Франц Герман

Линия катастроф.

Скрытые параметры эллипса.

franz.h-n@yandex.ru

Хотя эллипс и не столь прост, как окружность,
Тем не менее он чаще встречается в повседнвной жизни [1].
(Мартин Гарднер)

Как правило математические катастрофы возникают при проектировании некоторых кривых третьего и выше порядков на плоскость. При этом, на вновь полученной кривой, могут возникать, так называемые, точки возврата. Это и есть катастрофа. Вообще существует целая классификация катастро [2], но мы здесь этим заниматься не будем.

Если пошевелить прозрачный тор (бублик), то можно увидеть кривую, которая имеет четыре точки возврата (Рис. 1). Такую кривую мы и будем называть линией катастроф.

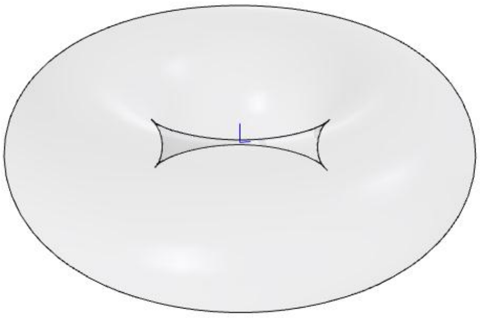

Рис. 1

Рассмотрим эллипс и прямую, касающуюся данного эллипса в некоторой точке $\boldsymbol{M}$. Восставим в точке $\boldsymbol{M}$ отрезок длиной $\boldsymbol{q}$, перпендикулярный касательной прямой и направленный во внутрь нашего эллипса (Рис. 2).

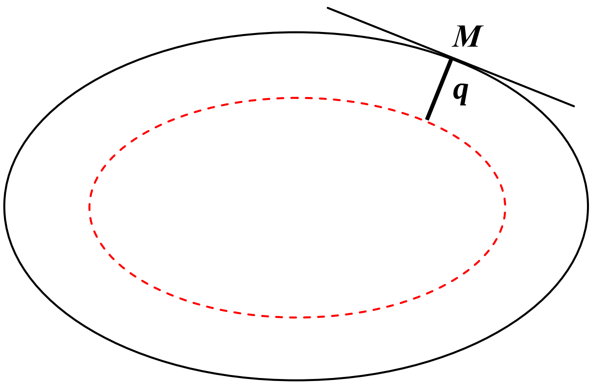

Рис. 2

В то время как точка M пробежит весь эллипс, свободный конец отрезка q опишет некоторую кривую (на Рис. 2 она показана красным цветом). Математики такую кривую называют эквидистантой.

Рассмотрим, что получится если отрезок q будет удлинняться. Не трудно догадаться, что с некоторого момента (при увеличении длины отрезка q) свободный конец нашего отрезка будет описывать линию катастроф.

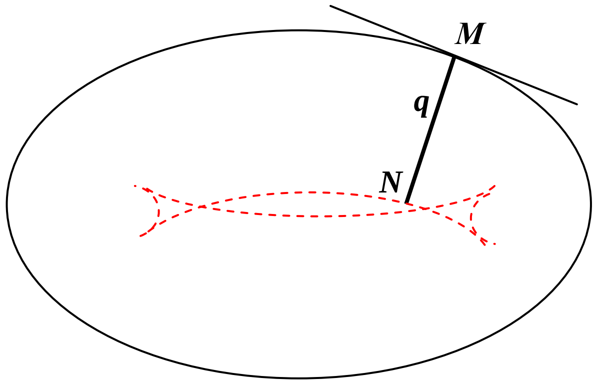

Рис. 3

Введём декартовы координаты. Пусть точки M и N имеют координаты: $M(x_1, y_1)$; $N(x_2, y_2)$.

Задача: при каком q кривая эквидистанты переходит в линию катастроф?

