Франц Герман
franz.h-n@yandex.ru

Теория геометрических преобразований, как векторных функций.

1. Подобие второго рода. Гомотетия. Осевая симметрия.

Известно, что преобразование подобия второго рода (обозначим через $\boldsymbol{P}$) представляет собой коммутативную композицию осевой симметрии Σ_{ox} (относительно оси $\boldsymbol{OX}$) и гомотетии G_O^k, где $\boldsymbol{k}$ - коэффициент подобия.

Известно также, что преобразование $\boldsymbol{P}$ всегда имеет одну неподвижную точку и две, взаимно перпендикулярные неподвижные прямые [1], стр. 108.

Если в качестве осей декартовых координат выбрать неподвижные прямые преобразования подобия второго рода, то преобразование $\boldsymbol{P}$ можно представить в этих координатах как векторную функцию.

Покажем на примере, как можно построить такую систему координат, зная две точки образа и две точки праобраза преобразования подобия второго рода P_2 .

Пусть P_2 : $A \xrightarrow{P_2} A^*$, $B \xrightarrow{P_2} B^*$, где $\boldsymbol{k} = 2$ (Рис. 1).

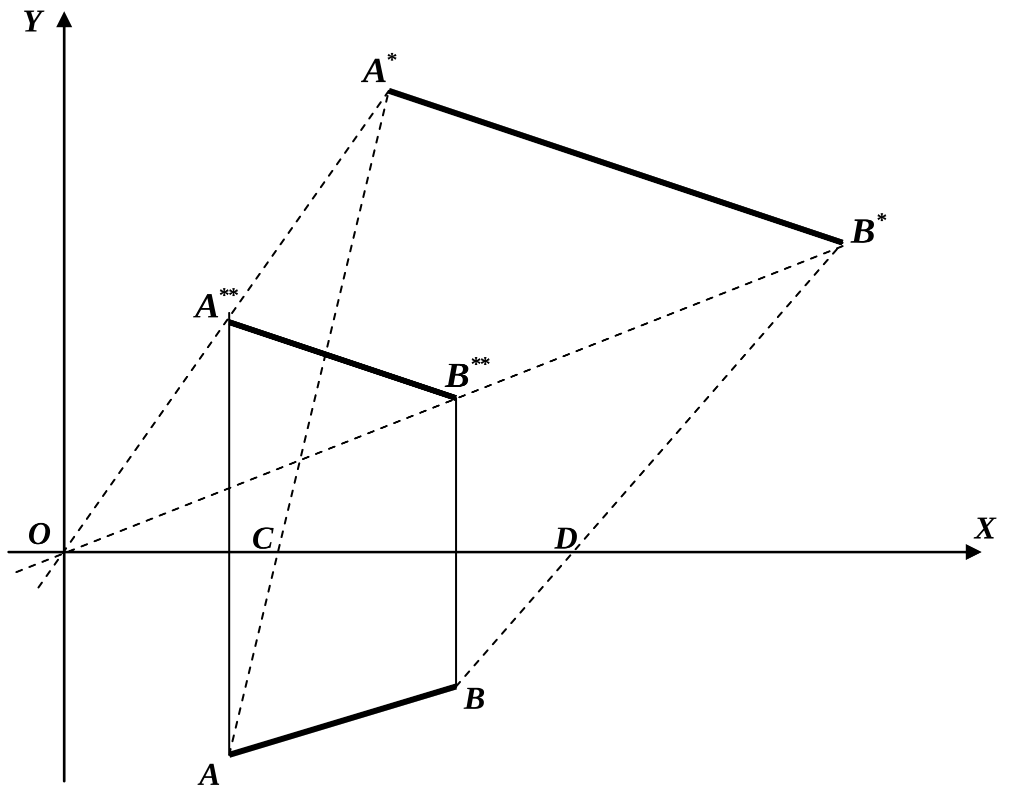

Рис. 1

Разделим отрезки AA^* и BB^* точками C и D соответственно, таким образом, что $A^*C = 2\cdot CA$ и $B^*D = 2\cdot DB$.

Прямая CD будет первой неподвижной прямой преобразования P_2 .

Далее построим отрезок $A^{**}B^{**}$, как образ отрезка AB при преобразовании осевой симметрии Σ_{CD}: $A\xrightarrow{\Sigma_{CD}}A^{**}, B\xrightarrow{\Sigma_{CD}}B^{**}$.

Точка $O\equiv A^*A^{**}\cap CD$ (или $O\equiv B^*B^{**}\cap CD$) бедет неподвижной точкой преобразования P_2 .

Примем за ось абсцисс -OX, искомой декартовой системы координат, прямую CD, тогда осью ординат -OY будет прямая, перпендикулярная прямой CD и проходящая через точку O.

Таким образом, мы построили инвариантную систему (ИС) декартовых координат преобразования P_2 .

Покажем, как можно в общем виде записать преобразование P_k в (ИС) координат в виде векторной функции.

