

Франц Герман
franz.h-n@yandex.ru

Философия Мироздания
(как математическая модель)

Содержание

Вступительное слово	стр. 3
Часть I	
Геометрия фундаментальных заклонов	стр. 5
Математическое приложение I.1	
Уравнение геометрической «телеportации»	стр. 28
Часть II	
Тени квантовой гравитации	
Зачем нужна квантовая гравитация	стр. 37
Двойственность в науке	стр. 38
Геометрия пространства	стр. 40
Трансформация метрики	стр. 44
Вопросы аналогий	стр. 56
Квантованность пространства-времени	стр. 59
Математическое приложение II.1	
Принцип неопределённости Гейзенберга	
и дифференциальная геометрия.	стр. 68
Математическое приложение II.2	
Теорема Пифагора	стр. 71
Часть III	
Структурная модель Мироздания	стр. 98
Геометрия решёток	
(Геометрическая модель первой секунды)	стр. 98
Преобразования и запутанность	стр. 131
Математическое приложение III.1	
Уникальность гептаэдра?	стр. 141

Математическое приложение III.2 Теория геометрического моделирования адронов	стр. 151
Математическое приложение III.3 Модель Тукермана	стр. 184
Часть IV Вселенная чисел	стр. 195
Вступительное слово к теме	стр. 195
Дифференциальная теория чисел	стр. 204
Ряд конечных групп	стр. 231
Математическое приложение IV.1 Цепочки производных натурального ряда чисел	стр. 253
Математическое приложение IV.2 Примеры формул петлеобразования первого СЧ f	стр. 288
Часть V Метаморфоз Разума	стр. 289
«В начале было слово»	стр. 289
О множественности форм Разума	стр.
Числовая теория языка	стр.
Часть VI Математические дополнения	
Аналитическая теория поверхностей Мёбиуса	стр.
Введение в теорию касательных сфер	стр.
Теория упаковок замкнутых клеточных полей	стр.
Литература	стр.

Вступительное слово

Физическая наука современности, которая описывает окружающее нас Мироздание, называется Стандартная Модель (СМ). В основе этого знания лежат в основном две теории. Это общая теория относительности Эйнштейна (ОТО) и квантовая механика (КМ). Эти теории объясняют многое, но окончательную точку ставить ещё рано. Многие учёные сходятся на том, что нужна новая теория, которая сможет объединить в себе ОТО и КМ.

Есть мнение, что основные законы Мироздания были заложены уже в первой секунде жизни Вселенной, но туда-то как раз сегодняшняя наука и не может заглянуть. Экспериментальная наука бессильна (во всяком случае пока), чтобы организовать эксперимент, который бы пролил свет на тот отрезок времени. Остаётся только строить математическую модель и надеяться, что эта модель поможет нам заглянуть в самое начало Мироздания, и попробовать заложить фундамент будущей науки, которая смогла бы сделать ещё один шаг в общей физической картине.

Чтобы лучше понять наш труд, мы изложим принципы, которых стараемся придерживаться на протяжении всего нашего повествования. Принципы просты и понятны.

1. Принцип простоты (принцип Пуанкаре). Прорывные открытия, технологии, изобретения должны быть просты и понятны, но не примитивны.
2. Принцип Дирака. Всякая изящная математическая конструкция должна быть реализована в Природе.
3. Принцип двойственности во всём. Например: волна-частица, точка-прямая (как в проективной геометрии), энергия-масса, и т. д.
4. Принцип равновесия. Как пример: законы сохранения.
5. Принцип аналогий. Теории, которые должны быть объединены в пределе, например ОТО и КМ, имеют какие-то общие аналогии, может быть пока эти аналогии скрыты, но когда-нибудь они (теории) будут объединены, например, в квантовой теории гравитации.
6. Принцип фундаметализма. Должны использоваться основополагающие законы геометрии и алгебры (элементарные теоремы геометрии, теории групп...).
7. Принцип подобия. Любая математическая конструкция это только модель реальности с определённой точностью.
8. Принцип направления. От математики к естествознанию.

Именно так мы и строим свою модель первой секунды Мироздания. Натурально, берём принцип и смотрим, что в рамках этого принципа можно применить для самого начала при рождении Вселенной. А почему от математики к естествознанию – это потому, что автор математик, а физической науки того времени ещё нет.

В первой части нашего исследования мы рассмотрим простейшие геометрические закономерности и попробуем увидеть за этими законами какие-то физические явления. По нашим соображениям таких законов всего два. Это теорема Пифагора и теорема о касательной и секущей. Однако надо помнить, что Геометрия начинается не с евклидовой, а с проективной – самой простой из геометрий. Просто евклидова геометрия интуитивно понятнее нам, т. к. именно её преподают нам в школе.

Вторая часть нашего исследования называется «Тени квантовой гравитации». Здесь мы попробуем оценить (насколько это позволит образование автора) существующие теории ОТО и КМ в том смысле, что может быть в них уже проглядывают отголоски будущей теории и нужна ли эта теория вообще.

В третьей части мы рассмотрим основы геометрии, по которым, на наш взгляд, формируется Мироздание в первые свои мгновения. Однако надо помнить, что основы математики складываются не только из геометрических аксиом, но и из элементарных арифметических законов. Об этом мы расскажем в четвёртой части, которая называется «Вселенная чисел». Здесь будут показаны основы новой теории, которую мы называем «Дифференциальной теорией чисел».

Пятая часть будет посвящена вопросу, который современная наука почему-то до сих пор обходила стороной и только с развитием КМ этот вопрос стал потихоньку обсуждаться учёными. Этот вопрос связан с удивительным феноменом, который называется Разум. Каждый человек понимает, что такое Разум (сознание, мышление), потому что сам имеет к этому отношение. Но вот как этот феномен может быть рассмотрен с точки зрения современной науки пока не знает никто.

Для особенно любознательного и дотошливого читателя есть ещё шестая часть, где собраны математические работы автора, на которые мы ссылаемся в процессе нашего повествования.

Ф. Герман
Кобленц, Германия
Февраль, 2018

Часть I

Геометрия фундаментальных законов

«Пустое пространство кажется не очень перспективным объектом для исследования, однако именно в нём скрыт ключ к полному пониманию существующих в природе взаимодействий...» [2]

П. Девис

«Наука описывает не то, что есть за природой, а то, что есть в природе» [67].

Ф. Каройхази

Эта часть нашего исследования была написана по материалам приложения [58] с очень небольшими дополнениями и изменениями к изложенному в книге материалау.

Согласно теории Большого Взрыва (БВ) наша Вселенная расширяется. Причём каждый день объём Вселенной прирастает на 10^{18} кубических световых лет ([2], стр. 222). Не слабый такой кубик. Откуда же берётся это пространство? Складывается представление, что пространство сродни резине – растягивается и всё время деформируется, но мы этого не замечаем. Сегодняшняя физическая наука продвинулась так далеко, что мы можем заглянуть (теоретически) в самые ранние времена Вселенной, когда она только зарождалась. Согласно Стандартной Модели (СМ) законы квантовой механики начинают работать в физическом мире начиная с момента, когда нашей Вселенной было всего 10^{-32} секунды [2]. А ещё раньше начиная с 10^{-43} секунды (Эра Планка) всё пространство было заполнено неким «кварковым супом», где могли образовываться какие-то фантастические элементарные частицы. Что там было мы никогда не узнаем и не сможем смоделировать, а можем только полагаться на выводы современной науки. Наука предполагает, что именно в этот промежуток времени, т. е. с 10^{-43} первой секунды по 10^{-32} этой же самой секунды и появилось (организовалось) само пространство-время, как мы понимаем его сегодня. Т. е., можно сказать, что сначала начали работать какие-то пространственные законы, а точнее геометрические, а потом уже – физические. Как считал Эйнштейн, геометрия должна предшествовать физике ([77], стр. 178).

Пол Девис говорит ([2], стр. 223), что в это время мог произойти «квантовый скачок» ... «своего рода туннельный процесс». Физики называют такой процесс фазовый переход. И далее: «... в случае спонтанного возникновения квантовой Вселенной «из ничего» наша интуиция достигает предела своих возможностей. Один конец туннеля представляет собой физическую Вселенную в пространстве и времени, которая попадает туда путём квантового туннелирования «из ничего».

Следовательно, другой конец туннеля представляет собой это самое Ничто! Возможно, лучше было бы сказать, что у туннеля имеется лишь один конец, а второго просто «не существует». С точки зрения математика такое пространство (туннель с одним входом-выходом) является ничем иным, как бутылкой Клейна. А бутылка Клейна топологически эквивалентна двум проективным плоскостям, соединённым трубкой (тоннелем) [18, стр. 18]. Непонятно, что представляет собой такая геометрия. Наверное, здесь уместно было бы говорить о метагеометрии n измерений (Рис. 1).

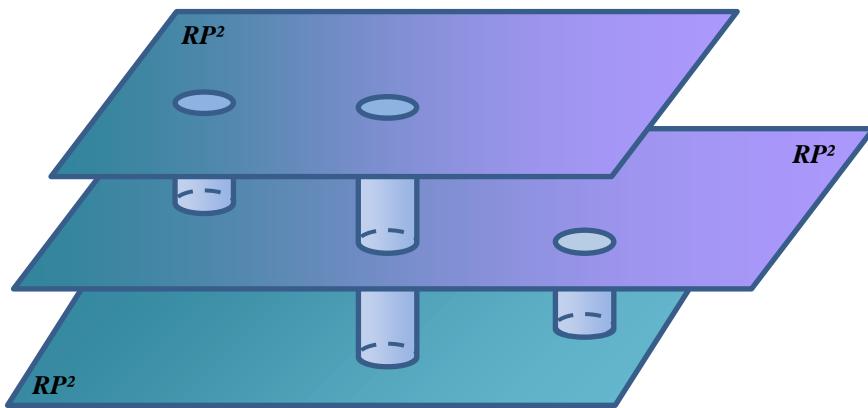


Рис. 1

Здесь показан условный вид такого предпространства из трёх плоскостей.

