

## Уравнение $X^Y = Y^X$ (Первая Теорема)

Наверное, многие из читателей сталкивались с выражением  $2^4 = 4^2$  и задавались вопросом: а есть ли ещё такие числа. Среди натуральных чисел подобных выражений больше не существует, но среди действительных чисел подобные выражения имеются, например,  $\sqrt{3}^{\sqrt{27}} = \sqrt{27}^{\sqrt{3}}$ . Причём, чисел таких бесконечно много. По сути дела, поиск таких чисел и будет темой нашей заметки.

Рассмотрим простейшее взаимно-обратное показательно-степенное уравнение с двумя неизвестными:

$$X^Y = Y^X \quad (1)$$

Исследуем это уравнение.

Во-первых, при  $X = Y$ , получаем бесконечное множество тривиальных решений. Этот случай мы рассматривать не будем.

Также, мы думаем, что для читателя не составит труда найти единственное решение уравнения (1) для  $X$  и  $Y$  - натуральных чисел.

Преобразуем уравнение (1) следующим образом:  $Y \cdot \log_x X = X \log_x Y$   
или  $\frac{Y}{X} = \log_x Y$

Представим последнее уравнение в виде системы двух параметрических уравнений:  $X = X(t)$  и  $Y = Y(t)$ . Для этого введём параметр  $t = \frac{Y}{X} = \log_x Y$ . Можем записать такие параметрические уравнения:  $Y = X \cdot t$ ,  $Y = X^t$ , откуда получаем  $X(X^{t-1} - t) = 0$ .

Чтобы не сталкиваться с неопределённостями, которые нашему читателю ещё не знакомы, возьмём область допустимых значений для  $X$  и  $Y$ ,  $X > 1$ ,  $Y > 1$ . Для нашей цели это как раз подходит, т. к. и число  $e$  и число  $\varphi$  попадают в эту область. Тогда из последнего уравнения получаем:

$$X = t^{\frac{1}{t-1}}.$$

Как раньше было показано  $Y = X \cdot t$ , тогда с учётом  $X = t^{\frac{1}{t-1}}$ , имеем:  $Y = t^{\frac{t}{t-1}}$ . Получаем систему таких параметрических уравнений:

$$\begin{cases} X = t^{\frac{1}{t-1}} \\ Y = t^{\frac{t}{t-1}} \end{cases}$$

Исследуем уравнение  $X = t^{\frac{1}{t-1}}$ .

Введём новую переменную  $n = \frac{1}{t-1}$ . Определим отсюда  $t: t = 1 + \frac{1}{n}$ , т. е. для новой переменной получаем такое уравнение:

$$t^{\frac{1}{t-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2)$$

Заметим, что правая часть этого уравнения является выражением, которое под знаком предела даёт выражение для определения известного трансцендентного числа:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

Выясним к какому значению должно стремиться  $t$  в выражении (2) при  $n \rightarrow \infty$  (значок « $\rightarrow$ » заменяет слово «стремится»). Переменные  $n$  и  $t$  связаны выражением:  $t = 1 + \frac{1}{n}$ .

Очевидно, что при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Следовательно  $t \rightarrow 1$ .

Для более наглядной картины заменим переменные  $n$  и  $t$  на переменную  $x$ , и запишем очевидно справедливое равенство.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (3)$$

Рассмотрим уравнение, которое получилось бы, если бы мы отбросили знаки пределов в выражении (3):

$$x^{\frac{1}{x-1}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (4)^1$$

Уравнение (4) имеет единственное решение при  $x = \varphi$ . Читатель может в этом самостоятельно убедиться, сделав непосредственную подстановку и помня, что  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ .

Мы проиллюстрируем это на рисунке:

---

<sup>1)</sup>Р. Хонсбергер (Университет «Ватерлоо») сказал, что хочется затаинть дыхание при виде уравнений (4) и (5).