Пусть P_k : $A\xrightarrow{P_k}A^*$, где $A(x_A;y_A)$, $A^*(x_A^*;y_A^*)$. Но с другой стороны $x_A^* = k\cdot x_A$, $y_A^* = -k\cdot y_A$ (в качестве наглядной иллюстрации здесь можно воспользоваться примером построения преобразования второго рода, показанного на Рис. 1).

Обозначим через $\overrightarrow{P_k}$ – векторную функцию преобразования P_k . Т. е. запись $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_k}$ будем считать равносильной записи P_k : $A\xrightarrow{P_k}A^*$. Тогда

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k} = \left(x_A^* - x_A\right)\cdot\vec{i} + \left(y_A^* - y_A\right)\cdot\vec{j} = \left(k\cdot x_A - x_A\right)\cdot\vec{i} + \left(-k\cdot y_A - y_A\right)\cdot\vec{j} =$$

$$= (k-1)x_A\cdot\vec{i} - (k+1)y_A\cdot\vec{j}$$

Т. к. в качестве точки $A(x_A;y_A)$ была выбрана произвольная точка, то можем записать в общем виде:

$$\boxed{\overrightarrow{P_k} = (k-1)x\cdot\vec{i} - (k+1)y\cdot\vec{j}} \qquad (1)$$

Пример

Найти векторную функцию преобразования подобия второго рода P_2 и образ A^* для точки $A(2;-1)$ в инвариантной системе координат.

Обозначим начало (ИС) координат через точку O, тогда $\overrightarrow{OA} = 2\cdot\vec{i} - \vec{j}$.

Векторная функция данного преобразования, согласно формуле (1), будет иметь вид:

$$\overrightarrow{P_2} = (2-1)\cdot 2\cdot\vec{i} - (2+1)\cdot(-1)\cdot\vec{j} = 2\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_2} = 2\cdot\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\cdot\overrightarrow{i} + 3\cdot\overrightarrow{j} = 4\cdot\overrightarrow{i} + 2\cdot\overrightarrow{j}$$

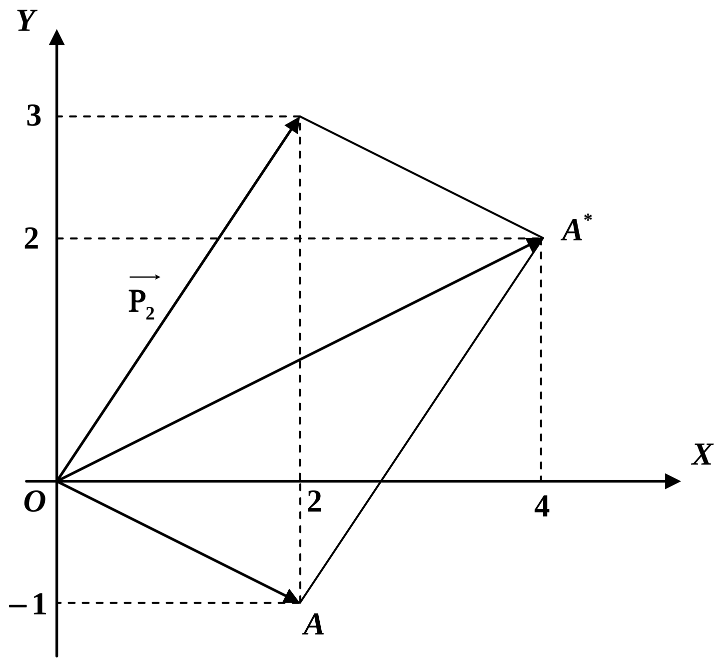

Рис. 2

В дальнейшем все преобразования будем рассматривать в инвариантной для всех $\overrightarrow{P_k}$ системе координат $\boldsymbol{XOY}$.

Обозначим через G_O^k – преобразование гомотетии, относительно начала координат с коэффициентом подобия $\boldsymbol{k}$ (о преобразовании гомотетии см., например, [2], стр. 82).

Пусть $A(x, y) \xrightarrow{G_O^k} A^*(kx, ky)$, тогда

$$\overrightarrow{G_O^k} = \overrightarrow{OA^*} - \overrightarrow{OA} = (kx - x)\cdot\overrightarrow{i} + (ky - y)\cdot\overrightarrow{j} = (k-1)\cdot\left(x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{G_O^k} = (k-1)\cdot\left(x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j}\right)} \qquad (2)$$

Аналогично можно представить преобразование осевой симметрии Σ_{ox}, относительно оси $\boldsymbol{OX}$ в виде векторной функции $\overrightarrow{\Sigma_{ox}}$.

$$\boxed{\overrightarrow{\Sigma_{ox}} = -2\cdot y\cdot\overrightarrow{j}} \qquad (3)$$

Теперь поговорим о композициях геометрических преобразований. Некоторые вопросы композиций хорошо представлены в [3], стр. 296-310.