Кстати, наверно можно говорить о некоем новом топологическом многообразии. Напомним, что проективная плоскость сама по себе – это замкнутое многообразие. А у нас – три таких плоскости, соединённые попарно тремя трубками (Рис. 1). Вполне независимая структура, которую можно исследовать, как самостоятельный объект S_T – туннельная сфера предгеометрии. Можно даже предположить, что где-то в пространстве сохранились такие реликтовые структуры. Но это другая задача.

Пол Дэвис предполагает, что в следующий момент могли свернуться лишние измерения. Соединительные трубы между проективными плоскостями, как раз подошли бы для этой роли (свернутых измерений). Т. о., и родилось проективное пространство. На языке математики туннельную сферу можно было бы представить в виде выражения:

$$S_T : \bigcup_{i=1}^{2n} K_i^2 = RP^2 \cup Z^2 \cup RP^2,$$

где K^2 - обозначение бутылки Клейна, RP^2 - принятое обозначение проективной плоскости, а Z^2 - цилиндр (тоннель - соединительная трубка).

Попробуем обобщить понятие «туннельная сфера», как n -мерное многообразие. Представим себе, что две проективные плоскости имеют общую точку (в математике такую точку называют особенной или просто – особенностью). Эта общая точка топологически заменяет соединительный тоннель. Это и будет моделью туннельной сферы первого поколения:

$$S_T^1 = [RP^2 \cap RP^2 \equiv A(x_1 : x_2 : x_3 :)]$$

Объединение всех сфер первого поколения $\bigcup_{i=1}^n S_T^i = S_T^n$ можно назвать примитивным множеством туннельной сферы. Но это упрощённый взгляд. Рассмотрим проективное пространство n измерений, состоящее из объединения n проективных плоскостей: $RP^n = \bigcup_{i=1}^n (RP_i^2)$. Пусть каждые две плоскости имеют общую точку. Т. е. получаем $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ таких пар и можем записать: $S_T^n = C_n^2 \cdot S_T^1$. Последнее выражение мы и будем называть n -многообразием туннельной сферы или формулой пространства ложного вакуума.

Сделаем небольшое уточнение. Известно, что сумма чисел $1+2+\dots+(n-1) = \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Если предположить, что топологическое объединение можно заменить обыкновенной арифметической суммой, то правильнее было бы записать формулу ложного вакуума в виде: $S_T^{n-1} = C_n^2 \cdot S_T^1$. Откуда можно предположить, что n -пространство ложного вакуума, объединяясь по парно плоскостями, самопроизвольно начинает схлопываться: $S_T^n \Rightarrow S_T^{n-1}$. А на смеену ему высвобождаются проективные плоскости, причём особая точка остаётся особой на каждой плоскости. Можно сделать предположение, что такие особые точки и будут служить будущими вселенскими сигнатурностями, т. е. – зародышами чёрных дыр.

Итак, появилось пространство, «одетое» в проективную геометрию. Мы знаем, что самой «свободной» (всего один инвариант) геометрией является как раз проективная геометрия [36], а уж из неё потом начинают появляться («выкристаллизовываться») и другие геометрии. Именно поэтому наш взор будет направлен сначала на проективную геометрию, а конкретно – на проективную плоскость. Кроме того, проективная плоскость – это замкнутое многообразие, а в рамках теории БВ наш мир

родился из «ложного» вакуума, где расширялись пузырьки (замкнутые многообразия) истинного вакуума [2] и, может быть, «вся наблюдаемая Вселенная содержится в одном таком пузыре» ([2], стр. 217). Проективная геометрия настолько первозданна, что в ней не существует таких понятий, как расстояние между двумя точками или угол между двумя прямыми. Основным и единственным инвариантом проективной геометрии является сложное отношение четырёх точек на прямой. Мы говорили об этом в четвёртой части книги [58] (стр. 117-118). Существует формула для вычисления сложного отношения четырёх точек:

$$w = (AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \quad (1)$$

где a_i - координаты точки A . Аналогично и для точек B , C и D . Напомним, что сложное отношение можно вычислить различными шестью способами (в зависимости от расположения точек в формуле (1)), и эти значения образуют неабелеву группу 6-го порядка.

Коль в формуле стоят координаты точек, значит на проективной плоскости можно ввести и координатную систему. Координаты проективной геометрии называются однородными. Ещё одна особенность этой геометрии заключается в том, что на плоскости не существует нулевой точки, т. е. точки с координатами, значения которых одновременно равны нулю. При введе координатной системы базовой фигурой является четырёхвершинник (Рис. 2).

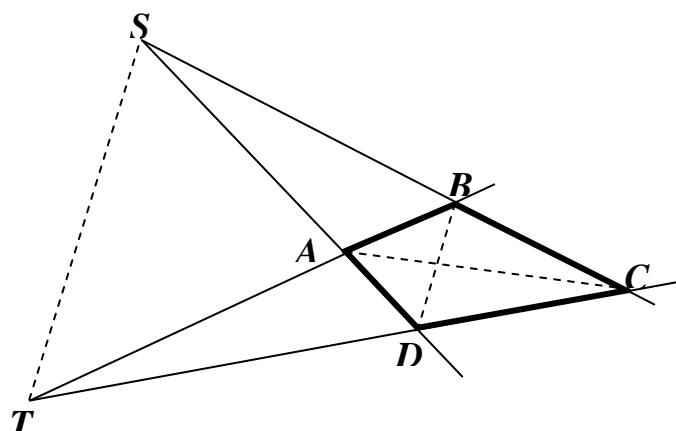


Рис. 2

В проективной геометрии принято говорить не четырёхугольник, а четырёхвершинник (понятие угла, как мы уже упомянули, смысла не имеет).

Четырёхвершинник $ABCD$ называется полным если даны стороны, соединяющие точки пересечения противоположных сторон и стороны, соединяющие противоположные вершины четырёхвершинника. В нашем случае это стороны AC , BD и ST (их ещё называют диагоналями четырёхвершинника). Понятия параллельности и перпендикулярности двух прямых тоже отсутствует в проективной геометрии. Именно поэтому две любые прямые проективной плоскости обязательно пересекаются. Точной пересечения может быть обыкновенная точка плоскости, а также и бесконечно удалённая точка. Мы не будем здесь пересказывать основные положения проективной геометрии и отсылаем читателя к классической литературе, например [60]. Однако, надо отметить ещё и такую особенность этой геометрии. Здесь важное значение имеет, так называемый, принцип двойственности. Т. е. абсолютное равноправие точек и прямых. Не важно относительно чего (точек или прямых) делается то или иное высказывание. Например все свойства сложного отношения четырёх точек на одной прямой можно рассматривать и как сложное отношение четырёх прямых, проходящих через одну точку. Принцип двойственности очень хорошо иллюстрирует, например, аналитическое выражение уравнения прямой на проективной плоскости.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \quad (2)$$

Глядя на это уравнение можно говорить, что точка $x(x_1 : x_2 : x_3)$ принадлежит прямой $a(a_1 : a_2 : a_3)$, но можно и сказать, что точка $A(a_1 : a_2 : a_3)$ принадлежит прямой $x(x_1 : x_2 : x_3)$.

Но возвращаемся к нашему четырёхвершиннику. Если даны четыре точки проективной плоскости, любые три из которых не лежат на одной прямой, причём – точки с координатами $A(1 : 0 : 0)$, $B(0 : 1 : 0)$, $C(0 : 0 : 1)$ и $D(1 : 1 : 1)$, то говорят, что на плоскости задан проективный репер $R\{A, B, C, D\}$. Определим в рамках нашего репера точки пересечения диагоналей (диагональные точки): $K \equiv AC \cap BD$, $L \equiv AC \cap ST$ и $M \equiv ST \cap BD$.

Покажем несколько простейших (числовых, т. е. связанных с числами) теорем проективной геометрии. Но сначала дадим одно определение:

Определение: *Если сложное отношение четырёх точек равно -1, то оно называется гармоническим.*

Теорема 1. (о гармоническом отношении)

Если дан проективный репер $R\{A, B, C, D\}$ и определены диагональные точки K, L и M , то

$$(TS, LM) = (LK, AC) = (MK, BD) = -1 \quad (3)$$

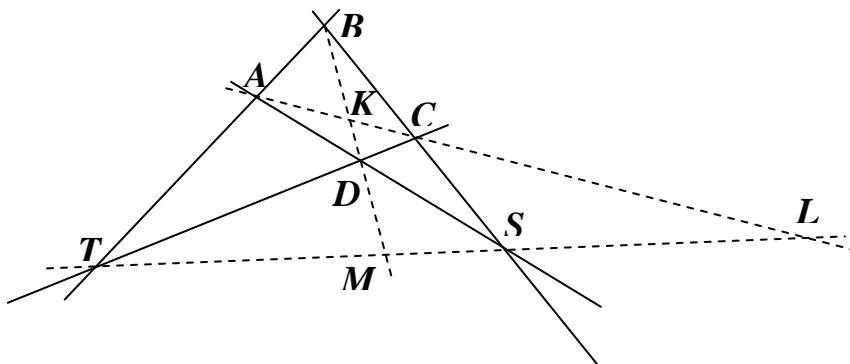


Рис. 3

Теорема 2. (о детерминанте диагональных точек)

Абсолютный детерминант диагональных точек равен 4.

$$|det(KLM)| = 4 \quad (4)$$

Теорема 3. (о пяти точках на проективной прямой)

Если на проективной прямой даны пять точек A, B, C, D и E , то справедливо равенство (Рис 4):

$$(AB,CD) \cdot (AB,DE) \cdot (AB,EC) = 1. \quad (5)$$

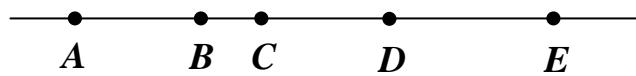


Рис. 4

Мы специально показали здесь (без доказательства) несколько простейших теорем проективной геометрии, чтобы у читателя не складывалось впечатление, что данная геометрия уж совсем безнадёжна и в ней нет места аналитическим методам. Напомним, что в нашей любимой планиметрии (на евклидовой плоскости) тоже существуют числовые теоремы. Например, теоремы Чевы, Менелая и Жергона.

