Франц Герман

Теорема «о трёх элементарных пучках»

Обычно в большинстве математической литературы рассказ о теоремах проективной геометрии начинается с Теоремы Дезарга. Мы же начнём наш рассказ с теоремы Паппа. Кстати, теорему Паппа в некоторых учебниках по геометрии размещают в разделе аффинной геометрии, а не проективной. А порой и вовсе забывают об этой теореме. Но для начала познакомим читателя с ещё одним понятием проективной плоскости. Если несколько прямых на прооективной плоскости проходят через общую точку (центр перспективы), то совокупность этих прямых называется *пучком*. Очевидно, что простейший пучок состоят из двух прямых. Мы будем такой пучок называть *элементарным*. Если смотреть на рисунок, то мы видим две прямые, выходящие из центра персперктивы. Прямую ***a*** будем называть левой прямой пучка, а прямую ***b*** – правой (Рис. 1).

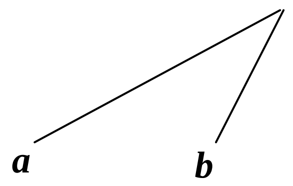

Рис. 1

Теорема Паппа

Если даны две прямые, содержащие по три различных точки и точки соединены в шестиугольник, причём вершинами шестиугольника являются данные точки прямых, то противоположные стороны шестиугольника пересекаются в точках, лежащих на одной прямой (Рис. 2).

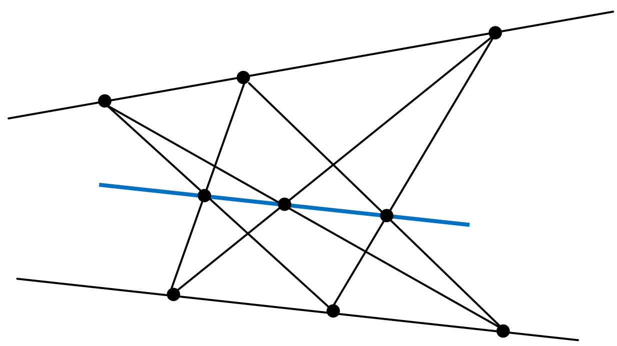

Рис. 2

Отметим, что противоположными сторонами шестиугольника называются первая и четвёртая сторона, вторая и пятая и третья и шестая.

Надо сказать, что в литературе практически никогда не встречается упоминание о двойственной теореме Паппа. А она ведь должна существовать. Давайте разбираться.

Прямая теорема имеет две прямые, на которых расположены по три точки. Значит двойственная теорема будет иметь два пучка по три прямых в каждом. Вершины шестиугольника прямой теоремы расположены поочерёдно на данных прямых. Значит стороны двойственного шестиугольника должны располагаться на прямых данных пучков. Причём, поочерёдно (Рис. 3). Тогда, согласно принципу двойственности, прямые, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, пересекаются в одной точке.

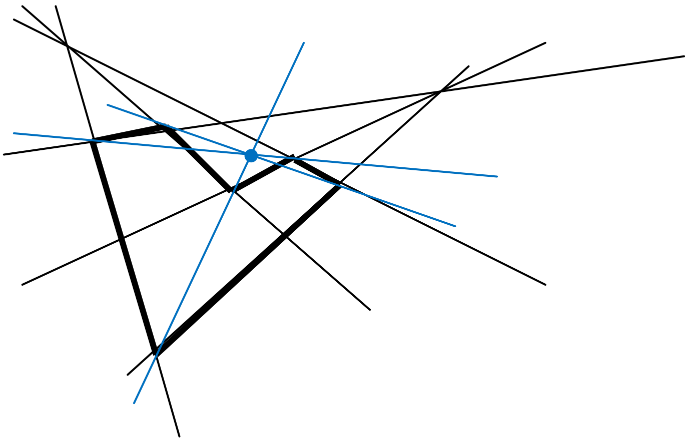

Рис. 3

Рассмотрим теорему «о трёх элементарных пучках». Прежде чем мы познакомимся с формулировкой теоремы, определим ещё одно понятие проективной геометрии. Четырёхугольник, образованный пересечением прямых двух пучков, будем называть *проективным сечением пучков* или просто *сечением пучков* (Рис. 4).

