Теорема о произвольном четырёхугольнике

Произвольный четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ с внутренними диагоналями A_1A_3 и A_2A_4 будем называть полным. Введём новые понятия. Три прямые, проходящие через вершину A_i будем называть *основным пучком вершины* A_i. Прямые, проходящие через вершину A_i и перпендикулярные прямым основного пучка будем называть *перпендикулярным пучком* A_i. Прямые, образующие треугольник из трёх других вершин четырёхугольника будем называть *основанием для пучка* A_i. Сторону основания, через которую не проходит конкретно взятая прямая пучка, будем называть соответственно противолежащей. Тогда справедлива **Теорема**:

Если дан произвольный полный четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ и основной пучок A_i, то прямые перпендикулярного пучка пересекаются с соответствующими противолежащими прямыми осноиия в точках лежащих на одной прямой.

Сделаем рисунок.

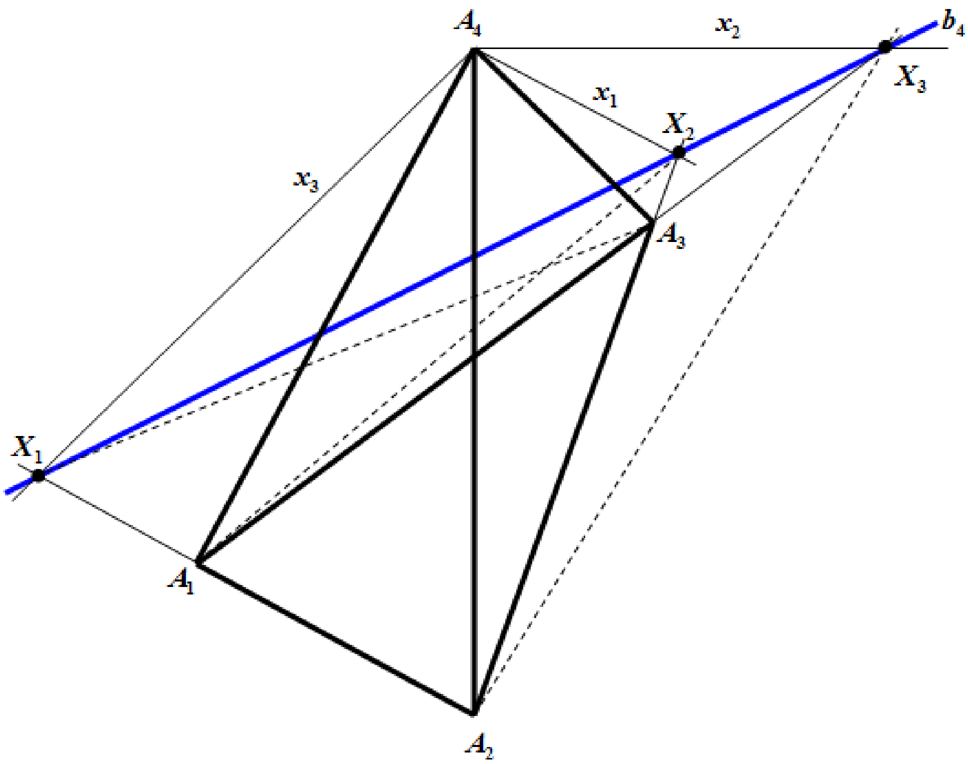

Рис. 1

Здесь: $x_1 \perp A_1A_4$, $x_2 \perp A_2A_4$, $x_3 \perp A_3A_4$. $(x_1 \cap A_3A_2) \equiv X_2$, $(x_2 \cap A_1A_3) \equiv X_3$, $(x_3 \cap A_2A_1) \equiv X_1$. Точки X_1, X_2 и X_3 лежат на одной прямой b_4.

Доказательство:

Проведём $x_3 \perp A_3A_4$ и $x_1 \perp A_1A_4$, и построим точки $(x_3 \cap A_1A_2) \equiv X_1$ и $(x_1 \cap A_2A_3) \equiv X_2$.

Проведём прямую X_1X_2 до пересечения с продолжением стороны A_1A_3 в точке X_3.

Докажем, что прямая $A_4X_3 \perp A_4A_2$.