Но не будем отвлекаться. Мы ведь хотели поговорить о геометрии Мироздания в первые мгновения его рождения, когда не могло быть ещё науки о сегодняшнем естествознании.

Итак, Мироздание представляло собой некий квартковый суп, где кроме как о проективной геометрии ни о какой другой геометрии речи быть и не могло. Проективные преобразования превращали точки в точки, а прямые – в прямые. А по большому счёту идеи геометрических точек и прямых были абсолютно эквивалентны (мы помним проективный принцип двойственности). Но суп начал остывать и в нём стали появляться островки кристаллизации. Что же это за кристаллики такие с точки зрения проективной геометрии?

Дадим ещё одно определение.

Определение: *Абсолютом называется фигура, которая остаётся неизменной при проективных преобразованиях.*

Что можно взять в качестве простейшего Абсолюта, простейшего островка кристаллизации? Разумеется произвольную точку (или произвольную прямую, с точки зрения принципа двойственности – это равносильно). Для более наглядного представления пусть это будет прямая. Т. е., на проективной плоскости существует Абсолют в виде прямой, которая остаётся инвариантной (неизменной) при проективных преобразованиях этой плоскости. Кстати, вводя различные Абсолюты можно получать из проективной геометрии различные другие геометрии. Это и геометрия Лобачевского, геометрия Римана, и, так любимая физиками, геометрия Минковского, и, конечно же, геометрия Эвклида, которую мы изучаем в школе. Но вернёмся к геометрии, где в качестве Абсолюта выбрана прямая линия.

Итак, с введением этого Абсолюта проективная геометрия превращается уже в другую геометрию. Что же это за геометрия? Математики знают, что такая геометрия, где инвариантом преобразований является прямая, называется аффинной (термин «аффинный» ввёл Л. Эйлер от латинского слова «affinitas» - родство). Аффинная геометрия – это большой раздел классической аналитической геометрии (см., например, [60]). Для нас важно то, что в аффинной геометрии появляется очень интересный инвариант, которого нет в проективной геометрии, – параллельность. Т. е. в аффинной геометрии уже существуют параллельные прямые. А это значит, что можно говорить о таком понятии, как пространственная решётка. Но об этом позже.

Одной из интересных теорем аффинной геометрии (почему-то редко упоминаемой в математической литературе) является теорема Пика ([61], стр. 300). Напомним эту теорему (мы говорили о ней в третьей части [58]).

Площадь многоугольника, вершины которого расположены в узлах целочисленной решётки, можно вычислить по формуле:

$$S = U_B + \frac{U_\Gamma}{2} - 1, \quad (6)$$

где U_B – число узлов решётки, которые находятся внутри данного многоугольника, U_Γ – число узлов решётки, которые попали на границу данного многоугольника.

Преобразуем формулу (6).

$$U_\Gamma + 2U_B - 2S = 2. \quad (7)$$

Введя обозначения: $U_\Gamma = B$, $2U_B = \Gamma$, $2S = P$ получаем

$$B + \Gamma - P = 2. \quad (8)$$

Не правда ли знакомая формула? Мы получили знаменитую формулу Эйлера для многогранников, топологически эквивалентных сфере. Здесь B – число вершин, Γ – число граней и P – число рёбер многогранника. Заметим, что формула Эйлера тоже относится к аффинной геометрии ([62], стр. 506).

Очевидно, формулы (6) и (8) нельзя назвать изоморфными, т. к. обозначения можно было бы ввести и другим способом. Например, $U_\Gamma = \Gamma$, $2U_B = B$ и $2S = P$. Мы снова получили бы формулу (8), но новые характеристики отвечали бы уже другому многограннику (двойственному первому). Так вместо куба получился бы октаэдр, а вместо додекаэдра – икосаэдр и наоборот. Но суть не в этом. Преобразовывая формулы мы хотели подчеркнуть косвенную связь между различными геометриями. Мы только только получили из проективной геометрии аффинную, а в её теоремах уже есть намёк и на евклидову геометрию. Вообще говоря, формула (8) является частным случаем другой формулы и относится в общем случае к топологии. Для интереса сначала продемонстрируем пример соответствия формул (6) и (8), а потом поговорим об общей топологической формуле. На Рис. 5 показан простейший многогранник, для которого справедлива формула (8) и соответствующий ему многоугольник, расчитанный по формуле Пика (6). Очевидно, что существует бесконечно много топологически эквивалентных многогранников и топологически эквивалентных многоугольников. Но можно подчекнуть такую особенность. Топологически эквивалентные многогранники имеют различные объёмы, а топологически эквивалентные многоугольники имеют одинаковую площадь

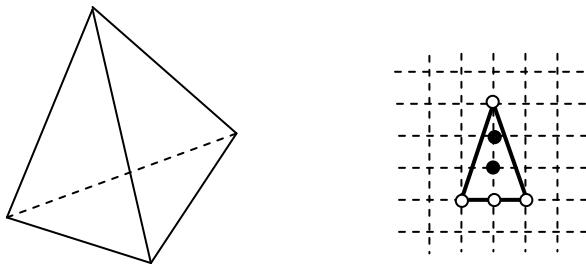


Рис. 5

Итак, рассмотрим обобщённую формулу Эйлера.

$$B + \Gamma - P = \chi. \quad (9)$$

В зависимости от того, чему равно число χ , мы получаем топологически новый тип многообразия. Существует формула ([58], стр. 95), при помощи которой тоже можно вычислить площадь многоугольника, вершины которого расположены в междуузлиях целочисленной решётке (автор её – ваш покорный слуга Ф. Г.).

$$S = \bar{U}_B + \frac{\bar{U}_\Gamma}{2}. \quad (10)$$

Преобразовав последнюю формулу точно так же, как мы делали это с формулой (6), и введя обозначения $\bar{U}_\Gamma = B$, $2\bar{U}_B = \Gamma$, $2S = P$ получаем ещё один частный случай формулы Эйлера.

$$B + \Gamma - P = 0. \quad (11)$$

Т. е. характеристическое число $\chi = 0$. А таким характеристическим числом обладают фигуры, расположенные либо на торе (фигура, топологически изоморфная бублику), либо на листе Мёбиуса [20], либо на бутылке Клейна.

Сделаем небольшую паузу. Как известно ([43], стр. 48), лист Мёбиуса можно получить из тора используя специальные топологические преобразования. Также известно ([17], стр. 129; [69], стр. 188), что одной из моделей проективной плоскости является сфера с дыркой, край которой гомеоморфен окружности, которая заклеена листом Мёбиуса (край листа Мёбиуса тоже гомеоморфен окружности). Т. о., с одной стороны мы видим косвенную связь с геометрией Эвклида: и тор и лист Мёбиуса – фигуры, принадлежащие этой геометрии. С другой стороны – лист Мёбиуса можно рассматривать как часть проективной плоскости. Т. е. проективная

геометрия продолжает о себе напоминать. Мы не будем здесь углубляться в вопрос преобразования формул одной геометрии (поверхности) в другую – это тема специального исследования. Но приведём наглядный пример соответствия формул (10) и (11).

Пусть имеем многоугольник на целочисленной решётке, площадь которого можно вычислить по формуле (10) (Рис. 6).

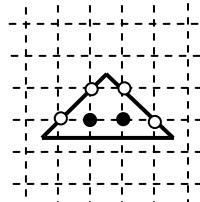


Рис. 6

Т. е., имеем треугольник, вершины которого расположены в междуузлиях целочисленной решётки. На сторонах этого треугольника имеем 4 точки (узла решётки), а внутри треугольника – 2 узла. Для вычисления его площади подходит формула (10). После преобразования в формулу (11) имеем: $\bar{U}_r = B = 4$, $2\bar{U}_v = \Gamma = 4$, $2S = P = 8$. Чтобы использовать формулу (9) для конкретной поверхности, надо для этой поверхности сделать сначала триангуляцию. Триангуляция – это разбиение поверхности на «криволинейные» многоугольники ([20], стр. 22). Покажем пример триангуляции на торе с четырьмя точками (вершинами), четырьмя гранями и восьмью рёбрами. Для этого удобно использовать топологическую схему поверхности.

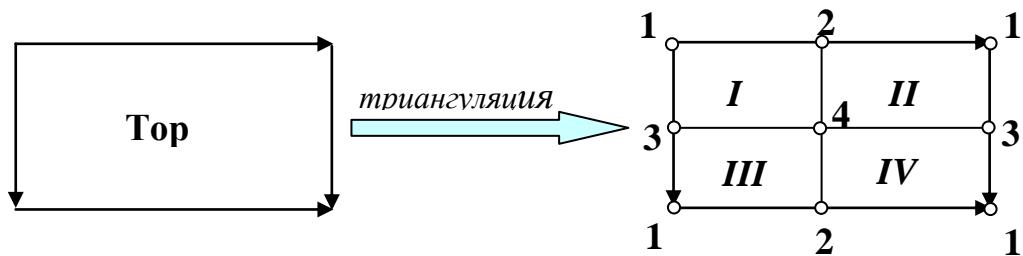


Рис. 7

Однаковыми арабскими числами обозначены тождественные точки поверхности. Римскими числами обозначены грани после трангуляции поверхности. Естественный вид тора после триангуляции показан на Рис. 8. Т. е. получаем такой многогранник (криволинейный), топологическая характеристика которого вычисляется по формуле (11).

