

**Ф. Герман**  
[\(franz.h-n@yandex.ru\)](mailto:franz.h-n@yandex.ru)

## Уникальность гептаэдра?

Действительная проективная плоскость является одним из простейших замкнутых многообразий. В математике для него принято обозначение –  $\mathbf{RP}^2$ . Представить этот объект в нашем пространстве «живьём» очень не просто. Но существует множество моделей  $\mathbf{RP}^2$ , которые помогают изучать свойства проективной плоскости. Некоторые из этих моделей мы перечислим.

1. Связка прямых аффинного пространства ([1], стр. 1)
2. Модель Ф. Клейна ([5], стр. 281)
3. Сферическая модель ([6], стр. 152)
4. Модель, где край листа Мёбиуса стянут в точку ([12], стр. 23)
5. Цилиндрическая модель Б. Розенфельда ([3], стр. 340 )
6. Коническая модель В. Ефремовича ([5], стр. 288)
7. Замкнутый Кросс-Кеп ([11], стр. 313)
8. Поверхность Я. Штейнера (римская поверхность) ([14], стр. 106)
9. Поверхность В. Боя ([2], стр. 86)
10. Квадратная модель Гарднера ([8], стр. 322)
11. Модель С. Барра, ([8], стр. 330)
12. Сфера с отверстием, заклеенным листом Мёбиуса ([9], стр. 129)
13. Рисованная модель А. Фоменко, ([10], стр. 17)
14. Полиэдрическая модель ([15], стр. 94)
15. Пятигранная перекрученная пирамида Мёбиуса ([4], стр. 34)
16. Гептаэдр ([4], стр. 374)

Первые двенадцать моделей настолько популярны, что уже стали классическими и кочуют из одной книги в другую. Большинство из них названы по именам их создателей или именами математиков, которые занимались исследованием данной модели. Четырнадцатая модель была создана случайно. Я говорю об этом с уверенностью, потому, что являюсь её автором. А вот две последние модели настолько редки, что практически не упоминаются вообще (один раз и то в сноске к основному тексту). А авторство последней модели нам так и не удалось установить. Именно исследованию этой модели мы и посвятим нашу заметку.

Чем же привлекла нас эта модель?

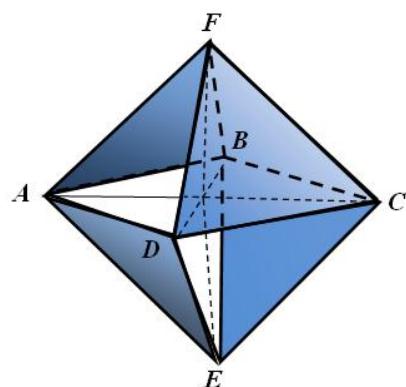


Рис. 1

На Рис. 1 показан гептаэдр  $ABCDEF$  (семигранник). Грани  $AFB$ ,  $DFC$ ,  $ADE$  и  $BCE$  – внешние, а грани  $AFCE$ ,  $DBFE$ ,  $ABCD$  – внутренние (прозрачные). Внешние грани являются равносторонними треугольниками, а внутренние – квадратами. Не трудно заметить, что гептаэдр очень похож на октаэдр, у которого нет четырёх внешних граней:  $AFD$ ,  $BFC$ ,  $EDC$  и  $ABE$ . И добавлены внутренние грани:  $AFCE$ ,  $DBFE$ ,  $ABCD$ . Внутренние грани самопересекаются. Линии самопересечения гептаэдра – суть диагонали октаэдра.

Покажем развёртку гептаэдра.

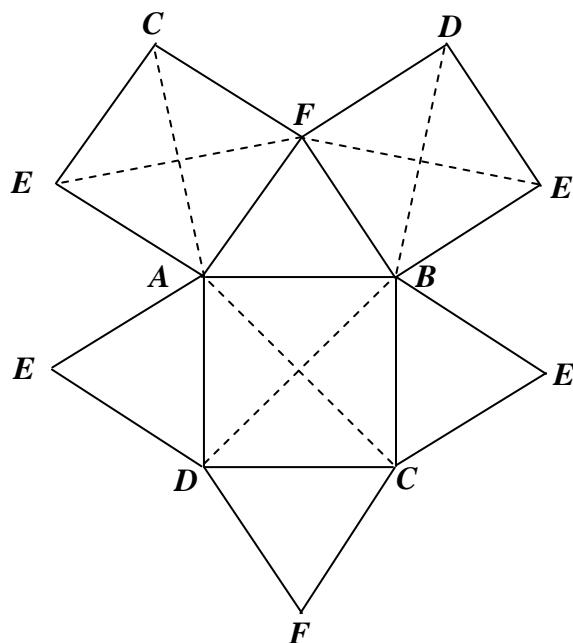


Рис. 2

Пунктирными линиями на развёртке гептаэдра показаны линии пересечений внутренних граней.

