Франц Герман

Теория квазикристаллической мозаики на правильных многоугольниках

Насколько мне известно, новых типов мозаик больше никто не открывал,...

Мартин Гарднер

Темой нашего исследования будут правильные многоугольники.

Известно, что любой правильный $\boldsymbol{n}$ - угольник с чётным числом сторон, т. е. квадрат, шестиугольник и т. д., можно замостить (т. е. выложить на его площади мозаику) $\boldsymbol{Z_ч}$ ромбами (см., например, книгу У. Болл, Г. С. М. Коксетер «Математические эссе и развлечения»), где

$$\boldsymbol{Z_ч = \frac{(n-1)^2 - 1}{8}}. \qquad (1)$$

Например:

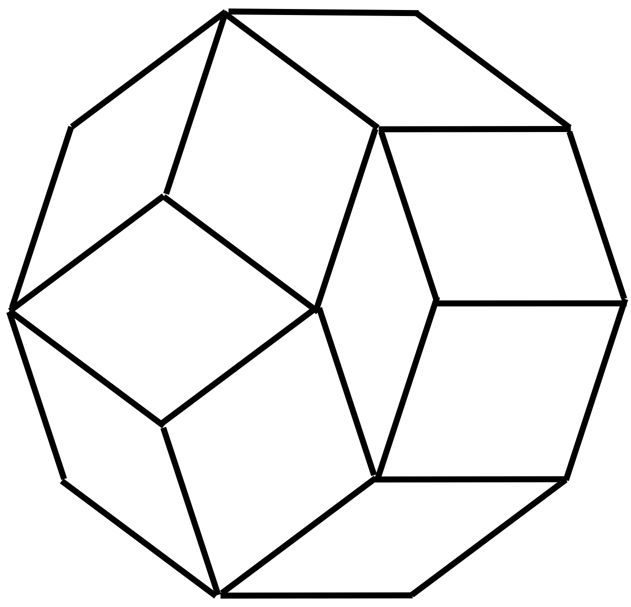

Рис. 1

Здесь $\boldsymbol{n = 10}$ и $\boldsymbol{Z_ч = \frac{(10-1)^2 - 1}{8} = 10}$ т. е. **10** ромбов умещаются на площади правильного **10**-угольника.

Заметим, что формула (1) даёт число ромбов в независимости от их видов. А мы видим, что на площади **10** - угольника разместились ромбы двух видов.

Познакомившись с этим результатом, пытливый читатель может воскликнуть: "здесь какая-то несправедливость. Почему такая мозаика возможна только для чётных многоугольников? А как же быть с нечётными?" Такие или примерно такие же вопросы возникли и у автора, когда он увидел впервые формулу (1).

Именно это и послужило толчком более внимательно посмотреть на правильные многоугольники с нечётным числом сторон. Исследованием этих многоугольников мы теперь и займёмся.

Начнём с самого простейшего $\boldsymbol{n}$ - угольника, т. е. для $\boldsymbol{n}$=**3** (Рис. 2).

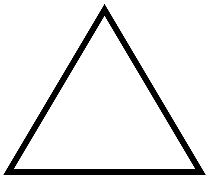

Рис. 2

По существу, это ни что иное как половинка ромба с углами 60° и 120° (Рис. 3).

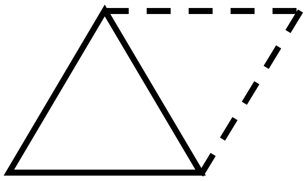

Рис. 3

Сразу возникает гипотеза: а может быть нечётные многоугольники можно замостить ромбами с точностью до половинки ромба? Рассмотрим правильный пятиугольник.

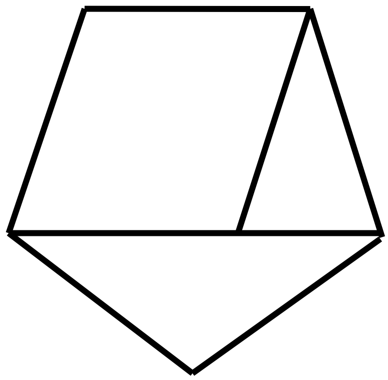

Рис. 4

Как видим, его можно замостить одним целым ромбом и двумя половинками.