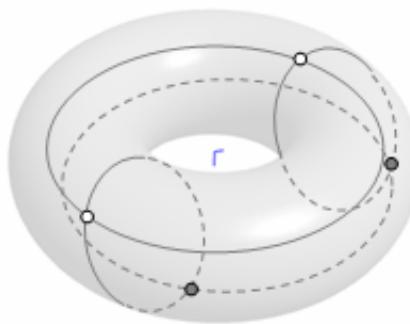


Рис. 8

Действительно, этот многогранник имеет 4 вершины (точки на торе), 8 рёбер (дуги окружностей, соединяющие вершины) и 4 грани (части, на которые распадается тор после того как мы его разрежем по всем дугам).

В принципе формулы (6) и (10) можно обобщить как и формулу Эйлера, введя топологическую характеристику расположения многоугольника на целочисленной решётке в виде числа η .

$$B + \frac{\Gamma}{2} - S = \eta. \quad (12)$$

Здесь B – число узлов решётки внутри многоугольника, Γ – число узлов решётки на сторонах многоугольника, S – площадь многоугольника. Если $\eta = 1$, то вершины многоугольника находятся в узлах решётки, если $\eta = 0$, то – в междоузлиях.

Но вернёмся к нашему исследуемому пространству.

Итак, мы рассмотрели случай возможного начала кристаллизации пространства Мироздания и увидели, что проективная геометрия превращается в геометрию аффинную во время такой кристаллизации. В аффинной геометрии, как мы видели, уже есть проблески геометрии Эвклида. А евклидово пространство как раз и является сегодняшним нашим окружением и именно это пространство мы хотим получить для дальнейшего рассмотрения в нём законов физики.

Говоря о координатах точек мы нигде не отмечали, что числа используются только действительные. На самом деле, если мы будем говорить о координатах или других числовых конструкциях (например, сложном отношении) используя комплексные числа, то ничего не изменится, т. к. действительные числа являются частью чисел комплексных. Как это ни фантастично покажется, но чтобы процесс геометрической кристаллизации (а Мироздание продолжает остыть) дошёл до Эвклидовой геометрии как раз надо использовать комплексные числа. В качестве следующего шага используем Абсолют в виде той же самой прямой, но с одним условием. А именно: *две точки с комплексно*

сопряжёнными координатами на этой прямой тоже должны быть инвариантными, т. е. принадлежать выбранному Абсолюту. В этом случае проективная геометрия становится евклидовой [36], где не только есть инвариант параллельности, но и другой важный инвариант – перпендикулярность. Условно такое преобразование можно показать в таком виде (Рис. 9).

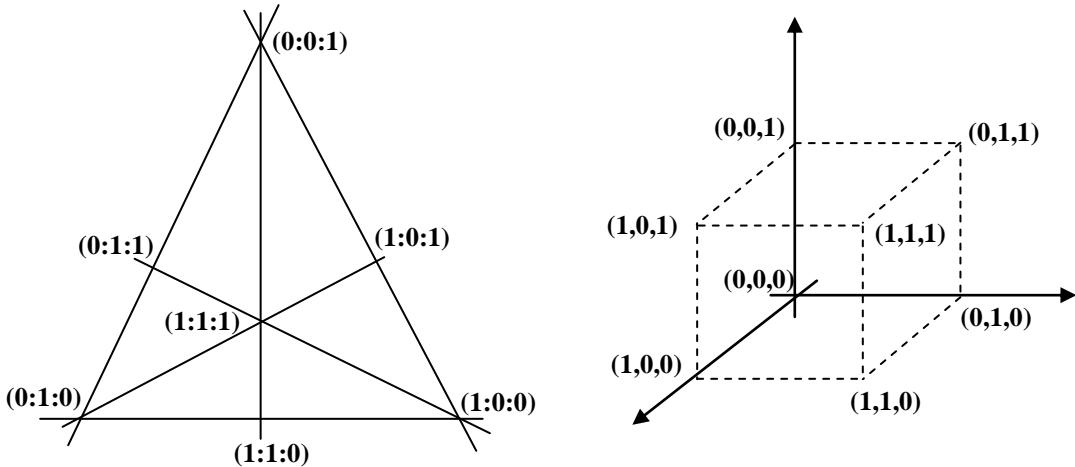


Рис. 9

На левой части рисунка показан проективный репер, а справа показана ячейка евклидова пространства. Мы помним, что на проективной плоскости не существует нулевой точки. Можно записать такое соответствие: $(x_1 : x_2 : x_3) \Rightarrow (X, Y, Z)$, где для каждой точки проективной плоскости есть свой образ в евклидовом пространстве. С появлением Эвклидовой геометрии, наверно, есть смысл поговорить о пространственной решётке и упаковке самого пространства. Мы сделаем это чуть позже. А сейчас обратимся к физике.

Итак, можем считать, что наступил момент 10^{-32} в жизни Мироздания и теперь чтобы понять дальнейшую жизнь Вселенной уже достаточно законов современной физики, т. е. СМ.

Среди физиков есть мнение [63], что главной формулой СМ является формула

$$e^2 = p^2 + m^2. \quad (13)$$

Геометрия этой формулы понятна нам со школьной скамьи в виде теоремы Пифагора, хотя при этом мы и не говорили ни о какой физике.

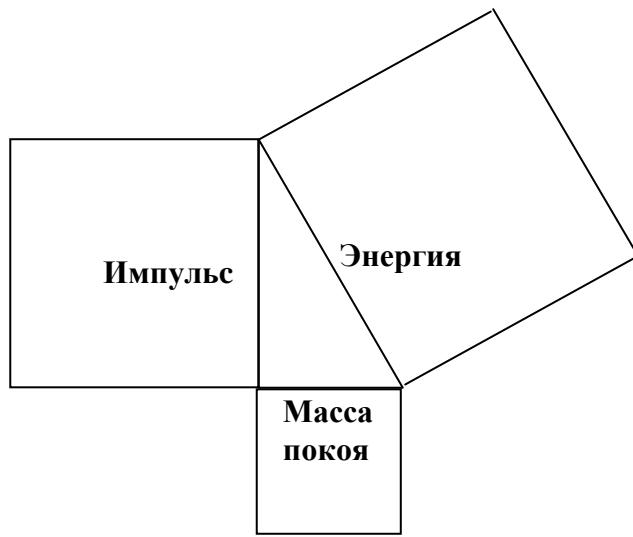


Рис. 10

Но если смотреть, как говорят, в корень, то не менее главной в физике можно назвать и другую формулу (14).

$$e = m \cdot c^2 . \quad (14)$$

Попробуем разобраться, а какова геометрия этой последней формулы. Начнём с того, что вспомним теорему о касательной и секущей: квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.

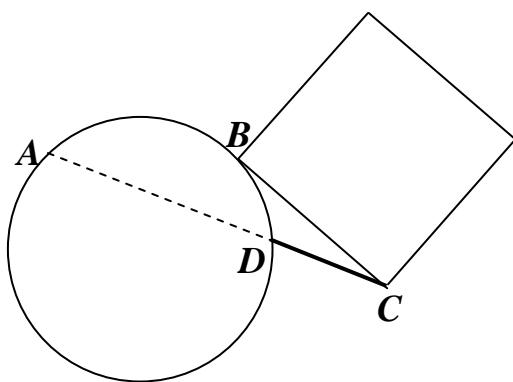


Рис. 11

Введём обозначения: $BC = c$, $AC = e$, $DC = M$. Тогда можем записать вышеизложенную теорему в виде формулы.

$$e \cdot M = c^2 \quad (15)$$

Мы специально выбрали такие обозначения, чтобы формула (15) немного походила на формулу (14). Переписав формулу в таком виде: $e = \frac{1}{M} \cdot c^2$ замечаем, что она стала ещё больше походить на формулу (14). С геометрической точки зрения величина $\frac{1}{M}$ - это тоже какой-то отрезок.

Поэтому введя обозначение $\frac{1}{M} = m$ окончательно получаем: $e = m \cdot c^2$. Т. о. мы добились полного внешнего совпадения записи физического закона и геометрической теоремы. А теперь давайте разбираться. Глядя на Рис. 9 можно сказать, что физики спокойно относятся к геометрическим иллюстрациям (рисунок взят из книги по физике [13]). Во первых, поговорим об энергии. Мы привыкли к ней со школьных лет. Есть энергия потенциальная, есть кинетическая и много других, но пощупать её нельзя. Нельзя увидеть, услышать, понюхать. Мы же не говорим: «Ах, как пахнет эта энергия». Энергия – это физический фантом ([2], стр. 77), абстрактное понятие. Но введя это абстрактное понятие стало удобно объяснять много других физических понятий. Поэтому представить энергию отрезком – это нормально. В формуле (13) есть ещё масса. И она тоже представлена отрезком. В формуле (14) тоже есть масса и мы показали её отрезком $DC = M$. Но где отрезок $\frac{1}{M} = m$? Чтобы увидеть отрезок, по величине обратный данному, надо ввести масштабную единицу.

Рассмотрим полуокружность (Рис. 12).

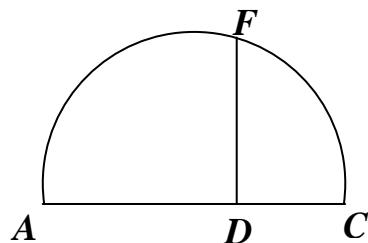


Рис. 12

Из произвольной точки D диаметра данной полуокружности восставим единичный перпендикуляр $DF = 1$. Пусть длина отрезка $DC = M$. Тогда, рассмотрев подобные треугольники AFD и CFD находим, что $AD = \frac{1}{M}$.

