Теорема о равнобедренных треугольниках

Введём несколько дополнителных определений для равнобедренных треугольников. Пусть данн равнобедренный треугольник $\boldsymbol{ABC}$ (Рис. 1).

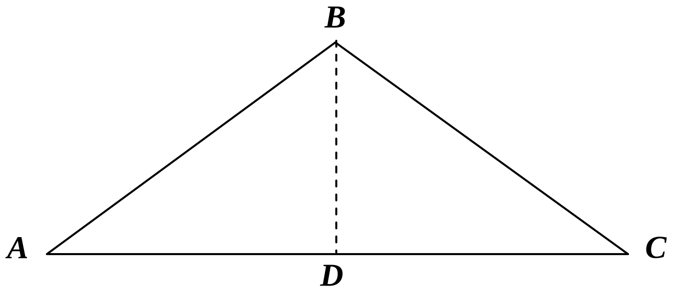

Рис. 1

Определение 1

Вершину, из которой опущен перпендикуляр $\boldsymbol{BD}$ на сторону основания $\boldsymbol{AC}$, будем называть *центральной вершиной* треугольника.

Определение 2

Вершину, $\boldsymbol{A}$ – слева от перпендикуляра $\boldsymbol{BD}$ будем называть *левой вершиной*, а боковую сторону, проходящую через эту вершину – *левой боковой стороной* равнобедренного треугольника. Соответственно, сторона $\boldsymbol{CB}$ будет называется *правой боковой стороной*.

Теперь можем сформулировать теорему.

Теорема («О равнобедренных треугольниках»):

Если два равнобедренных треугольника расположены таким образом, что боковая вершина одного треугольника принадлежит боковой стороне (или её продолжению) другого треугольника, а вторые боковые стороны треугольников параллельны (или совпадают), то угол между боковыми сторонами в два раза больше угла, образованными сторонами оснований (или их продолжениями).

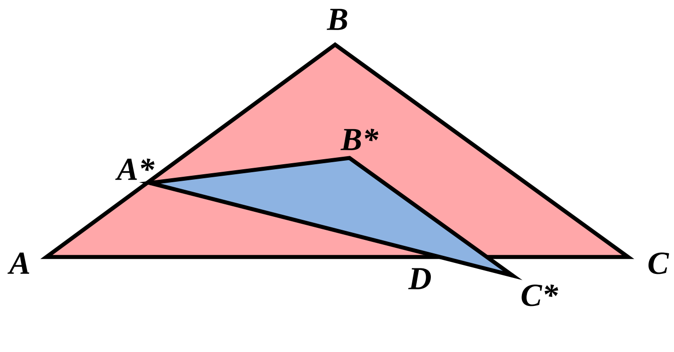

Рис. 2

Пример (Рис. 2)

Даны два равнобедренных треугольника $\boldsymbol{ABC}$ и $\boldsymbol{A^*B^*C^*}$, $\boldsymbol{A^* \in AB}$, $\boldsymbol{BC \| B^*C^*}$, тогда, согласно сформулированной теореме, $\boldsymbol{\angle BA^*B^* = 2 \cdot \angle ADA^*}$.

Доказательство:

Введём обозначения: $\boldsymbol{\angle ADA^* = \alpha}$, $\boldsymbol{\angle BA^*B^* = \beta}$. Точка $\boldsymbol{E \equiv B^*C^* \cap AC}$, угол $\boldsymbol{\angle B^*EA = \angle BCA}$ т. к. боковые стороны $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{B^*C^*}$ параллельны по условию теоремы. $\boldsymbol{\angle B^*EA}$ является внешним для треугольника $\boldsymbol{DEC}$, поэтому можем записать: $\boldsymbol{\angle B^*EA = \angle\alpha + \angle B^*C^*D}$ или

$$\boldsymbol{\angle B^*C^*D = \angle B^*EA - \angle\alpha} \qquad (1)$$

Аналогично, $\boldsymbol{\angle BAC^*}$ является внешним для треугольника $\boldsymbol{AA^*D}$, поэтому можем записать:

$$\boldsymbol{\angle\beta + \angle B^*A^*C^* = \angle BAC + \angle\alpha} \qquad (2)$$

Т. к. треугольник $\boldsymbol{A^*B^*C^*}$ - равнобедренный, то $\boldsymbol{\angle B^*C^*D = \angle B^*A^*C^*}$. Подставим (1) в (2) и, упрощая выражение, получаем $\boldsymbol{\angle\beta = 2 \cdot \angle\alpha}$.

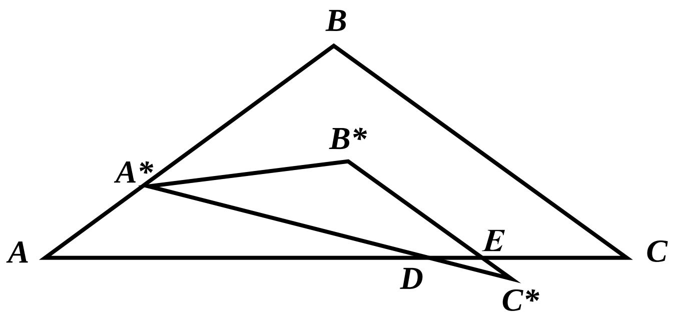

Рис. 3

Что и требовалось доказать.

