Франц Герман

Экс-додекаэдр

franz.h-n@yandex.ru

Додекаэдр – является одним из платоновых тел. Напомним характеристики: число вершин (В) – 20, число граней (Г) – 12, число рёбер (Р) – 30, число внутренних диагоналей (Д) – 100. Существуют ещё 60 диагонали граней додекаэдра. Каждая грань имеет 5 диагоналей. Всего граней 12, поэтому получаем 60 диагоналей, которые принадлежат граням.

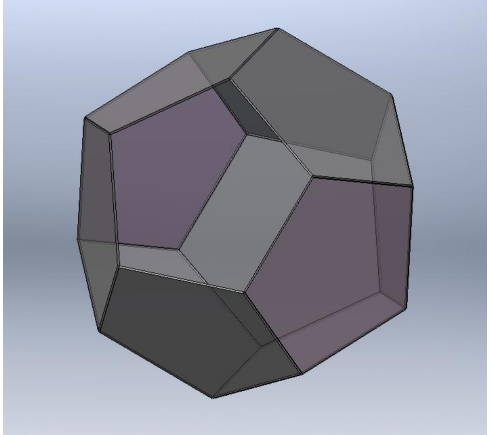

Рис. 1

Число вершин, граней и рёбер связаны известным соотношением Эйлера:

$$\boldsymbol{В} + \boldsymbol{Г} - \boldsymbol{Р} = \mathbf{2}. \qquad (1)$$

Число внутренних диагоналей также можно вычислить через число вершин, граней и рёбер:

$$\boldsymbol{Д} = \frac{\boldsymbol{В}(\boldsymbol{В}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{Р}}{\boldsymbol{Г}}(\boldsymbol{Р}-\boldsymbol{Г}). \qquad (2)$$

По формуле (2) можно вычислить число внутренних диагоналей для любого Платонова тела. Вывод этой формулы мы покажем в приложении.

Целью нашей работы будет построение и исследование фигуры, которую мы назвали экс-додекаэдр. Экс-додекаэдр по сути дела является перестройкой классического додекаэдра.

Рассмотрим три грани додекаэдра, имеющие общую вершину. Из каждой грани вырежем по ромбу. На Рис. 2 грани таких ромбов показаны красным цветом. Общая вершина ромбов выделена красным кружком. Вырежем конструкцию таких ромбов из нашего додекаэдра.

Известно, что в додекаэдр можно вписать тетраэдр. Пусть выделенная вершина является вершиной такого вписанного тетраэдра. Для трёх других вершин мысленно вписанного тетраэдра проделаем такую же операцию по вырезанию ромбов. Получим фигуру, показанную на Рис. 3.