Перерисуем Рис. 11.

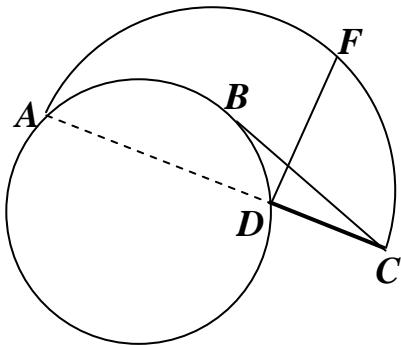


Рис. 13

Теперь, с вводом масштабной единицы, можем сказать, что *произведение квадрата касательной, на внутреннюю часть секущей, равно длине всей секущей*. А в свете принятых обозначений это можно записать, как формулу $e = m \cdot c^2$. Чтобы не усложнять Рис. 13 мы не стали здесь показывать квадрат касательной.

Проведём небольшое исследование нового геометрического закона с точки зрения физики. Введём обозначение для масштабной единицы: $I = 1$. В физических законах ничего подобного нет (пока нет), но нам без такого отрезка не обойтись. Конечно же, надо понимать, что физический закон невозможно просто получить из геометрии. Но коль физики почему-то начали использовать геометрическую наглядность своих законов, то почему бы нам и не продолжить это занятие.

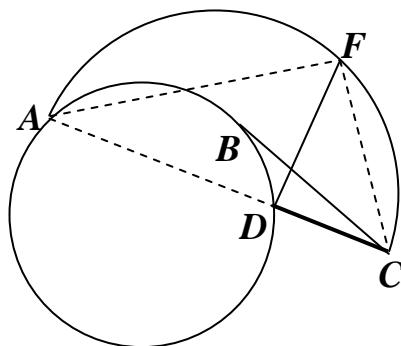


Рис. 14

Закон масштабной единицы можем записать в таком виде:

$$1 = \frac{m \cdot M}{I^2}. \quad (16)$$

Не правда ли, такая запись напоминает и закон Кулона, и закон всемирного тяготения Ньютона.

Очевидно, что $m^2 + I^2 = CF^2$. Но по теореме о касательной и секущей можем записать: $c^2 = (m+M) \cdot m = m \cdot M + m^2 = I^2 + m^2$, т. е. получаем, что отрезок $CF = c$. А окончательно можем записать в виде геометро-физического соотношения:

$$M^2 + I^2 = c^2. \quad (17)$$

Рассмотрим треугольник AFC . Здесь имеем такое соотношение $AF^2 + CF^2 = AC^2$. Или в принятых обозначениях: $AF^2 + c^2 = e^2$. Но с другой стороны $AF^2 = M^2 + I^2$. И окончательно:

$$M^2 + I^2 + c^2 = e^2. \quad (18)$$

Получили ещё один геометрический (квазифизический) закон, который можно наглядно представить уже в трёх измерениях в виде ортогонального параллелепипеда, диагональ которого будет символизировать энергию.

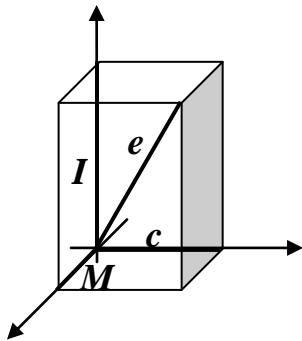


Рис. 15

Всё вышеизложенное позволяет построить нам некий обобщающий закон в виде квадратного уравнения. Действительно, нам известно, что $m \cdot M = I^2$. Кроме того мы имеем $m + M = e$. Отсюда можем записать:

$$\overline{M}^2 - e \cdot \overline{M} + I^2 = 0. \quad (19)$$

Будем называть это уравнение *обобщённым уравнением массы*. Вычисляя корни этого уравнения получаем два решения: $\overline{M}_1 = m$ и $\overline{M}_2 = M$. m - символизирует массу покоя. А что такое M ? Может быть – это релятивистская масса (с увеличением скорости растёт и масса покоя), но в треугольнике DFC по сути – две константы (масштабная единица и скорость света). Длина отрезка DC зависит только от угла DFC (позже мы покажем, что это временная зависимость). Значить ни о какой

релятивистской массе разговора быть не может. Остаётся допустить, что отрезок DC символизирует какую-то другую массу. Может быть это масса тёмной материи? В сегодняшней науке пока нет законов, в формулы которых входила бы масса тёмной материи. Будем считать, что такие формулы (формулы (15) – (19)) появились благодаря геометрической помощи фундаментальных теорем планиметрии.

Продолжим нашу игру в геометрическую квазифизику. Коль речь зашла о тёмной материи, то должна появиться и тёмная энергия, которую будем обозначать по аналогии с массой тёмной материи через большую E .

Формула Эйнштейна (14) связывает массу и энергию через константу скорости света. Предположим, что массу тёмной материи и тёмную энергию тоже связывает какая-то константа. В наших построениях уже проявилась новая константа (масштабная единица I), которая связывает две массы. Будем считать, что эта же новая константа связывает и энергию с тёмной энергией по такому же геометрическому закону. Назовём это гипотезой *единичной масштабной константы* (ЕМК). Т. о., можем записать это на языке математики.

$$m \cdot M = e \cdot E \quad (20)$$

Отталкиваясь от сегодняшних научных числовых данных (относительно процентных) [121], можем представить квазифизический закон (20) такой диаграммой:

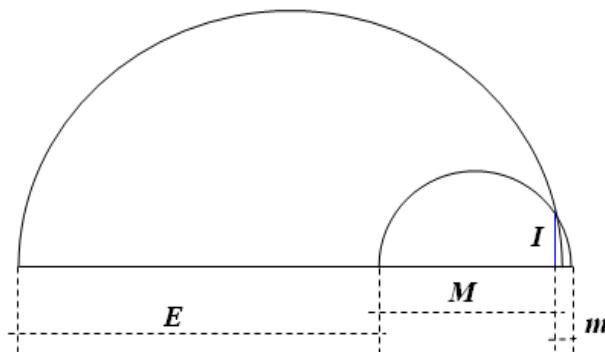


Рис. 16

Но вернёмся к геометрическому исследованию наших квазифизических законов.

А как можно показать на наших диаграммах закон, представленный формулой (13)?

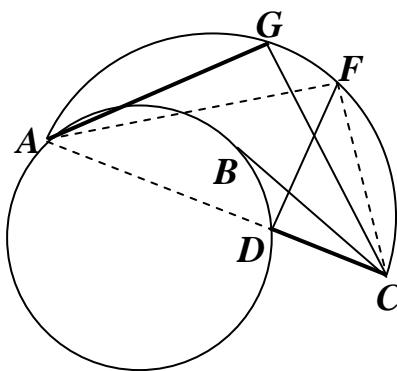


Рис. 17

Отложим на полуокружности отрезок $AG = AD$. Тогда отрезок CG будет символизировать импульс p , AG – массу покоя - m , а AC – энергию e .

А как можно увидеть на нашей диаграмме время? Освободим Рис. 17 от лишних деталей и сделаем небольшие дополнения.

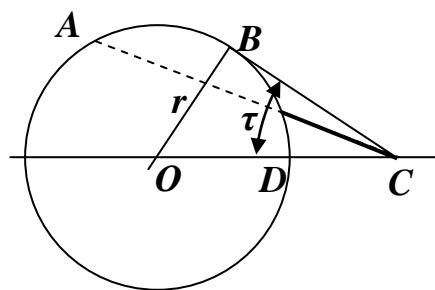


Рис. 18

Центр окружности обозначим через O , через точки O и C проведём прямую OC , отрезок OB обозначим через r , а угол BCO - через τ . На наших диаграммах и масса, и энергия, и скорость представлены отрезками. Чтобы представить время надо рассмотреть отношение длины к скорости.

Поэтому отношение $\frac{OB}{BC}$ и можно рассматривать как время. Приняв для времени традиционное обозначение через букву t , можем записать, что $Tg(\tau)=t$. В физике обозначать какие-то величины через тригонометрические выражения – не новость. Например, через $Cos(\phi)=P$ обозначают активную мощность в электрических сетях переменного тока.

С вводом времени в наших диаграммах появляется динамика. Пусть точка C передвинется в новую точку C^* .

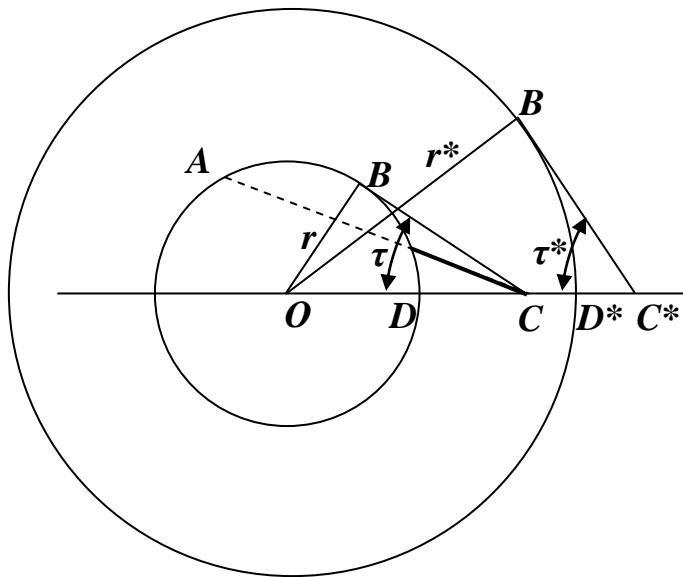


Рис 19

Т. к. скорость света должна быть постоянной ($BC = B^*C^* = c$ - скорость света), то радиус OB должен удлиниться до $OB^* = r^*$. А угол τ должен увеличиться до τ^* . По построению будем иметь угол $\tau < 90^\circ$. Возможно, что с точки зрения физики – это не правильно, хотя не исключено, что время жизни Вселенной ограничено. Также можно продолжить нашу фантазию и считать, что расстоянием r ограничивается величина радиуса наблюдаемой Вселенной, а отрезок OC характеризует размер всей Вселенной (по теории БВ Вселенная должна расширяться), но оставим наши физико-геометрические законы и вернёмся к пространству.

