

Франц Герман

Топология замкнутых маршрутов (franz.h-n@yandex.ru)

В данной заметке будет введено понятие замкнутого маршрута, как топологической характеристики некоторых классических поверхностей (лист Мёбиуса, действительная проективная плоскость, бутылка Клейна, тор), вложенных в \mathbf{R}^3 (действительное пространство трёх измерений) и будут рассмотрены простейшие примеры операций с этими поверхностями: разрезания (расслоения, наслоения), склейки, прямого произведения и объединения. Мы специально выделили термин «классическая поверхность», т. к. современная топология занимается в основном изучением многообразий (поверхностей), порождаемых группами Ли (группами преобразований) многомерных пространств [14], стр.119.

При помощи замкнутых маршрутов можно более полно понять природу исследуемых поверхностей, а также познакомиться с некоторыми объектами, не так популярными в классической топологии.

Определение: **замкнутым маршрутом α** будем называть замкнутую кривую без самопересечений не стягивающуюся в точку и целиком расположенную на данной поверхности.

Очевидно, всякий замкнутый маршрут гомеоморфен (топологически эквивалентен) окружности S^1 .

Нулевым маршрутом будем называть замкнутую кривую, гомеоморфную окружности и стягивающуюся в точку. Такой маршрут будем обозначать: S^0 .

Покажем пример простейшего замкнутого маршрута, расположенного на правозакрученном листе Мёбиуса (Рис. 1) (изображать топологические объекты в виде многоугольников, некоторые стороны которых показаны в виде стрелок, является классическим приёмом топологии ([7], стр.21, [9], стр. 288, [10], стр. 19). Напомним, что лист Мёбиуса может быть, как лево-, так и правозакрученным. Если левую перчатку можно вывернуть наизнанку и превратить её в правую, то M_+^2 никакими физическими ухищрениями (например, прорезать щель вдоль осевой линии и через неё вывернуть весь лист Мёбиуса) нельзя превратить в M_-^2 . Это две зеркально симметричные фигуры (кстати, преобразование осевой симметрии: $x_1 = -x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$ как раз и переводит M_+^2 в M_-^2 и наоборот).

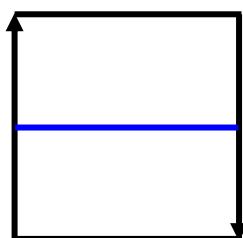


Рис. 1

Данный маршрут показан синей линией. Обозначим его: $\alpha = M_+^1$ (отметим, что $M_+^1 \equiv RP_+^1$ - проективная прямая, т. е. прямая, расположенная на проективной плоскости). Очевидно, что этот маршрут - ни что иное, как осевая линия

правозакрученного листа Мёбиуса. Если выполнить операцию разрезания вдоль данного маршрута, то получим новую фигуру – 2-скрученный (дважды скрученный) цилиндр. Скрученный цилиндр также может быть правозакрученным и левозакрученным. В данном случае это определяется исходной фигурой, т. е. фигурой M_+^2 .

$$M_+^2 \xrightarrow{\alpha} Z_{2+}^2 \quad (1)$$

Рассмотрим простейшие (но не тривиальные) маршруты на проективной плоскости RP_+^2 (Рис. 2).

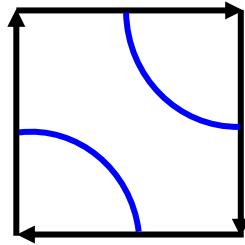


Рис. 2

Выполним операцию разрезания вдоль данного маршрута. Как оказалось, в результате проделанной операции, наша фигура распалась на две новых фигуры:

$$RP_+^2 \xrightarrow{\alpha} RP_+^2 \circ Z^2 \quad (2)$$

Мы снова получили проективную плоскость и цилиндр. Значком «О» будем обозначать ситуацию, что данные фигуры незаузлены (не сцеплены и их можно разнести на сколь угодно большое расстояние).

Рассмотрим ещё один маршрут на той же самой проективной плоскости (Рис. 3).

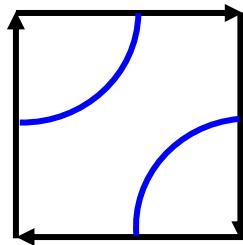


Рис. 3

Как это ни фантастично выглядит, но сделав разрез вдоль этого маршрута мы получаем совершенно другой результат.

$$RP_+^2 \xrightarrow{\alpha} RP_+^2 \oplus Z_{2+}^2 \quad (3)$$

Во-первых, второй фигурой теперь является 2-скрученный цилиндр. Во-вторых, полученные фигуры оказались дважды заузленными, их нельзя расцепить (этот факт мы обозначили значком \oplus).

Рассмотрим такой же маршрут, но на левозакрученной проективной плоскости RP_-^2 (Рис. 4).

