**Франц Герман**
franz.h-n@yandex.ru

# Тени квантовой гравитации
(фантазия в помощь теоретической физике)

*«... описывать законы, не прибегая к геометрии,*
*- это всё равно, что пытаться выразить мысли,*
*не прибегая к языку»* [14]

А. Эйнштейн

*«На первом месте я ставлю понятие о*
*пространстве, »* [43]

О. Конт

Скажем два слова о цели данной работы. Мы не собираемся здесь построить конкретную физическую теорию – эта задача для физиков. На страницах данного исследования мы попробуем поговорить о некоторых закономерностях в существующих физических теориях, которые, на наш взгляд, могли бы подсказать увидеть некоторые ключевые черты будущей теории. Мы постораемся сделать это на популярном уровне, не прибегая к сложным математическим выкладкам.

## Зачем нужна квантовая гравитация?

Современная наука ожидает от этой теории, во-первых, решения основного вопроса стандартной модели (СМ) – великого объединения всех четырёх взаимодействий. Наметились несколько путей к объединению сильного и электромагнитного взаимодействия (слабое и эл.-магнитное уже объединены). Но гравитационное взимодействие никак не хочет объединяться.

Квантовая теория гравитации (КТГ) должна быть предельной теорией для тех теорий, которые сегдня считаются физиками уже класситескими и со всех сторон проверенными. Это общая теория относительности (ОТО) и квантовая механика (КМ).

Современная наука ждёт ответов от КТГ также на следующие вопросы: как происходило рождение Вселенной, как объяснить многие непонятные эффекты чёрных дыр и существуют ли микро чёрные дыры, как они могли вообще появиться? Общие впросы сингулярности» ([48], стр. 282). КТГ должна помочь заглянуть в микромир так, чтобы было понятно, как формируются орбитали атомов и что представляет собой само ядро. На что похоже ядро больше, на водяную каплю или на колючий как ёж многогранник? И наконец, что же такое тёмная материя и тёмная энергия? Связаны ли они Эйнштейновской формулой или как-то по иному?

Вообще без квантовой гравитации, наверно, невозможно узнать, как на самом деле ведут себя пространство и время.

## Двойственность в науке

Одним из объектов двойственности, который является сегодня лицом современной физики, - это, безусловно, **пространство-время**. Во времена ньютоновской физики понятия «пространство» и понятие «время» существовали независимо друг от друга. Сегодня теоретики говорят о таких явлениях в чёрных дырах, когда пространство и время меняются местами. Т. е. пространство-время вроде бы выворачивается наизнанку. Физическое понятие (объект) пространство-время стал единым целым и двойственность становится основным его свойством.

Нельзя не отметить такой факт двойственности в физической науке, как – **масса-энергия**. Этот факт подтверждён сегодня во множестве экспериментов на современных ускорителях и математически выражается в известной формуле Эйнштейна: $\boldsymbol{E = Mc^2}$.

Невозможно представить сегодняшний мир без влияния на него такой физической теории, как электродинамика. И здесь мы сталкиваемся с проявлением двойственности в виде такого явления, как электромагнетизм. Т. е. опять двойственность: **электричество-магнетизм.**

С приходом КМ появился новый тип двойственности, к которому мы ещё по сути так и не можем привыкнуть: **частица-волна**. И это ещё не всё. В современной ядерной физике проявился ещё один пример двойственности, возможно, один из фундаментальнейших: **вещество-поле**. Существуют элементарные частицы, из которых строится вещество. Например, электрон. А существуют элементарные частицы, которые являются только переносчиками взаимодействия. Например, фотон – это частица, которую ещё называют гамма-квант, связывает между собой электроны. Фотон – это не вещество, а электромагнитное поле. Сначала физики приняли такое различие между частицами вещества и поля. Частицы вещества имеют ненулевую массу покоя и дробный спин. Частицы поля имеют нулевую массу покоя и целочисленный или нулевой спин. Но вот было открыто новое поле, поле ядерных сил, которое осуществляет взаимодействие внутри ядра. Переносчиком его взаимодействия является частица $\boldsymbol{\pi}$(пи)-мезон. Эта частица проявляет себя, то как частица вещества (в свободном состоянии распадается на другие частицы и имеет массу покоя), то ведёт себя как частица ядерного поля (и спин у неё нулевой). Снуёт в орбитале ядра, а то и в ядро ныряет и превращает протон в нейтрон и обратно. В общем двойственность налицо.

Вообще с появлением КМ двойственность стала проявляться чуть ли не во всём и причиной тому принцип неопределённости, который порождает двойственность: **точность-неточность**. Например, чем точнее мы вычисляем импульс частицы, тем неточнее будут её координаты в пространстве и наоборот.

А как же быть с математикой, спросите вы. Ведь математика – это тот маяк который освещает весь путь физики. Оказалось, что и математика кишит примерами двойственности. Мы не будем здесь развивать эту тему, но приведём только два характерных примера, которые в бущем нам потребуются.

Первый пример двойственности относится к геометрии - это: **точка-прямая** на проективной плоскости (в проективном пространстве: **точка-плоскость**). Эту двойственность подметил известный немецкий учёный (физик, математик) XIX-го века Ю. Плюккер. Невозможно по уравнению прямой на проективной плоскости определить точка $\boldsymbol{X}$ с координатами $x_i$ лежит на прямой $\boldsymbol{U}$, с координатами $u_i$ или прямая $\boldsymbol{X}$ с координатами $x_i$ проходит через точку $\boldsymbol{U}$, с координатами $u_i$. В проективной геометрии эта неразлечимость точки и прямой так и называется: «принцип двойственности».

Второй наш пример из общей топологии. Он скорее всего не известен неискушённому читателю, поэтому требует дополнительных пояснений.

Все поверхности, а в общем случае – это топологические многообразия, делятся на два типа: ориетированные и неориентированнные. Простейшим примером таких поверхностей служат цилиндр и лист Мёбиуса. Ориентированный или неориентированный в простейшем случае можно сказать соответственно: двусторонний и односторонний. Первый объект (например, цилиндр) можно вывернуть наизнанку, второй (например, лист Мёбиуса) это сделать невозможно – у него всего одна сторона.

Так вот, проективные пространства являются носителеми примера топологической двойственности: **ориентированное-неориентированное**. Говоря о проективном пространстве обязательно надо сделать уточнение, *какой размерности это пространство*. Все проективные пространства (в математике принято их обозначать: $\boldsymbol{RP}^n$, здесь первая буква «$\boldsymbol{R}$» в обозначении означает, что пространство рассматривается в поле действительных чисел.) нечётной размерности ориентированные, а чётной – неориентированные ([53], стр. 200). Например, $\boldsymbol{RP}^2$ - проективная плоскость - является неориентированным многообразием (сродни листу Мёбиуса и бутылки Клейна), а многообразие $\boldsymbol{RP}^3$ - проективное пространство - ориентированное (сродни сфере, цилиндру, тору...). Казалось бы парадоксальная ситуация. Например, объединение всех проективных плоскостей (а они все неориентированы) – включены в проективное трёхмерное пространство и оно – ориентировано, т. е. проективные плоскости так умеют «перепутываться», что получается пространство ориентированное (звучит, как парадокс), причём, большей размерности. Математически это можно записать так:

$$\bigcup \boldsymbol{RP}^2 \subseteq \boldsymbol{RP}^3 .$$

Отметим, что проективные многообразия $\boldsymbol{RP^n}$ при $\boldsymbol{n = 0}$ и $\boldsymbol{n = 1}$ (точка и прямая) оба являюся ориентированными.

Можно продолжить список математических примеров. Например, существуют такие преобразования, на основании которых все Платоновы тела можно рассматривать с точки зрения принципа двойственности ([34], стр. 166).

Справедливости ради надо отметить, что всеобъемлемость принципа двойственности была замечена очень давно ещё французским геометром М. Шалем ([33], стр. 66). Как говорит писатель: «Природа – двулика» ([17], стр. 182).

Все эти примеры позволяют нам выдвинуть первую гипотезу нашего исследования.

***Гипотеза* 1**

***Принцип двойственности – это один из фундаментальных законов Мироздания, который должен проявляться во всех физических теориях.***

Уже после создания ОТО Эйнштейн (и не только он один) всю оставшуюся жизнь пытался построить общую теорию поля, как теорию всего. Мы знаем, что этот опыт был неудачным. Возможно, существование принципа двойственности и его всеобъемлемость уже обрекало такую попытку на провал.

Наверное, в рамках *Гипотезы* 1 можно говорить и о дискретности и непрерывности нашего пространства, а также о двойственности: **мега-микро**, но об этом будет разговор чуть позже.

## Геометрия пространства

ОТО – это, по сути, теория о пространстве, вернее, - пространстве-времени. Некоторые учёные считают появление ОТО несколько искусственным. В общем-то ничто особо и не предвещало её появления. Астрономы прекрасно обходились теорией Ньютона. Да, орбита Меркурия выпадала из общего правила астрономии, но это не мешало физикам откладывать этот вопрос на потом. Во всём остальном физики чувствовали себя нормально, хотя и были более острые проблемы, чем орбита Меркурия.

С появлением специальной теории относительности мир евклидового пространстранства дрогнул, а создание ОТО и вовсе этот мир разрушило.

Геометрией пространства-времени плотно завладела идея римановой геометрии на многие десятилетия. Физики просто забыли про существование других геометрий. А между тем, ещё английский геометр А. Кэли говорил, что в основе всех геометрий лежит проективная геометрия.

В самом начале нашего исследования говорилось, что КТГ призвана объяснить начало Вселенной. И просто, рассуждая с позиций логики, можно редположить, что и геометрия Мироздания должна начинаться с геометрии, которая лежит в основе всех геометрий, т. е. с проективной геометрии [56].

С возникновением КМ, понятие о геометрии пространства вообще стало исчезать. Все события КМ, как известно, происходят не в геометрическом, а конфигурационном пространстве. Однако представление о волнах в конфигурационном пространстве КМ возможно в общем случае только с помощью неевклидовой геометрии ([16], стр. 61). Кроме того и «проективные пространства возникают *естественным* (выделено нами, Ф. Г.) образом также в квантовой механике» ([54], стр. 114).

Мы не случайно взяли математические примеры принципа двойственности из проективной геометрии. Совсем недавно московским математиком-исследователем Л. И. Верховским была сформулирована интересная гипотеза [52]:

***Гипотеза* 2**

***«Геометрической основой физического мира служит трёхмерное (действительное) проективное пространство, ... »***.

В рамках *Гипотезы* 2 приведём ещё один пример математического принципа двойственности. Введение абсолюта (кривой второго порядка, как инварианта) на проективной плоскости индуцирует *всегда* две геометрии: эллиптическую (Римана) и гиперболическую (Лобачевского) ([29], стр. 197), т. е. имеем двойственность: **эллиптический-гиперболический**.