Генрих. Шерк - профессор «главной школы» в Бремене [64], ученик К. Якоби по Кёнигсбергу - знаменит тем, что он открыл *единственную минимальную поверхность переноса* [65]. Т. е. поверхность Шерка может транслировать себя на всё пространство. Уравнение этой поверхности имеет вид $Z = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{\cos(k \cdot Y)}{\cos(k \cdot X)}\right)$ (это одно из возможных решений уравнения

Лагранжа – Эйлера). Здесь X, Y, Z – декартовы координаты. Мы будем рассматривать простейшую поверхность Шерка при $k=1$, т. е. поверхность $Z = \ln\left(\frac{\cos(Y)}{\cos(X)}\right)$. Компьютерные возможности сегодня позволяют нам иметь наглядное представление об этой поверхности (Рис. 20).

Одно из негласных правил окружающего нас мира говорит, что если в математической науке существует интересный и, тем более, уникальный объект, то он обязательно должен как-то проявиться в природе.

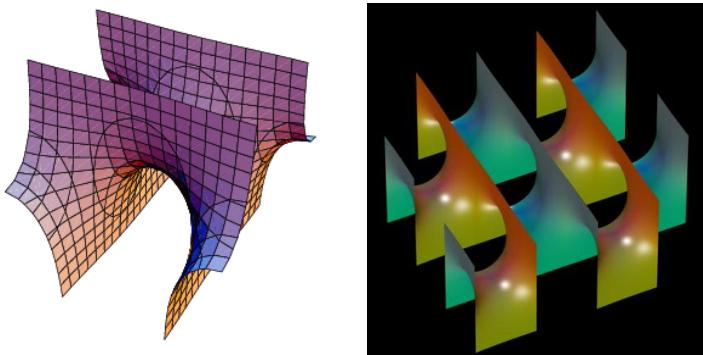


Рис 20

А поверхность Шерка уникальна, как минимум с трёх сторон. Во-первых её уравнение довольно просто, во вторых – это минимальная поверхность (а в природе существует принцип наименьшего действия [59], который описывается опять же уравнением Лагранжа - Эйлера) и, наконец, в третьих – это единственная транслируемая поверхность. Как уже было сказано, - *поверхность переноса*. Поговорим об этой поверхности немного подробнее. Поверхность Шерка будем рассматривать как некий след от проективной геометрии в евклидову. Для этого введём закон соответствия или правила соответствия для четырёх точек евклидовой плоскости и, соответственно, четырёх точек проективной плоскости. Сразу оговоримся, что это не единственный способ и правила соответствия можно вводить по-разному. Мы рассматриваем координатные правила соответствия.

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 = -\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad (21)$$

Формулы (21) циклично зависимы в соответствии с такой схемой:

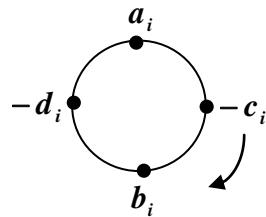


Рис. 21

Будем считать, что в каждой формуле (21) слева стоят декартовы координаты, а справа – проективные. Пусть для определённости $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = a < c = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, а $\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 = d < b = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$. Тогда можем считать, что a и c , и d и b – это катет и гипотенуза некоторых прямоугольных треугольников соответственно.

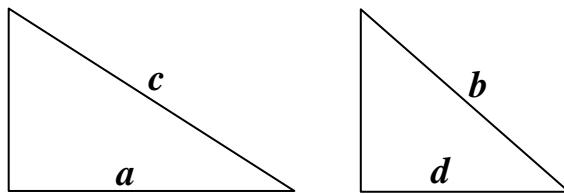


Рис. 22

Косинус в самом общем случае можно рассматривать как отношение двух чисел, т. е. имеем: $\text{Cos}(Y) = \frac{a}{c}$ и $\text{Cos}(X) = \frac{d}{b}$. Тогда отношение этих косинусов представляет собой некое отношение отношений.

Рассмотрим на проективной плоскости прямую m , описываемую уравнением $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$. Пусть точка A имеет координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, две, из которых, нам известны: $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$. Тогда находя третью координату по формуле $x_3 = -\frac{m_1a_1 + m_2a_2}{m_3}$ можно утверждать, что точка A принадлежит прямой m . Аналогично рассматриваются и точки B , C и D , т. е. все эти точки лежат на одной прямой. В этом случае отношение косинусов – это ни что иное, как сложное отношение четырёх точек прямой m .

$$\frac{\text{Cos}(Y)}{\text{Cos}(X)} = (AB, CD). \quad (22)$$

Специалисты по проективной геометрии знают формулу Лагерра ([64], стр. 48):

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(AB, CD). \quad (23)$$

Здесь φ – угол между двумя прямыми в гиперболической геометрии. Гиперболическая геометрия является порождением проективной геометрии в том случае, когда Абсолютом является линия второго порядка. Гиперболическая геометрия – это геометрия внутри Абсолюта. Кстати, все линии второго порядка на проективной плоскости замкнуты. И прямые линии на проективной плоскости тоже замкнутые. Так что «шевеление» (расширение – сжатие) пространства вполне может сопровождаться сменой одного Абсолюта в виде прямой линии другим Абсолютом в виде линии второго порядка. Т. е. ложный вакуум кипит и вместе с ним кипит и всё пространство, где одна геометрия сменяется другой пока в результате

криSTALLизации (остывания) не установится прочная евклидова геометрия. В общем, как вы наверное уже заметили, метрическая формула Лагерра превращается в формулу (уравнение) Шерка. Действительно:

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(AB, CD) = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{\cos(Y)}{\cos(X)}\right) = \frac{i}{2} Z.$$

Немного отвлечёмся и скажем два слова о странном, на первый взгляд, коэффициенте $\frac{i}{2}$ (здесь i – мнимая единица). Общеизвестно, что невозможно из гиперболической геометрии (внутри Абсолюта) проникнуть в эллиптическую геометрию (снаружи Абсолюта). Однако, всё-таки существует возможность (см. *Математическое приложение I.1*) перетащить (телеportировать) отрезок прямой из одной геометрии в другую. Сделать это удаётся поэтапно. Сначала отрезок прямой переносится из гиперболической геометрии в псевдогиперболическую геометрию с метрикой \bar{H} , а затем уже его можно перетащить и в эллиптическую геометрию с метрикой E . Условно это можно проиллюстрировать так:

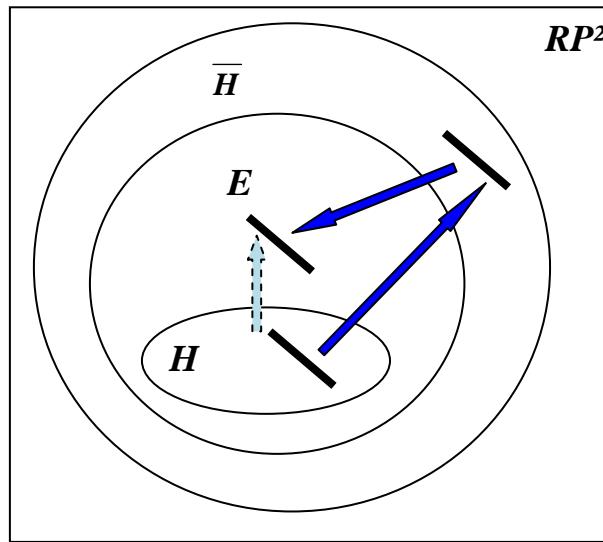


Рис. 23

Так вот связь между псевдогиперболической и эллиптическими геометриями выражается такой формулой:

$$E = \frac{i}{2} \bar{H}.$$

С учётом последней формулы можем записать:

$$\varphi = \frac{E}{H} Z \text{ или } \varphi \cdot \bar{H} = E \cdot \sqrt{S^2 - X^2 - Y^2} \quad (24)$$

Здесь X, Y – координаты, а S – метрика евклидовой геометрии. Т. о. формула (24) связывает метрики четырёх геометрий.

В общем-то показывать пример правил соответствия и не обязательно. Надо было бы просто сказать, что отношение косинусов всегда можно рассматривать, как сложное отношение четырёх точек прямой, но конкретный пример всегда выглядит убедительнее.

Для появления поверхности Шерка в природе должна быть какая-то основа, т. е пространственная решётка. Ранее мы собирались поговорить о пространственной решётке и теперь мы немного коснёмся этого вопроса.