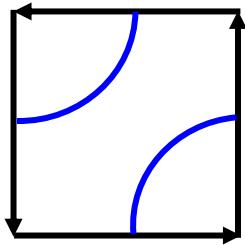


Рис. 4

Как показал эксперимент, операция разрезания вдоль данного маршрута даёт результат практически аналогичный результиру (2)

$$RP^2 \xrightarrow{\alpha} RP^2 \circ Z^2 \quad (4)$$

Говоря «Как показал эксперимент», мы не оговорились. Последний рисунок можно представить в таком виде (Рис. 5):

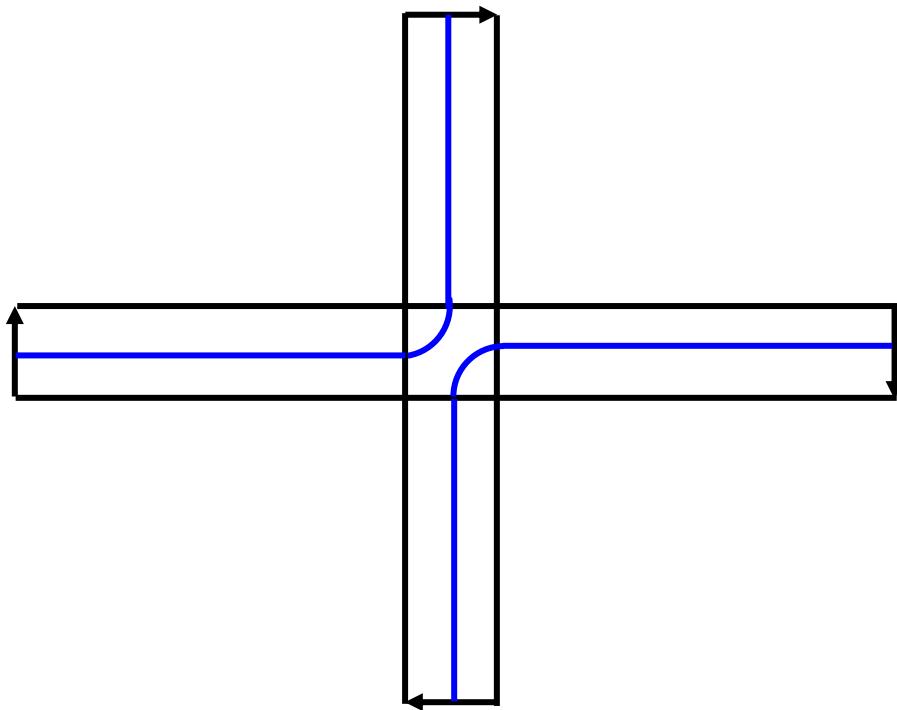


Рис. 5

Нарисовав Рис. 5 на обыкновенном листе бумаги уже не трудно склеить модель проективной плоскости. Надо выбрать для себя правило для закручивания листа Мёбиуса и всегда его придерживаться. Мы пользуемся таким правилом: левая кисть руки всегда неподвижна, а правая кисть вращает полоску бумаги – на себя: получаем правый лист Мёбиуса, от себя – левый.

Так в чём же парадокс? Ведь, действительно, Рис. 2 отличается от Рис. 3 только лишь поворотом на 90° . Дело в том, что на этих рисунках мы видим только фрагмент всей фигуры. Если бы мы видели всю фигуру, то, действительно, было бы понятно, что это разные маршруты. В этом не трудно убедиться поэкспериментировав самостоятельно с бумажными моделями.

Теперь очевидно, что взяв первый маршрут (Рис. 2) для левозакрученной проективной плоскости \mathbf{RP}_- и, сделав вдоль него разрез, мы получим такой результат:

$$\mathbf{RP}_- \xrightarrow{\alpha} \mathbf{RP}_-^2 \oplus \mathbf{Z}_2^2 \quad (5)$$

Таким образом, можем заключить, что на проективной плоскости существует два различных простейших нетривиальных маршрута, разбивающих \mathbf{RP}_+ (или \mathbf{RP}_-) на две независимые фигуры, одна из которых снова является проективной плоскостью.

Надо сказать несколько слов о том, что мы подразумеваем под тривиальным маршрутом. Один из таких маршрутов показан на Рис. 6.

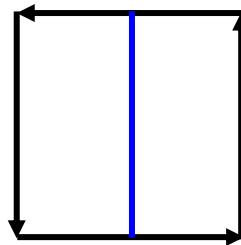


Рис. 6

В результате операции разрезания вдоль этого маршрута проективная плоскость не распадается на две фигуры, а превращается в фигуру, являющуюся склеенными цилиндрами.

$$\mathbf{RP}_- \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}^2 \cup \mathbf{Z}_2^2 \quad (6)$$

Операцию «склеивания» будем обозначать значком объединения – « \cup ».

Надо отметить, что для \mathbf{RP}_+ (или \mathbf{RP}_-) существует всего один тривиальный маршрут. Если мы проведём на Рис. 6 горизонтальный маршрут, то всё равно после разреза получим результат (6).

Существует ещё одна топологическая схема проективной плоскости ([8], стр. 330-331), которую мы будем обозначать \mathbf{RP}_{+-}^2 (или \mathbf{RP}_{-+}^2 без разницы). Рассмотрим простейшие маршруты для этой модели (Рис. 7).