Правильный семиугольник имеет мозаику из трёх ромбов и трёх половинок ромбов (Рис. 5).

Заметим, что пятиугольник имеет ромбы и половинки ромбов, принадлежащие к двум тиам ромбов. Семиугольник имеет уже три различных типа ромбов.

Попробуем найти формулу для общего числа ромбов и половинок ромбов для нечётных многоугольников. Мы помним, что формула (1) даёт общее число ромбов в независимости от типов ромбов.

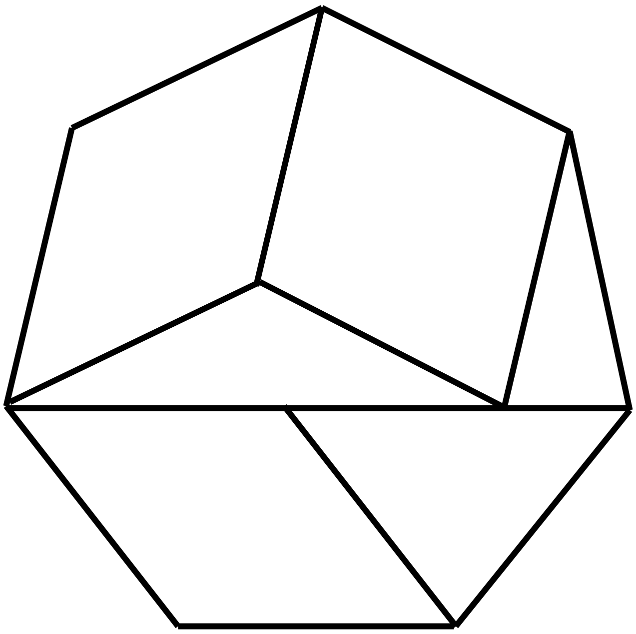

Рис. 5

Введём обозначения.

Будем обозначать через r_i сумму ромбов типа i. Понятно, что для разных многоугольников r_i будут различны, т. е. например r_i для правильного треугольника не равна r_i для правильного пятиугольника и т. д. Общее число ромбов нечётного многоугольника обозначим через. Z_H, тогда, на основе прямых построений, будем иметь:

$$Z_H(3) = r_1 = \frac{1}{2};$$

$$Z_H(5) = r_1 + r_2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2;$$

$$Z_H(7) = r_1 + r_2 + r_3 = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2};$$

$$Z_H(9) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8;$$

и т. д..

Т. е. напрашивается общая формула:

$$Z_H = \frac{(n-1)^2}{8} \qquad (2)$$

Докажем, что это действительно так.

Пусть дан правильный n-угольник, где n - нечётное. Будем последовательно вписывать ромбы, как это показано на Рис. 6. Пусть рассматриваемая часть n-угольника состоит из K сторон.