Принцип двойственности проходит «красной» чертой в нашем исследовании и мы будем не только опираться на его примеры, но и использовать этот принцип в качестве подсказки или даже дополнительного инструмента познания.

Вернёмся к примеру с электромагнетизмом. Вроде бы всё правильно и понятно на макроуровне, т. е. в нашем мире. Однако, если заглянуть глубже, оказывается не всё так гладко. В микромире существует элементарная частица электричества – электрон, а частицы с элементарным магнитным зарядом до сих пор не обнаружено (([57], стр. 70-77). Теория говорит, что такая частица должна быть. Известны возможные её характеристики. Магнитные монополи массово могли образовываться во время начала зарождения Вселенной, но потом, что с ними случилось? Ссылаясь на *Гипотезы* 1 и 2, можем предположить, что мы не там и не то ищем. Вспомним первый пример из математики. Принцип двойственности говорит, что на проективной плоскости точка двойственна прямой. Помним также, что геометрия пространства в те времена должна быть именно проективной. Может быть и монополь надо искать не в виде точки (частицы), а в виде прямой (проективной прямой). Напомним также, что все прямые на проективной плоскости замкнуты. Правда с тех времён прошло очень много времени и не известно, сохранились ли реликтовые монополи, но это уже другая задача.

Рис. 1

Рассмотрим ещё один пример двойственности, с которым не всё ясно. Речь пойдёт о двойственности: **притяжение-отталкивание**.

В поле электрических сил этот принцип хорошо выполняется – одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые притягиваются. В поле ядерных сил тоже всё хорошо. Два нуклона притягиваются, не давая ядру развалиться. Но стоит этим нуклонам приблизиться на определённое расстояние, как включается механизм отталкивания, который не даёт нуклонам в ядре слиться.

А вот в поле гравитационных сил что-то не так. Сила притяжения существует, а силы гравитационного отталкивания нет или она так мала, что мы её не видим. Как же быть? Или принцип двойственности в гравитации нарушается? Отвлечёмся не на долго и проведём такой эксперимент (это, действительно, можно проделать в домашних условиях).

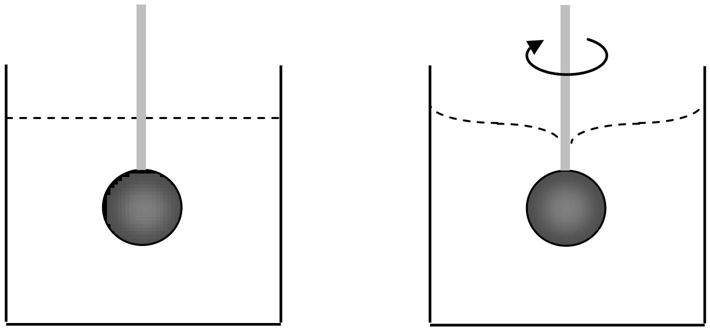

Рис. 2

Закрепим в прозрачном цилиндрическом сосуде с водой плотный каучуковый шар, жёстко соединённый с вердикальной осью вращения (Рис. 2 слева). После включения двигателя, буквально через несколько секунд, замечаем, что уровень воды в сосуде изменил свою форму. Зеркало уровня перестало быть плоским. Края уровня у стенки сосуда немного поднялись, а у оси вращения просели к шару (Рис. 2 справа). Создаётся впечатление, что вращающийся шар отталкивает от себя воду и она, т. к. ей некуда деваться, начинает изменять зеркало уровня.

Конечно же, ни о какой гравитации здесь речь не идёт, но возникает аналогия. *Если масса может искривлять пространство и создавать волны притяжения, то, может быть, вращающаяся масса отталкивает от себя пространство, т. е. создаёт волны отталкивания?* Причём силы притяжения $\boldsymbol{F}_{\text{п}}$ направлены к центру массы, а силы отталкивания $\boldsymbol{F}_{\text{о}}$ направлены перпендикулярно от оси вращения этой массы.

Получается такая картина Рис. 3.

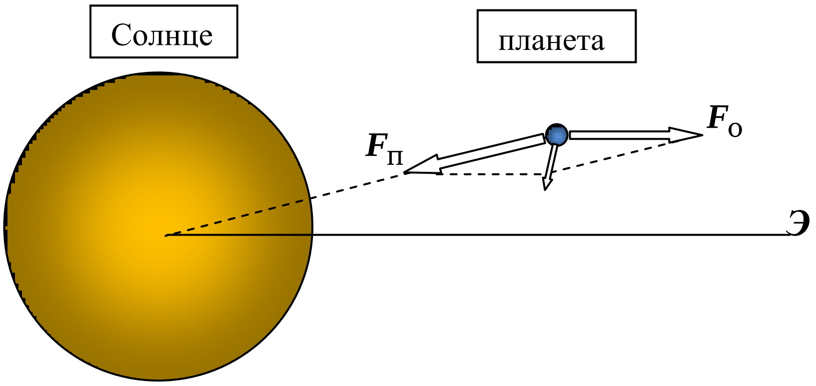

Рис. 3

Сила притяжения тянет планету к центру Солнца. Сила отталкивания тянет планету от Солнца. А результирующая сила засавляет её двигаться в сторону некоторой плоскости, которую в науке принято называть плоскостью эклиптики. Что мы и наблюдаем в действительности – все планеты и их спутники (более 170 штук в Солнечной Системе) практически лежат в одной плоскости. Возможно, этот просс – укладывания планет и их спутников в одну плоскость – ещё не завершён в силу малости гравитационной силы отталкивания и не все планеты ещё окончательно легли в плоскости эклиптики? Слово за астрономами.

Возможно, все эти рассуждения о магнитном монополе и гравитационной силе отталкивания - только плод нашей фантазии, но принцип двойственности – это научная реальность, которая подталкивает нас принять *Гипотезу* 1 за объективный научный закон.

## Трансформация метрики

Математический аппарат ОТО – это по сути дела дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Возможно, именно дифференциалная геометрия ляжет в основу математического аппарата будущей теории. Мы имеем в виду КТГ. Что же даёт нам увереность говорить в этом направлении? Такое предположение требует расшифровки.

Как правило, принцип неопределённости Гейзенберга задаётся выражением $\Delta \boldsymbol{p} \cdot \Delta \boldsymbol{x} \geq \hbar$. В КМ особо не придаётся значения геометрическим тонкостям, т. е., например, импульс рассматривают (записывают) только вдоль оси $\boldsymbol{x}$. Мы считаем, что более корректно надо было принцип неопределённости записывать в виде $\Delta \boldsymbol{p}^i \cdot \Delta \boldsymbol{x}_i \geq \hbar$, т. е. импульс рассматривается вдоль каждого направления (здесь используется правило суммирования Эйнштейна по одинаковым верхним и нижним индексам). Как оказалось, *выражение* $\Delta \boldsymbol{p}^i \cdot \Delta \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ *может быть преобразовано, при определённых допущениях, в известную систему уравнений Френе дифференциальной геометрии* (см. ***Математическое приложение* 1**). Система уравнений Френе – одно из фундаментальных понятий дифференциальной геометрии – говорит о том, что в каждой точке пространственной кривой может задан основной триэдр ([6], стр. 30), при помощи которого может быть исследована данная кривая (Рис. 4). Основной триэдр можно представить в виде трёх взаимно перпендикулярных плоскостей. Уравнения Френе связывают векторы этого триэдра с понятиями кривизны $\boldsymbol{k}$ и кручения $\aleph$ данной кривой. Забегая вперёд, скажем, что *в ОТО вообще не упоминается ни о каком кручении*, как будто такого понятия в дифференциальной геометрии вообще не существует (мы надеемся, что в КТГ этот пробел будет исправлен).

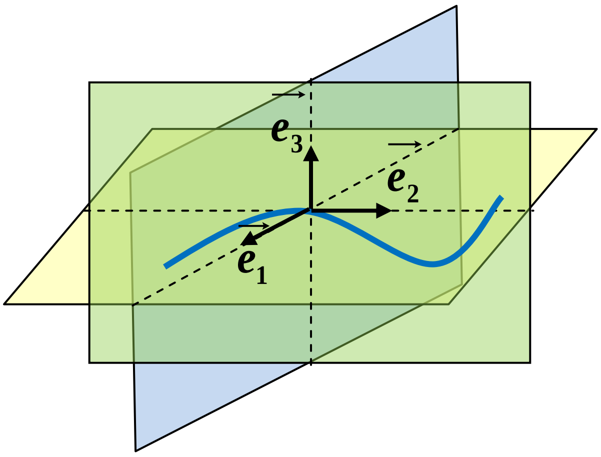

Рис. 4

Различают внешнюю и внутреннюю кривизну пространства ([19], стр. 411), которые являюся суммой и произведением локальных кривизн.

Поэтому локалные кривизны $k_i$ могут быть объединены однм уравнением $K^2-S\cdot K+P=0$, где $S=k_1+k_2$, $P=k_1\cdot k_2$. Внутренняя кривизна ещё носит название Гауссовой. Гауссова криизна может быть выражена ([38], стр 53):

$$K=\frac{1}{2}R_{ij}g^{ij}.$$

Система уравнений Френе в матричном виде ([7], стр. 58), может быть записана: $e_i'=b_i^j\cdot e_j$, здесь матрица $B=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \aleph\\ 0 & -\aleph & 0\end{pmatrix}$.

Кривизна и кручение связаны обратным соотношением $\aleph=\frac{1}{k^2}f$ ([5], стр. 73), где функция $f$ зависит от радиус-вектора кривой и его производных. Если для кривой выполняется соотношение $\frac{\aleph}{k}=const\neq 0$, то такая кривая называется линией откоса ([5], стр. 107). Если кривая задана натуральными уравнениями $\aleph=\aleph(s)$ и $k=k(s)$, то общее уравнение кривой $g=g(s)$ определяется единственным образом с точностью до положения в пространстве, а функция $f$ - это смешаное произведение трёх производных: $f=(g',g'',g''')$ ([32], стр. 419). Натуральный параметр $s$ задаёт длину кривой на исследуемом интервале. Вводя матрицу $A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_1}' & \overrightarrow{e_2}' & \overrightarrow{e_3}'\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, можно построить натуральные уравнения кривой:

$$\begin{cases}k(s)=\frac{1}{2}\cdot\det(A_{33})\\ \aleph(s)=\frac{1}{2}\cdot\det(A_{31})\end{cases}. \qquad (1)$$

где $(-1)^{i+j}A_{ij}$ - минор матрицы $A$ по элементу $a_{ij}$ ([60], стр. 17).

Известно ([64], стр. 265), что система дифференциальных уравнений задаёт поле направлений в пространстве, решениями которой должны быть параметрические функции. Уравнения Френе, как раз и являются такой системой, а одни из возможных функций её решений должны быть кривизна и кручение.