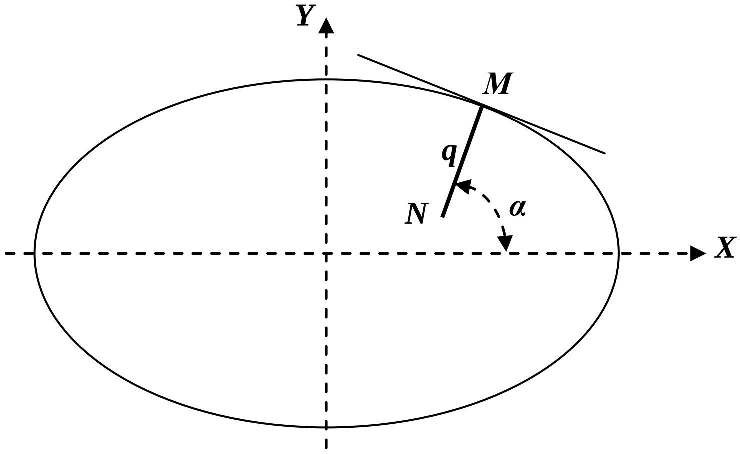

Рис. 4

Уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ или $y_1 = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)}$.

Квадрат длины нашего отрезка будет иметь вид: $q^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Откуда получаем:

$$y_2 = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)} - \sqrt{q^2 - (x_1 - x_2)^2}\,. \qquad (1)$$

Абсциссы концов нашего отрезка связаны таким выражением: $x_1 = x_2 + q \cdot Cos(\alpha)$.

Известно, что $tg(\alpha) = -\frac{1}{f'_{x_1}}$, где функция $f(x_1, y_1)$: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Известно также, что частная производная $f'_{x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = -\frac{2b^2 x_1}{2a^2 y_1} = -\frac{x_1 b}{a^2\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}}}$. Теперь можем записать: $tg(\alpha) = -\frac{1}{f'_{x_1}} = \frac{a\sqrt{a^2 - x_1^2}}{bx_1} = \frac{\sqrt{1-Cos^2(\alpha)}}{Cos(\alpha)}$. Преобразовав последнее выражение можем записать: $x_1 = x_2 + q \cdot \sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^4 - a^2 x_1^2 + b^2 x_1^2}}$. Или таким образом:

$$(x_1 - x_2)^2 = q^2 \cdot \frac{b^2 x_1^2}{a^4 - a^2 x_1^2 + b^2 x_1^2}. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и после упрощения выражения получаем:

$y_2 = \sqrt{a^2 - x_1^2} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{qa}{\sqrt{a^4 - x_1^2(a^2 - b^2)}}\right)$. Из свойств эллипса помним, что $a^2 - b^2 = c^2$, где c – фокусное расстояние. Таким образом в окончательном виде имеем уравнение;

$$y_2 = \sqrt{a^2 - x_1^2} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{qa}{\sqrt{a^4 - x_1^2 c^2}}\right). \tag{3}$$

Нас интересует случай, когда отрезок q будет полностью принадлежать оси абсцисс. В этом случае точка M имеет координаты: $(a, 0)$, а $y_1 = y_2 = 0$. Из этих условий получаем характеристическое выражение: $\frac{b}{a} - \frac{q}{b} = 0$ или окончательно: $q = \frac{b^2}{a}$. Заметим, что полученная величина называется фокальным параметром и обозначается буквой p_1 (Рис. 5).

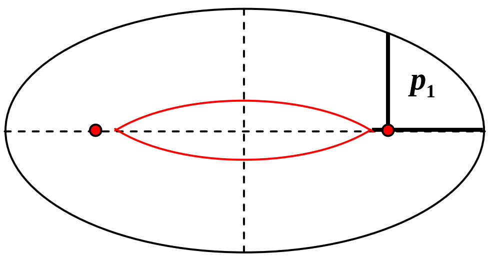

Рис. 5

На Рис. 5 мы видим предельный случай эквидистанты для случая $q = p_1$. Отрезок q – всегда является нормальным отрезком к кривой эллипса. Поэтому

$q_{max} = p_1$ мы будем называть нормальным параметром эллипса. Точки пересечения эллипса с осями координат называюся вершинами эллипса. Для более искушённого читателя (знакомого с дифференциальной геометрией) напомним, что в точках $(\pm a, 0)$ радиус кривизны эллипса равен именно $r_1 = \frac{b^2}{a}$ [3].

Теперь рассмотрим задачу о вписывании эллипса в пересечение двух одинаковых окружностей (Рис. 6).

