Франц Герман
franz.h-r@yandex.ru

Теория конкурентных прямых Паскаля

Содержание

1. Введение

Одной из самых ключевых, и возможно самой красивой теоремой проективной геометрии, является теорема Паскаля. Написана не одна сотня работ посвящённых геометрическим исследованиям, связанным с этой теоремой. И, наверное, ни один из выдающихся геометров прошлого столетия не обошёл своим вниманием теорему Паскаля.

Формулировка теоремы красива и лаконична. Удивительно то, что теорема Паскаля почему-то не была открыта древними математиками, такими как Эвклид, Пифагор, Птолемей и др., хотя частный её случай – теорема Паппа – был уже известен в III веке. Но это уже вопрос истории науки.

Одной из проблем, связанных с теоремой Паскаля, посвящена и данная работа. Упоминания об этой проблеме можно встретить во многих книгах по геометрии и математических энциклопедиях [1], [3].

Суть проблемы проста. Если на произвольной конике взято шесть точек, то соединить их в замкнутый шестиугольник возможно 60-ю различными способами (см. ***Приложение*** 2). Для каждого такого шестиугольника существует своя прямая Паскаля, определяемая теоремой

Паскаля. Множество всех прямых Паскаля образуют сложную конфигурацию взаимных пересечений. Существуют точки, где пересекаются по три и по четыре прямых Паскаля. Отысканию этих точек и посвящена данная работа.

Известные геометры прошлого века Я. Штейнер, Ю. Плюккер, Л. Гессе, Т. Киркман и др. более 20 лет занимались этой проблемой. Штейнер нашёл 20 точек, где пересекаются по три прямые Паскаля, а спустя 21 год Киркман отыскал ещё 60 таких точек [2].

В данной работе мы покажем, как можно было бы решить эту проблему в наше время, используя современный математический аппарат теории множеств, теории алгебраических подстановок и теории графов.

В заключение мы попробуем провести анализ и пофантазировать на тему, почему Якоб Штейнер нашёл только 20 точек.

2. Некоторые вспомогательные сведения

Для простоты и наглядности иллюстраций в качестве образа произвольной коники ниже будем использовать окружность, с расположенными на ней шестью точками. Точки будем обозначать для общности через $\boldsymbol{a_i} \in \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$.

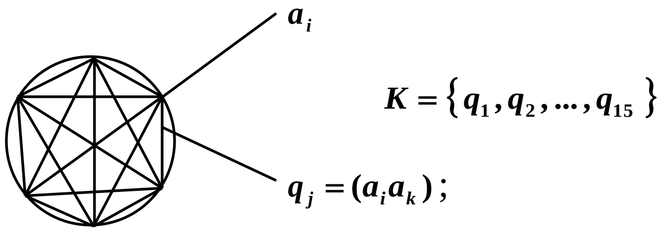


Рис.1

Объектом нашего исследования также будет множество $\boldsymbol{K}$ сторон (рёбер) полного графа $\boldsymbol{K_6}$ (Рис. 1).

Для элементов множества $\boldsymbol{K}$ будем использовать операции теории множеств:

1. $\cap$ - пересечение
2. $\cup$ - объединение
3. $\setminus$ - разность
4. Δ - симметрическая разность

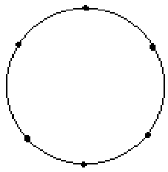
Напомним основные равенства для этих операций:

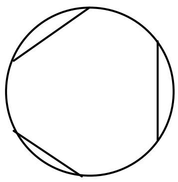
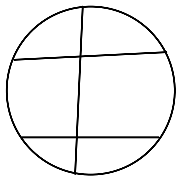
1. $\boldsymbol{A \cap A = A}$;
2. $\boldsymbol{A \cap 0 = A}$;

3. $\boldsymbol{A \cup A = A}$;
4. $\boldsymbol{A \cup 0 = A}$;
5. $\boldsymbol{A \setminus A = 0}$;
6. $\boldsymbol{A \Delta A = 0}$;
7. $\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$;
8. $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$;
9. $\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$;
10. $\boldsymbol{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$;
11. $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$;
12. $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$;
13. $\boldsymbol{A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$;

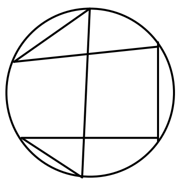
Равенство 13 является определением симметрической разности ([5], стр. 116).

Проиллюстрируем некоторые из этих правил. Пустым множеством в данном случае будет коника с шестью точками, т. е.

$\mathbf{0}$: 

Пусть $\boldsymbol{K_1}$:  $\boldsymbol{K_2}$: 

тогда $\boldsymbol{K_1 \cap K_2 = 0}$;

$\boldsymbol{K_1 \cup K_2 = K_3}$, $\boldsymbol{K_3}$: 

$\boldsymbol{K_3 \setminus K_1 = K_2}$.