Если кривизна кривой показывает, как она (кривая) отклоняется от прямой, расположенной в касательной плоскости к данной кривой, то кручение показывает, как эта кривая отклоняется от самой касательной плоскости (выходит из неё).

Кривизна и кручение могут быть вычислины через координаты точки на поверхности, причём, помним, что кривизна и кручение являются обратно пропорциональными величинами. Кроме того, кривизна и кручение – величины безразмерные. В физике известна одна безразмерная и очень важная величина – постоянная тонкой струкруры $\boldsymbol{\alpha}$**.** Принцип неопределённости, как один из фундаментальных законов природы, должен сохраняться и в КТГ. Так может быть есть смысл говорить о принципе неопределённости в виде $\Delta\aleph\cdot\Delta k\geq\alpha$ ?

ОТО изучает, как устроено пространство Вселенной. В самом общем смысле пространства общей теории относительности называются римановыми. По определению пространство называется римановым если квадрат расстояния задаётся формулой ([58], стр. 321):

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j . \qquad (2)$$

Компоненты метрического тензора $g_{ij}$ называют потенциалами гравитационного поля ([12], стр. 96). Метрическое и гравитационное поле по сути есть одно и то же. Оба поля определяются величинами $g_{ij}$ ([37], стр 408). Выражние (2) обычно называют метрикой и, для более наглядного понимания, говорят, что простейшая метрика в элементарной геометрии – это по сути теорема Пифагора ($ds^2 = dx^2 + dy^2$). При решении уравнений Эйнштейна обычно ищут метрику, а по ней уже пытаются восстановить конкретный вид римановой геометрии пространства ([49], стр 93).

Одним из первых, кто попытался объединить гравитацию и электромагнетизм был выдающийся немецкий математик Г. Вейль. В своей теории он вводил кроме традиционно квадратичной метрики ещё и линейную. Тогда «... физический смысл должны иметь не $g_{ij}$, а их отношения ...» ([16], стр. 85). Это наводит на мысль, что вслед за этим, наверное, следовало бы изменить и сами координаты и перейти к их отношению, т. е. к однородным, как в проективной геометрии... Этот штришок мы отметили для будущих исследователей, помня *Гипотезу* 2. А теория Вейля, в силу, открывшихся и неразрешимых противоречий, своего дальнейшего развития не получила.

В ОТО понятие гравитации связывают с искривлением пространства, т. е. с кривизной. Значения компонент метрического тензора, как было отмечено, и отвечают за кривизну пространства. Тогда, в силу *Гипотезы* 1, можно предположить, что гравитационные силы отталкивания олицетворяют собой *кручение пространства*, а принцип двойственности: притяжение-отталкивание, в условиях микромира становится примером поинципа двойственности: **кривизна-кручение**.

Развивая эту идею, предполагаем, что приоритет значений кривизны и кручения меняется в обратном порядке. Если в мегамире главенствуют силы притяжения (кривизна пространства), то в микромире - силы, порождающие кручение (отталкивание), будут главенствующими по сравнению и силами, порождающими кривизну. Такое предположение может объяснять существование плоских планетных орбит мегамира и существование объёмных орбиталей в структуре атомов микромира. И будущая КТГ сможет уже более конкретно описывать поведение элементарных частиц в орбиталях.

В КМ принято считать, что электрон переходит из одного состояния в другое скачком. Так считать просто удобнее, ведь понятие траектории в КМ отсутствует. На самом деле электрон, переходя из одного состояния в другое, совершает примерно 10 миллионов оборотов ([30], стр. 88). Т. е. всё-таки, хоть энергия и квантована, а траектория всё-таки существует и, наверное, надо говорить о двойственности: **дискретный-непрерывный**. Не скачет электрон с одного места на другое внутри орбитали, а всё-таки переходит.

Вспомним некоторые особенности микромира элементарных частиц, которые, на наш взгляд, могут быть полезны при создании КТГ. Но сначала сфомулируем ещё одну гипотезу нашего исследования.

### *Гипотеза* 3

***В пространственно-временной структуре микромира должно существовать реликтовое пространство.***

Всё чаще от физиков-теоретиков можно услышать, что пространство-время надо рассматривать, как ещё одну форму существования материи. Материя существует в виде вещества и поля. Существуют различные виды, как вещества, так и поля. Реликтовое излучение когда-то очень удивило научную общественность, но теперь уже к этому явлению все привыкли тем более – это доказанный факт. Тогда, по аналогии с излучением, почему бы не существовать и реликтовому прострвнству. А в силу *Гипотезы* 2 – *реликтовое пространство должно быть проективным*.

Но вернёмся к особенностям микромира элементарных частиц.

Говоря об орбиталях полезно помнить, что «... пи-мезоны есть кванты ядерного поля» ([17], стр. 173). Пи-мезоны образуют внутреннюю орбиталь атома.

Электроны могут быть в свободном состоянии или находиться на определённых орбиталях атома. Полезно помнить, что электроны всегда находятся во взаимодействии ([17], стр. 181), «... частиц без взаимодействия вообще не существует» ([17], стр. 202). «Траекторий в мире сверхмалых вещей не существует. Но от положения частиц зависит их потенциальная энергия, а от скорости – кинетическая. ... нельзя одновременно точно измерить и кинетическую и потенциальную энергии частицы» ([17], стр. 74). Частицы находятся в огромном, по их масштабам, пространстве микромира. Надо понимать, что «... атом практически пуст – расстояния между электронами атомной оболочки, а также между последними и ядром атома очень велики по сравнениюю с размерами этих частиц» ([40], стр. 392). Размер атома примерно в сто тысяч раз больше размера самого ядра ([41], стр. 11). Если бы, например, демон Максвелла действительно существовал, а он должен чувствовать каждую элементарную частицу, то представляете какую бы картину микромира он мог бы наблюдать. Это огромные пространства расстояний. Так что понятие траектории в КТГ должно быть востановлено. И ближайшим математическим аппаатом для описания таких траекторий должна быть дифференциальная геометрия и формулы Френе.

«Большинство ядер имеет сферическую или близкую к ней форму» ([41], стр. 47) – это по мнению экспериментаторов. Кроме того «... протоны и нейтроны движутся в ядре в какой-то степени независимо друг от друга» ([41], стр. 55). Также «... ядерные силы создают из особым образом ориентированных протонов и нейтронов совершенно обособленную *слоистую* (выделено нами, Ф. Г.), пространственную структуру» ([41], стр. 67).

«У ядра, оказалось, нет чётко очерченной границы. Чем ближе к поверхности, тем всё более разряжённым становится ядерное вещество. А за радиус ядра принимается расстояние, на котором плотность ядерной материи уменьшается вдвое» ([41], стр. 66).

На основе всего вышесказанного можно заключить, что пространство микромира – это *мир концентрических сфер*.

Говоря о траекториях, вспомним, что с математической точки зрения любая траектория – это коническое сечение или кривая второго орядка. Здесь хотелось бы отметить, что существует теория, альтернативная теории кривых второго порядка, где все траектории – это геометрические места центров некоторых сфер. И эта теория носит название «Теория касательных сфер» ([39], стр. 1).

Итак, мы вновь «оживили», исчезнувшую в КМ, геометрию. Можно снова говорить и о метрике, которая в ОТО (и, думается, в ТКГ) играет первостепенную роль.

Что такое метрика? По сути – это квадрат расстояния. Почему же «квадрат», а не просто линейная величина. Просто потому, что по теореме Пифагора удобно вычислить и записать именно квадрат расстояния. Но это всё удобно делать в евклидовой геометрии, а пространства ОТО вообще-то римановы. Никто и не говорит о вычислении конкретных расстояний, просто важна форма, вид записи этой метрики (заметим, что в проективной геометрии понятие расстояния вообще отсутствует). Человечество, следуя Пифагору, просто привыкло ассоциировать метрику с прямоугольным треугольником. Исчезла евклидова геометрия – стали говорить о криволинейном треугольнике, а может быть просто надо повнимательнее посмотреть на саму запись знаменитой теоремы:

$$a^2 + b^2 = c^2 . \qquad (3)$$

И, действительно, выражение (3) проявляет себя не только, как свойство прямоугольного треугольника. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть две окружности касаются друг друга (Рис. 5).

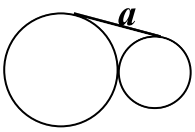

Рис. 5

Их общий отрезок касательной будем называть «*минимальным отрезком*». Раздвиним наши окружности на некоторое произвольное расстояние (Рис. 6).

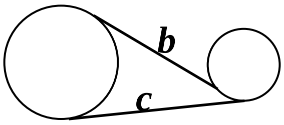

Рис. 6

Теперь будем иметь уже два отрезка касательных «*внутренний*» - ***b*** и «*внешний*» - ***c***. Как оказалось, сумма квадратов длин минимального и внутреннего отрезков равна квадрату длины внешнего отрезка, т. е. $a^2 + b^2 = c^2$.

Пусть даны пересекающиеся окружности (Рис. 7).

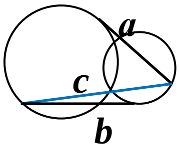

Рис. 7

Через одну из точек пересечения окружностей проведём общую секущую ***c***, из концов которой проведём отрезки касательных к данным окружностям (это можно сделать несколькими способами). Тогда сумма квадратов касателных отрезков равна квадрату секущей, т. е. опять: $a^2 + b^2 = c^2$.

Но и это ещё не всё.

Если дано кольцо и произвольная окружность делит это кольцо на внешнее и внутреннее кольцо (Рис. 8), то сумма квадратов диаметров внешнего и внутреннего колец равна квадрату диаметра данного кольца. Снова справедливо равенство $a^2 + b^2 = c^2$.

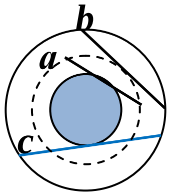

Рис. 8

Диаметром кольца называют хорду максимальной длины в этом кольце (см. ***Математическое приложение*** 2).

Вспомним, что мы называли микромир миром сфер, имея в виду орбитали, образованные движением элементарных частиц. Иллюстрации теорем Рис. 5 – 8 можем без ущерба общности рассматривать, как сечения неких сфер, а отрезки ***a***, ***b***, ***c*** – проекциями окружностей в этих сечениях.

Если за длины диаметров колец принять пространственные координаты, то уравнение $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ будет уравнением конуса ([44], стр. 247), а именно сечения конусов и определяют вид траекторий.

Т. о., понятие метрики может иметь своё понмание и в микромире благодаря более полному раскрытию смысла выражения (3).

Обратим ещё внимание и на такой вопрос. Мир КМ – это мир квантованных величин. А как быть с метрикой? Вспоминая переходы элементарных частиц с орбитали на орбиталь, можно сделать предположение, что в микромире именно *квантование порождает метрику*.

А метрика действительно квантована ([24], стр. 4, 269), причём, довольно не просто ([59], стр. 332). По крайней мере, нам известны несколько типов квантовых чисел метрики.