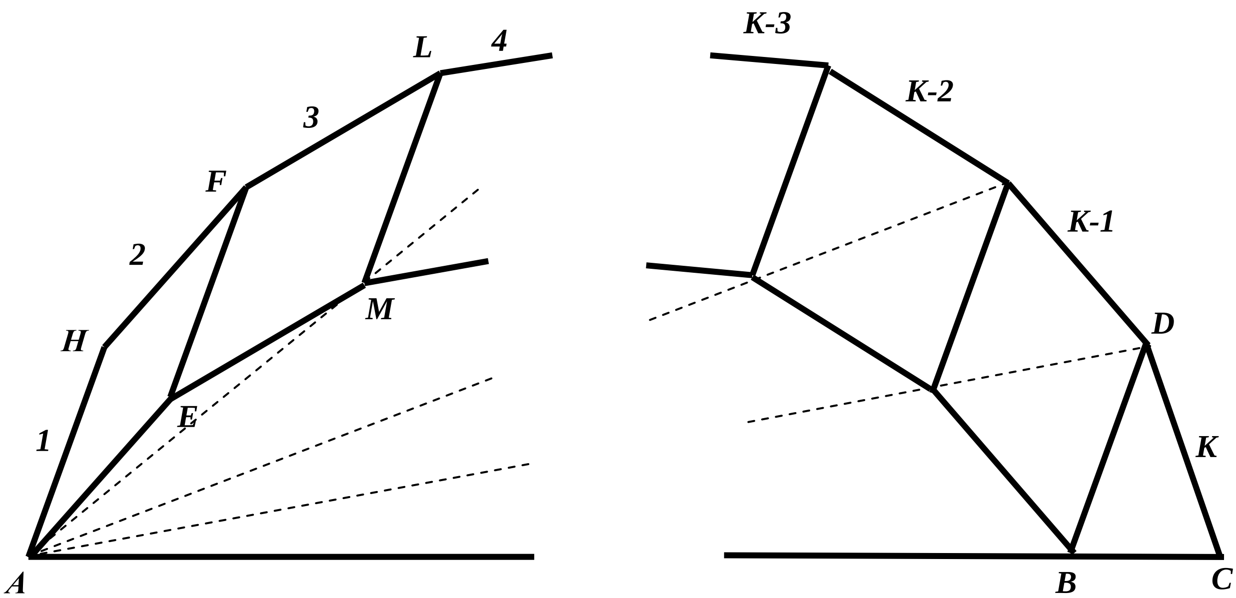

Рис.6

Рассмотрим первый вписанный ромб ***AHFE***. Угол $\angle AHF = \alpha_1 = \pi - \frac{2\pi}{n}$, т. к. мы рассматриваем правильный ***n***-угольник. Тогда смежный с ним угол этого ромба будет равен $\beta_1 = \frac{2\pi}{n}$. Соответственно будем обозначать для каждой стороны i ($i \geq 1$) нашего правильного ***n***-угольника, прилегающие к ней смежные углы ромбов через α_{i-1} и β_{i-1}.

Определим углы ромба ***EFLM***.

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_1 = \pi - \frac{4\pi}{n}; \qquad \beta_2 = \frac{4\pi}{n}.$$

Углы следующего ромба:

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \beta_2 = \pi - \frac{6\pi}{n}; \qquad \beta_3 = \frac{6\pi}{n},$$ и т. д. Очевидно, что

$$\alpha_{K-2} = \pi - \frac{2(K-2)\pi}{n}; \qquad \beta_{K-2} = \frac{2(K-2)\pi}{n}.$$

Соединим точку ***C*** с точкой ***B***, получим равнобедренный треугольник ***DBC***.

Угол $\angle DBC = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(\alpha_1 - \beta_{K-2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \pi + \frac{2\pi}{n} + \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}(K-1).$

Вписанный угол, в описанную окружность нашего ***n***-угольника, стягивающий (***K***-**1**) сторону, как раз равен $\frac{\pi}{n}(K-1)$. Следовательно, угол $\angle DCB$ и есть такой угол. А из этого следует, что точки ***A, B*** и ***C*** лежат на одной прямой.

Следовательно, вписывая таим образом ромбы, мы получим (***K***-**1**) их различных видов. Причём, (***K***-**2**) целых ромба и одну половинку.

Всегда ли вписанные таким образом ромбы действительно будут различны?

Рассмотрим случай, когда

$$\beta_i = \alpha_{i+1}.$$

Отсюда имеем:

$$\beta_i = \frac{2i\pi}{n}.$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_1 - \beta_i = \pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n}$$

По предположению $\beta_i = \alpha_{i+1}$, следовательно

$$\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n} = \frac{2i\pi}{n}.$$

Откуда находим, что $n = 2(2i+1)$. Но n нечётно. Получаем противоречие.

Случая же, когда $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ вообще существовать не может ни при каких n. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателям.

Т. о. ситуация равных по виду ромбов может возникнуть только в случае, когда наш многоугольник имеет чётное число сторон. А т. к. мы рассматриваем нечётные многоугольники, то получаемые таким построением ромбы будут различны по видам.