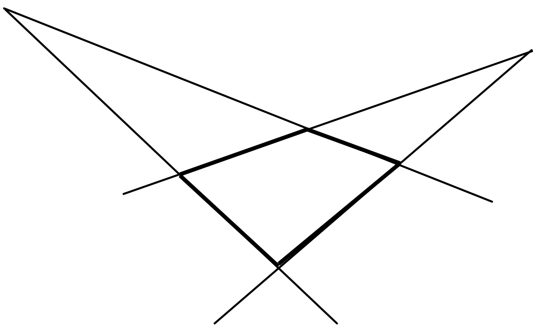

Рис. 4

Рассмотрим три пучка, центры перспективы которых принадлежат одной прямой (Рис. 5). Эти пучки, попарно пересекаясь, образуют три сечения. Точки пересечения прямых пучков будем обозначать через $\boldsymbol{a}_{ba}^{ij}$. Верхний индекс показывает к каким пучкам принадлежат прямые, а нижний индекс указывает какая это прямая левая или правая. Чтобы не было путаницы верхние и нижние индексы должны быть согласованы, т. е. например в случае обозначения $\boldsymbol{a^{ij}_{ba}}$: прямая пучка $\boldsymbol{i}$ является правой, а прямая пучка $\boldsymbol{j}$ – левой, а $\boldsymbol{a^{ij}_{ba}}$ - точка их пересечения.

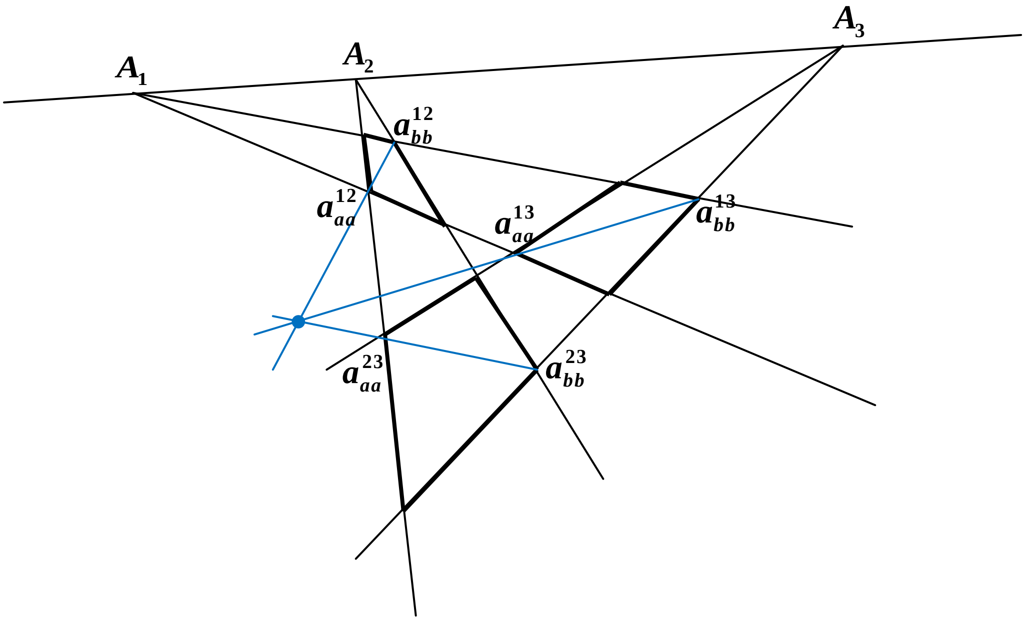

Рис. 5

Напомним читателю, что сечение двух пучков – это четырёхугольник. Диагональ $\boldsymbol{a^{ij}_{aa}\,a^{ij}_{bb}}$ будем называть *согласованной диагональю* для пучков $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, в том смысле, что эта диагональ между точками пересечений двух левых и двух правых прямых пучков. Теперь можем сформулировать первую часть теоремы «о трёх элементарных пучках.

Теорема (о трёх элементарных пучках).