Рис.2

3. Теорема о циклических шестиугольниках

Множество всех замкнутых шестиугольников обозначим через $\boldsymbol{A = \{ A_1, A_2, \ldots, A_{60} \}}$ (***Приложение* 2**).

Покажем все варианты расположения трёх отрезков (сторон шестиугольника) на конике, не имеющих общих граничных точек. Для вычисления числа вариантов V воспользуемся формулой (п1) (***Приложение* 1**). Здесь $n = 6,\ k = 3$.

$$V = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k} C_{n-2(i-1)}^{2} = \frac{1}{3!}\cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 15$$

Обозначим их через K_i, как подмножества полного множества K.

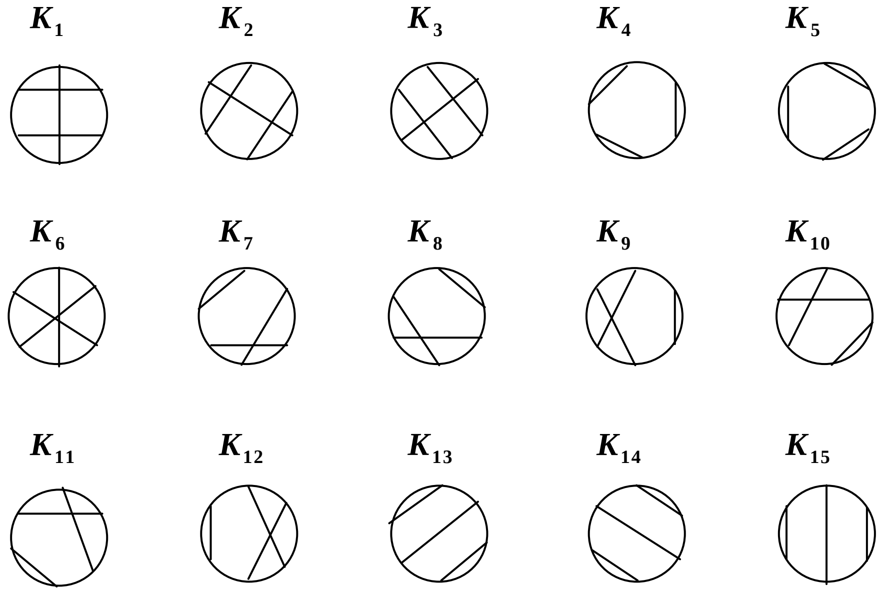


Рис.3

Очевидно, что всякий шестиугольник A_k является объединением двух подмножеств $K_i \cup K_j$, причём такое объединение строго однозначно.

Будем говорить, что шестиугольники A_k принадлежат к классу $[K_i]$ по конкретному подмножеству K_i если справедливы равенства:

1. $K_i \cup K_j = A_k$,
2. $K_i \cap K_j = 0$.

Вообще говоря, равенства 1 и 2 равносильны, т. к. из $K_i \cup K_j = A_k$ следует, что $K_i \cap K_j = 0$ и обратно: из равенства 2 следует равенство 1.

Для примера выпишем все шестиугольники класса $[K_4]$ (см. ***Приложение* 2**).

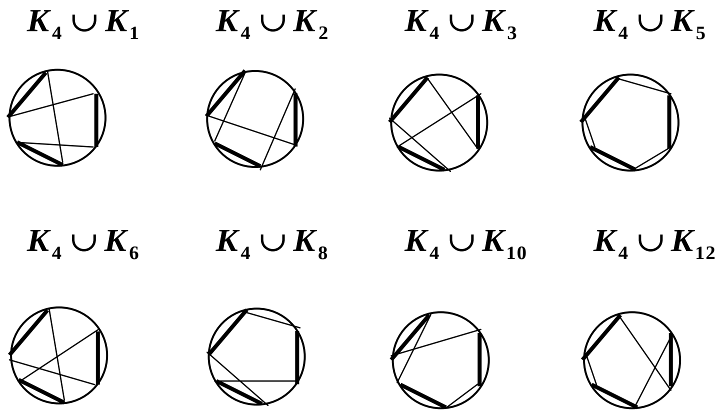


Рис. 4

$$[K_4] = \{A_{25}, A_{21}, A_{23}, A_1, A_{60}, A_7, A_3, A_5\}$$

Не трудно убедиться, что каждый класс $[K_i]$ состоит из 8-ми элементов (шестиугольников).