Кстати, оставляем на самостоятельное рассмотрение читателям и более общие случаи $\alpha_i = \alpha_{i+m}$ и $\beta_i = \alpha_{i+m}$.

Теперь нам необходимо определить максимальное число сторон K, при котором возможно такое построение ромбов.

Рассмотрим фрагмент Рис. 6, дополнив его ещё одной стороной $K+1$ (Рис. 7).

Нас будет интересовать случай, когда отрезки DB и CT не будут параллельны, причём расположены они будут таким образом, что $\alpha_1 + \alpha_{K-1} < \pi$.

Из этого условия получаем

$$\alpha_{K-1} + \alpha_1 = \left(\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi n - 4\pi(K-2)}{n} < \pi.$$

Откуда: $K > \frac{n}{2}$.

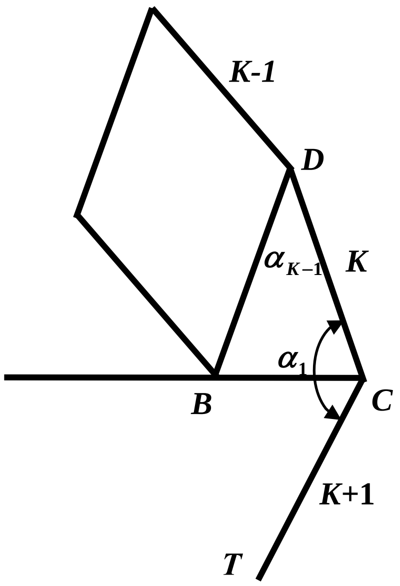

Рис. 7

$\boldsymbol{K}$ – это целое число. Поэтому наименьшее целое число, большее $\frac{n}{2}$ будет число $\frac{n+1}{2}$. Т. е. $K = \frac{n+1}{2}$.

Проведя в $\boldsymbol{n}$-угольнике максимально возможную диагональ, мы поделим его на две части, состоящие из $\frac{n+1}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$ сторон многоугольника и общей диагонали.

Строя ромбы на сторонах, как это было описано выше, мы получим $i = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ различных видов ромбов на большей части и $\boldsymbol{n}$-угольника и $i = \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ на его меньшей части. Причём очевидно, что ромбы на малой части и $\boldsymbol{n}$-угольника не расширяют множество видов, полученных построением на большей части $\boldsymbol{n}$-угольника. (Вид ромба определяет угол α_K).

Рассмотрим ломаную линию ***AEK*** ... ***B***. Понятно, что она состоит из $\frac{n+1}{2} - 2$ отрезков, равных между собой и параллельных сторонам нашего многоугольника **2, 3, 4**, ... , ***K*-1** соответственно (Рис.6). Следовательно, на этой ломаной, как на части многоугольника, можно построить $\left(\frac{n+1}{2} - 2\right) - 1$ ромбов различного вида.

Покажем получаемую цепь ромбов по видам. Для удобства и наглядности сведём все данные о видах ромбов в Таблицу 1.

Таблица 1

	r_1	r_2	r_3	r_4	…	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n+1}{2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	…	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2}-2$	**1**	**1**	**1**	**1**	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	1	1	$\frac{1}{2}$		…			
2	$\frac{1}{2}$				…			

Данная таблица представляет виды вписанных ромбов в большую часть $\boldsymbol{n}$-угольника, т.е. ограниченную $\frac{n+1}{2}$ сторонами.

Аналогичную таблицу представим и для второй части $\boldsymbol{n}$-угольника, т. е. - с числом сторон $\frac{n-1}{2}$.

Таблица 2

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	…	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n-1}{2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
5	**1**	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$		…			
3	**1**	$\frac{1}{2}$				…			

Таблица 1 и Таблица 2 описывают мозаику $\boldsymbol{n}$-угольников, для которых $K=\frac{n+1}{2}$ - чётное, т. е. это многоугольники с числом сторон **3, 7, 11, 15,** ...