Весь наш повседневный опыт говорит нам, что мы живём в трёхмерном евклидовом пространстве [121]. Единственной правильной фигурой, которой можно упаковать евклидово пространство, является гексаэдр (куб). Конечно есть и полуправильные тела, которые годятся для упаковки евклидова пространства. Пример такой фигуры рассматривается в [58]. Фигура эта называется ромбическим додекаэдром. И получается такая упаковка довольно простой перестройкой кубической решётки. Но вообще говорить об этом можно тогда, когда сама геометрия Эвклида уже возникла. А могла ли быть какая-то пространственная решётка ещё в доевклидовый период. Мы помним, что сначала была проективная геометрия, потом – аффинная, а уж потом только возникла евклидова. Более простой и единственной фигурой чем куб является тетраэдр. Но тетраэдрами упаковать евклидово пространство невозможно (заблуждение Аристотеля [7]), если говорить о тетраэдре, как о правильной фигуре. Произвольными же тетраэдрами, конечно же, можно упаковать любое геометрическое пространство. Кстати можно отметить, что в основе построения дифференциальной проективной геометрии лежит именно произвольный (с точки зрения произвола проективной геометрии) координатный тетраэдр [44]. Итак, вернёмся в эпоху ложного вакуума ([2], стр. 217), когда только зарождались пузырьки вакуума истинного (будущие современные Вселенные), пузырьки проективной геометрии. Нам представляется такой сценарий формирования пространства. В проективном пространстве существовали только проективные плоскости. Можно представить модели таких плоскостей в виде сфер (пузырьков) с отождествлёнными диаметрально противоположными точками. По мере остывания Мироздания такие сферы трансформировались в многранники. Самым подходящим здесь многранником может выступать гептаэдр, т. к. – это тоже модель проективной плоскости [23] (возможно, комактификация лишнего измерения). При остывании пространство-пузырьков сжимается (вспомните детские воздушные шарики), а на месте высвободившегося

пространства ложного вакуума начали появляться островки истинного вакуума аффинной геометрии в виде неправильных тетраэдров. Далее гептаэдры «остывают» до октаэдров (см. [23]), а неправильные тетраэдры превращаются (оптимизируются) в правильные – возникает евклидово пространство. Действительно, евклидово пространство можно единственным образом упаковать комбинацией из правильных октаэдров и тетраэдров ([7], стр. 33). При такой упаковке каждая грань октаэдра одновременно является и гранью тетраэдра. Т. о., к каждому октаэдру прилегает восемь тетраэдров. Чтобы описать это на математическом языке рассмотрим формулы объёмов правильного октаэдра и тетраэдра.

$$V_T = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}, \quad (25)$$

$$V_O = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}. \quad (26)$$

Здесь формула (25) предназначена для вычисления объёма правильного тетраэдра, а формула (26) – для правильного октаэдра. Очевидно, что оба многогранника должны иметь одинаковую длину ребра равную a .

Рассмотрим такое преобразование:

$$4(2V_T + V_O) = V_K. \quad (27)$$

Здесь V_K – объём куба.

Не трудно убедиться, что преобразование (27) переводит четырёхкубическую сумму объёмов двух тетраэдров и одного октаэдра в объём одного куба. А кубами, мы помним, можно упаковать евклидово пространство. При этом ребро куба равно $a\sqrt{2}$. Причём отметим, что диагональ октаэдра имеет именно такую длину.

Т. о., длина образующего ребра пространственной решётки увеличилась. С наступлением этого преобразования и началась эра нашей расширяющейся Вселенной.

Математическое приложение I.1**Теория геометрической «телеportации»**

Известно [36], что на действительной проективной плоскости RP^2 ввести понятие метрики (расстояния между двумя точками) можно, например, при помощи метода Кэли-Клейна. Вообще этим методом можно индуцировать многие геометрии [68]. Выбрав на RP^2 кривую второго порядка в качестве инварианта проективного преобразования плоскости (абсолюта), индуцируется сразу две геометрии. Внутри абсолюта получается гиперболическая геометрия (Лобачевского и др.), снаружи – эллиптическая геометрия (Римана и др.) (Рис. 1).

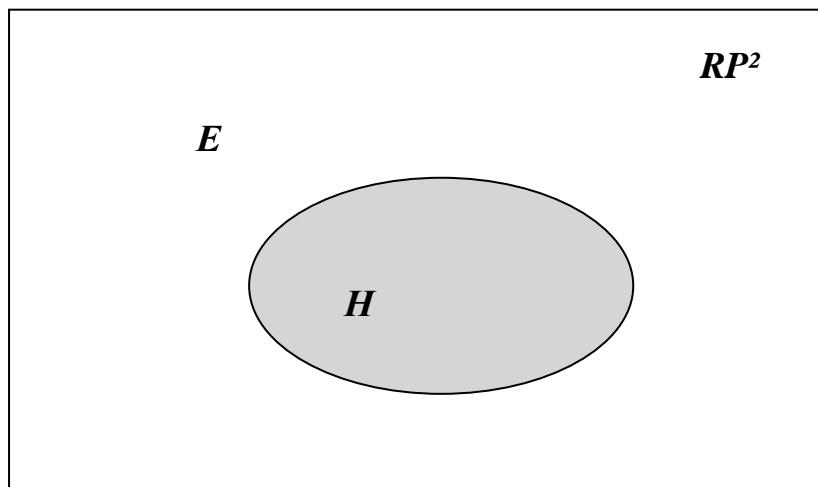


Рис. 1

Буквой ***H*** будем обозначать гиперболическую метрику, а буквой ***E*** – эллиптическую.

При этом выбраться из абсолюта, перемещаясь по плоскости невозможно, точно также как и проникнуть в абсолют извне [23].

Зададим абсолют простейшим уравнением действительной кривой второго порядка $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ (уравнения всех линий второго порядка есть, например, в [37], стр. 386). Введём понятие квазискалярного произведения двух точек, принадлежащих абсолюту, по формуле (в соответствии с нашей действительной кривой второго порядка):

$$x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

Также введём понятие квазискалярного произведения двух точек на проективной плоскости аналогично квазискалярному произведению для точек на абсолюте.

Рассмотрим две точки на проективной плоскости X и Y . Не нарушая общности, однородные координаты точек можно задать следующим образом: $X(x_1 : x_2 : 1)$ и $Y(y_1 : y_2 : 1)$. Тогда квазискалярное произведение двух точек X и Y будет вычисляться по формуле:

$$X \circ Y = x_1 y_1 - x_2 y_2 + 1$$

Аналогично введём также понятие собственного квазискалярного произведения точки:

$$X \circ X = x_1^2 - x_2^2 + 1.$$

Для обозначения операции скалярного произведения будем использовать значок: « \circ ».

В дальнейшем для краткости записи квазискалярные произведения будем обозначать следующим образом: $X \circ X = a$, $Y \circ Y = b$, $X \circ Y = c$. В этих обозначениях метрики, полученных геометрий, будут иметь формулы:

$$H = \ln \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - ab}}{c - \sqrt{c^2 - ab}} \right) \quad (1)$$

$$E = \arccos \left(\frac{c'}{\sqrt{a'b'}} \right) \quad (2)$$

Здесь все величины a , b , c должны иметь отрицательные значения, т. к. точки X и Y находятся внутри абсолюта ([70], стр. 263) и $c^2 > bc$ ([60], стр. 323) а величины a' , b' и c' - положительные, причём, в силу области определения функции арккосинуса должно быть $c' < \sqrt{a'b'}$. Т. о., квазискалярные произведения накладывают ограничения на выбор точек для данного абсолюта.

Покажем, что вводя некоторую псевдогиперболическую (мнимую) геометрию с метрикой \bar{H} , всё-таки можно телепортировать отрезок прямой из области внутри абсолюта во внешнюю область на RP^2 .

Введём обозначение: $H = \ln(h)$.

Новую псевдогиперболическую метрику будем строить следующим параметрическим образом. Пусть

$$\bar{H} = \ln \left(\frac{c^2 + k^2}{(c' + i \cdot k)^2} \right), \quad (3)$$

здесь $c^2 + k^2 = h$ и $c' = \sqrt{|c^2|}$.

Выражение (3) можем записать и так:

$$\overline{H} = \ln \left(\frac{c' - i \cdot k}{c' + i \cdot k} \right) \quad (4)$$

Рассмотрим две точки $X'(x'_1 : x'_2 : 1)$ и $Y'(y'_1 : y'_2 : 1)$ из внешней области абсолюта. Первую точку возьмём таким образом, чтобы $X' \circ X' = a' > 0$. Тогда координаты второй точки можно найти решая уравнение:

$$\begin{cases} (y'_1)^2 - (y'_2)^2 = \frac{c^2 + k^2}{a'} - 1, \\ x'_1 y'_1 - x'_2 y'_2 = c' - 1 \end{cases} \quad (5)$$

здесь $\frac{c^2 + k^2}{a'} = b'$. Т. к. координаты x'_1 и x'_2 известны, то система (5) является системой двух уравнений с двумя неизвестными. Решая (5) находим y'_1 и y'_2 .

На этом можно было бы закончить наше исследование, т. к. мы построили отрезок во внешней части абсолюта, соответствующий заданному отрезку внутри абсолюта. Но хотелось бы определить уравнение, связывающее метрики E и H .

Теперь можем записать параметр k в таком виде:

$$k^2 = a' b' - c^2 = -(c^2 - a' b'), \quad k = i\sqrt{c^2 - a' b'}.$$

С учётом того, что $c^2 = (c')^2$ и известна формула параметра k , выражение (4) принимает вид:

$$\overline{H} = \ln \left(\frac{c' + \sqrt{(c')^2 - a' b'}}{c' - \sqrt{(c')^2 - a' b'}} \right) \quad (6)$$

Т. о., выражение (2) и (6) являются функциями одних и тех же трёх параметров. Заметим, что из $k = i\sqrt{(c')^2 - a' b'}$ и $c' < \sqrt{a' b'}$ величина k должна быть отрицательна. Теперь найдём связь между выражениями (2) и (6).