Рис. 7

В результате разреза вдоль маршрута, показанного на левом рисунке, получаем две фигуры: вновь проективную плоскость \mathbf{RP}_{+-}^2 и скрученный цилиндр \mathbf{Z}_-^2 .

$$\mathbf{RP}_{+-}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbf{RP}_{+-}^2 \Theta \mathbf{Z}_-^2 \quad (7)$$

Причём, полученные фигуры являются один раз заузленными.

В результате разреза вдоль маршрута, показанного на правом рисунке, получаем почти аналогичный результат: вновь проективную плоскость \mathbf{RP}_{+-}^2 и скрученный цилиндр Z_+^2 . Только цилиндр оказался правозакрученным.

$$\mathbf{RP}_{+-}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbf{RP}_{+-}^2 \Theta Z_+^2 \quad (8)$$

Как и в случае с \mathbf{RP}_+^2 (или \mathbf{RP}_-^2), для проективной плоскости \mathbf{RP}_{+-}^2 существует всего один тривиальный маршрут. После разрезав вдоль этого маршрута получаем два скленных, да ёщё и один раз заузленных скрученных цилиндра. Один право-, другой левозакрученный.

$$\mathbf{RP}_{+-}^2 \xrightarrow{\alpha} Z_+^2 \left(\begin{smallmatrix} \cup \\ \Theta \end{smallmatrix} \right) Z_-^2 \quad (9)$$

Мы рассмотрели два случая простейших замкнутых маршрутов для моделей проективной плоскости \mathbf{RP}_+^2 (или \mathbf{RP}_-^2) и \mathbf{RP}_{+-}^2 , топологические многоугольники (квадраты) которых показаны на Рис. 2 – 7.

Нам известны несколько моделей проективной плоскости.

1. Модель Клейна [18], стр. 281-288
2. Коническая модель Ефремовича [18], стр. 288, [1], стр. 65
3. Цилиндрическая модель Розенфельда [15], стр. 340-341
4. Полиэдрическая модель [16], стр. 4-17
5. Модель Боя [6], стр. 315-319, [17], стр. 112-116
6. Модель Штейнера [6], стр. 302
7. Кросс-КЭП с крышкой, [8], стр. 327-329, [6], стр. 313-315
8. Топологическая модель (сфера с отождествлёнными диаметрально противоположными точками) [4], стр. 152
9. Классические модели проективной плоскости (Связка (пучок) прямых аффинного трёхмерного пространства, расширенная аффинная плоскость [19], стр. 157-159).

Рассмотрим, каким моделям какие топологические многоугольники соответствуют.

Моделям 1, 7, 8 соответствует топологический многоугольник, рассмотренный в первом случае.

Модели 5 соответствует многоугольник Рис. 8.

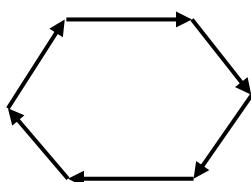


Рис. 8

Здесь отождествляются (склеиваются) противоположные стороны шестиугольника.

Для модели 4 соответствует многоугольник Рис. 9

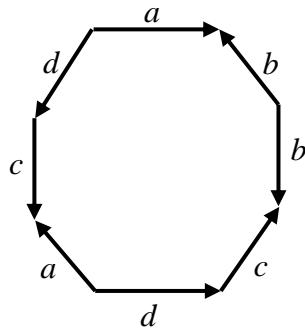


Рис. 9

В этой модели отождествляются стороны многоугольника отмеченные одинаковыми буквами.

Рассмотрим малоизвестные модели 2 и 3 проективной плоскости.

Модель 2 (автор В. А. Ефремович) является склейкой конуса и листа Мёбиуса $\mathbf{RP}_+^2 = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{M}_+^2$ (здесь не надо путать обозначение конуса \mathbf{C}^2 , как поверхности и комплексную плоскость \mathbf{C}^2 , как пространство).

Топологический многоугольник, соответствующий конусу имеет вид:

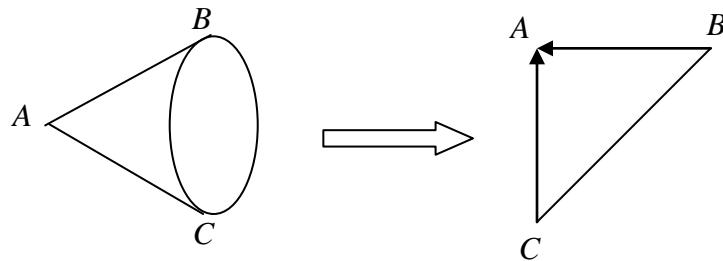


Рис. 10

Рассечём наш конус плоскостью ABC на два полуконуса. Тогда топологическое изображение для двух полуконусов можно представить таким образом Рис. 11:

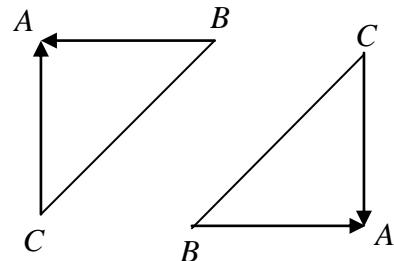


Рис. 11

Теперь можем склеить два полуконуса листом Мёбиуса. Т. о., получаем топологический многоугольник для модели 2 (Рис. 12).