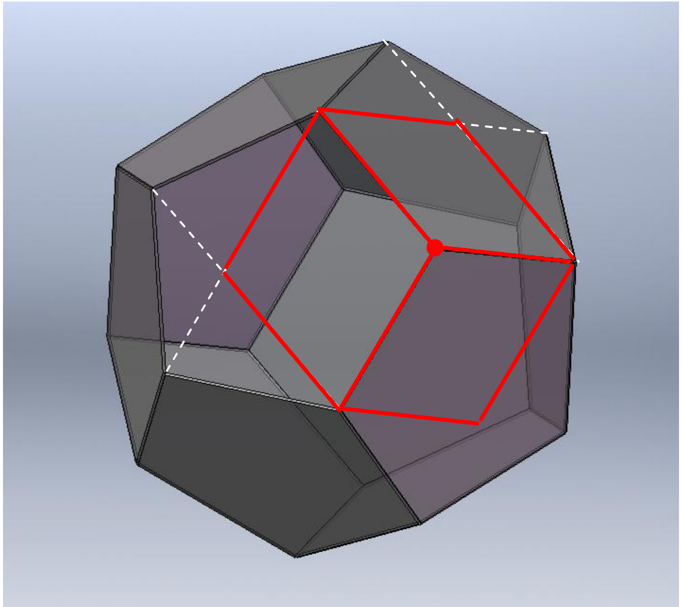

Рис. 2

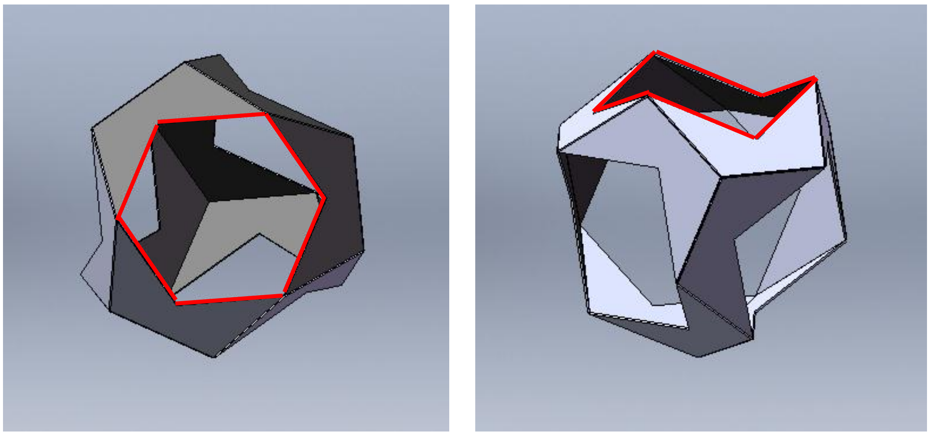

Рис. 3

Граница, которая получается после вырезания ромбов, представляет собой не плоский шестиугольник, который химики называют кресло (На Рис. 3 граница таких шестиугольников показана красным цветом).

В химии, особенно в органической, довольно часто можно встретить такую конструкцию. На Рис. 4 показана структура кристалла льда, которая целиком состоит из таких структур.

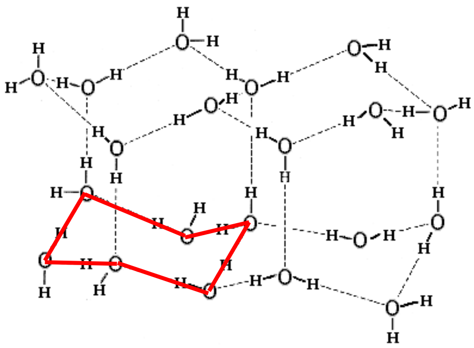

Рис. 4

Рассмотрим ромбическую фигуру, которую мы вырезали из нашего додекаэдра (Рис. 5).

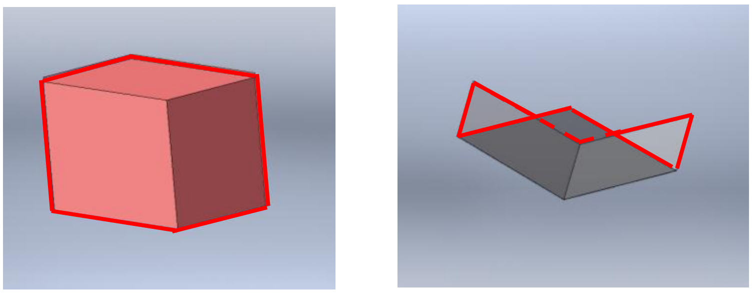

Рис. 5

Очевидно, что граница фигуры, показанной на Рис. 5 и граница отверстия в додекаедре на Рис. 3 тождественны. Поэтому эту ромбическую крышку можно развернуть таким образом, что выделенная вершина (см. Рис. 2) будет направлена во внутрь дырявого додекаэдра. Теперь можно вновь заклеить, полученные после вырезания, отверстия. Построенная фигура уже не будет выпуклой (Рис. 6).

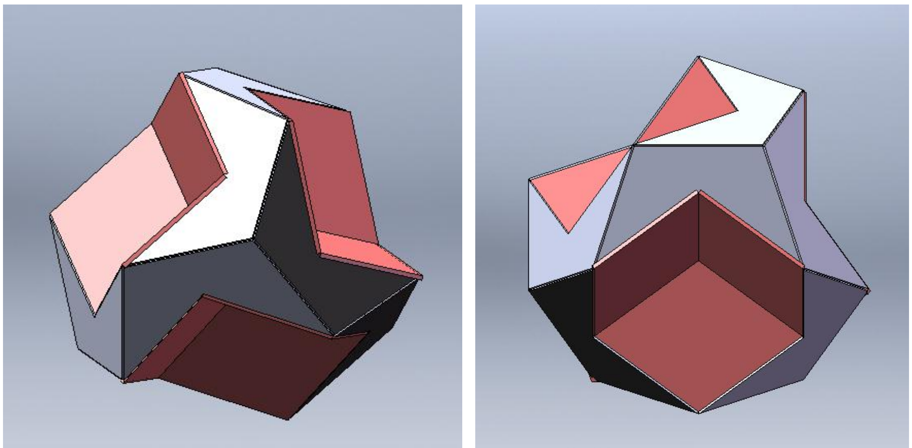

Рис. 6

Эту фигуру мы и будем называть **экс-додекаэдром**.