Самое древнее квантование метрики было известно ещё Пифагору (по некоторым сведениям он его и открыл). Это квантование записывается таким выражением:

$$(2n+1)^2 + (2n(n+1))^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2, \qquad (4)$$

здесь $n \in N$ – любое натуральное число.

Ещё одно квантование метрики (3) может быть записано так:

$$(n^2 - m^2)^2 + (2n \cdot m)^2 = (n^2 + m^2)^2, \qquad (5)$$

где $n>m$ и $m \in N$ - второе квантовое число.

Третье квантовое число $k$ связано с теоремой, которая не искушённому читателю вряд ли знакома. Мы сформулируем её здесь без доказательства (оно элементарно).

***Теорема***:

***Для любого натурального числа n всегда существует $k = 2n + 1$ последовательных чисел таких, что сумма квадратов первых $n$+1 числа равна сумме квадратов последующих n чисел, причём, первое число в этой $\{k_i\}$ последовательности $k_1 = n \cdot k$.***

***Примеры:***

1) $n = 1$, $k = 3$, $k_1 = 3$ получаем: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

2) $n = 2$, $k = 5$, $k_1 = 10$ получаем: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Для любителей числовых исследований отметим, что сумму квадратов для $n$ (или $n$+1) таких чисел можно вычислить по формуле:

$$S = \frac{k_1(n+1)(3k^2 - 2)}{6}.$$

Говоря о квантовании метрики, надо помнить, что в КМ «... принцип неопределённости должен воспрепятствовать тому, чтобы метрика имела точное значение в каждой точке» ([11], стр. 220). Значит, если квантованность метрки где-то и проявится, то в каких-то будущих теориях, может быть, как раз в КТГ.

Возвращаясь к примерам нетрадиционных метрик, покажем один пример из стереометрии. Представим себе, что единичные векторы (Рис. 4) являются рёбрами пирамиды с вершиной в начале координат.

Т. е., если на вершины текущего базиса формул Френе «натянуть» грань, то как раз и получим полиэдр-пирамиду Рис. 9. Для упрощения будем его называть полиэром Френе.

Такую пирамиду ещё называют симплексом. В основу построения проективно-дифференциальной геометрии как раз и положено понятие произвольного симплекса [35]. Для прямоугольного симплекса (Рис. 9) справедливо равенство ([36], стр 58):

$$(S_{OAB})^2 + (S_{OCB})^2 + (S_{OAC})^2 = S_{ABC}^2.$$

Сопоставив площадям, показанной формулы, пространственные координаты, получаем выражение метрики: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$.

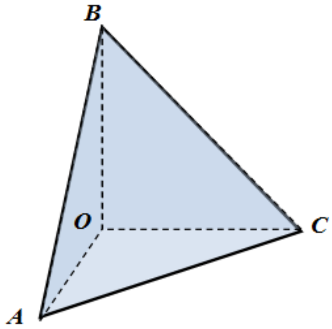

Рис. 9

Однородность Вселенной сегодня экспериментально подтверждается только на крупномасштабном уровне ([14], стр. 114-115). Т. е. в масштабах галактических скоплений и выше. «На самом деле проблема еще серьезнее. Наше пространство не расширяется однородно: некоторые области, такие как наша Галактика, вовсе не расширяются» ([61], стр. 420). Т. о., о единой геометрии Вселенной вообще не приходится говорить, а значит и метрика не остаётся постоянной, а меняется от одной области Вселенной к другой (от геометрии к геометрии). При этом надо помнить, например, что «... свойство ортогональности есть свойство системы отсчёта, а не пространства» ([13], стр. 37). Можем предположить, что именно сферы и их взаимное расположение, могут предендовать на роль локальных координтных систем. А вообще-то, прежде чем создавать КТГ, наверно, надо выработать новую концепцию пространства-времени. Одним из первых, кто попытался проанализировать существующее положение дел в физике – в частности: рассмотреть принцип неопределённости Гейзенберга в будущей теории квантовой гравитации ([14], стр. 274) - и попытался создать КТГ ([50], стр. 344). был советский учёный М. П. Бронштейн. Противоречия между ОТО и КМ приводят к отказу от «привычных представлений о пространстве и времени и замены их какими-то гораздо более глубокими и лишёнными наглядности понятиями» ([14], стр. 314). В конечном итоге и все физические понятия, такие как масса, заряд, спин, энергия, четность и т. д. должны определяться через элементарные понятия пространства. Но масса, например, может появляться в трёх ипостасях. В виде гравитационного заряда, инерции или энергии ([62], стр. 10). Естественно «... принять понятие массы в качестве первоначального понятия» ([62], стр. 118) - метафизического. Только так можно прийти к какому-то глубинному смыслу ([17], стр. 207). При этом мы должны помнить, что одно из глубинных свойст природы – это двойственность...

Причудливость представления метрического выражения имеет широкое распространение как в ОТО, так и в КМ. Например, аналог метрики можно увидеть в выражении суммы квадратов спиновых матриц ([18], стр 104):

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 .$$

Если величинам отрезков $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ в теореме о метрике, когда даны два одинаковых кольца, но разные делящие окружности (Рис. 8), сопоставить проективным координатам проективного пространства $RP^3$ (не забываем *Гипотезу* 2), то получим выражение «невырожденной линейчатой квадрики» ([8], стр. 322).:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 .$$

Это одно из поверхностей второго порядка, возможных в проективном пространстве ([27], стр. 391). Эта повехность называется кольцевой и она топологически эквиваленьна тору ([27], стр. 392).

Понятие траектории (орбиты) отсутствует в КМ. В основном это прерогатива ОТО. В квантовой механике мы говорим об орбиталях. Простейшие орбитали имеют сферический вид.

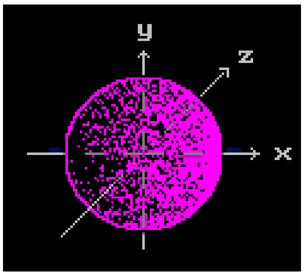

Рис. 10

Но мы предполагаем, что в новой теории микромира понятие траектории снова получит свою прописку и тогда надо будет рассматривать орбитали, как многократно повторяющиеся орбиты, как геодезические линии, «наматывающиеся» на сферу. По аналогии с примерами, которые описываются в ОТО. Причём есть примеры, которые напрямую соответсвуют *Гипотезе* 2. С точки зрения математики такие орбиты в совокупности описываются могообразиями. Например, множество всех геодезических на $S^2$ является многообразием, которое «с некоторым отожествлением» ([3], стр. 323) является действительной проективной плоскостью.

Сфероид – это самая простейшая орбиталь. С усложнением атома, усложняется и геометрический вид орбитали.

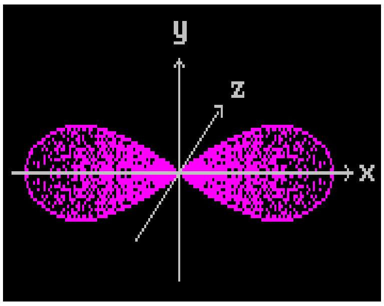

Рис. 11

Мы предполагаем, что при изучении этой орбитали можно использовать кривую, которая носит название Лемниската Бернули [46], [47]. Действительно, посмотрите на рисунок 12. Это и есть Лемниската Бернули. Вспомним, какой вид имеют наиболее распространённые орбиты. Это эллипсы. Эллипс имеет два фокуса и сумма расстояний от точки кривой эллипса до этих фокусов есть константа (при желании можно говорить о введении таким образом линейной метрики, а не квадратичной от теоремы Прифагора).

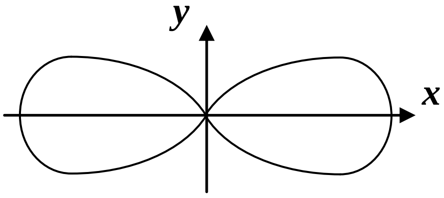

Рис. 12

Простейшая Лемниската Бернули описывается уравнением: $x^2 = y^2 + z^2$, где параметр $z = x^2 + y^2$. Не правда ли – это выражение в точности повторяет выражение элементарной метрики, но говорит нам не о квадрате длины отрезка, а о кривой линии. Вроде бы метрика вложена сама в себя. И ещё одна особенность Лемнискаты Бернули. Она, как и эллипс, тоже имеет два фокуса и Лемнискату Бернули можно определить, как геометрическое место точек, постоянное растояние от которых, равно произведению (а не сумме, как для эллипса) расстояний до фокусов.

Лемниската может иметь и три фокуса (Рис. 13). Возможно, именно такое усложнение происходит и у орбиталей.

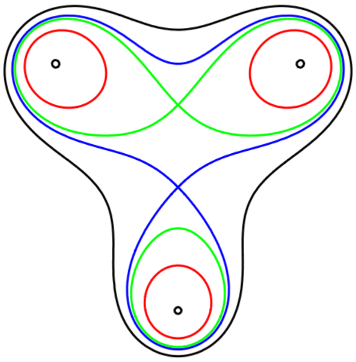

Рис. 13

## Вопросы аналогий

Поговорим об основных уравнениях ОТО и КМ. Основное уравнение (вернее система уравнений) ОТО – его левая геометрическая часть – было известно математикам ещё до того, как о нём заговорил Эйнштейн (Д. Гильберт представил его (уравнение) маематическому сообществу на несколько дней раньше Эйнштейна, [14], стр. 92). В основу вывода этого уравнения было положено известное тождество тензорного анализа. А именно - тензор Эйнштейна (или левая – геометрическая часть уравнений ОТО) получен из тензора Риччи при помощи тождества Бьянки ([4], стр. 108; [14], стр. 198-199):

$$\boldsymbol{R_{lmij,k} + R_{lmjk,i} + R_{lmkj,i} = 0},$$

или в свёрнутом виде $\boldsymbol{R_{lm[ij,k]} = 0}$. Индексы в квадратных скобках обозначают их свойство цикличности в сумме для основного терма и пробегают значения от 1 до 3. Техника этого вывода нас здесь не интересует. С этим можно познакомиться по многим учебникам по общей теории относительности. Само тождество Бьянки может быть получено с помощью римановых координат ([13], стр. 64). Заметим, что уравнения Эйнштейна получаются приравниванием тензора Эйнштейна и тензора энергии. Оба тензора должны иметь векторную дивергенцию равной нулю ([13], стр. 102).

Теперь посмотрим на основное уравнение КМ, т. е. уравнение Шрёдингера. «Классическая квантовая механика, ..., была построена по образцу и подобию гамильтоновой теории, ...» ([30], стр. 65). «Исходя из макроскопического волнового уравнения, можно получить уравнения Шрёденгера, воспользовавшись уравнением Гаильтона-Якоби» ([16], стр. 61). Подчеркнём, что КМ создавалась двумя разными путями (матричная Гейзенберга и волновая Шрёдингера). «Обе формы квантовой механики (матричная и волновая) происходят из аналитической механики. Обе операются на основные центральные теоремы, которыми эта теория –

наиболее совершеная и стройная из всех физических теорий – обязана Гамильтону и Якоби» ([26], стр. 292).