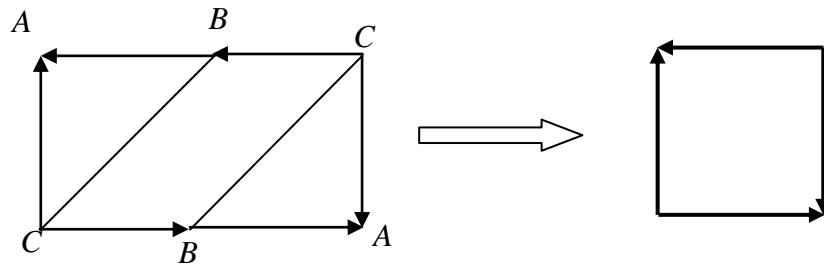


Рис. 12

Как видим, полученный многоугольник мы рассматривали во втором случае нашего исследования замкнутых маршрутов.

Модель 3 (автор Б. А. Розенфельд) получается отождествлением центрально симметричных точек цилиндра \mathbb{Z}^2 (Рис. 13).

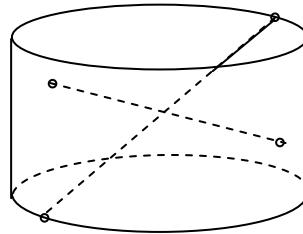
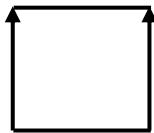


Рис. 13

Топологический многоугольник для \mathbb{Z}^2 имеет вид:



Покажем цепочку преобразований, переводящую цилиндр в проективную плоскость (Рис. 14).

1. Разрежем наш цилиндр вдоль образующей цилиндра (операция α) и развернём на плоскость. Получим прямоугольник.
2. Сделаем расслоение этого прямоугольника (операция β). Получим два тождественных прямоугольника.
3. Один из них преобразуем центрально симметрично (операция γ).
4. Сделаем наслойние нового прямоугольника и неизменённого (операция δ). Получим модель проективной плоскости.

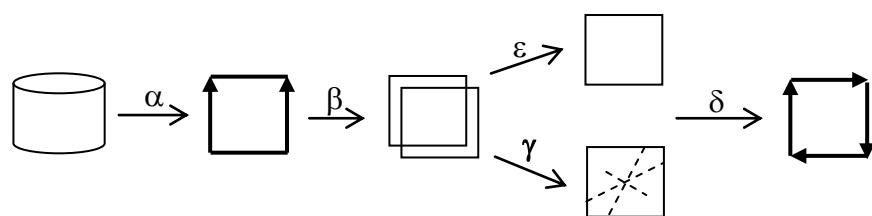


Рис. 14

Здесь (Рис. 14) операцией ε обозначается тождественное преобразование, т. е. преобразование, оставляющее объект без изменения.

Т. о., модели Розенфельда соответствует многоугольник, рассмотренный в первом случае нашего исследования.

Остаётся рассмотреть модель Штейнера. В известной нам литературе ничего не сказано о топологическом многоугольнике, соответствующем этой модели. Можно попробовать рассуждать опираясь на аналогию. С одной стороны существует топологический переход от поверхности Боя к поверхности Штейнера [17], стр. 120. Но сохраняется ли при этом топологический многоугольник? С другой – существуют аналитические преобразования в трёхмерном комплексном пространстве (покажем в конце нашей заметки) переводящие модель 8 в модель Штейнера. Опять же нам ничего не известно, связано ли это каким-то образом с топологическими многоугольниками этих поверхностей?

Однако, мы можем сделать такое предположение.

Рассмотрим топологическое преобразование, показанное на Рис. 15.

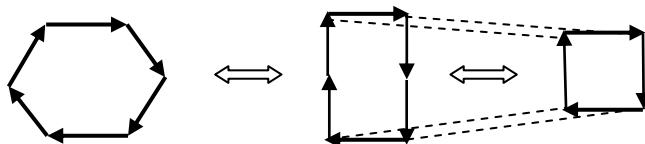


Рис. 15

Если считать, что такое преобразование имеет силу, то выбор топологического многоугольника для модели Штейнера является делом вкуса читателя. Напомним, что шестиугольник соответствует модели 5, а квадрат – модели 8.

Модели 9 являются описательными. Для них, по нашему мнению, не существует топологических многоугольников.

Но вернёмся к нашему исследованию простейших замкнутых маршрутов.

Теперь рассмотрим бутылку Клейна K^2 . Эта поверхность, безусловно, является более «экзотическим» объектом, чем проективная плоскость. Кстати заметим, что и бутылка Клейна и проективная плоскость имеют свою реализацию в R^3 ([10], стр. 17) Рис. 16.

