Франц Герман

О пользе обобщений

franz.h-n@yandex.ru

Напомним формулировку известной теоремы Нагеля:

Прямые, проходящие через вершины произвольного треугольника и делящие его периметр пополам пересекаются в одной точке *N* (точка Нагеля).

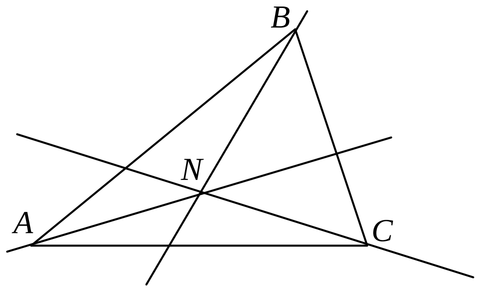

Рис. 1

Развернём стороны треугольника ***AB*** и ***BC*** на продолжение стороны ***AC***, как это показано на Рис. 2

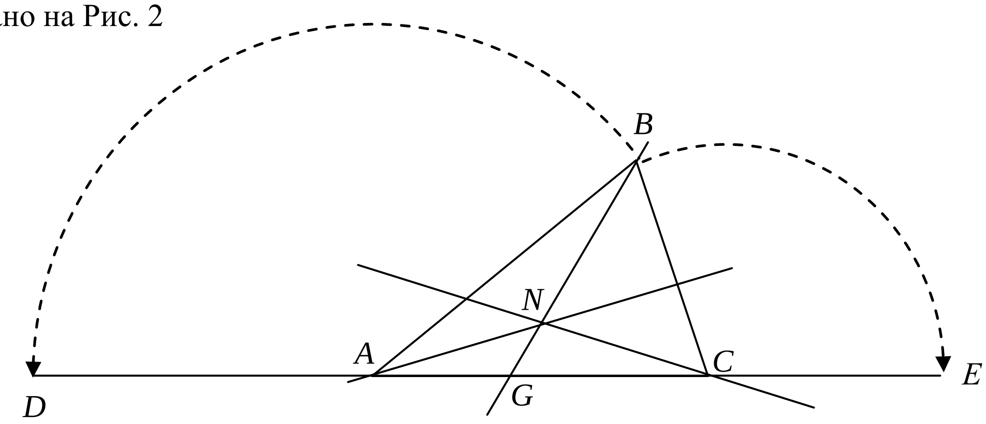

Рис. 2

Здесь ***DA = AB, BC = CE***, тогда точка ***G*** будет точкой, делящей периметр данного треугольника пополам т.е ***DG = GE.***

Отрезок ***DE*** будем называть **развёрткой периметра** данного треугольника, а точку ***G*** будет называть **серединой развёртки периметра**. Очевидно, что развернуть периметр аналогичным способом можно относительно любой другой стороны данного треугольника.

Теперь теорему Нагеля можно переформулировать следующим образом:

Прямые, проходящие через вершины произвольного треугольника и противоположные середины развёртки периметра пересекаются в одной точке *N*.

По аналогии с развёрткой периметра можно ввести понятие **свёртки периметра,** т.е. боковые стороны треугольника будем разворачивать на прямую ***AC*** не во внешнюю сторону, а во внутреннюю (Рис. 3).

Здесь ***DA = AB, BC = CE***.

Точку ***F*** (***EF = FD***) будет называть **серединой свёртки периметра**.

Очевидно, что свернуть периметр аналогичным способом можно относительно любой другой стороны данного треугольника. В общем случае точка $\boldsymbol{G}$ и точка $\boldsymbol{F}$ это разные точки.

По аналогии с теоремой Нагеля можно сформулировать следующую теорему:

Прямые, проходящие через вершины произвольного треугольника и противоположные середины свёртки периметра пересекаются в одной точке *L*.

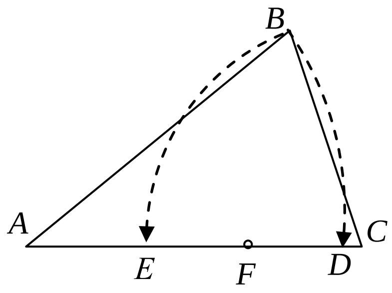

Рис. 3

Если точка $\boldsymbol{F_k}$ является серединой свёртки периметра треугольника $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$ относительно стороны $\boldsymbol{A_iA_j}$, то справедливо отношение:

$$\frac{|A_iF_k|}{|F_kA_j|} = \frac{|A_iA_j| + \left(|A_kA_i| - |A_kA_j|\right)}{|A_iA_j| - \left(|A_kA_i| - |A_kA_j|\right)} \qquad (1)$$

Зная обратную теорему Чевы и используя выражение (1), не трудно токазать вновь сформулированную теорему.

Для развёрнутой записи отношений (1) необходимо сохранять обход треугольника по вершинам.

Для чисто визуального представления точки $\boldsymbol{F}$ заметим, что

$$|A_iF_k| + |A_jA_k| = |F_kA_j| + |A_iA_k| = \frac{p}{2}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{p}$ – периметр данного треугольника. Зная выражение (2) и обратную теорему Чевы, можно доказать сформулированную теорему без использования отношения (1).

Пока не исследован вопрос, что представляет собой прямая $\boldsymbol{NL}$ (Рис. 4), имеет ли она какие-то интересные особенности. Не исключено, что на этой прямой могут находиться и другие известные точки, характеризующие данный треугольник.

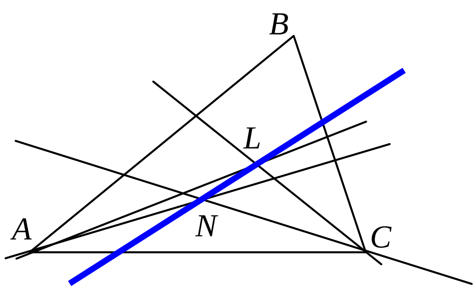

Рис. 4