Известный российский физик Л. С. Полак, анализируя исследования Шрёдингера, приходит к выводу, что основное уравнение квантовой механики и было как раз получено на основании уравнения Гамильтона – Якоби, главного уравнения аналитической механики. А одним из фундаментальных результатов этой теории является тождество Якоби ([28], стр. 136):

$$\lfloor f_i, \lfloor f_j, f_k ]] + \lfloor f_j, [f_k, f_i]] + \lfloor f_k, \lfloor f_i, f_j ]] = \mathbf{0},$$

или в свёрнутом виде: $\lfloor f_{[i}, \lfloor f_j, f_{k]} ]] = \mathbf{0}$, где запись $[\,,]$ называется скобкой Пуассона. Кстати, «... знаменитое гейзенберовское соотношение некоммутативности координаты и импульса, наиболее наглядно и разительно отличающее новую механику от старой, было не чем иным, как аналогом скобок Пуассона в классической механике» ([70], стр. 12).

Здесь мы опять сталкиваемся с индексами (записью индексов), заключёнными в квадратные скобки. Но это только запись, формализм, скажете вы, одно из свойств известных скобок Пуассона, которые используются для избежания громоздскости записи математического выражения. Безусловно, так оно и есть. Но в чём же тогда аналогичность этих тождеств (Бьянки и Якоби). Аналогия, по нашему мнению, заключается в свойстве цикличности, что и приводит к нулю значение всего выражения тождества.

Кстати, надо заметить, что и гравитация не осталась в стороне от теории Гамильтона – Якоби. Вектор сил центрального (например, гравитационного) поля представляет собой интеграл движения ([28], стр. 16), математическое понимание коорого невозможно без тождества Якоби.

Надо отметить, что тождество Якоби является не физическим следствием, оно настолько фундаментально и абстрактно, что на его основе вводятся многие математические понятия, например алгебра Ли ([51], стр. 17) в симплектической геометрии, вообще в топологии и пр.. Кстати, заметим, что если скобка Пуассона равна нулю – это обозначает по сути математическое выражение закона сохранения энергии ([30], стр. 41).

Понятие цикличности является фундаментальным и в векторном анализе, котрый является первым приближением тензорного исчисления. Здесь мы видим, что сумма векторного произведения трёх произвольных векторов имеет вид ([45], стр. 31):

$$\boldsymbol{a}_i \times (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) + \boldsymbol{a}_j \times (\boldsymbol{a}_k \times \boldsymbol{a}_i) + \boldsymbol{a}_k \times (\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{a}_j) = \mathbf{0},$$

или в свёрнутом выражении $\boldsymbol{a}_{[i} \times (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_{k]}) = \mathbf{0}$ (та же запись для индексов). А *основным* тождеством векторного анализа считается выражение:

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\,.$$

Читается оно так: «сумма квадратов скалярного и векторного произведения двух векторов равна произведению квадратов этих векторов» ([31], стр. 68). Не правда ли – это ещё один аналог для нашей метрики (3).

*Гипотеза* 2 о фундаментальности геометрической основы физического пространства подсказывает нам обратиться к поиску похожих тождеств в проективной геометрии.

Координаты Плюккера, описывающие проективную прямую в пространстве, связаны выражением ([8], стр. 312):

$$\boldsymbol{p}_{li}\boldsymbol{p}_{jk}+\boldsymbol{p}_{lj}\boldsymbol{p}_{ki}+\boldsymbol{p}_{lk}\boldsymbol{p}_{ij}=\boldsymbol{0}\,, \qquad (6)$$

или в свёрнутом виде $\boldsymbol{p}_{l[i}\boldsymbol{p}_{jk]}=\boldsymbol{0}$. Координаты $\boldsymbol{p}_{ij}$ *не являются координатами точек, а являются именно координатами некоторого проективного объекта (прямой) в пространстве* $\boldsymbol{RP}^3$ (напомним, что это многообрзие является уже ориентированным). *В этом (координаты объекта, а не точки) уникальность координат Плюккера* и на это обязательно надо обратить внимание будущим исследователям. Может быть, в основу уравнений будущей теории и ляжет тождество (7).

Отметим интересное свойство тождества (6). Оказывается, тождество (6) проективного пространства $\boldsymbol{RP}^3$ можно преобразовать к виду $(\boldsymbol{X}_1)^2+(\boldsymbol{X}_2)^2+(\boldsymbol{X}_3)^2-(\boldsymbol{X}_4)^2-(\boldsymbol{X}_5)^2-(\boldsymbol{X}_6)^2=\boldsymbol{0}$, а это уже поверхность второго порядка (абсолют) пятимерного гиперболического пространства ([42], стр. 307, 308). Напомним, что гиперболическое пространство индуцируется при введении абсолюта на проективной плоскости (пространстве). Гиерболическое пространство внутри абсолюта.

Необходимое, на наш взгляд, дополнение. Одно из свойств тензора кривизны (по сути: тождество Бьянки) имеет графическое представление в виде гептаэдра (подробнее о гептаэдре см. [41]), из которого удалён внутренний триэдр Рис. 14 ([7], стр. 279). Внутренний триэдр гептаэра можно представить составленным из пирамид (Рис. 9) без грани ***ABC***. Внутри гептаэдра таких пирамидок четыре (две вверху и две внизу, и верхние и нижние пирамиды имеют одну общую вертикальную грань). Помня, что гептаэдр – это модель $\boldsymbol{RP}^2$, можно говорить, что уравнения Эйнштейна имеют косвенную внутреннюю связь с проективной геометрией, которая осуществляется через метричский тензор, т. е. через кривизну.

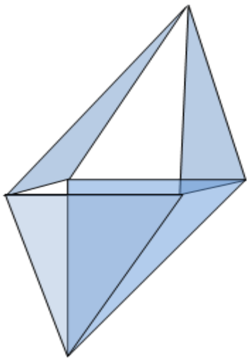

Рис. 14

## Квантованность пространства-времени.

Возможно, эта часть нашего исследования покажется читателю самой фантастической и не имеющей под собой достаточной научной обоснованности, но поговорить об этом надо. Тем более, что разговоры на эту тему уже давно появились в кругах современных учёных [63].

Вспоминая один из возможных примеров двойственности: **дискретный-непрерывный**, а также *Гипотезу* 3 о существовании реликтового пространства, можно предположить о наличиии в Мироздании некоей пространственной основы. Иначе говоря, о существовании пространственной решётки.

Рис. 15

В связи с этим сформулируем ещё одну гипотезу.

***Гипотеза*** **4** (о пространственной решётке)

***В основе пространства лежит аналог некоторой n-мерной пространственной решётки.***

Такую решётку будем для краткости называть каркасом (или ***n***-каркасом). Условно будем считать, что прямые каркаса – модифицированные прямые $\boldsymbol{RP^1}$, а узлы каркаса – сингулярности $\boldsymbol{RP^n}$.

Необходимое замечание. Говоря о пространственных решётках надо понимать, что мы не имеем в виду, что какая-то физическая «сеть» действительно находится в микромире. Просто *решётка – это способ моделирования пространства*, чтобы можно было лучше изучать его свойства.

Для наглядности мы говорим об ортогональных решётках. Напомним, что ортогональность в данном случае – это не свойство пространства, а выбор системы отсчёта.

Д. И. Блохинцев о квантовании пространства говорит так: «В наиболее простой форме идея о дискретном квантовании пространства-времени заключается в предположении, что точки пространственно-временного многообразия не образуют континуума, а представляют собой некоторое дискретное, счётное или даже конечное множество. В частности можно предположить, что оно образовано точками некоторой решётки» ([15], стр. 268). Континуум – это топологическое понятие ([15], стр. 204) и мы не будем на этом заострять внимание читателя.

Плоские решётки уже встречались при исследовании элементарных частиц и кварков [65]. Модели проективных каркасов тоже рассматривались ([29], стр. 245). Мы не будем повторять здесь эти исследования, а отметим только некоторые общематематические стороны этого вопроса.

Каждая из рассматриваемых решёток имеет свою константу $\Lambda$ – это длина ребра решётки между двумя соседними узлами. Т. е., будем называть решётку *правильной*, если все её рёбра равны между собой. Мы рассмотрим три решётки и у каждой отметим свою константу, но об этом чуть позже.

Как известно, пространство можно упаковать кубической решёткой. Здесь элементарной ячейкой решётки является куб. Заметим, что ещё в 1930 году, при исследовании пространственной протяжённости элементарных частиц, была выдвинута идея кубической решётки с конечной константой ([62], стр. 207).

Более крупноячеистой решёткой является ромбododекаэдрическая (или просто ромбовидная). Очевидно, здесь элементарной ячейкой будет фигура, которая называется ромбический додекаэдр (Рис. 16).

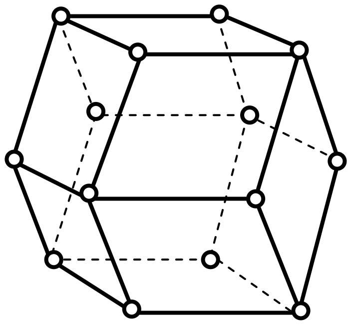

Рис. 16

Заметим, что куб точно вписывается в ромбододекаэдрическую ячейку, причём объём, ячейки куба, ровно в два раза меньше ячейки ромбического додекаэдра Рис. 17.

$$V_P = 2 \cdot V_K, \tag{7}$$

здесь $V_P$ и $V_K$ - соответсвенно объёмы ромбической и кубической ячеек.

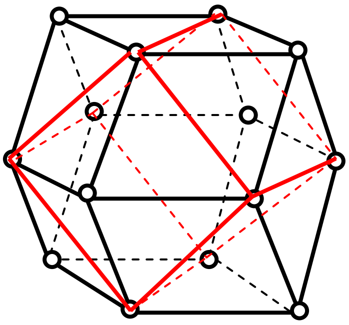

Рис. 17

Но оказывается, что существует ещё одна пространственння упаковка, решётка которой ещё «мельче» кубической. Такая решётка складывается уже из двух правильных фигур: октаэдра и тетраэдра (образующие длины рёбер этих фигур естественно равны). Представить себе кубическую решётку не сложно. Гораздо сложнее разобраться с решёткой ромбовидной. Но очень сложно понять решётку из октаэдров и тетраэдров ([67], стр. 33, 34). Здесь даже не ясно, что надо брать за ячейку решётки – тетраэтр или октаэдр, или их вместе (Рис. 18).