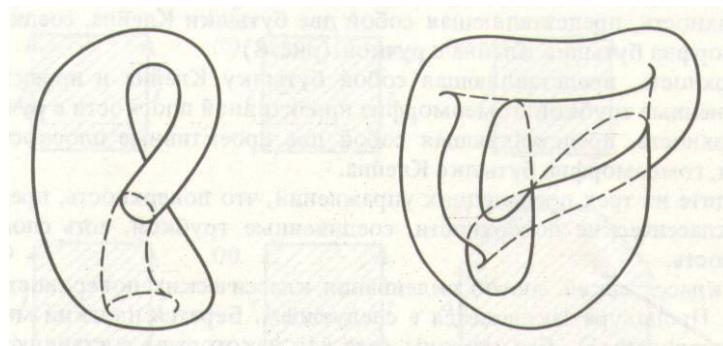


Рис. 16

Бутылка Клейна - очень «популярный» объект не только в занимательной математике, но и, например, в таком серьёзном разделе топологии как симплектическая геометрия [13]. Здесь, например, вводятся понятия максимальной и минимальной бутылки Клейна, а тор может её двулистно накрывать.

Мы назвали бутылку Клейна «экзотическим объектом» потому, что уже с первых шагов мы сталкиваемся с противоречиями, которые кажутся на первый взгляд неразрешимыми.

Посмотрим на традиционную иллюстрацию бутылки Клейна (Рис. 17).

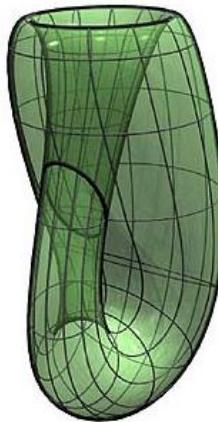


Рис. 17

Очевидно, что бутылка Клейна имеет плоскость симметрии. Разрезав бутылку Клейна вдоль этой плоскости получим два листа Мёбиуса. Один право-, другой левозакрученные ([8], стр. 306-307, [5], стр. 44). Между тем, в абсолютном большинстве литературы по топологии мы находим схему топологического многоугольника для бутылки Клена в таком виде (Рис. 18).

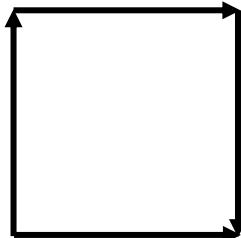


Рис. 18

Этот многоугольник описывается формулой:

$$K^2 = S^1 \otimes M_+^1, \quad (10)$$

здесь операция « \otimes » означает прямое произведение. Мы помним, что M_+^1 - это осевая линия правозакрученного листа мёбиуса. Мы помним также, что никакими разрезами и «выворачиваниями» правозакрученный лист Мёбиуса невозможно превратить в левозакрученный и наоборот. Из этого можем заключить, что общепринятый топологический многоугольник для бутылки Клейна и популярная иллюстрация (Рис. 17) не соответствуют друг другу.

Это первая необычность бутылки Клейна.

Кроме этого, бутылку Клейна можно представить различными способами.

Чтобы это пояснить, необходимо ввести несколько обозначений, принятых в классической топологии.

1. Сфера с дыркой - S^2 / D^2 (Рис. 19).

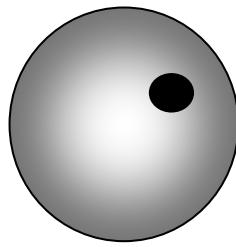


Рис. 19

Здесь D^2 - является общепринятым обозначением круга, а S^2 - двумерная сфера. По сути, здесь всё просто – из сферы по нулевому маршруту вырезан круг. Наклонная черта – это операция вырезания (отрезания).

2. Сфера с дыркой, заклеенная плёнкой (листом) Мёбиуса - $S^2 / D^2 \cup M_+^2$. По сути – это модель Клейна проективной плоскости (Рис. 20).

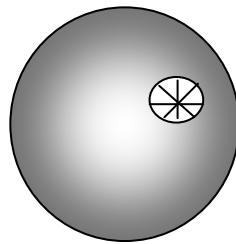


Рис. 20

3. Трубка. По сути дела это цилиндр. Поэтому трубку мы будем обозначать также, как и цилиндр - Z^2 .

4. Ручка. Вообще говоря, ручка – это тот же самый цилиндр, только согнутый (Рис. 21). Но мы всё-таки будем обозначать ручку не как цилиндр, а классическим образом ([2], стр. 126) – H^2 .

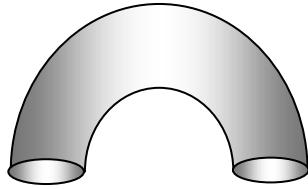


Рис. 21

Но вернёмся к бутылке Клейна. Итак, бутылка Клейна может быть представлена следующими образами.