Если точки перспектив трёх элементарных пучков лежат на одной прямой, то

1. *согласованные диагонали их попарных сечений пересекаются в одной точке*.

Перерисуем ещё раз Рис. 5. Рассмотри треугольники $\boldsymbol{a^{12}_{aa}\,a^{13}_{aa}\,a^{23}_{aa}}$ и $\boldsymbol{a^{12}_{bb}\,a^{13}_{bb}\,a^{23}_{bb}}$. Как видим: прямые, проходящие через соответствующие верхним индексам вершины треугольников, пересекаются в одной точке, а соответствующие стороны треугольников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой (Рис. 6). Наверное читатель уже догадался, что мы говорим об известной теореме Дезарга. Напомним, как звучит эта теорема:

если треугольники имеют ось перспективы, то они имеют центр перспективы ([1], стр. 199). Двойственная теорема звучит в обратном порядке: *если тругольники имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы*.

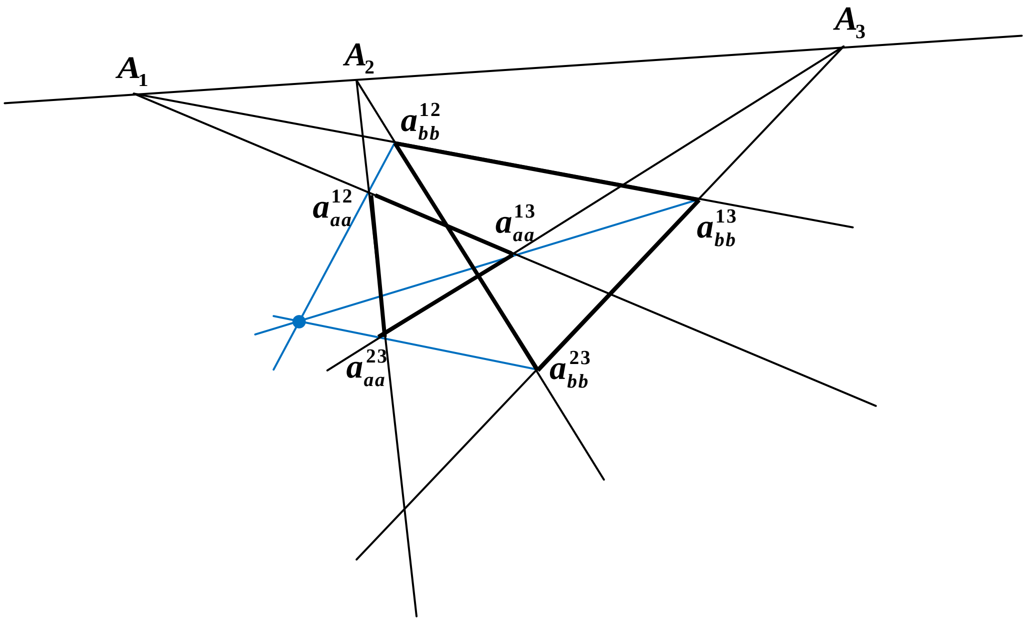

Рис. 6

Прямую A_1A_2 - ось перспективы будем называть прямой Дезарга.

Но вернёмся к теореме о трёх элементарных пучка. В первой части этой теоремы речь шла о согласованных диагоналях сечений. Возникает вопрос: а как быть с несогласованными диагоналями сечений? Ведь они тоже существуют. Это отрезки $a_{ba}^{12}a_{ab}^{12}$, $a_{ba}^{13}a_{ab}^{13}$ и $a_{ba}^{23}a_{ab}^{23}$ (Рис. 7).

