Франц Герман

RP^2 - Проективная плоскость

LAP LAMBERT Academic Publishing

Франц Герман

RP^2 - Проективная плоскость

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

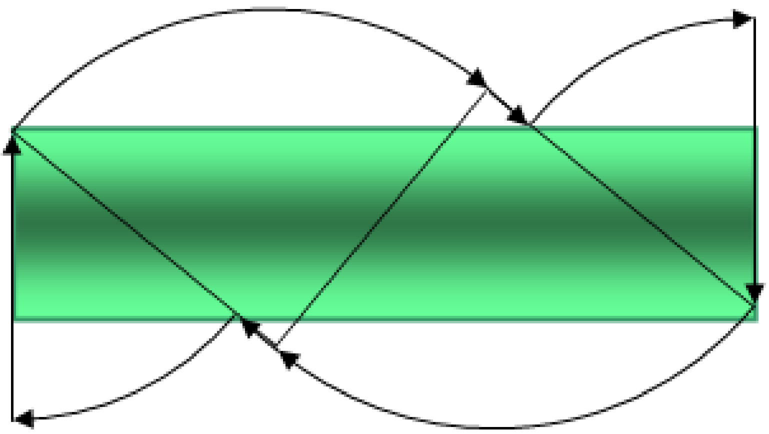
Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-77113-2

Франц Герман

RP² – проективная плоскость



2015

Франц Герман

Проективная плоскость – RP^2.

Содержание

Глава 1
КД – конфигурации.

1. Введение

Скажем несколько слов о цели нашего исследования.

Самым фундаментальным принципом проективной геометрии является принцип двойственности.

Своим рождением принцип двойственности обязан введению в проективную геометрию понятия однородных координат (Julius Plücker).

Уравнение прямой $T(t_1 : t_2 : t_3)$ на RP^2 (RP^2 - традиционное обозначение действительной проективной плоскости), проходящей через точку $X(x_1 : x_2 : x_3)$, на этой же плоскости, имеет вид:

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = 0 \tag{1}$$

Как видим, координаты прямой и координаты точки совершенно равноправны (симметричны) в уравнении (1), т.е. мы с таким же успехом могли бы сказать, глядя на данное уравнение, что прямая $X(x_1 : x_2 : x_3)$ проходит через точку $T(t_1 : t_2 : t_3)$.

Это положение и является ключевым в рождении принципа двойственности.

Таким образом, сыграв свою роль в появлении принципа двойственности, однородные координаты уже более никогда не упоминаются (по крайней мере, автору это не известно) в связи с данным принципом.

Сам же принцип двойственности являет собой только положение о равноправии инцидентности точек и прямых на RP^2.

Между тем (и это очевидно), если на RP^2 существует точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$, то существует и прямая $T(x_1 : x_2 : x_3)$. Таким образом, возникает смысл исследовать именно координатный принцип двойственности.

В чём суть данного исследования.

Нас будет интересовать, возможно ли, взяв K точек с координатами $X_k(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})$ на RP^2, объединить их в некую конфигурацию K прямыми T_k с такими же координатами $(x_{k1} : x_{k2} : x_{k3})$.

Мы исследуем несколько таких конфигураций, а также рассмотрим некоторые свойства полярных отображений, связанные с координатным принципом двойственности.

2. Вспомогательные теоремы.

Определение: если на $\boldsymbol{RP^2}$ заданы $\boldsymbol{K}$ прямых и $\boldsymbol{K}$ точек, принадлежащих этим прямым, и для каждой прямой существует координатно-двойственная ей точка, то такую совокупность точек и прямых будем называть координатно-двойственной конфигурацией (КД – конфигурацией) порядка $\boldsymbol{K}$.

Докажем несколько теорем, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1 (принцип неинцидентности)

Координатно-двойственные точки и прямые никогда не инцидентны.

Доказательство:

Это почти очевидно, т. к. в противном случае уравнение (1) имело бы вид: $\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0}$, а это невозможно ни при каких условиях, т. к. в проективной геометрии не существует точки с однородными координатами (0 : 0 : 0).

Следовательно, инцидентность невозможна.

Для удобства записи введём обозначение координатно-двойственного соответствия точки и прямой: «<≡>».

Т. е. запись $\boldsymbol{A <\equiv> a}$ будет обозначать, что точка $\boldsymbol{A}$ координатно-двойственна прямой $\boldsymbol{a}$.

Теорема 2 (принцип взаимности)

Если $\boldsymbol{A <\equiv> a}$ и $\boldsymbol{B \in a}$, то прямая $\boldsymbol{b <\equiv> B}$ проходит через точку $\boldsymbol{A}$.

Доказательство:

Пусть прямая $\boldsymbol{a}$ задаётся уравнением:

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0}, \qquad (2)$$

и точка $\boldsymbol{B(b_1 : b_2 : b_3) \in a}$, т.е. можем записать:

$$\boldsymbol{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0}, \qquad (3)$$

тогда прямая $b <\equiv> B$ обязательно пройдёт через точку $A(a_1 : a_2 : a_3)$.

Действительно:

Уравнение прямой b имеет вид: $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$

и т.к. справедливо (3), заключаем, что прямая b проходит через точку $A(a_1 : a_2 : a_3) <\equiv> a$.

Следствие: Если на RP^2 даны две точки A и B, и, соответственно, координатно-двойственные им прямые a и b, то прямая $AB <\equiv> (a \cap b)$.

Доказательство:

Проведём через A и B прямую. В силу принципа взаимности координатно-двойственная точка прямой AB должна принадлежать прямой a и одновременно и прямой b. Следовательно, это точка $(a \cap b)$, т.е. $AB <\equiv> (a \cap b)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 3 (о двойственности координатного репера)

Если на RP^2 имеется треугольник $A_1 A_2 A_3$, то всегда существует працтивный репер, в котором вершины и стороны данного треугольника координатно-двойственны.

Доказательство:

Выберем в качестве репера вершины нашего треугольника $\{A_1; A_2; A_3\}$, т. е. $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$. Уравнения прямых $A_2 A_3$, $A_1 A_3$, $A_1 A_2$ в этом случае соответственно будут иметь вид:

$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$,

или

$A_2 A_3 (1:0:0)$; $A_1 A_3 (0:1:0)$; $A_1 A_2 (0:0:1)$.

Как видим, стороны треугольника координатно-двойственны соим противоположным вершинам.

Что и требовалось доказать.