Из этих таблиц видим, что в каждом виде имеется какое-то число целых ромбов и одна половинка.

Определим сколько ромбов в каждом виде.

Рассмотрим столбец $\boldsymbol{K}$ (первый столбец) Таблицы 1. Он представляет собой арифметическую прогрессию:

$$\mathbf{2,\ 4,\ 6,\ ...,\ \frac{n+1}{2}}.$$

Очевидно, что такая последовательность имеет $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n+1}{4}$ членов. Каждому члену, кроме первого, сопоставлен целый ромб (столбец $\boldsymbol{r_1}$ Таблицы 1). Поэтому всего ромбов вида $\boldsymbol{r_1}$ из Таблицы 1 получаем:

$$r_1=\frac{n+1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{4}.$$

Не трудно получить и число ромбов по остальным видам.

$$r_2=r_1-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n-3}{4},$$

$$r_3=r_2-\frac{1}{2}=\frac{n-3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n-5}{4}.$$

и т. д.

$$r_i=r_{i-1}-\frac{1}{2}=\frac{n-(2i-1)}{4}$$

Рассмотрим Таблицу 2. Первый столбец этой таблицы представляет собой опять же арифметическую прогрессию:

$$\mathbf{3,\ 5,\ 7,\ ...,\ \frac{n-1}{2}}.$$

Число членов такой прогрессии равно $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)=\frac{n-3}{4}$ Каждом члену прогрессии сопоставлен один ромб (см. столбец r_1 Таблицы 2). Поэтому ромбов вида r_1 в Таблице 2 имеется:

$$r_1=\frac{n-3}{4}.$$

Также, как и в первом случае, находим число ромбов по остальным видам.

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4}$$

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-7}{4}$$

и т. д.

$$r_i = r_{i-1} - \frac{1}{2} = \frac{n-(2i+1)}{4}$$

Сложив выражения r_i для первой и второй таблицы, получаем общую формулу для вычисления числа ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n-(2i-1)}{4} + \frac{n-(2i+1)}{4} = \frac{n-2i}{2}. \qquad (3)$$

Теперь мы можем определить общее число ромбов в мозаике нашего n-угольника. Ранее мы говорили, что такой n-угольник имеет $\frac{n-1}{2}$ видов различных ромбов. Подставляя значения $i = \left\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right\}$ в формулу (3), получаем такую последовательность:

$$\frac{n-2}{2};\quad \frac{n-4}{2};\quad \frac{n-6}{2};\quad \ldots\quad \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что это арифметическая прогрессия, т. к. разность членов a_{i+1} и a_i здесь постоянна. Напомним формулу для вычисления суммы арифметической прогрессии имеющей K членов:

$$S = \frac{a_1 + a_K}{2} K.$$

В нашем случае $a_1 = \frac{n-2}{2}$, $a_K = \frac{1}{2}$, $K = \frac{n-1}{2}$. Получаем:

$$\frac{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{(n-1)^2}{8}.$$

Как видим, мы получили формулу (2). Что и требовалось доказать.

Но это только часть доказательства. Как уже говорилось, всё это справедливо для $\boldsymbol{n}$-угольников с числом сторон **3, 7, 11,...**.

Построим аналогичные таблицы (Таблица 3, Таблица 4) для $\boldsymbol{n}$-угольников, у которых $\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{n}+1}{2}$ - нечётное. Это многоугольники с числом сторон **5, 9, 13**,..

Таблица 3

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	…	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K = \frac{n+1}{2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2} - 2$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
5	**1**	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$		…			
3	**1**	$\frac{1}{2}$				…			

Таблица 4

	r_1	r_2	r_3	r_4	…	$r_{\frac{n-3}{2}-2}$	$r_{\frac{n-3}{2}-1}$	$r_{\frac{n-3}{2}}$
$K = \frac{n-1}{2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	…	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2} - 2$	**1**	**1**	**1**	**1**	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$		…			
3	$\frac{1}{2}$				…			

Вся работа передана в РАН