Из выражения (2) можем записать:

$$\cos(E) = \frac{c'}{\sqrt{a' b'}}, \quad (7)$$

тогда $\sin(E) = \sqrt{1 - \cos^2(E)} = \sqrt{1 - \left(\frac{c'}{\sqrt{a'b'}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a'b' - (c')^2}{a'b'}}$ или
 $-i \cdot \sin(E) = \frac{\sqrt{(c')^2 - a'b'}}{\sqrt{a'b'}}.$

Теперь вычислим выражения $\cos(E) - i \cdot \sin(E)$ и $\cos(E) + i \cdot \sin(E)$.
Получаем:

$$\cos(E) - i \cdot \sin(E) = \frac{c' + \sqrt{(c')^2 - a'b'}}{\sqrt{a'b'}}$$

$$\cos(E) + i \cdot \sin(E) = \frac{c' - \sqrt{(c')^2 - a'b'}}{\sqrt{a'b'}}.$$

Разделим первое выражение на второе мы получаем выражение $e^{\bar{H}}$
или:

$$\frac{\cos(E) - i \cdot \sin(E)}{\cos(E) + i \cdot \sin(E)} = \frac{(\cos(E) - i \cdot \sin(E)) \cdot (\cos(E) + i \cdot \sin(E))}{(\cos(E) + i \cdot \sin(E)) \cdot (\cos(E) - i \cdot \sin(E))} = \cos(2E) - i \cdot \sin(2E).$$

Преобразуем последнее выражение с использованием формулы Эйлера $e^{iw} = \cos(w) + i \cdot \sin(w)$. Тогда

$$\cos(2E) - i \cdot \sin(2E) = -\exp(i \cdot (\pi - 2E)). \quad (8)$$

Откуда можем записать: $\exp(\bar{H}) = -\exp(i \cdot (\pi - 2E)) = -\frac{\exp(i \cdot \pi)}{\exp(i \cdot 2E)}$. С учётом того, что $\exp(i \cdot \pi) = -1$, получаем $\exp(\bar{H}) = \frac{1}{\exp(i \cdot 2E)}$ или окончательно: $\exp(\bar{H}) \cdot \exp(i \cdot 2E) = \exp(\bar{H} + i \cdot 2E) = 1$.

Последнее выражение можно переписать таким образом:

$$\frac{i}{2} \bar{H} = E \quad (9)$$

Из выражения (3) имеем: $\bar{H} = \ln(c^2 + k^2) - 2 \ln(c' + i \cdot k) = H - 2 \ln(c' + i \cdot k)$.

Мы помним, что $k = i\sqrt{c^2 - a'b'}$ и $a'b' = c^2 + k^2 = h = e^H$. Теперь можем записать:

$$E(x'_1, x'_2) = \frac{i}{2} \cdot H(x_1, x_2, y_1, y_2) - i \cdot \ln\left(\left|\sqrt{c^2} - \sqrt{c^2 - e^H}\right|\right) \quad (10)$$

Последнее уравнение будем называть *уравнением геометрической телепортации*. Т. о., задавая координаты двух произвольных точек X и Y из области внутри абсолюта можно вычислить эллиптическую метрику. Задавая точку X' в эллиптическом пространстве (вне абсолюта) и используя формулу (7) вычисляем значение квазискалярного произведения b' . И затем, решая систему уравнений :

$$\begin{cases} (y'_1)^2 - (y'_2)^2 = b' - 1 \\ a_1 y'_1 - a_2 y'_2 = c' - 1 \end{cases}, \quad (11)$$

находим координаты точки Y' . Здесь $x'_1 = a_1$, $x'_2 = a_2$ - координаты точки X' .

Две точки определяют прямую. По сути дела, мы телепортировали прямую из гиперболической геометрии в эллиптическую посредством некоторой промежуточной псевдогиперболической геометрии с метрикой \bar{H} (Рис. 2). Заметим, что метрика \bar{H} является чисто мнимой величиной (см. [71], стр. 58 и [69], стр.150).

Обратный путь гораздо проще в плане вычислений координат точек. Задавая две точки в эллиптическом пространстве, находим квазискалярные произведения a' , b' и c' . Мы помним, что $c = -c'$, $h = a'b'$, и $h = \frac{c + \sqrt{c^2 - ab}}{c - \sqrt{c^2 - ab}}$. Задавая некоторую точку $X(a_1 : a_2 : 1)$ в гиперблическом пространстве (внутри абсолюта) можно вычислить b по формуле:

$$b = \frac{4c^2 h}{a(h+1)^2}. \quad (12)$$

При этом мы должны помнить, что выбор точки X должен осуществляться таким образом, чтобы квазискалярное произведение a было величиной отрицательной. Зная b , вычисляем координаты второй точки Y из системы уравнений:

$$\begin{cases} (y_1)^2 - (y_2)^2 = b - 1 \\ a_1 y_1 - a_2 y_2 = c - 1 \end{cases}. \quad (13)$$

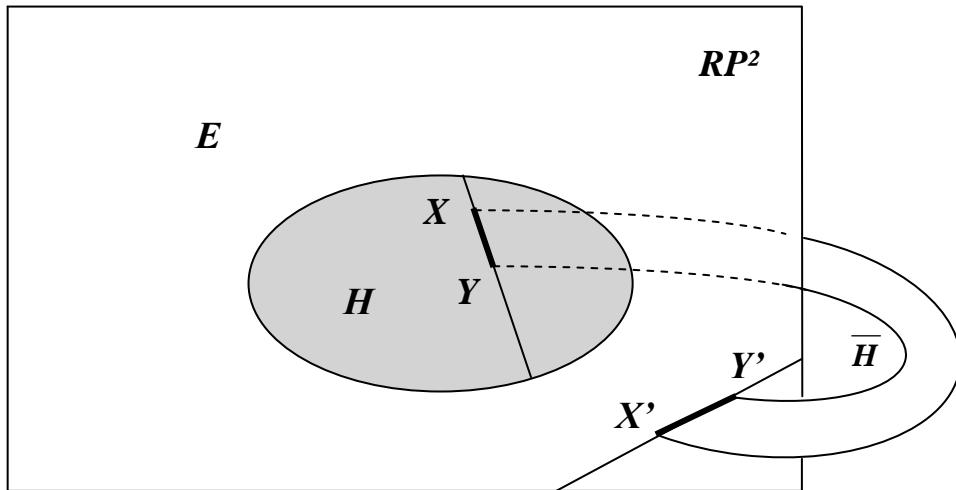


Рис. 2

Анализируя решения систем (11) и (13) находим дополнительные ограничения на выбор координат точек соответственно для X' и X . В первом случае если $b' < 1$, то должно выполняться условие $|a'_2| > |a'_1|$. Во втором случае при любом b должно выполняться условие $|a_2| > |a_1|$.

Используя (12) и параметр k можно получить явную формулу, связывающую в рамках нашего исследования гиперболическую и эллиптическую метрики:

$$\cos^2(E) + \frac{k^2}{e^H} = 1, \quad (14)$$

здесь $E = E(a', b', c')$, а $H = H(a, b, c)$.

Теперь надо пояснить: откуда появилась необходимость такого исследования.

Рассмотрим сферу и взятую на ней окружность (Рис. 3).

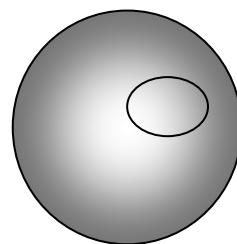


Рис. 3

Интуитивно мы понимаем, что называется внутренней областью окружности на сфере, а что наружной.

Предположим, что окружность равномерно увеличивается (натягивается на сферу). В какойто момент наша окружность достигнет размеров большого круга взятой сферы. А потом снова начнёт уменьшаться. Получается, что в этом случае внутренняя область окружности и наружная поменялись местами. Дело в том, что сфера с отождествлёнными диаметрально противоположными точками является моделью проективной плоскости ([72], стр. 503, кстати сказать, такую же модель используют и для описания эллиптического пространства [73], стр. 270, а общее определение проективного пространства можно найти в [74], стр. 81). Выходит, что индуцированные геометрии на модели проективной плоскости могут меняться ролями. Другими словами, должна существовать аналитическая связь между метриками этих геометрий (аналитическое выражение метрики для проективной плоскости впервые было получено Лагерром ([75], стр. 286, а полный вид формулы Лагерра дан в [13], стр.300)).

Такие рассуждения явились побудительным мотивом к настоящему исследованию.

В заключение рассмотрим два тора (Рис. 4)

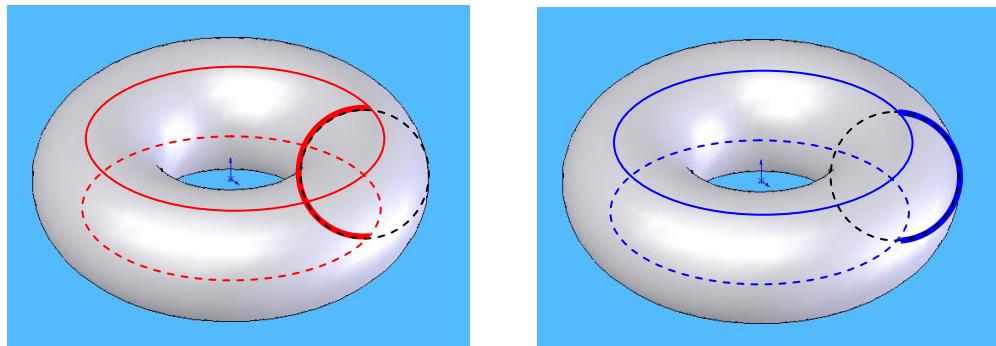


Рис. 4

Известно (см. например [35] стр. 448), что точки внутренней части тора, заметаемой красной полуокружностью (Рис. 4, слева) при её вращении вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии тора, являются гиперболическими. Т. е. геометрия этой части тора является гиперболической (окружности, заметаемые точками на концах красной полуокружности исключаются, т. к. точки этих окружностей являются параболическими).

Внешняя часть тора, заметаемая синей полуокружностью (Рис. 4, справа) без конечных точек, имеет эллиптическую геометрию.

Можем пофантазировать и предположить, что именно так будут выглядеть в будущем модели телепортационных камер, переносящие предметы с внутренней части тора, показанного на Рис. 4 слева, на внешнюю часть правого тора и наоборот.

Кстати, существует модель Розенфельда ([11], стр. 341) проективной плоскости в виде цилиндра с отождествлёнными центрально симметричными точками. Остаётся придумать только, как такой цилиндр превратить в тор.