Мы рассмотрели только одну из множества возможных конфигураций этой теоремы. Как вы видели, доказательство не сложно и заинтересованный читатель сможет самостоятельно рассмотреть и доказать случаи других конфигураций расположения двух треугольников.

Следствие (метрика правильного треугольника).

Рассмотрим равносторонний треугольник $\boldsymbol{ABC}$ со стороной $\boldsymbol{a}$ (Рис. 4). Из вершины $\boldsymbol{B}$ произвольно проведён отрезок $\boldsymbol{BC^*}$, на котором, как на основании, построен равнобедренный треугольник ***BB*C****. Здесь стороны ***BB**** и ***BC*** совпадают. Тогда, в силу сформулированной треоремы, $\angle \boldsymbol{B^*C^*C}$ в два раза больше угла $\angle \boldsymbol{ABC^*}$.

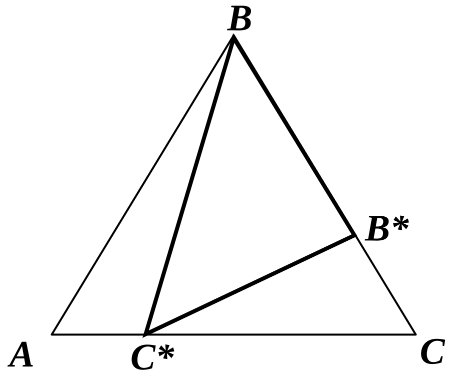

Рис. 4

Введём обозначения: $\boldsymbol{AC^* = X}$, $\boldsymbol{C^*C = Y}$, $\boldsymbol{B^*C = Z}$. Тогда

$$\boldsymbol{X^2 + 2X(Y - Z) - YZ = 0}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) будем называть *локальной метрикой правильного треугольника*.

Вывод уравнения не сложен и мы оставляем его читателю. Выражение (3) имеет вид элементарного квадратного уравнения с аргументом $\boldsymbol{X}$. Однако это не так. Дело в том, что величины и $\boldsymbol{Y}$, и $\boldsymbol{Z}$ - это некоторые функции от $\boldsymbol{X}$. Поэтому решать уравнение (3), применяя обычные элементарные формулы для квадратных уравнений нельзя, да и не получится. Внимательный читатель наверное уже заметил, что построить равнобедренный треугольник на отрезке ***BC****, как на основании, можно двумя способами. Второй способ показан на Рис. 5. Отрезок ***AB**** обозначим как: $\boldsymbol{AB^* = U}$. Тогда справедливо равенство:

$$\boldsymbol{Y^2 + 2Y(X - U) - UX = 0}. \qquad (4)$$

Выражение (4) – это второе уравнение локальной метрики правильного треугольника. А вся *система метрики правильного треугольника* будет иметь вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X^2 + 2X(Y - Z) - YZ = 0} \\ \boldsymbol{Y^2 + 2Y(X - U) - UX = 0} \\ \boldsymbol{X + Y = a} \end{cases}. \qquad (5)$$

Здесь ***a*** – константа треугольника (длина его стороны, данная по условию).

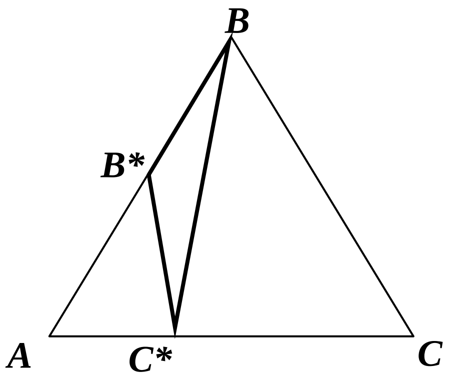

Рис. 5

Решая систему (5), можно найти конкретное выражение для ***X***.

Отметим, что всю систему метрики данного треугольника можно построить и лругим способом. После вывода уравнения (3) надо провести отрезок ***AB**** и уже на нём, как на основании строить второе уравнение (Рис. 6).

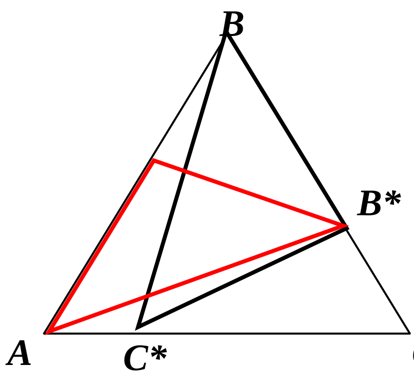

Рис. 6

Когда говорят о метрике, то имеют в виду некоторую функцию, которая связана либо с расстоянием между двумя точками, либо с мерой угла между между двумя прямыми. Не вдаваясь в подробности можно сказать, что теорема Пифагора – это первая метрическая теорема планиметрии. Тогда теорему, о которой мы здесь говорили, также можно назвать метрической теоремой.

Ф. Г.