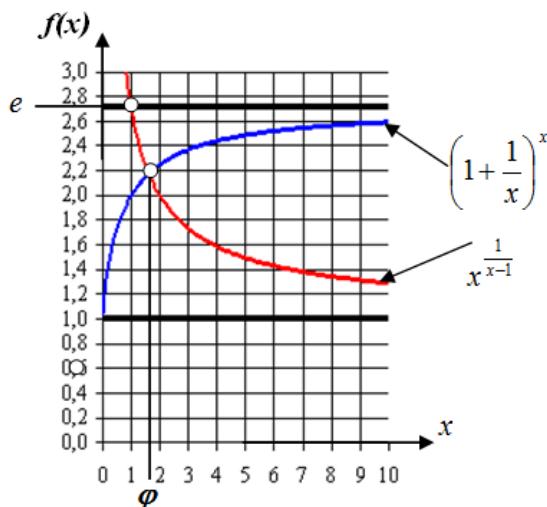


Рис. 1

Асимптотой для синей кривой является прямая  $f(x) = e$ , а асимптотой для красной – прямая  $f(x) = 1$ .

Выражения (3) и (4) определяют **косвенную связь между числами  $e$  и  $\varphi$** .

Насколько нам известно, пока ещё не найдена формула, связывающая эти два числа в явном виде. Например для числа  $e$  и числа  $\pi$  существует такая формула. Формула Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

здесь  $i = \sqrt{-1}$ .

Формула эта – почти математическое чудо. Но она объяснима и, надеемся, что когда-нибудь читатель встретится с этой формулой на страницах математической литературы. Формула эта выходит за рамки элементарной математики, поэтому мы ей здесь заниматься не будем.

Аналогично исследуем и уравнение  $Y = t^{\frac{t}{t-1}}$ .

Введём новую переменную:  $n = \frac{1}{t-1}$  и определим отсюда  $t = 1 + \frac{1}{n}$ .

С учётом новой переменной можем записать:

$$t^{\frac{t}{t-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (5)$$

Рассмотрим предел последовательности, общая формула которой является правой частью выражения (5), при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e = e$$

Т. е., также, как и в первом случае, получаем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ .

Выясним к какому числу стремится переменная  $t$  в то время, как переменная  $n \rightarrow \infty$ .

Переменные  $n$  и  $t$  связаны выражением  $t = 1 + \frac{1}{n}$ . Как и в предыдущем

случае, при  $n \rightarrow \infty$   $t \rightarrow 1$ . Заменив  $n$  и  $t$  на  $x$ , можем записать такое справедливое равенство:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^{\frac{x}{x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x+1} = e \quad (6)$$

Отбросив знаки пределов, рассмотрим такое уравнение:

$$x^{\frac{x}{x-1}} = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x+1} \quad (7)$$

Опять же получаем  $x = \varphi$  - единственное решение уравнения (7). Это ещё одна косвенная связь числа  $e$  и числа  $\varphi$ . На рисунке это выглядит так:

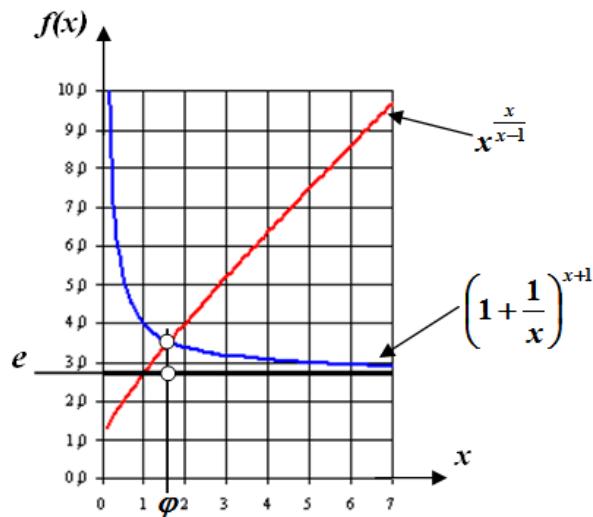


Рис. 2

Теперь вернёмся к системе наших параметрических уравнений:

$$\begin{cases} X = t^{\frac{1}{t-1}} \\ Y = t^{\frac{t}{t-1}} \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя в эти уравнения различные значения параметра  $t$ , будем получать значения  $X$  и  $Y$ , для которых справедливо уравнение (1):  $X^Y = Y^X$ .