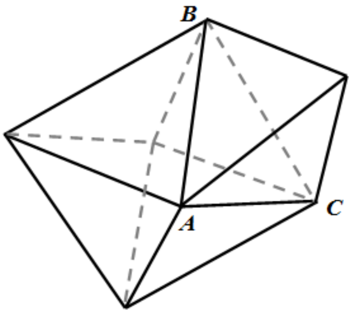

Рис. 18

Главным правилом построения такой решётки является закон, что *каждый треугольник в решётке обязательно является и гранью тетраэдра и гранью октаэдра одновременно* (на Рис. 18 – это грань ***ABC***).

Каждый тетраэдр окружён октаэдрами, а каждый октаэдр – тетраэдрами. Здесь имеем ещё один пример *Гипотезы* 1, т. е. двойственность этой решётки: **окружённость тетраэдрами-окружённость октаэдрами**. Действительно, нельзя определнно сказать какие фигуры окружают какие.

Для удобства дальнейшего обращения к решёткам дадим им такие названия. Октаэдро-тетраэдную решётку назовём $P_1$, кубическую решётку - $P_2$, а ромбовидную - $P_3$. Тогда формулу (8) будем называть *формулой преобразования решёток* $P_2$ и $P_3$.

Мы уже упоминали в нашем исследовании фигуру, которая называется гептаэдр. Что такое гептаэдр? Ведь по сути – это переделанный октаэдр (четыре боковых грани, расположенные, условно говоря, в шахматном порядке, убраны, три внутренних грани добавлены, Рис. 19). Каркас октаэдра остался прежний. Значит мы можем использовать гептаэдр в построении решётки $P_1$. Т. е. решёток $P_1$ становится, как минимум, две. Но мы может заменять не все октаэдры на гептаэдры. Т. е. получаем третий тип решётки $P_1$ - смешанный. Для различия этих решёток введём три обозначения: $P_1(I)$ - решётка, построенная из тетраэдров и гептаэдров; $P_1(II)$ - смешанная решётка, где есть и октаэдры и гептаэдры; $P_1(III)$ - решётка, построенная из тетраэдров и октаэдров. Напомним, что гептаэдр – это ни что иное, как *полиэдрическая модель проективной плоскости*, т. е. в силу *Гипотезы* 2, решётки с гептаэдрами для нас особенно важны. Скорее всего, решётку $P_1(II)$ надо рассматривать, как промежуточную между решёткой $P_1(I)$ и $P_1(III)$

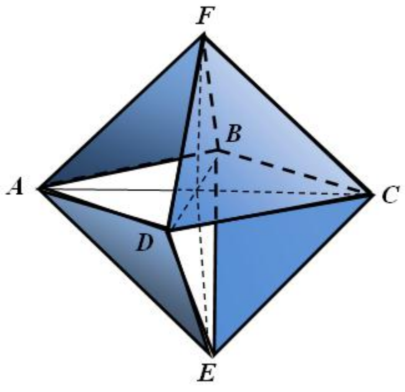

Рис. 19

Но вернёмся к вопросу о преобразовании решёток. Известно, как можно вписать в куб максимально возможный тетраэдр (Рис. 20).

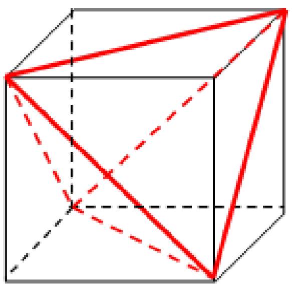

Рис. 20

Будем считать, что сторона, вписанного тетраэдра, и есть константа решётки $P_1$. Вытащив из куба полученный тетраэдр, куб распадётся на четыре одинаковых кусочка. Не трудно заметить, что эти, оставшиеся части куба, ни что иное, как полиэдры Френе (Рис. 9). Из условия, что куб распадается на шесть равновеликих частей, становится понятно, что вписанный тетраэдр равен по объёму двум полиэдрам Френе. Однако, два полиэдра Френе невозможно точно вставить в тетраэдр. Казалось бы в этом и трудность нашей теории моделирования пространства. Но, если вдуматься, то эта равновеликость и одновременно нетождественность (по сути, ещё один пример двойственности: **равновеликость-нетождественность**) двух полиэдров Френе и тетраэдра позволяет нам иметь три решётки, а не одну на основе полиэдра Френе. Итак, мы можем выразить объём каждой ячейки в равновеликих долях полиэдра Френе.

$$V_T = 2\cdot V_\Phi; V_\Gamma = 4\cdot V_\Phi; V_K = 6\cdot V_\Phi; V_O = 8\cdot V_\Phi; V_P = 12\cdot V_\Phi;, \qquad (8)$$

где $V_\Phi$ - объём полиэдра Френе, $V_\Gamma$ - заметаемый объём гептаэдра (т. к. гептаэдр – это односторонняя фигура, то мы можем говорить только о заметаемом, а не истинном объёме).

Формулы (8) позволяют нам построить любые преобразования решёток (переходы от решётки к решётке). Напомним, что одно такое преобразование мы уже имеем в виде тождества (7). Кроме того, полиэдр Френе можно считать *геометрическим квантом пространства* (напомним, что простейший симплекс - топологически конгруэнтная фигура полиэдра Френе – лежит в основе дифференциально-проективной геометрии [35]). О том, что пространство и время «... теряют непрерывность, разбиваются на отдельные порции» кванты, уже можно встретить в литературе ([17], стр. 205). Кроме того, известны исследования [69], где полиэдр Френе используется для построения ядер атомов химических элементов.

Прежде, чем познакомить читателя с тождествами переходов, поговорим об общей схеме трансформации решёток.

С нашей точки зрения самое простое и однородное пространство (с проективной геометрией, согласно *Гипотезе* 2) возникло в момент зарождения Вселенной. Т. е. всё началось с решётки $P_1(I)$ - это первый этап в возникновении структуры (каркаса) Мироздания. Потом из неё стали возникать решётки $P_1(II)$ и $P_1(III)$ - второй этап (остывание, расширение пространства). Потом появлется решётка $P_2$ - третий этап. И в конце происходит появление третьей рещётки $P_3$ - четвёртый этап.

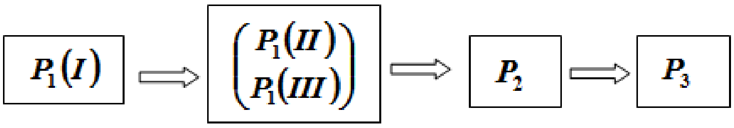

Рис. 21

Мы можем предположить, что все эти решётки продолжают существовать и по сей день (или продолжают возникать, может быть ещё не все появились). Какая-то из решёток более «активна» в микромире, какая-то – в макромире, а какая-то – в мегамире. Какая-то из решёток в сегодняшнем мире соответствует, например, реликовому пространству.

Но вернёмся к преобразованиям решёток. Переходу от второй решётки к третьей отвечает тождество (7): $V_P = 2 \cdot V_K$. Как уже было отмечено, существует три типа решёток $P_1$, поэтому и тождеств перехода от первой решётки ко второй будет тоже три. На основании формул (8) получаем:

$$V_Г + V_T = V_K, \quad V_O - V_Г + V_T = V_K, \quad V_O + 2 \cdot V_T = 2 \cdot V_K.$$
(9)

По выражению современных физиков: вакуум «кипит». Может быть это кипение и объясняется постоянным взаимопревращением прострастевных решёток. А ведь существовал (существует?) ещё и ложный вакуум [68].

Ранее мы ввели понятие константы решётки $\Lambda$. Самая меньшая константа принадлежит решётке $P_3$. При этом, ячейка этой решётки самая объёмная. Приняв, константу этой решётка за масштабную, выразим константы других двух решёток.

$$\Lambda_3 = a, \qquad \Lambda_2 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \quad \Lambda_1 = \frac{2a\sqrt{6}}{3},$$

т. е. $\Lambda_3 < \Lambda_2 < \Lambda_1$.

Что касается объёмов ячеек, то здесь имеем обратную картину: $V_P(\Lambda_3) > V_K(\Lambda_2) > V_T(\Lambda_1)$. Может быть такие неравенства и определяют наблюдаемое расширение мегамира?

Представление, о том, как выглядит решётка $P_1$ в общем виде, можно сделать по Рис. 22.

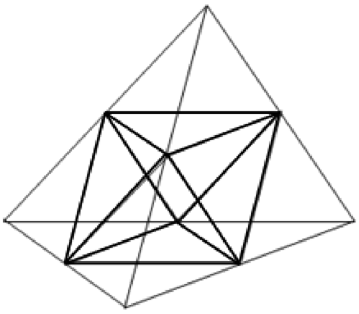

Рис. 22

Видите, как много в пространстве находится каркасов равносторонних треугольников. А именно равносторонний трегольник является гранью основания полиэдра Френе (Рис. 9). Теперь представьте себе мировую траекторию какой-то элементарной частицы. С учётом нашей решётки можем говорить, что в любой точке, имеющейся мировой линии частицы (траектории, геодезической линии) можно спокойно испоьзовать уравнения Френе для её (мировой линии) описания и расчётов. Напрашивается вывод: структурная сторона пространства позволяет говорить нам, что *Гипотеза* 2 не случайно присутствует в нашем исследовании, и кроме того понятия кривизны и кручения также должны быть основопологающими при построении будущих физических теорий о пространстве. Может возникнуть вопрос о правомерности введения односторонних поверхностей и при этом говорить об объёмных квантах пространства? Существуют исследования (см ***Математическое приложение*** **2**), где показаны удивительные переходы между геометрическими понятиями объёма, поверхности и длины.

Завершая разговор о решётках, обратим внимание на такой факт. Природный кристалл алмаза имеет три разновидности форм ([66], стр. 44): в виде октаэдра, в виде полиэдра, топологички изоморфного двум кубам (по сути – это кристал в виде сплющенных двух кубов) и в виде ромбического додекаэдра. Может быть *атом углерода каким-то* образом *чувствителен к пространственной решётке* и об этом нам свидетельствуют кристаллы алмаза. Ведь именно такой вид ячеек решёток только и возможен (имеется ввиду максимально возможная упаковка пространства) с математической точки зрения.

На основании всего вышеизложенного и формулы о связи ориентированных и неориентированных многообразий (стр. 3) можно представить структурную символическую формулу первой решётки:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} RP_i^2 \oplus \int_1^{\infty} f(V)dV \equiv RP^3 , \qquad (10)$$

где $f(V)$ - некоторая функция распределения. Вообще говоря, формула (10) формально задаёт математическое выражение для *Гипотезы* 2. Здесь надо помнить, что проективная плоскость – это неориентированная самопересекающаяся поверхность (односторонняя). Проективная плоскость замкнута, но ни о каком объёме речь идти не может, а в трёхмерном проективном пространстве объём реально существует. Благодаря этой двойственности проективных пространств (**ориентированный-неориентированный**) и вводится второй терм в формулу (10), а под дифференциалом по объёму $dV$ надо понимать элементарный объём ячейки тетраэдрической решётки $P_1$ (а, может быть, - что более актуально, - объём полиэдра Френе). Помним, что объём, который опреднеляет октаэдр решётки, «размазывается» в поверхность гептаэдра (понятие «размазывания» расшифровывается в ***Математическом приложении*** **2**).