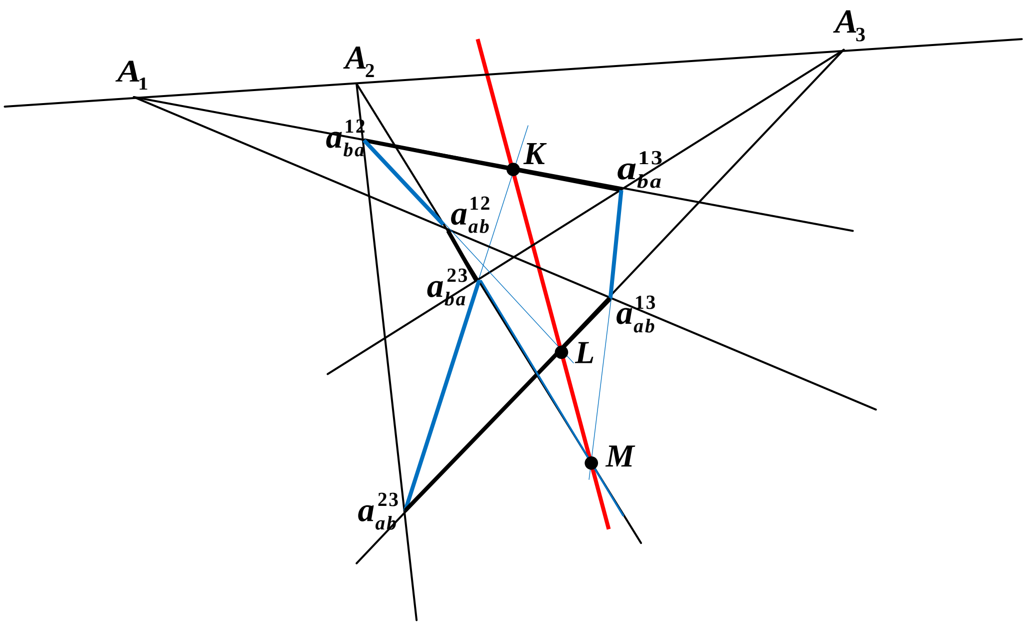

Рис. 7

Оказалось, что при использовании несогласованных диагоналей сечений и отрезков прямых наших пучков возможно построить шестиугольник $\boldsymbol{a_{ab}^{12}a_{ba}^{12}a_{ba}^{13}a_{ab}^{13}a_{ab}^{23}a_{ba}^{23}}$, противоположные стороны которого, пересекаются в точках, лежащих на одной прямой: $\boldsymbol{a_{ab}^{12}a_{ba}^{12} \cap a_{ab}^{13}a_{ab}^{23} \equiv L}$, $\boldsymbol{a_{ba}^{23}a_{ab}^{23} \cap a_{ba}^{13}a_{ba}^{12} \equiv K}$ и $\boldsymbol{a_{ba}^{13}a_{ab}^{13} \cap a_{ba}^{23}a_{ab}^{12} \equiv M}$. Здесь точки $\boldsymbol{L}$**,** $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{M}$ лежат на одной прямой (Рис. 7). Кстати, построить *несогласованный шестиугольник* можно двумя способами и, следовательно, существует две различных прямых, которые образованы пересечениями противоположных сторон. Заинтересованный читатель может это проделать самостоятельно. Шестиугольник, который мы только что построили будем называть несогласованным $\boldsymbol{b}$-шестиугольником, т. к. его стороны это не только несогласованные диагонали, но отрезки $\boldsymbol{b}$-прямых данных пучков. Несогласованные $\boldsymbol{a}$- и $\boldsymbol{b}$-шестиугольники будем называть *мерцающими*.

Теперь можем сформулировать нашу теорему полностью:

Теорема (о трёх элементарных пучках).

Если точки перспектив трёх элементарных пучков лежат на одной прямой, то:

1. *согласованные диагонали их попарных сечений пересекаются в одной точке (теорема Дезарга).*

2. *точки пересечения противоположных сторон мерцающих шестиугольникв пересекаются в точках, лежащих на одной прямой*

На основании всего вышесказанного логично сделать вывод, что говорить о теоремах проективной геометрии надо начинать с теоремы о трёх элементарных пучках. На основании этой теоремы читатель знакомится с такими первичными понятиями, как *левые и правые прямые пучков, сечение двух пучков и согласованные и несогласованные диагонали сечений, мерцающие шестиугольники* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *типов*, а теорема Дезарга – это только следствие теоремы о трёх элементарных пучках.

Литература

1. А. В. Погорелов, «Геометрия», М., «Наука», 1983