Соединим отрезками прямых точку X_1 с точкой A_3, точку X_2 с точкой A_1 и точку X_3 с точкой A_2.

Рассмотрим четырёхугольник $A_1X_1X_2A_3$. Отрезки X_1A_3, X_2A_1 и X_3A_2 будут его диагоналями. Известно, что три окружности, построенные на диагоналях четырёхугольника, как на диаметрах, проходят через две общие точки (такие окружности называются соосными, см. Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер "Новые встречи с геометрией"). Треугольники $A_1X_2A_4$ и $A_3X_1A_4$ - прямоугольные. Следовательно, точка A_4 является одной из этих двух общих точек для соосных окружностей. Следовательно треугольник $A_2X_3A_4$ также будет прямоугольный. Т. е. $A_4X_3 \perp A_4A_2$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим следствия этой теоремы.

***Следствие* 1.**

Если четырёхугольник $A_1A_2A_3S$ вписан в окружность, то прямая l проходит через центр этой окружности.

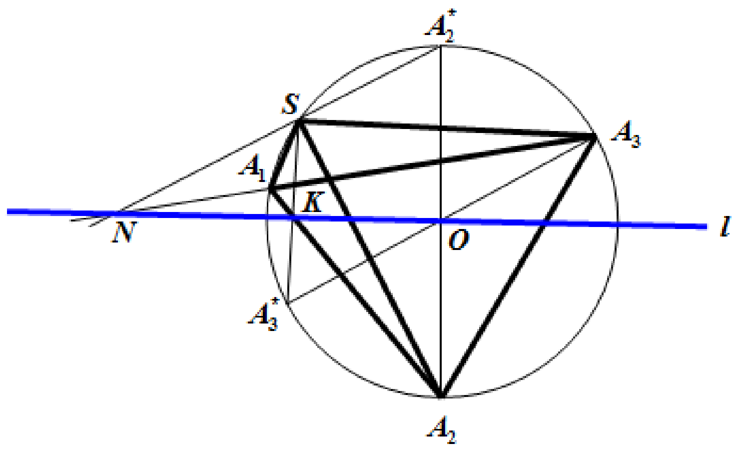

Рис. 2

Доказательство:

Проведём прямую, перпендикулярную прямой SA_2 и проходящую через точку S. Пусть данная прямая пересекает окружность в точке A_2 и прямую A_1A_3 в точке N. Аналогично построим точку $\left(A_3^*S \cap A_1A_2\right) \equiv K$, где $A_3^*S \perp A_3S$.

Рассмотрим вписанный в данную окружность шестиугольник $SA_{2*}A_2A_1A_3A_3^*$. Противоположные стороны этого шестиугольника пересекаются в точках: $\left(A_2^*S \cap A_1A_3\right) \equiv N$, $\left(A_3^*S \cap A_1A_2\right) \equiv K$, $\left(A_3^*A_3 \cap A_2^*A_2\right) \equiv O$. По теореме Паскаля данные точки коллинеарны. Т.к. треугольники $A_2SA_2^*$ и $A_3SA_3^*$ прямоугольные, то $A_2A_2^*$ и $A_3A_3^*$ будут диаметрами данной окружности и следовательно O - её центр. Следовательно прямая l проходит через центр описанной окружности.

Что и требовалось доказать.

***Следствие* 2.**

Если треугольник $A_1A_2A_3$ равносторонний, и точка S равномерно движется по описанной окружности, то прямая вращается ей навстречу с вдвое меньшей скоростью *l*.

Исследуем взаимное движение прямой l и точки S

Т. к. прямая l всё время проходит через центр окружности, то достаточно для определения её положения провести построение только относительно одной какой-нибудь вершины треугольника $A_1A_2A_3$.

Пусть точка S движется по окружности по часовой стрелке. Выберем начальное положение точки S, совпадающее с вершиной A_2, тогда прямая l совпадёт с диаметром $A_2A_2^*$. Сейчас мы рассматриваем произвольный треугольник $A_1A_2A_3$ (Рис. 3).