Очевидно, что и Эйлеровы характеристики этого многогранника будут другими. Действительно, вершин в додекаэдре было 20, в экс-додекаедре стало 32; граней было 12, стало – 24; рёбер было 30, стало 54. Но формула Эйлера (1) справедлива для любых многогранников, не только для выпуклых.

Рассмотрим ромбический параллелепипед, образованный объединением двух фигур, показанных на Рис.5.

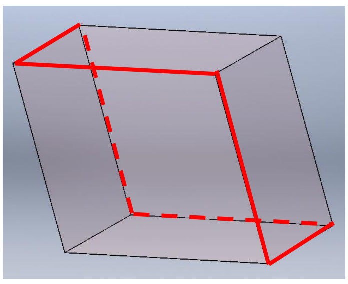

Рис. 7

Надо заметить, что из одинаковых ромбов, из которых построен параллелепипед на Рис. 7 можно построить ещё один раралеллепипед, отличный от данного. Это не трудно проделать самостоятельно, вырезав из плотной бумаги 6 ромбов с углами 72° и 108°. Но мы его здесь рассматривать не будем.

Именно разность объёмов додекаэдра и четырёх ромбических параллелепипедов составляют объём экс-додекаэдра. Для вычисления объёма ромбического параллелепипеда необходимо знать площадь основания (площадь данного ромба) и высоту параллелепипеда.

Вычислим площадь ромба. Введём обозначения, как показано на Рис. 8. Пусть длина стороны ромба равна $\boldsymbol{a}$. Напомним, что наш ромб – это часть правильного пятиугольника исходного додекаэдра. Тогда длина большей его диагонали $\boldsymbol{d_1 = DB = a \cdot \Phi}$, где $\boldsymbol{\Phi}$ – число «золотой» пропорции ($\boldsymbol{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$). Т. к. диагонали ромпа взаимноперпендикулярны легко вычислить и вторую диагональ $\boldsymbol{d_2 = AC}$ например из треугольника $\boldsymbol{COD}$. С учётом «золотого» преобразования $\boldsymbol{\Phi^2 = \Phi + 1}$ находим $\boldsymbol{d_2 = a\sqrt{3-\Phi}}$. Для дальнейших вычислений нам понадобиться ещё знать длину высоты ромба $\boldsymbol{h}$.

Рассмотрим треугольник $\boldsymbol{DAC}$. Очевидно, что $\boldsymbol{AE \cdot DC = AC \cdot DO}$. Откуда получаем: $\boldsymbol{h = \frac{a}{2}\sqrt{2+\Phi}}$ (при вычислении использовали равенство $\boldsymbol{\Phi\sqrt{3-\Phi} = \sqrt{\Phi+2}}$).

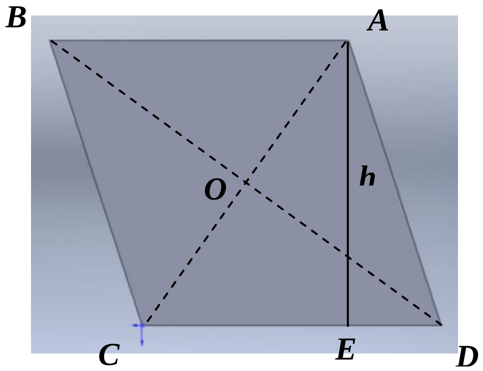

Рис. 8

Тогда площадь ромба равна $\boldsymbol{S_P = \frac{a^2}{2}\sqrt{2+\Phi}}$.

Теперь, чтобы вычислить объём нашего параллелепипеда, необходимо вычислить его высоту. Наш параллелепипед обладает плоскостью симметрии, которая проходит через малые диагонали оснований. Введём обозначения, как показано на Рис. 9 (обозначения Рис. 8 и Рис. 9 соответствуют). Тогда высота, опущенная из вершины $\boldsymbol{A}$, также будет принадлежать плоскости симметрии параллелепипеда и её основанием будет точка $\boldsymbol{P}$, принадлежащая малой диагонали $\boldsymbol{DF}$.

