Франц Герман

Закоулки и перекрёстки математики

LAP LAMBERT Academic Publishing

Франц Герман

Закоулки и перекрёстки математики

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

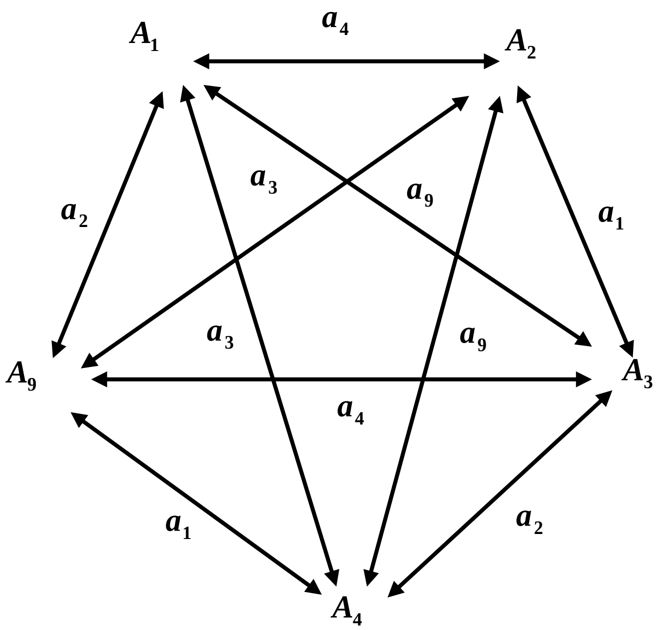
Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-81379-5

Франц Герман

Закоулки и перекрёстки математики



2015

Содержание

Часть I

Высшая геометрия

Кривая центров. Введение в теорию касательных сфер.

Эти кривые могут быть определены
многими различными способами

Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер

В данной статье мы познакомим читателя с теорией кривых центров (ТКЦ), как с альтернативной теорией для теории конических сечений (ТКС).

Рассмотрим две произвольные непересекающиеся окружности. Очевидно, что построить касательную окружность к этим двум данным окружностям можно различными четырьмя способами (Рис. I.1).

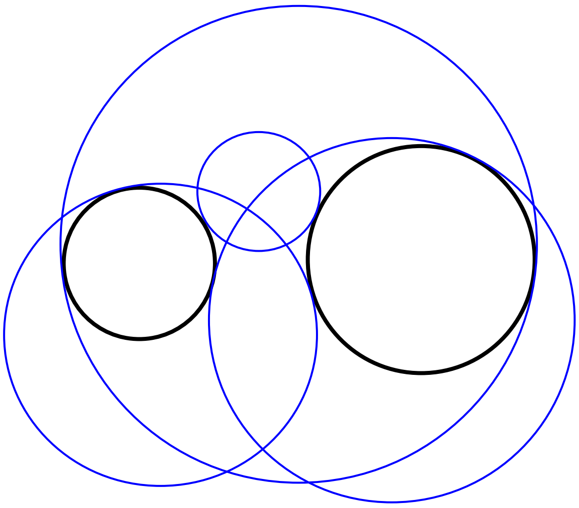


Рис. I.1

Построенная окружность может касаться двух данных снаружи. А может - и изнутри. Кроме того, построенная окружность может касаться одну данную окружность снаружи, адругую при этом – изнутри. И наоборот. Т. е., как и было сказано, - четырьмя различными способами. И, кроме того, в каждом из этих четырёх случаев построенная окружность не является единственной.

Рассмотрим первый случай, когда окружность касается двух данных снаружи.

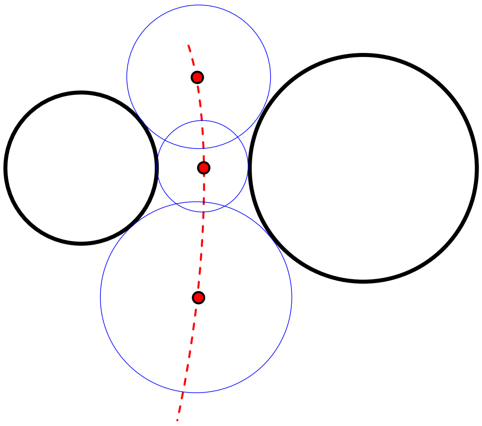


Рис. I.2

На Рис. I.2 показан пример - три окружности первого типа. Очевидно, что построить таких окружностей можно бесконечно много. Нас будет интересовать задача поиска геометрического места точек, где лежат центры построеных окружностей. Т. е. аналитический вид такой кривой. Мы будем называть её ***кривой центров***.

Введём систему координат, как показано на Рис. I.3.