В этом разделе мы пытались построить модель пространства и ни разу не упоминули о пространстве-времени. Но внимательно всмотримся в построенную модель. Она тоже состоит из двух частей: каркас (решётка)-объём. Т. е. мы имеем дело с модельной двойственностью: **объём-решётка**, которая соответствует двойственности **пространтсво-время**.

Отметим ещё одну сторону пространственной решётки. Решётка состоит из двух объектов: рёбер каркаса и узлов каркаса (двойственность: **ребро-узел**). Это может быть ещё одной стороной двойственности - **пространтсво-время.**

## *Математическое приложение* 1

# Принцип неопределённости Гейзенберга
# и
# дифференциальная геометрия.

> *Открытое Гейзенбергом соотношение неопределённостей утверждает, что координату и скорость частицы определить с одинаковой точностью невозможно и что точно можно определить только одну из этих двух величин – координату или скорость* ([20], стр. 534)
>
> (А. Эйнштейн)

Как известно [21] в квантовой механике отсутствует понятие траектории частицы. Однако существует понятие и координваты и скорости, как отношения этой координаты ко времени.

Автора данной заметки всегда занимал вопрос, а существует ли в математике некий аналог принципу неопределённости Гейзенберга. И где этот аналог искать? А искать его надо там, где речь может идти о координатах и скоростях. И хотя понятие траектории в квантовой механике и отсутствует отталкиваться надо от движения материальной точки. Траекторией точки может быть пространственная кривая, которая описывается в дифференциальной геометрии формулами Френе [1].

Рассмотрим сопровождающий [2] координатный базис (Рис. 1) для пространства трёх измерений (многомерный случай можно найти, например в [22]).

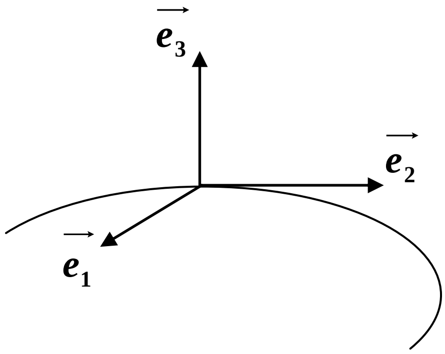

Рис. 1

Здесь $\overrightarrow{e_1}$ - вектор главной нормали кривой [32], $\overrightarrow{e_2}$ - касательный вектор кривой и $\overrightarrow{e_3}$ - вектор бинормали. Все три вектора образуют подвижный басис, расположенный в текущей точке кривой. Этому триэдру

[6] соответствует система дифференциальных уравнений, которые обычно называют формулами Френе [32].

Каждый вектор можно разложить по координатным векторам системы остчёта: $\overrightarrow{e_n} = ax_1\vec{i} + bx_2\vec{j} + cx_3\vec{k}$. Для упрощения системы Френе сопоставим базисным единичным векторам $\overrightarrow{e_i}$ соответствующие единичные координаты $x_i$. По аналогии с системой Френе получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds} = k_1(s)\cdot x_2(s) \\ \dfrac{dx_2}{ds} = -k_1(s)\cdot x_1(s) + k_2(s)\cdot x_3(s) \\ \dfrac{dx_3}{ds} = -k_2(s)\cdot x_2(s) \end{cases} \qquad (1)$$

Величины $k_1$ и $k_2$ принято называть кривизной и кручением данной кривой, соответственной.

Сделаем следующие преобразования. Первое уравнение запишем в виде $k_1 = \frac{1}{x_2}\cdot\frac{dx_1}{ds}$, а третье – в виде $k_2 = -\frac{1}{x_2}\cdot\frac{dx_3}{ds}$ и подставим эти равенства во второе уравнение системы (1). После преобразований получим:

$$x_1\frac{dx_1}{ds} + x_2\frac{dx_2}{ds} + x_3\frac{dx_3}{ds} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) будем называть естественным представлением формул Френе для данной кривой.

Заменим естественный параметр на текущий [7], временной: $s = t$. Тогда выражение $\frac{dx_i}{dt} = v$ - естественно назвать скоростью изменения текущей координаты $x_i$.

Переходя к приращениям получаем:

$$\sum \Delta x_i \cdot \Delta v_i = \Delta 0. \qquad (3)$$

Можем предположить, что приращение нуля – это некая малая величина, но не ноль. Для одномерного случая выражение (3) естественно переписать следующим образом:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \varepsilon$$

Последнее выражение как раз и есть математическая запись принципа неопределённости Гейзенберга при условии, что малая величина $\varepsilon = \frac{\hbar}{2}$.

Дифференциальное уравнение (2) освобождает нас от упоминания таких понятий как кривизна и кручение, которые характерны для понятия пространственной траектории точки, что позволило нам от понятий дифференциальной геометрии перейти к фундаментальным понятиям квантовой механики.

А может быть величины $k_i$ имеют аналог, некий скрытый квантовомеханический смысл? Как говорит Б. А. Розенфельд, $k_i$ - это мера пространственного отклонения [2]. Поставим на этом точку.

*Математическое приложение* **2**

## Теоремы о постоянстве объёма и площади.

### 1. Теорема о постоянстве объёма

Начнём с формулировки теоремы.

***Теорема* 1** (о постоянстве объёма):

**Объём тела, образованного вращением сегмента круга вокруг оси, проходящей через центр данного круга и параллельно хорде данного сегмента, есть величина постоянная и равная объёму шара, диаметром, равным хорде данного сегмента.**

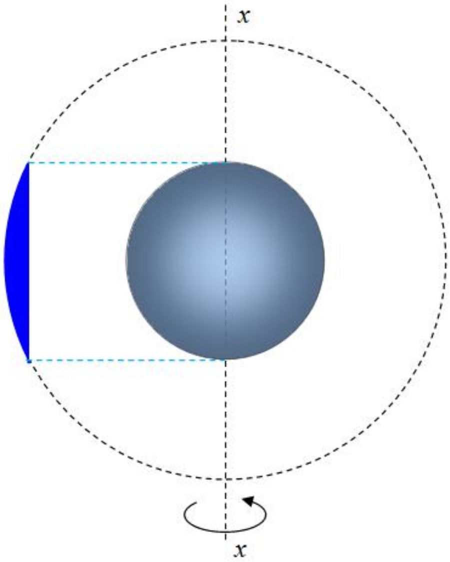

Рис. 1

На рисунке 1 показан произвольный сегмент произвольного круга. Ось вращения ***x–x*** проходит через центр данного круга и параллельно хорде данного сегмента. Пусть длина радиуса круга равна ***R***, а дина хорды сегмента – ***d***. Т. о. площадь сегмента определяется двумя этими размерами. Теорема говорит о том, что если длина хорды - величина постоянная, то объём тела вращения, заметаемый данным сегментом, не зависит от радиуса исходного круга и равен объёму шара, диаметром, равным длине хорды. Докажем это утверждение.

## Доказательство 1

Известно [55], что объём тела вращения, ограниченного линией $y = f(x)$ вокруг оси ***OX***, вычисляется по формуле: $V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$.

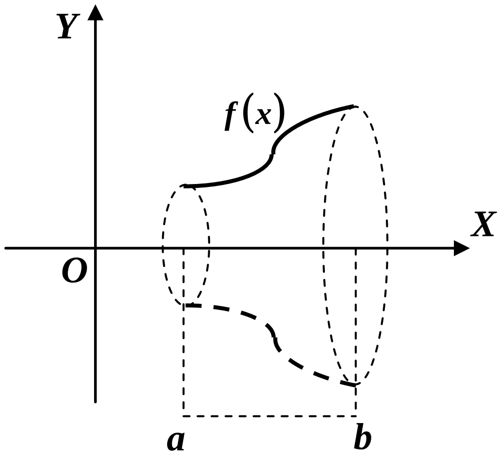

Рис. 2

В нашем случае кривой, ограничивающей тело вращения, будет дуга сегмента круга (Рис. 3)

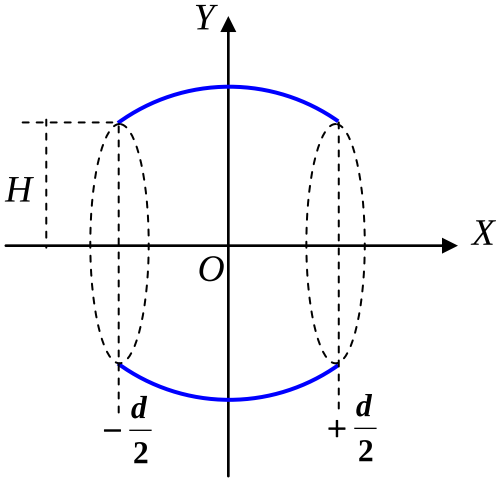

Рис. 3

А квадрат функции для этой дуги будет иметь уравнение $y^2 = R^2 - x^2$.

Теперь интеграл можно записать в таком виде: $V = \pi \cdot \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left(R^2 - x^2\right)dx$.

Вычисляя интеграл, находим объём тела вращения: $V = \pi \cdot \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(d \cdot R^2 - \frac{d^3}{12}\right)$. Осталось вычесть из этого объёма объём цилиндра $V_{\text{Ц}}$, длина образуюшей которого равна ***d***, а радиус основания – ***H***. Т. е $V_{\text{Ц}} = \pi \cdot d \cdot H^2 = \pi \cdot \left(d \cdot R^2 - \frac{d^3}{4}\right)$. Откуда находим объём тела вращения, заметаемого сегментом круга как разность: $V_C = V - V_{\text{Ц}} = \pi \cdot \frac{d^3}{6}$.
Полученный результат говорит о том, что это объём шара с диаметром ***d***.

Что и требовалось доказать.

**Доказательство 2** (элементарное).

Не трудно заметить, что объём тела вращения ***V*** – это объём шарового слоя толщиной ***d***. Зная объём шарового сегмента $V_{\text{Ш.С.}}$ можно вычислить искомый объём ***V***.
Объём шарового сегмента вычисляется по формуле [47]: $V_{\text{Ш.С.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot h(3R - h)$.

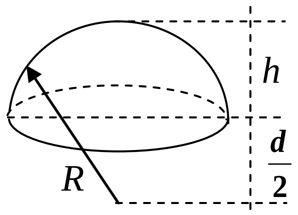

Рис. 4

Теперь можем вычислить: $V = V_{\text{Ш}} - 2 \cdot V_{\text{Ш.С.}} = \pi\left(d \cdot R^2 - \frac{d^3}{12}\right)$. И вычитая из этого объёма объём цилиндра, как мы это делали в предыдущем доказательстве, находим выражение для искомого объёма: $V_C = V - V_{\text{Ц}} = \pi \cdot \frac{d^3}{6}$.