В силу отбратной теоремы «О трёх перпендикулярах» отрезок $\boldsymbol{PE}$ будет перпендикулярен стороне основания $\boldsymbol{CD}$. Вычислив длину отрезока $\boldsymbol{PE}$ можно найти и длину выфсоты $\boldsymbol{H}$ из треугольника $\boldsymbol{APE}$.

Для удобства вычислений сделаем отдельно рисунок основания (Рис. 10).

Проведём вторую диагональ. Обозначим точку пересечения диагоналей через $\boldsymbol{G}$. Тогда треугольники $\boldsymbol{CGD}$ и $\boldsymbol{PED}$ будут подобны. Можем составить такую пропорцию:

$\frac{CG}{PE}=\frac{GD}{DE}$. Откуда $PE=\frac{CG\cdot DE}{GD}$. DE находим из треугольника AED. Окончательно находим: $H=\frac{a}{\sqrt{3-\Phi}}$. С учётом ранее найденных формул получаем интересное свойство нашего параллелепипеда:

$$H\cdot d_2=a^2 \tag{3}$$

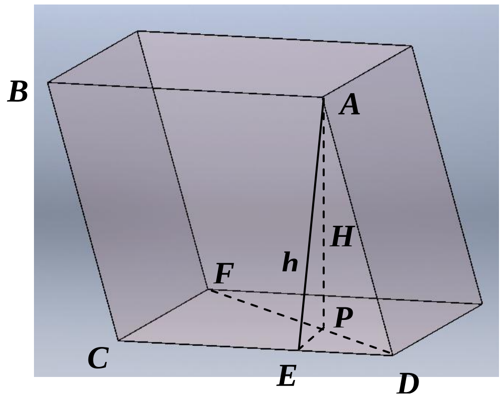

Рис. 9

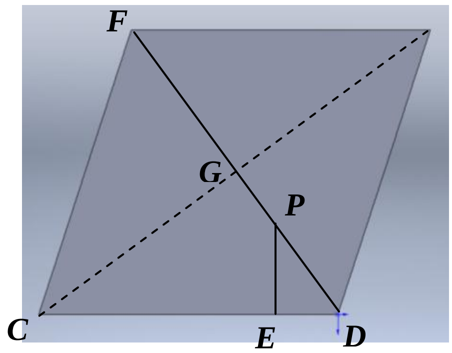

Рис. 10

Теперь можем найти объём параллелепипеда $V_П=S_P\cdot H=a^3\frac{\Phi}{2}$. Объём додекаэдра – величина известная: $V_D=a^3\left(2+\frac{7}{2}\Phi\right)$. Тогда объём экс-додекаэдра можно вычислить по формуле: $V_Э=V_D-4\cdot V_П=\frac{a^3}{2}(4+3\Phi)$

Экс-додекаэдры удобно сцеплять друг с другом. Вообще для сцепки более интересно использовать фигуру, показанную на Рис. 3. В этом случае после сцепки получаем некий дырявый кристалл. На Рис. 11 показаны примеры сцепки из двух фигур в разных ракурсах.

Примеры объёмных решёток из додекаэдров можно найти в [1].

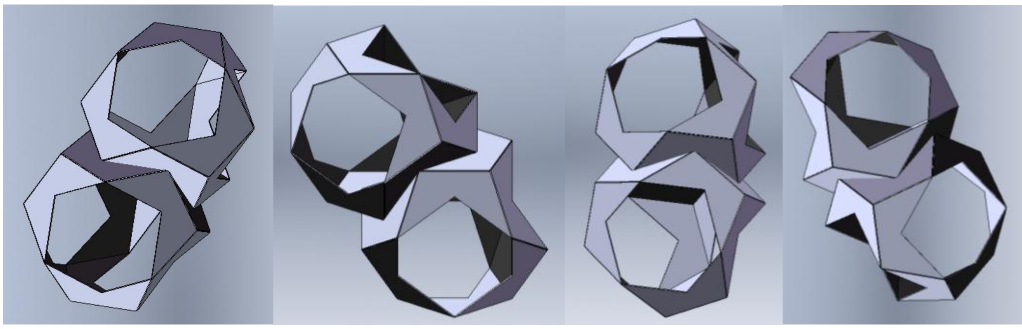

Рис. 11

На Рис. 12 показан пример сцепки из трёх фигур.