1. Бутылка Клейна, как склейка по краю двух разнозакрученных листов Мёбиуса:

$$K^2 = M_+^2 \cup M_-^2 \quad (11)$$

2. Бутылка Клейна, как сфера с двумя дырками, заклеенными двумя плёнками Мёбиуса:

$$K^2 = S^2 / D^2 / D^2 \cup M_+^2 \cup M_-^2 \quad (12)$$

$$K_+^2 = S^2 / D^2 / D^2 \cup M_+^2 \cup M_+^2 \quad (13)$$

$$K_-^2 = S^2 / D^2 / D^2 \cup M_-^2 \cup M_-^2 \quad (14)$$

Кстати сказать, можно показать аналитически, как из (11) можно получить (12). Чуть выше мы сказали, что модель Клейна проективной плоскости записывается выражением: $RP_+^2 = S^2 / D^2 \cup M_+^2$. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} K^2 &= M_+^2 \cup M_-^2 = (RP_+^2 / D^2) \cup M_-^2 = (S^2 / D^2 \cup M_+^2 / D^2) \cup M_-^2 = \\ &= S^2 / D^2 / D^2 \cup M_+^2 \cup M_-^2 \end{aligned}$$

3. Бутылка Клейна, как две проективные плоскости склеенные трубкой [10], стр. 18:

$$K^2 = (RP^2 / D^2) \cup Z^2 \cup (RP^2 / D^2) \quad (15)$$

Можем пофантазировать и представить, что в основе нашего Мироздания лежит проективная геометрия трёх измерений. Тогда мировое пространство должно просто кишить бутылками Клейна. Т. к. и проективные плоскости и цилиндры (как части этих плоскостей) являются естественными «жителями» этой геометрии.

4. Сфера с тремя дырками, закленными двумя ручками [12], стр. 129 (Рис. 22). Одна ручка снаружи сферы, другая - внутри:

$$K^2 = (S^2 / D^2 / D^2 / D^2) \cup H^2 \cup H^2 \quad (16)$$

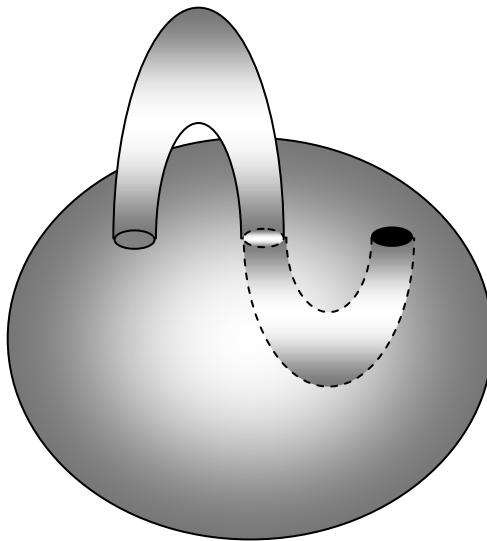


Рис. 22

Но вернёмся к исследованию простейших топологических маршрутов на бутылке Клейна.

Рассмотрим маршрут, показанный на Рис. 23.

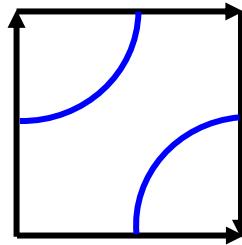


Рис. 23

После разреза, вдоль показанного маршрута, получаем два склеенных и дважды заузленных листа Мёбиуса.

$$K_+^2 \xrightarrow{\alpha} M_+^2 \left(\begin{array}{c} \cup \\ \oplus \end{array} \right) M_+^2 \quad (17)$$

Рассмотрим ещё один маршрут на бутылке Клейна (Рис. 24)

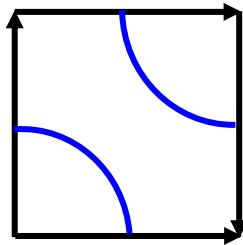


Рис. 24

После разреза вдоль этого маршрута снова получаем лист Мёбиуса, склеенный и один раз заузленный с дважды скрученным листом Мёбиуса.

$$K_+^2 \xrightarrow{\alpha} M_+^2 \left(\begin{array}{c} \cup \\ \Theta \end{array} \right) M_{2+}^2 \quad (18)$$

Чтобы из полоски бумаги получить дважды скрученный лист Мёбиуса необходимо перед склейкой пять раз эту полоску перекрутить на 180° . А для получения просто скрученного листа Мёбиуса M_{1+}^2 необходимо полоску бумаги перекрутить три раза 180° . К слову сказать, для получения, например, скрученного цилиндра необходимо полоску бумаги перекручивать один раз на 360° .

В отличие от проективной плоскости бутылка Клейна имеет два тривиальных маршрута (Рис. 25).



Рис. 25

Разрез вдоль маршрута, показанного на Рис. 25 слева даёт в результате два склеенных цилиндра:

$$K^2 \xrightarrow{\alpha} Z^2 \cup Z^2 \quad (19)$$

А вот разрез вдоль другого маршрута даёт совершенно неожиданный результат. Мы получаем дважды скрученный цилиндр, склеенный сам с собой:

$$K_+^2 \xrightarrow{\alpha} \cup Z_{2+}^2 \quad (20)$$

Если разрезать самосклейку полученного цилиндра, то используя операцию наслойения, можно получить правозакрученный лист Мёбиуса.