Обозначим через ⊕ операцию композиции двух преобразований. Известно, что:

$$\boldsymbol{P_k} \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow \boldsymbol{G_O^k}; \qquad \text{(a)}$$

$$\boldsymbol{G_O^k} \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow \boldsymbol{P_k}; \qquad \text{(b)}$$

$$\boldsymbol{P_k} \oplus \boldsymbol{G_O^n} \rightarrow \boldsymbol{P_{kn}}; \qquad \text{(c)}$$

$$\boldsymbol{P_k} \oplus \boldsymbol{P_n} \rightarrow \boldsymbol{G_O^{kn}}; \qquad \text{(d)}$$

$$\boldsymbol{G_O^k} \oplus \boldsymbol{G_O^n} \rightarrow \boldsymbol{G_O^{kn}}; \qquad \text{(e)}$$

$$\Sigma_{OX} \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow \boldsymbol{T}, \qquad \text{(f)}$$

где $\boldsymbol{T}$ - тождественное преобразование. Ему в соответствие поставим вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Под векторной композицией двух преобразований будем представлять векторное сложение соответствующих векторных функций.

Выведем правила векторных композиций.

Запишем (a) в векторной форме:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{G_O^k}} = \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{P_k}} + \boldsymbol{b} \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}},$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ некоторые, пока неизвестные нам коэффициенты.

Найдём $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, используя формулы (1), (2) и (3).

$$(k-1)\cdot\left(x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}\right)=a\cdot\left((k-1)\cdot x\cdot\overrightarrow{i}-(k+1)\cdot y\cdot\overrightarrow{j}\right)+b\cdot\left(-2\cdot y\cdot\overrightarrow{j}\right)$$

В силу этого равенства можем записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} k-1=a\cdot(k-1) \\ k-1=-a\cdot(k+1)-2\cdot b \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу видим, что $\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$.

Из второго уравнения находим $\boldsymbol{b}$**:**

$$k-1=-k-1-2\cdot b; \qquad b=-k.$$

Получаем первое правило векторной композиции:

$$\boldsymbol{P_k} \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow \boldsymbol{G_O^k} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{G_O^k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P_k}} - \boldsymbol{k} \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}.$$

Найдём правило векторной композиции для (b).

$$\overrightarrow{P_k} = a \cdot \overrightarrow{G_O^k} + b \cdot \overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Из предыдущего правила можно записать:

$$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \to P_k \Rightarrow \overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Найдём правило для (c).

$$\overrightarrow{P_k} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G_O^n}$$

или

$$(kn-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (kn+1)y \cdot \overrightarrow{j} = a\left((k-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)y \cdot \overrightarrow{j}\right) + b(n-1)\left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right);$$

или в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) \\ -kn-1 = -a(k+1) + b(n-1) \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим: $2kn = 2ak$, откуда $a = n$

Подставляя полученный результат во второе уравнение, находим $b = 1$. Таким образом:

$$P_k \oplus G_O^n \to P_{kn} \Rightarrow \overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n}$$

Заметим, что $\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_O^n} = k\overrightarrow{P_n} + \overrightarrow{G_O^k}$

Для (d) запишем:

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{P_n}\text{, или}$$

$$(kn-1)\left(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}\right) = a\left((k-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)y \cdot \overrightarrow{j}\right) + b\left((n-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (n+1)y \cdot \overrightarrow{j}\right)\text{, откуда:}$$

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) = ak - a + bn - b \\ kn-1 = -a(k+1) - b(n-1) = -ak - a - bn - b \end{cases}.$$

Сложем оба уравнения и разделим на 2, получим: $kn-1 = -(a+b)$. Теперь вычтем из первого уравнение второе, получим: $ak + bn = 0$.

$$\begin{cases} kn-1 = -(a+b) \\ ak + bn = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений находим ***a*** и ***b:***

$$a = \frac{n(kn-1)}{k-n}, \qquad b = \frac{k(kn-1)}{k-n}$$

Получаем следующее правило для композиции преобразований (d):

$$P_k \oplus P_n \to G_O^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right), \qquad k \neq n .$$

Запишем векторный вид композиции преобразований (e):

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{G_O^{k}} + b\overrightarrow{G_O^{n}} .$$

Используя предыдущее правило, можно записать:

$$\overrightarrow{G_O^{kn}} = a\overrightarrow{G_O^{k}} + b\overrightarrow{G_O^{n}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n}\right) \tag{4}$$

Ранее было найдено, что $\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_O^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$, $\overrightarrow{P_n} = \overrightarrow{G_O^n} + n\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$. Подставим эти выражения в (4), получим правило векторной операции для композиции преобразований (e):

$$G_O^k \oplus G_O^n \to G_O^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_O^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n}\left(n\overrightarrow{G_O^k} - k\overrightarrow{G_O^n}\right).$$

Для композиции (f), имеем очевидное правило:

$$a\overrightarrow{\Sigma_{OX}} + b\overrightarrow{\Sigma_{OX}} = \vec{0}, \quad \text{где } a = -b,\ a \text{ – любое.}$$

Сведём все полученные формулы в таблицу.

Вся работа передана в РАН