Что и требовалось доказать.

Резюмируя, можно сказать, увеличивая радиус $\boldsymbol{R}$**,** но при этом сохраняя длину хорды $\boldsymbol{d}$ мы уменьшаем площадь исходного сегмента. Однако, заметаемый, при вращении объём, тем не менее, остаётся постоянным. Т. о, при $\boldsymbol{R} \to \infty$ размер площади сегмента стремится к величине длины дуги сегмента и объём вроде как «размвзывается» по поверхности.

Наверняка многие из вас, начиная изучать математический анализ, обращали внимание на интересную связь между формулами объёма и поверхности шара. А именно. Будем рассматривать эти формулы как функции от радиуса: $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{R})$ и $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$, которыми они на самом деле и являются.

Тогда $\dfrac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dR}} = \dfrac{\boldsymbol{d}\left(\dfrac{4}{3}\pi\boldsymbol{R}^3\right)}{\boldsymbol{dR}} = 4\pi\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$. Т. е. приращение объёма равно поерхности шара. Может быть, доказанная теорема и раскрывает суть этих формул? Кстати подобная связь формул справедлива и для площади круга и длины окружности. Об этом поговорим в следующей части нашей заметки.

## 2. Теорема о постоянстве площади

Отталкиваясь от только что сформулированного выше резюме попробуем найти на плоскости аналогичную теорему. Т. е. выяснить существует ли теорема, которую можно было бы назвать теоремой о постоянстве площади.

Рассмотрим кольцо. Внешняя и внутренняя окружности кольца являются концентрическим. Введём понятие *диаметра кольца*. Диаметром кольца будем называть отрезок максимальной длины, расположенный в плоскости кольца. Очевидно, что хорда сектора внешнего круга, касательная к меньшему кругу кольца будет отрезком максимальной длины.

Сформулируем теорему.

***Теорема*** **2** (о постоянстве площади):

**Площадь кольца данного диаметра равна площади круга этого диаметра**.

Эту теорему и будем называть теоремой о постоянстве площади. Действительно, пусть диаметр кольца есть величина постоянная. При увеличении радиуса кольца и постоянном диаметре толщина кольца будет уменьшаться стремясь к нулю. Но площадь кольца при этом, согласно ***Теореме*** **2**, будет оставаться постоянной.

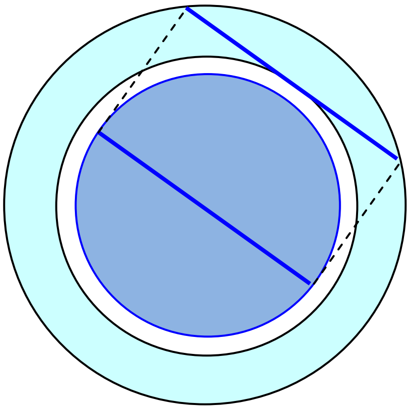

Рис. 5

## Доказательство:

Дано кольцо радиусрв $R_1$ и $R_2$. Сделаем дополнительные построения, как на Рис. 6.

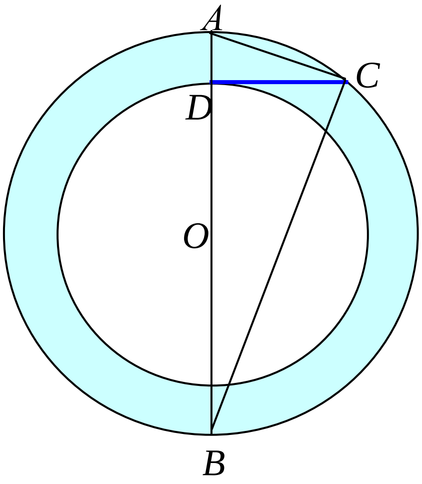

Рис. 6

Точка $O$ – центр кольца. Тогда из подобия треугольников $ADC$ и $CDB$ можем записать такое соотношение: $\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{DB}$. Или в наших обозначениях - $(R_1-R_2)\cdot(R_1+R_2)=R^2$, где $R$ – радиус кольца. Умножая каждое слагаемое на $\pi$ и раскрывая скобки получаем: $\pi R_1^2-\pi R_2^2=\pi R^2$. Т. е. площадь кольца равна площади круга радиуса $R$.

Теорема доказана.

Как и в предыдущем случае будем рассматривать формулы площади круга и длины окружности как функции радиуса: $S=\pi R^2$, $C=2\pi R$. Откуда можем записать: $\frac{dS}{dR} = C$, т. е. приращение площади равно длине окружности.

## Литература

1. П. К. Рашевский, «Курс дифференциальной геометрии», М., «Издательство технико-теоретической литературы», 1956
2. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
3. У. Бёрке, «Пространство-время, геометрия, космология», М., «Мир», 1985
4. И. Сокольников, «Тензорный анализ», М., «Наука», 1971
5. А. П. Норден, «Краткий курс дифференциальной геометрии», М., «Гос. Изд. физ-мат. литературы», 1958
6. Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, «Дифференциальная геометрия», М., «Издательство московского университета», 1990
7. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», М., «НАУКА», 1979
8. Г. Буземан, П. Келли, «Проективная геометрия и проективные метрики», М., «Издательство иностранной литературы», 1957
9. Д. Лейзер, «Создавая картину Вселенной», М., «Мир», 1988
10. Г. И. Копылов, «Всего лишь кинематика», М., «Наука», 1981
11. С. Хокинг, Дж. Эллис, «Крупномасштабная структура пространства-времени», М., «Мир», 1977
12. А. З. Петров, «Пространства Эйнштейна», М., «Изд. физ. – мат. литературы», 1961.
13. Г. К. Мак-Витти, «Общая теория относительности и космология», М., «Изд. иносторанной литературы», 1961
14. «Эйнштейновский сборник 1980-1981», М., «Наука», 1985
15. Д. И. Блохинцев, «Пространство и время в микромире», М., «Наука», 1970
16. «50 лет квантовой механики. Сборник статей», М., «Наука», 1979
17. В. И. Рыдник, «Что такое квантовая механика», М., «Из-во «СОВЕТСКАЯ РОССИЯ»», 1963
18. Х. Грин, «Матричная квантовая механика», М., «Мир», 1968
19. Ч. Мизнер и др., «Гравитация», Т. 1, М., Мир», 1977
20. А. Эйнштейн, «Собрание научных трудов», Т. III, М., «НАУКА», 1966
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, «Т. III, Квантовая механика», М., «НАУКА», 1974
22. П. К. Рашевский, «Риманова геометрия и тензорный анализ», М., «НАУКА», 1967
23. М. М. Постников, «Линейная алгебра и дифференциальная геометрия», М., «НАУКА», 1979
24. Щ. Еленький, «По следам Пифагора», М., «Детгиз», 1961

25.Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия, II», М., «Просвещение», 1987
26. Э. Шрёдингер, «Избранные труды по квантовой механике», М., «Наука», 1976
27. Н. В. Ефимов, «Высшая геометрия», М., «Наука», 1971
28. Д. тер Хаар, «Основы гамильтоновой механики», М., «Наука», 1974
29. Ф. Герман, «$RP^2$ - проективная плоскость», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
30. И. Пригожин, «От существующего к возникающему», М., «Наука», 1985
31. Г. Ф. Лаптев, «Элементы векторного исчисления», М., «Наука», 1975
32. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «Наука», 1990
33. А. С. Предводителев, «Механика движений», Минск, «Изд. БГУ», 1975
34. Б. А. Розенфельд, «Аполлоний Пергский», М., «МЦНМО», 2004
35. С. П. Фиников, «Проективно-дифференциальная геометрия», М., «URSS», 2006
36. Д. Пойа, «Математическое открытие», М., «Наука», 1970
37. М. Борн, «Эйнштейновская теория относительности», М., «Мир», 1964
38. В. И. Шуликовский, «Классическая дифференциаьная геометрия», М., «Гос. издательство физ.-мат. литературы», 1963
39 Ф. Герман, «Закоулки и перекрёстки матемиатики», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015,
40. Д. В. Сивухин, «Атомная и ядерная физика», Т. 5, М., «МФТИ», 2002
41. В. Черногорова, «Бесед об атомном ядре», М., «Молодая гвардия», 1976
42. Б. А. Розенфельд, «История неевклидовой геометрии», М., «Наука», 1976
43. О. Конт, «Курс положительной философии», Париж, 1830-1842
44 И. М. Яглом, «Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия», М., «Наука», 1969
45. М. А. Акивис, В. В. Гольдберг, «Тензорное исчисление», М., «Наука», 1972
46. А. А. Гусак, Г. М. Гусак, «Линии и поверхности», Минск, «Вышэйшая школа», 1985
47. В. Т. Воднев и др., «Основные математические формулы», Минск, «Вышэйшая школа», 1980
48. «Эйнштейновский сборник 1972», М., «Наука», 1974
49. «Эйнштейновский сборник 1975-1976», М., «Наука», 1978
50. «Эйнштейновский сборник 1978-1979», М., «Наука», 1983
51. А. Т. Фоменко «Симплектическая геметрия», М., «Издательство московского университета», 1988
52. Л. И. Верховский, «Истинная геометрия природы», http://lev-verkhovsky.ru/author/lev-verkhovsky/

53. Ю. Г. Борисович и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980
54. М. Берже, «Геометрия», Т. 1, М., «Мир», 1984
55. А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович, «Краткий курс математического анализа», М., «НАУКА», 1971
56. Ф. Герман, «Геометрия фундаментальных законов», http://lev-verkhovsky.ru/wp-content/uploads/2017/01/geo.pdf
57. Л. И. Прномарёв, «Под знаком кванта», М., «Советская Россия», 1984
58. А. Дж. Мак-Коннел, «Введение в тензорный анализ», М., «Гос. Издательство физ.-мат. литературы», 1963
59. Б. А. Кордемский, «Математическая смекалка», М., «Изд. технико-технической литературы, 1957.
60. М. И. Клиот-Дашинский, «Алгебра матриц и векторов», Л., «Изд. Ленинградского университета», 1974.
61. М. Тегмарк, «Наша математическая Вселенная», http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=22065936
62. М. Джеммер, «Понятие массы», М., «Изд. Прогресс», 1967
63. Ё. Намбу, «Кварки», М., «Мир», 1984
64. Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский, «Дифференциальные уравнения», М., «Высшая школа», 1976.
65. Ф. Герман, «Математика в науке и вокруг нас», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2016,
66. Л. В. Тарасов, «Этот удивительно симметричный мир», М., «Просвещение», 1982
67. М. Гарднер, «Математические новеллы», М., «Мир», 1974
68. П. Девис. «Суперсила», М., «Мир», 1989
69. В. А. Шашлов, «Строение ядер (I)», // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 24325, 05.03.2018
70. «Принцип соответствия», М., «Наука», 1979