Из уравнений системы (8) заключаем, что область допустимых значений для  $t$  – это  $t > 0$  и  $t \neq 1$ .

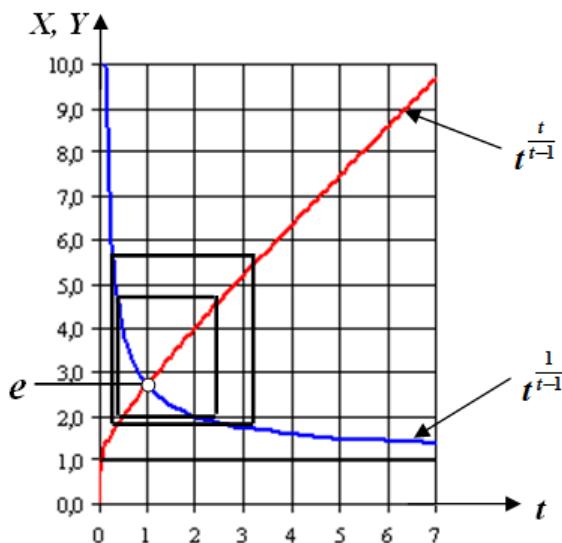


Рис. 3

Мы не случайно на Рис. 3 выделили прямоугольники. Оказывается, что при значении  $t$  и  $\frac{1}{t}$  значения функций  $X$  и  $Y$  меняются местами, т. е.

$X(t) = Y\left(\frac{1}{t}\right)$  и  $X\left(\frac{1}{t}\right) = Y(t)$ . Действительно, найдём выражение  $X\left(\frac{1}{t}\right)$ :

$$X\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\left(\frac{1}{\frac{1}{t}-1}\right)} = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{1-t}} = \left(\frac{1}{t}\right)^{\left(\frac{t}{t-1}\right)} = t^{\frac{t}{t-1}} = Y(t)$$

Читатель самостоятельно может убедиться в том, что  $Y\left(\frac{1}{t}\right) = X(t)$ .

Вспоминая, что  $t = \frac{Y}{X}$ , можем утверждать, что существует «золотое» решение системы (8). А именно: при  $t = \varphi$ ,  $Y = \varphi \cdot X$ . Аналогичное же решение получаем и при  $t = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ .

И, наконец, можно сформулировать такую *теорему*:

**Теорема (об исключении)**

Для любого действительного числа  $X > 1$  существует такое действительное число  $Y \neq X$  и  $Y > 1$ , что будет справедливо равенство:

$$X^Y = Y^X$$

*Исключением из этого утверждения является число  $e = 2,7182818\dots$*

Глядя на Рис. 3, мы видим, что при  $x = e$  не существует  $Y \neq X$  и наоборот. Т. е. для  $e$  справедливо только тривиальное выражение:  $e^e = e^e$ .

В заключение ещё раз заострим внимание читателя на функции  $x^{\frac{x}{x-1}}$ . Вводя новую переменную  $n = \frac{x}{x-1}$ , мы получаем функцию  $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ , т. е. Мы видим, что основание степени и её показатель поменялись местами. Интересно, существуют ли ещё показательно-степенные функции  $f_1(x)^{f_2(x)}$ , для которых некоторое преобразование  $n = n(x)$  давало бы выражение, обратное данному, т. е. -  $f_2(n)^{f_1(n)}$ .

Мы не занимались исследованием этого вопроса, но может быть им заинтересуется кто-нибудь из читателей.

По существу, этот вопрос не обязательно связывать с основанием степени и её показателем. Можно задачу поставить в общем виде. Существует ли для функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  преобразование  $n = n(x)$ , такое, что при замене переменных, мы получаем такие же функции  $f_1(n) = f_2(x)$  и  $f_2(n) = f_1(x)$ . Мы думаем, что это возможно, в первую очередь, среди тригонометрических функций.

Ф. Г.  
04.06. 1979