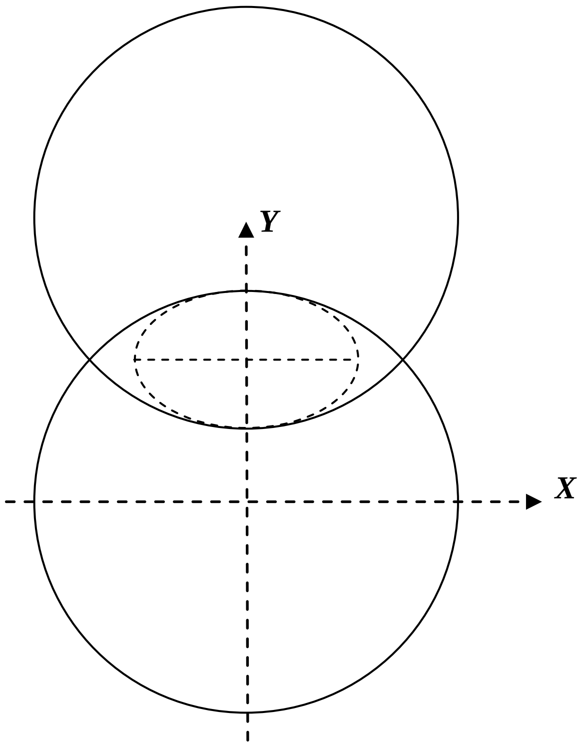

Рис. 6

Введём координаты, как показано на Рис. 6. Тогда уравнения эллипса и нижней окружности будут иметь вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-R+b)^2}{b^2} = 1$ и $x^2 + y^2 = R^2$, соответственно. Т. е., для нашей задачи необходимо будет найти решение системы уравнений и вычислить радиус окружности.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-R+b)^2}{b^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}. \qquad (4)$$

Т. к. эллипс и окружность должны только касаться, но никак не пересекать друг друга, то решение будет иметь вид: $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = R$.

Выразив x из второго уравнения и подставив в первое уравнения получаем такое квадратное уравнение:

$$(a^2 - b^2)y^2 + 2a^2(b-R)y + R^2(a^2+b^2) - 2Rba^2 = 0. \qquad (5)$$

Решая полученное уравнение находим: $y_1 = R$, $y_2 = \dfrac{R(a^2+b^2)-2ba^2}{a^2-b^2}$. Помня наше условие, что $y_1 = y_2 = R$, получаем:

$$R = \frac{a^2}{b}. \qquad (6)$$

Известно [3], что радиус кривизны в точке $(0, R)$ и для окружности, и для эллипса равен $r_2 = \dfrac{a^2}{b}$.

Т. о., геометрический смысл второго параметра эллипса, равного $p_2 = \dfrac{a^2}{b}$ очевиден – это радиус описанно окружности. Назовём его радиальным параметром.

Рассмотрим ещё одну задачу, связанную с параметрами эллипса.

В эллипс вписаны две одинаковые окружности.

Задача: вычислить радиус вписанных окружностей при условии, что известны размеры полуосей эллипса (Рис. 7).

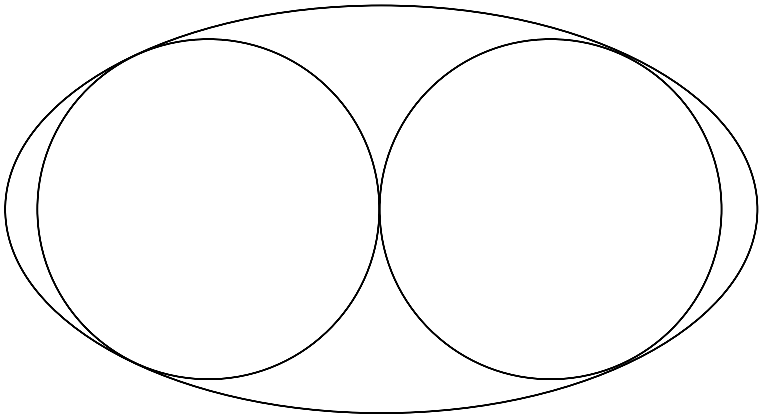

Рис. 7

Обозначим через R искомый радиус и сделаем новый рисунок.