Рассмотрим два элемента из класса $[K_i]$: $(K_i \cup K_j)$ и $(K_i \cup K_n)$ такие, что $(K_j \cap K_n) = 0$. Найдём симметрическую разность этих элементов.

$$\begin{aligned}
&(K_i \cup K_j)\,\Delta\,(K_i \cup K_n) = ((K_i \cup K_j) \cup (K_i \cup K_n) \setminus ((K_i \cup K_j) \cap (K_i \cup K_n)) = \\
&= (K_i \cup K_j \cup K_i \cup K_n) \setminus (((K_i \cup K_j) \cap K_i) \cup ((K_i \cup K_j) \cap K_n)) = \\
&= (K_i \cup K_j \cup K_n) \setminus (((K_i \cap K_i) \cup (K_j \cap K_i)) \cup ((K_i \cap K_n) \cup (K_j \cap K_n))) = \\
&= (K_i \cup K_j \cup K_n) \setminus (K_i \cup 0) = (K_j \cup K_n)
\end{aligned}$$

Как оказалось, элементы каждого класса $[K_i]$ образуют между собой 16 симметрических разностей типа:

$$(K_i \cup K_j)\,\Delta\,(K_i \cup K_n) = (K_j \cup K_n)\ ; \qquad (1)$$

при условии, что $(K_j \cap K_n) = 0$.

Равенство (1) обладает замечательным свойством цикличности, т. е.

$$\begin{aligned}
&(K_i \cup K_j)\,\Delta\,(K_i \cup K_n) = (K_j \cup K_n)\ ; \\
&(K_i \cup K_n)\,\Delta\,(K_j \cup K_n) = (K_i \cup K_j)\ ; \\
&(K_j \cup K_n)\,\Delta\,(K_i \cup K_j) = (K_i \cup K_n)\ .
\end{aligned}$$

В этом не трудно убедиться, глядя на предыдущие выкладки.

Шестиугольники равенства (1) будем называть *циклическими шестиугольниками*. Для них справедлива следующая

Теорема: *прямые Паскаля циклических шестиугольников конкурентны*.

Доказательство этой теоремы мы приведём позже. А сейчас выясним, сколько всего существует троек циклических шестиугольников.

Т. к. всего существует 15 классов $[\boldsymbol{K}_i]$ и элементы каждого класса образуют между собой 16 симметрических разностей типа (1), то получаем 240 троек циклических шестиугольников. Но в силу цикличности (1) получается, что каждое такое равенство может быть образовано элементами класса $[\boldsymbol{K}_i]$, элементами класса $\lfloor \boldsymbol{K}_j \rfloor$ и также элементами класса $[\boldsymbol{K}_n]$.

Т. о., всего различных троек циклических шестиугольников будет 80. Обозначим множество этих троек через $\boldsymbol{T}^{3}$.

Рассмотрим подмножество $\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}_k$. Докажем, что

$$\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}_k = (\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j \cup \boldsymbol{K}_n), \qquad (2)$$

причём для каждого $\boldsymbol{A}_k$ представление разности $\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}_k$ в виде объединения трёх подмножеств $(\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j \cup \boldsymbol{K}_n)$ является единственно возможным.

Доказательство:

Как было сказано ранее, множество $\boldsymbol{K}$ - это полный граф, имеющий 6 вершин и 15 рёбер (сторон). Шестиугольник $\boldsymbol{A}_k$ представляет собой граф из 6 вершин, являющийся простым циклом. Тогда $\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{X}$ - это регулярный граф степени 3 ([4], стр. 28), т. е. имеем граф из 6-ти вершин и 9-ти рёбер, где степень каждой вершины равна 3.

Из графа $\boldsymbol{X}$ всегда можно выделить простой цикл $\boldsymbol{A}_m$ (теорема Смита, [4], стр. 87). Очевидно, что $\boldsymbol{A}_m \neq \boldsymbol{A}_k$. Тогда граф $\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A}_m$ будет иметь 6 вершин и 3 ребра, причём каждая вершина имеет степень 1. А это ни что иное как $\boldsymbol{K}_i$. В свою очередь $\boldsymbol{A}_m = (\boldsymbol{K}_j \cup \boldsymbol{K}_n)$, следовательно $\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}_k = (\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j \cup \boldsymbol{K}_n)$.

Докажем единственность такого объединения.

Предположим противное, т. е. $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{K}_i \cup \boldsymbol{K}_j \cup \boldsymbol{K}_n) = (\boldsymbol{K}_p \cup \boldsymbol{K}_q \cup \boldsymbol{K}_r)$. Здесь $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{K}_j = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K}_j \cap \boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{0}$ и также $\boldsymbol{K}_p \cap \boldsymbol{K}_q = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K}_p \cap \boldsymbol{K}_r = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K}_q \cap \boldsymbol{K}_r = \boldsymbol{0}$. И следовательно, имеем 6 различных шестиугольников, являющихся простыми циклами регулярного графа $\boldsymbol{X}$.

Из теории графов известно, что всякий регулярный граф степени 3 из 6-ти вершин изоморфен либо графу $\boldsymbol{G}_1$, либо графу $\boldsymbol{G}_2$.

Вся работа передана в РАН