В заключении рассмотрим два маршрута на торе (Рис. 26).

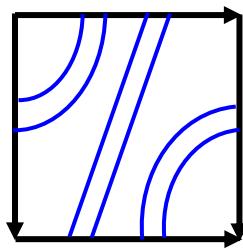


Рис. 26

Т. к. тор является двусторонней поверхностью, то для того чтобы он после разреза мог распасться хотя бы на две фигуры необходимо провести два подобных маршрута.

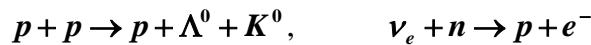
$$T^2 \xrightarrow{\alpha} \left(Z_{2+}^2 \left(\begin{smallmatrix} \cup \\ \oplus \end{smallmatrix} \right) Z_{2+}^2 \right) \oplus Z_{2+}^2 \quad (21)$$

Как видим, после разреза получаем две дважды заузленные фигуры. Одна из которых – это дважды скрученный цилиндр. А вторая представляет собой склейку двух дважды скрученных цилиндров, да ещё и дважды заузленных. Чуть выше мы говорили, что при помощи операции наслойения можно из дважды скрученного цилиндра получить лист Мёбиуса. Т. о. тор, являясь двусторонней поверхностью, после соответствующих преобразований в виде топологических операций может быть превращён в односторонние поверхности в виде листов Мёбиуса.

По аналогии с бутылкой Клейна (10), тор может быть представлен в качестве прямого произведения двух окружностей. Тогда (21) можно переписать в виде:

$$T^2 = S^1 \otimes S^1 \xrightarrow{\alpha} \left(Z_{2+}^2 \left(\begin{smallmatrix} \cup \\ \oplus \end{smallmatrix} \right) Z_{2+}^2 \right) \oplus Z_{2+}^2 \quad (22)$$

Без претензии на какую-то глубокую аналогию заметим, что все преобразования (1) – (9) и (17) – (22) чисто по записи напоминают некоторые преобразования элементарных частиц (см. например [20], стр. 753, стр. 758).



Красивую и очень наглядную иллюстрацию ко всему вышесказанному о торе, скрученном цилиндре и листе Мёбиуса дал С. Варкентин (Рис. 27).