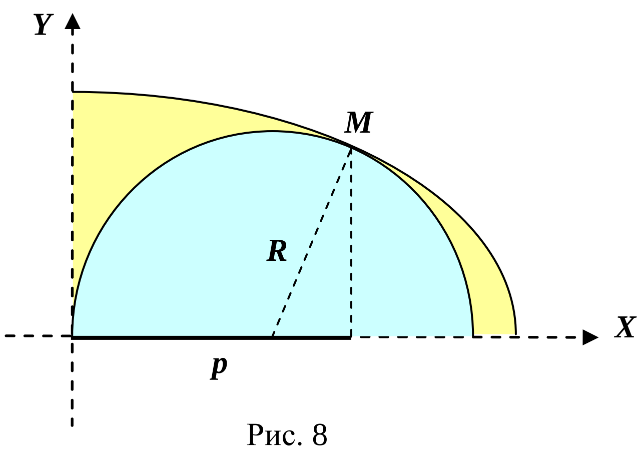

Рис. 8

По аналогии с фокальным параметром абсциссу точки $\boldsymbol{M}$ будем называть аксиальным параметром $\boldsymbol{p}$.

Точка $\boldsymbol{M}$ – точка касания с координатами $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$. Уравнение эллипса имеет вид: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$. Из уравнения окружности $(x_1 - R)^2 + y_1^2 = R$ получаем: $y_1^2 = 2Rx_1 - x_1^2$. Подставим это выражение в уравнение эллипса: Откуда будем иметь квадратное уравнение:

$$\left(a^2 - b^2\right)x_1^2 - 2a^2Rx_1 + a^2b^2 = 0. \tag{7}$$

Выражение для корней квадратных из уравнения (1) будет иметь вид:

$$x_{1,2} = \frac{Ra^2 \pm \sqrt{R^2a^4 - 4\left(a^2 - b^2\right)a^2b^2}}{2\left(a^2 - b^2\right)}.$$

Т. к. мы имеем дело с точкой касания, то $x_1 = x_2 = \dfrac{Ra^2}{2\left(a^2 - b^2\right)}$. С другой стороны можем записать $R^2a^4 - 4\left(a^2 - b^2\right)a^2b^2 = 0$, откуда получаем: $R = \dfrac{2bc}{a}$, где $a^2 - b^2 = c^2$. Подставляя $\boldsymbol{R}$ в выражение для x_1 находим значение аксиального параметра:

$$p = x_1 = \frac{ab}{c} = \frac{p_1p_2}{c},$$

а выражение для радиуса, вписанных окружностей:

$$R = 2c \cdot \sqrt[3]{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Теперь поговорим о геометрических построениях параметров эллипса, зная длину его основных характеристик – полуосей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. В наших построениях будем отталкиваться в основном от вышепоказанного равенства:

$$ab = cp = p_1p_2. \tag{8}$$

Пусть дан эллипс с полуосями $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

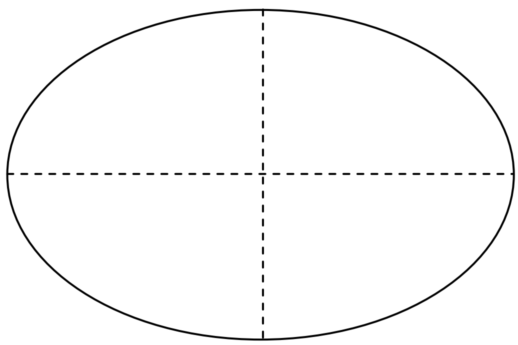

Рис. 9

Из верхней вершины эллипса раствором циркуля радиуса ***a*** сделаем засечку до пересечения с осью абсции. Получим точку правого фокуса.

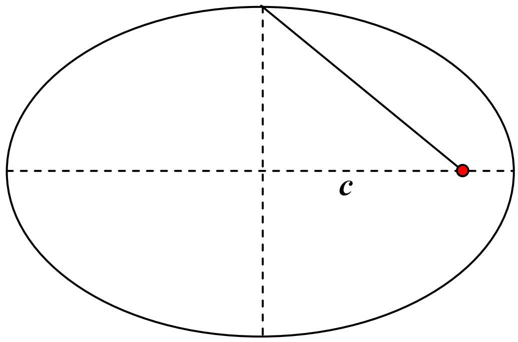

Рис. 10

Восставим из точки фокуса перпендикуляр до пересечения с линией эллипса.

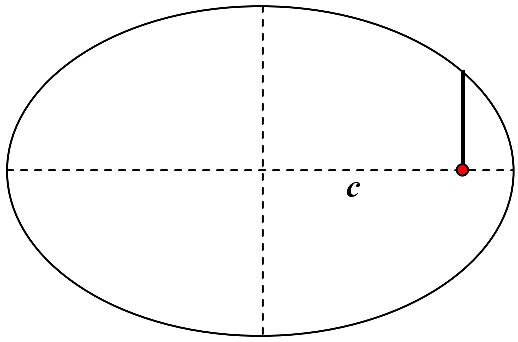

Рис. 11

Получили фокальный параметр, он же и нормальный параметр.