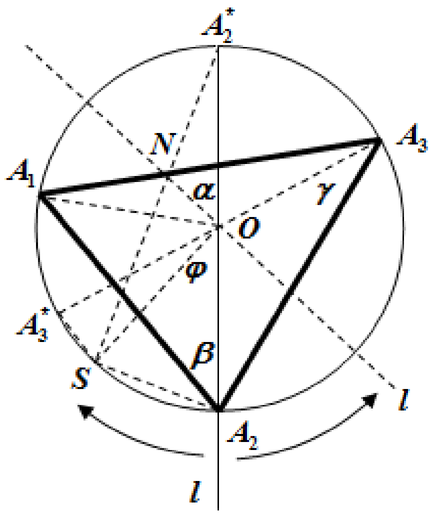

Рис. 3

Сторона A_1A_3 является противоположной вершине A_2. Мы должны эту сторону как-то определить относительно вершины A_2. Можно это сделать, например, определив постоянные углы $\angle A_1A_2O = \beta$ и $\angle A_3A_2O = \gamma$. Пусть точка S прошла по окружности дугу, равную углу φ, тогда прямая l повернётся в противоположную сторону на угол α, Найдём зависимость α от φ.

Обозначим радиус окружности через R. Из треугольника ONA_3 имеем:

$$\frac{ON}{Sin(\angle NA_3O)} = \frac{R}{Sin(\angle ONA_3)}; \qquad \angle NA_3O = \frac{\pi - 2(\beta+\gamma)}{2} = \frac{\pi}{2} - (\beta+\gamma);$$

$$\angle ONA_3 = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - (\beta+\gamma)\right) - (\alpha + 2\gamma) = \frac{\pi}{2} - (\alpha+\gamma-\beta);$$

$$ON = \frac{R\cdot Cos(\beta+\gamma)}{Cos(\alpha+\gamma-\beta)}.$$

Из треугольника ONA_2^* имеем:

$$\frac{ON}{Sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{R}{Sin\left(\pi - \frac{\varphi}{2} - \alpha\right)}; \qquad ON = \frac{R\cdot Sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{Sin\left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Приравняв оба выражения для ON, получаем:

$$\frac{R\cdot Cos(\beta+\gamma)}{Cos(\alpha+\gamma-\beta)} = \frac{R\cdot Sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{Sin\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right)} \text{ или}$$

$$Cos(\alpha+\gamma-\beta)\cdot Sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = Cos(\beta+\gamma)\cdot Sin\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (1)$$

Это и есть *характеристическое уравнение* взаимного расположения точки S и прямой l.

Рассмотрим случай, соответствующий условиям, Следствия 2, т.е. $\beta = \gamma = 30°$.

Подставив значения данных углов в (1) находим, что $\alpha = \frac{\varphi}{2}$.

Что и требовалось доказать.

Мы не исследовали другие виды треугольника $A_1A_2A_3$. Возможно, что существуют треугольники, дающие интересные взаимные движения точки $\boldsymbol{S}$ и прямой $\boldsymbol{l}$. Более того, мы уверены, что приложив некоторую техническую смекалку, можно разработать, на базе этой теоремы интересную модель шарнирно-шатунного передаточного механизма.

Очевидно, что в качестве точки $\boldsymbol{S}$ можно выбрать любую вершину четырёхугольника.

***Следствие* 3.**

Очевидно, что в силу теоремы «О произвольном четырёхугольнике» ($\boldsymbol{T}$) для каждой вершины $\boldsymbol{A_i}$, данного четырёхугольника, соответственно получаем прямую $\boldsymbol{b_i}$. А четыре прямые $\boldsymbol{b_i}$ определяют новый четырёхугольник $\boldsymbol{B_1B_2B_3B_4}$. Т. е. данный четырёхугольник порождает новый четырёхугольник и т. д..

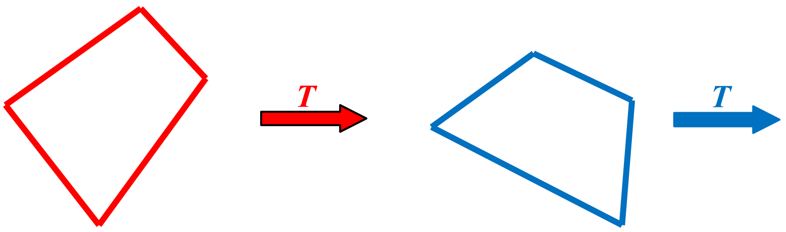

Рис. 4

Франц Герман

07.08.24