От тора к листу Мёбиуса

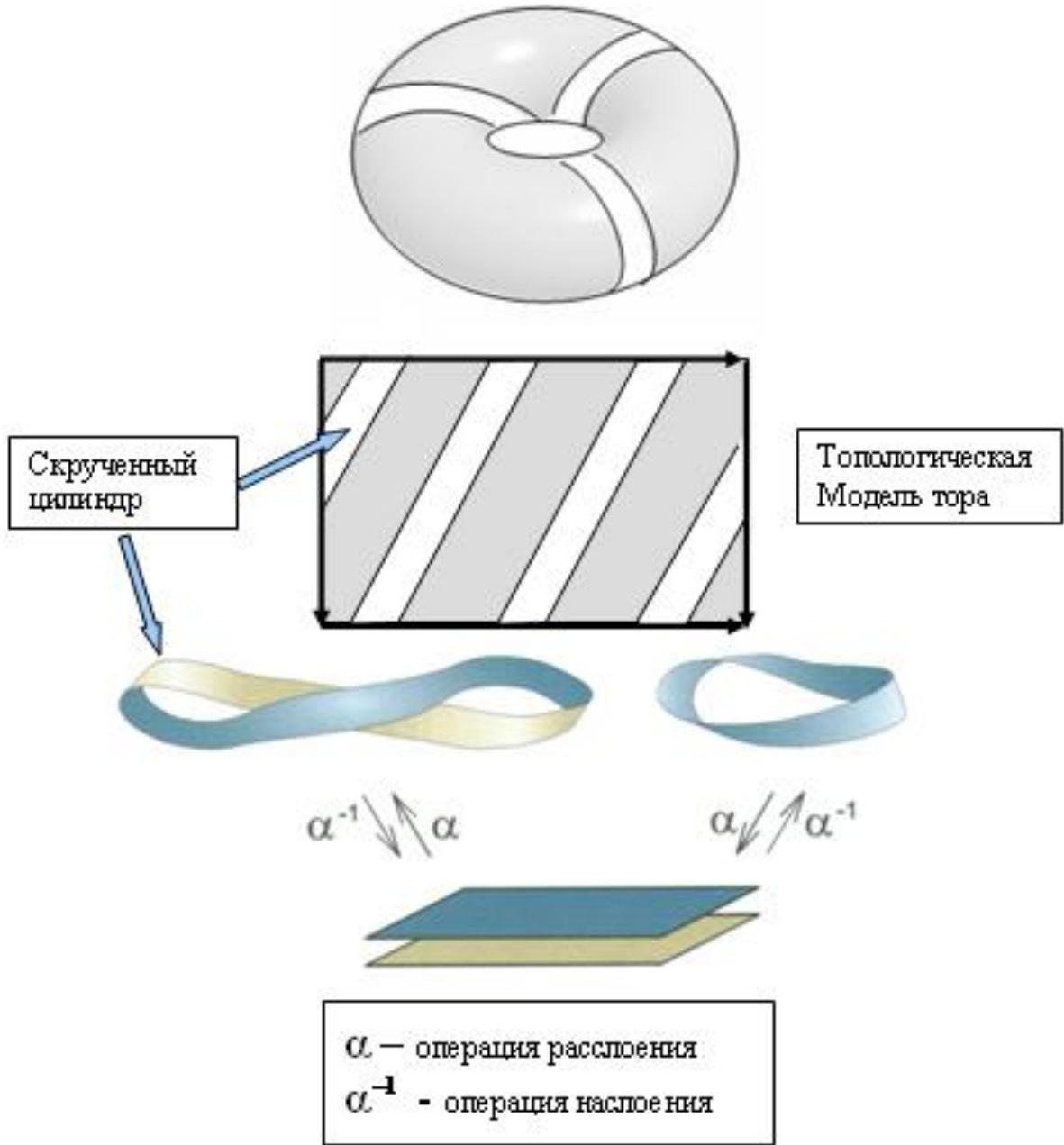


Рис. 27

Теперь покажем аналитические преобразования проективной плоскости в поверхность Штейнера в \mathbf{CP}^3 (комплексном проективном пространстве трёх измерений).

Рассмотрим уравнение сферы единичного мнимого радиуса в \mathbf{CP}^3 .

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = i^2 = -1 \quad (23)$$

Чтобы получить аналитическое описание проективной плоскости используем преобразования, при помощи которых описывается отождествление диаметрально противоположных точек данной сферы:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_k \quad (24)$$

Из преобразований (24) получаем обратные преобразования:

$$\mathbf{x}_i = \sqrt{\frac{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_i}} \quad (25)$$

Теперь, подставим выражения (25) в (23) и после преобразований получаем:

$$\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 + \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_3^2 + \mathbf{u}_3^2 \mathbf{u}_2^2 + \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 = 0 \quad (26)$$

Уравнение (26) ни что иное, как уравнение поверхности Штейнера (римская поверхность или гептаэдр).

Компьютерная интерпретация поверхности Штейнера представлена на Рис. 28

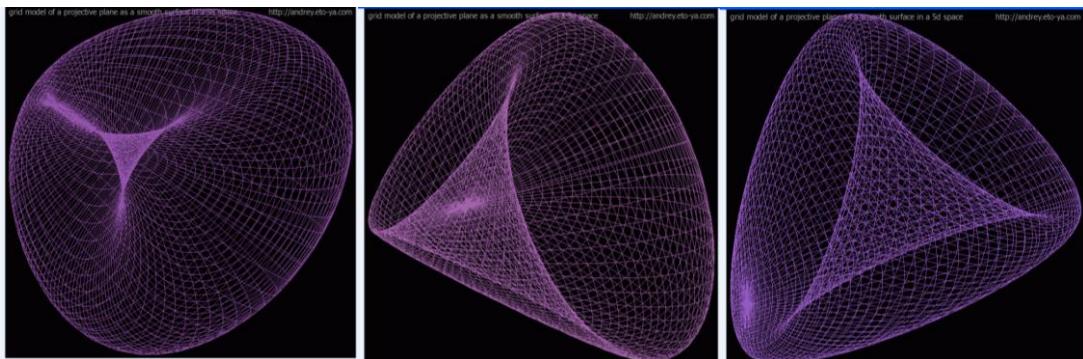


Рис. 28

Литература

1. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, «Наглядная топология», М., «НАУКА», 1982
2. К. Рурк, Б. Сандерсон, «Введение в кусочно линейную топологию», М., «Мир», 1974
3. Н. Стинрод, У. Чинн, «Первые понятия топологии», М., «Мир», 1967
4. Дж. Милнор, А. Уоллес, «Дифференциальная топология», М., «Мир», 1972
5. Ч. Кошёвски, «Начальный курс алгебраической топологии», М., «Мир», 1983
6. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М., «НАУКА», 1981
7. Ю. Г. Борисович и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980

8. С. Барр, «Россыпи головоломок», М., «Мир», 1987
9. Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика?», М., «МЦНМО», 2004
10. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., «НАУКА», 1989
11. Ф. Клейн, «Элементарная математика с точки зрения высшей, Т.2», М., «НАУКА», 1987
12. С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Элементы дифференциальной геометрии и топологии», М., «НАУКА», 1987
13. А. Т. Фоменко, «Симплектическая геометрия», М., «Издательство МГУ», 1988
14. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», М., «НАУКА», 1979
15. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
16. Ф. Герман, « \mathbf{RP}^2 - Проективная плоскость», „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
17. Дж. Франсис, «Книга с картинками по топологии», М., «Мир», 1991
18. Н. А. Глаголев, «Проективная геометрия», М., «Высшая школа», 1963
19. Я. П. Понарин, «Аффинная и проективная геометрия», М., «МЦНМО», 2009
20. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики», Т. 5, М., «Физмат. Лит.», 2002