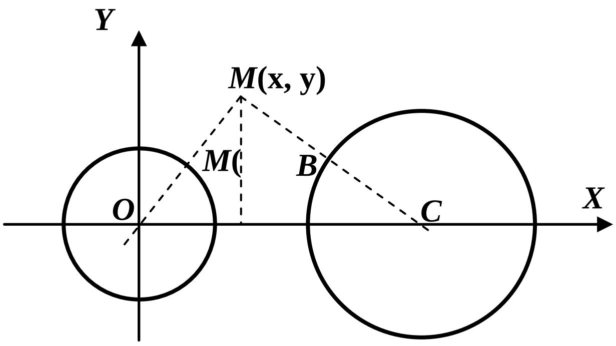


Рис. I.3

Пусть ***OC* = *n*, *OA* = *r*, *CB* = *R*. *M*** – текущая точка искомой кривой, т. е. центр некоторой окружности, касающейся двух данных внешним образом. Тогда можем записать: $\sqrt{x^2 + y^2} = r + AM$, но т. к. точка ***M*** – центр окружности, которая касается двух данных, то $AM = MB = \sqrt{(n-x)^2 + y^2} - R$. Подставляя ***AM*** в первое выражение получаем:

$$R - r = \sqrt{(n-x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(I.1)}$$

Выражение (I.1) и будет уравнением кривой центров.

Не трудно понять, что (I.1) является уравнением второго порядка, а это значит, что наша кривая принадлежит к классу линий конического сечения (исключая, конечно, вырожденные случаи). Попробуем разобраться, что же это за линия.

Правая часть выражения (I.1) – это ни что иное, как разность расстояний текущей точки искомой кривой до двух фиксированных точек $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{O}$. Причём разность эта есть величина постоянная – ($\boldsymbol{R}$ - $\boldsymbol{r}$). Именно таким свойством обладает гипербола [1]. Глядя на Рис. I.2 понятно, что найденная кривая центров ни что иное, как левая ветвь гиперболы, а точки $\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{C}$ – её фокусы. Пусть $\boldsymbol{x_0}$ - точка пересечения кривой центров с осью абсцисс. Т. е. $\boldsymbol{x_0 = \frac{n - R + r}{2}}$. Пользуясь классической терминологией [3] введём обозначения: $\boldsymbol{n = 2c}$ - межфокусное расстояние, а $\boldsymbol{R - r = 2a}$ - абсолютная разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов. Теперь сделаем преобразования координат: $\boldsymbol{Y^* = Y}$, $\boldsymbol{X^* = X - \frac{n}{2}}$. Переходя к новым координатам и используя принятые обозначения получаем:

$$\frac{(\boldsymbol{x^*})^2}{\boldsymbol{a}^2} - \frac{(\boldsymbol{y^*})^2}{\boldsymbol{b}^2} = \boldsymbol{1}, \qquad \text{(I.2)}$$

здесь $\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2$. Т. е. получаем канонический вид уравнения гиперболы.

Рассмотрим второй случай, когда построенная окружность касается данные окружности изнтри.

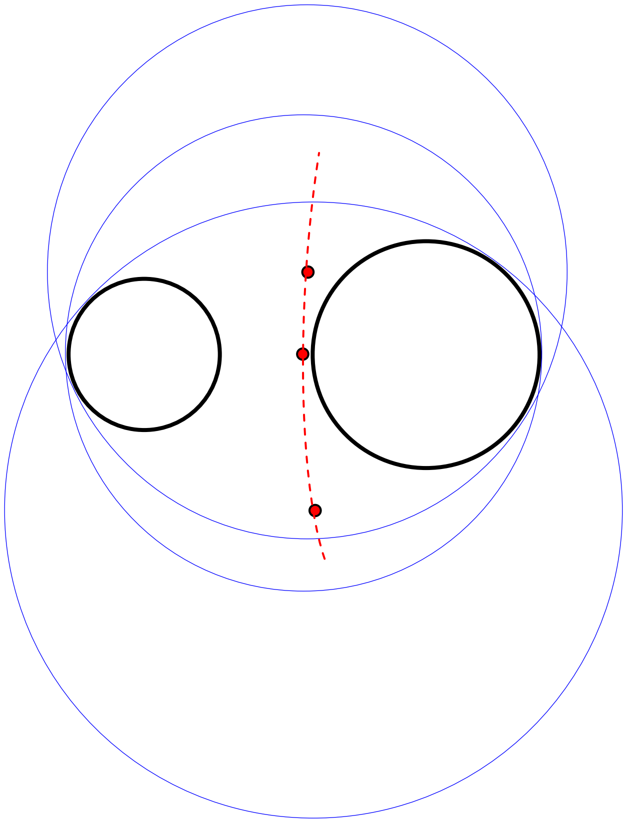


Рис. I.4

Введём систему координат аналогичным образом, как мы делали это для первого случая.

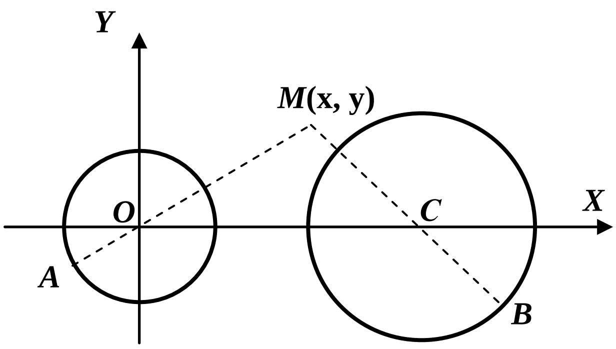


Рис. I.5

В данном случае будем иметь: $\boldsymbol{AM = MB}$. Расписывая это равенство получаем такое выражение:

$$\boldsymbol{R - r = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(n - x)^2 + y^2}} \,. \qquad \text{(I.3)}$$