Отложем на произвольной прямой один за другим отрезки полуосей нашего эллипса. И из серидины общего отрезка проведём полуокружность радиуса длинной равной среднему значению из суммы длин полуосей.

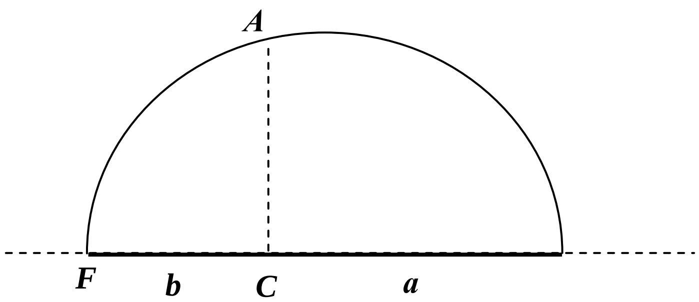

Рис. 12

И воoставим перпендикуляр из точки соприкосновения отрезков полуосей, как показано на Рис. 12.

Отложем отрезок фокального параметра на полуоси ***b***. И свободный конец (точка ***E***) соединим с точкой ***A***. Из серидины полученного отрезка проводим перпендикуляр до пересечения с отрезком ***a*** в точке ***B***. И из точки ***B***, как из центра, проводим полуокружность радиуса ***AB=BE*** (Рис. 13).

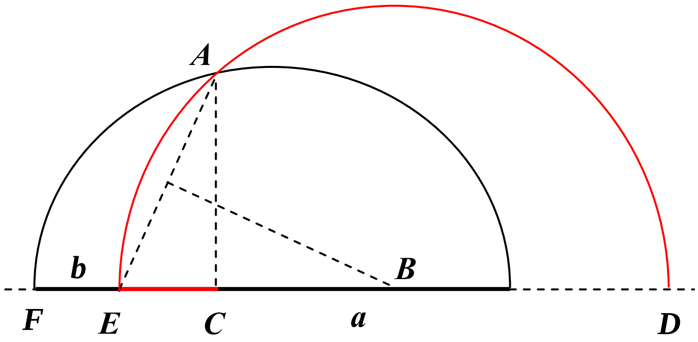

Рис. 13

Тогда отрезок $\boldsymbol{CD}$ будет ни чем иным, как радиальным параметром $\boldsymbol{p_2}$. Действительно, в силу наших построений $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{a}}$ и $\frac{\boldsymbol{EC}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{CD}}$ откуда $\boldsymbol{ba = p_1 CD}$, т. е. $\boldsymbol{CD = p_2}$, где $\boldsymbol{EC = p_1}$.

Аналогичными построениями анализируется и выражение $\boldsymbol{pc = p_1 p_2}$. Отрезок фокального рассстояния $\boldsymbol{c}$ показан на Рис. 11, а отрезки параметров $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$ уже известны.

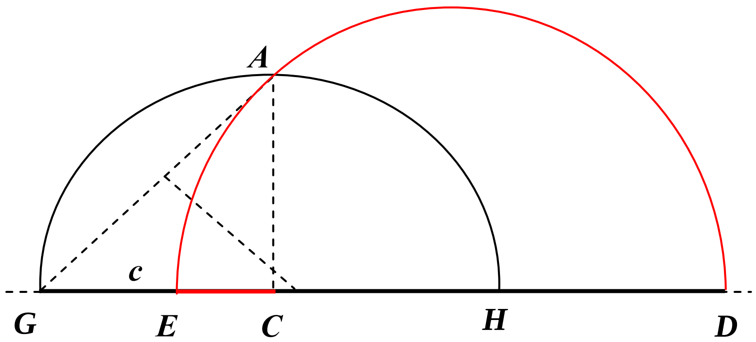

Рис. 14

Здесь $\boldsymbol{CG = c}$, а $\boldsymbol{CH = p}$.

Литература

1. М. Гарднер, «Математические досуги», М., «Мир», 1972
2. В. И. Арнольд, «Теория катастроф», М., «НАУКА», 1990
3. А. В. Погорелов, «Геометрия», М., «НАУКА», 1983