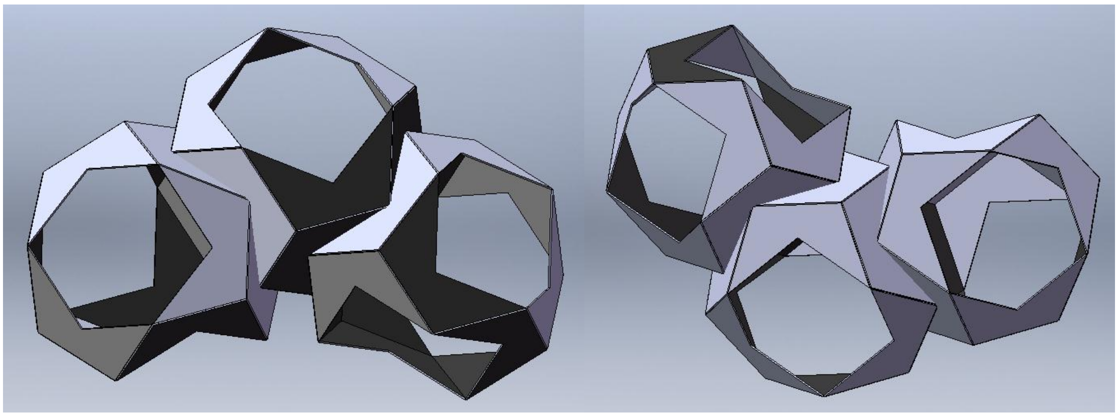

Рис. 12

Мы выражаем искреннюю благодарность Людмиле Шишковой, без чьих иллюстраций данная статья ещё очень долго не появилась бы перед заинтересованным читателем.

Приложение

Вывод формулы для вычисления числа диагоналей Платоновых тел.

Вершину многогранника можно соединить с другими вершинами $\boldsymbol{B}$-**1** способами, так как всего вершин $\boldsymbol{B}$. Каждый такой отрезок соединяет обязательно две вершины. Поэтому получаем $\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-1)}{2}$ отрезков. Из этой величины надо вычесть число рёбер $\boldsymbol{P}$ нашего многогранника. Осташееся число – это число искомых диагоналей $\boldsymbol{Д}$ и число диагоналей, которые принадлежат граням нашего многогранника. Обозначим это число через $\boldsymbol{Д_Г}$. Искомая формула в этих обозначениях будет иметь вид:

$$\boldsymbol{Д} = \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-1)}{2} - \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Д_Г} \cdot \boldsymbol{Г}$$

Теперь определим $\boldsymbol{Д_Г}$. Очевидно, что число вершин грани равно числу сторон (рёбер) грани. Для этой величины введём обозначение $\boldsymbol{C_Г}$ - (степень грани). Тогда, аналогично предыдущему, можем сказать, что число отрезков, соединяющих две вершины в грани равно $\frac{\boldsymbol{C_Г}(\boldsymbol{C_Г}-1)}{2}$. Из этого числа надо ещё вычесть величину $\boldsymbol{C_Г}$ (число сторон грани). Это и будет величина $\boldsymbol{Д_Г}$. А т. к. всего граней у нас $\boldsymbol{Г}$, то полученное выражение надо умножить на число граней. Получаем выражение:

$$\boldsymbol{Д} = \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-1)}{2} - \boldsymbol{P} - \left(\frac{\boldsymbol{C_Г}(\boldsymbol{C_Г}-1)}{2} - \boldsymbol{C_Г}\right) \cdot \boldsymbol{Г}$$

С другой стороны $\boldsymbol{C_Г} \cdot \boldsymbol{Г} = 2\boldsymbol{P}$, т. к. каждое ребро принадлежит двум граням. С учётом последнего выражения и алгебраических преобразований получаем искомую нами формулу:

$$\boldsymbol{Д} = \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-1)}{2} - \frac{2\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Г}}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Г})$$

Кто заинтересуется дальнейшим исследованием диагоналей многогранников рекомендуем заглянеть в [2].

Литература:

1. Spektrum der Wissenschaft, Oktober 1997
2. Д. Пойа, «Математическое открытие», М., «Наука», 1970