+др
				$0^-(1/2)$	ν+др, D^++др, D*+др
J/ψ	$c\bar c$	3097	87 кэВ	1-(0)	адроны, e^+e^-, $\mu^+\mu^-$
Υ	$b\bar b$	9460	53 кэВ	1-(0)	$\tau^+\tau^-$, e^+e^-, $\mu^+\mu^-$

Литература:

1 М. Рид, «Алгебраическая геометрия для всех», М., «Мир», 1991

2 Г. Клеменс, «Мозаика теории комплексных кривых», М., «Мир», 1984

3 П. Девис, «Суперсила», М., «Мир», 1989

4 П. С. Александров, «Лекции по аналитической геометрии», М., «НАУКА», 1968

5 Б. Цвибах, «Начальный курс теории струн», М., «Удиториал УРСС», 2011

6 Ю. С. Владимиров, «Пространгство-время: явные и скрытые размерности», М., «НАУКА», 1989

7 Ё. Намбу, «Кварки», М., «Мир», 1984

8 Ф. Герман, «Математика в науке и вокруг нас», «LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2016

9. Г. Е. Горелик, «Почему пространство трёхмерно?», М., «НАУКА», 1982.

10 Д. Гильберт, С. Кон-фоссен, «Наглядная геометрия», М., «НАУКА», 1981

11 Ф. Герман, «$\boldsymbol{RP}^2$ - Проективная плоскость», «LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015

12. А. Г. Сергеев, «Кэлерова геометрия пространств петель», М., «МЦНМО», 2001

13. «Эйнштейновский сборник. 1986-1990», М., «Наука», 1990

14. Ст. Барр, «Россыпи головоломок», М. «Мир», 1987