Пусть  $AB = a$ , тогда поверхность гептаэдра  $S = a^2\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{3})$ . Т. к. гептаэдр является односторонней фигурой, то говорить об его объёме нет смысла. Гептаэдр объёма не имеет. Тем не менее, если тройную точку самопересечений гептаэдра обозначить через точку  $O$ , то можно сказать, что гептаэдр всё-таки замечает некоторый объём, образованный каждой из боковых граней и частями внутренних граней, которые пересекаются.

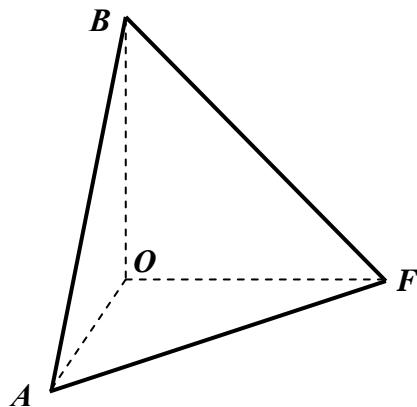


Рис. 3

На Рис. 3 показана фигура, которая представляет собой четвёртую часть заметаемого объёма гептаэдра. Объём этой фигуры ограничен гранью  $ABF$  и частями внутренних граней, которые пересекаются в точке  $O$ . Заметаемый объём имеет величину  $V_g = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$ . Обозначим через  $V_{\text{ш}}$  объём шара радиуса  $a$ . Тогда

$$\frac{V_{\text{ш}}}{V_g} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi.$$

Для фигуры Рис. 3 введём дополнительные обозначения: площадь треугольника  $AOF$  обозначим через  $S_1$ , площадь треугольника  $AOB$  -  $S_2$ , площадь треугольника  $BOF$  -  $S_3$  и площадь треугольника  $ABF$  -  $S$ . Через  $x_i = \frac{S_i}{S}$  будем обозначать поверхностный параметр. Тогда можем записать [13, стр. 58-61]:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (1)$$

Т. о. мы показали, что существует некоторый изоморфизм между гептаэдром и единичной 3-сферой.

Для всякого полиэдра справедлива формула Эйлера:

$$B + \Gamma - P = \chi, \quad (2)$$

где  $\chi = 2$ . Наш гептаэдр является моделью проективной плоскости. Известно [16], что для проективной плоскости  $\chi = 1$ . Кроме того гептаэдр – это многогранник, для которого справедливо общее свойство поверхностей: каждая точка поверхности имеет окрестность, гомеоморфную кругу. Т. е. поверхность не должна иметь краёв и разветвлений [7, стр. 43]. Другими словами, каждое ребро должно быть границей только двух граней. Математически это можно записать так:

$$\sum C_g = 2P, \quad (3)$$

где  $C_g$  - число рёбер каждой грани. Если через  $C_k$  и  $C_t$  обозначить число рёбер (степень грани) четырёхугольной и треугольной грани соответственно, то можно записать  $3C_k + 4C_t = 2P$ , т. е.  $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 2 \cdot 12$ .

Введём ещё такие обозначения:  $\Gamma_d$  - число добавленных (вновь образованных) граней,  $\Gamma_y$  - число удалённых граней многогранника. Теперь можем записать такое выражение:  $B - P + \Gamma + \Gamma_d - \Gamma_y = 1$ . Зная, что для любого полиэдра  $\chi = 2$ , можем окончательно записать:

$$\Gamma_y - \Gamma_d = 1. \quad (4)$$

Формула (4) является основной для многогранника, превращённого в модель проективной плоскости. А мы именно с этой целью и будем исследовать многогранники, чтобы из них строить модель проективной плоскости.

Напомним, что кроме описанных свойств такая модель обязательно должна иметь линии и точки самопересечений. Без самопересечений проективную плоскость невозможно увидеть в  $R^3$ .

Сначала рассмотрим многогранники, которые называются Платоновыми телами.

Кроме октаэдра внутренние грани можно построить только для икосаэдра. Построить внутренние грани – это значит натянуть их на существующие рёбра многогранника. Как это сделано для октаэдра.

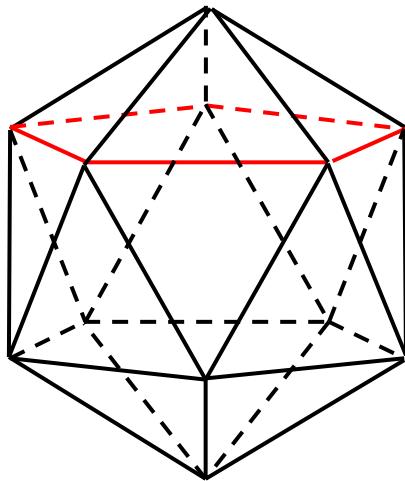


Рис. 4

Одна из таких внутренних граней икосаэдра показана на Рис. 4 (выделена красным цветом). В икосаэдре таких граней можно провести максимум 12.

Как уже было сказано, многогранник как модель  $RP^2$  обязательно должен иметь самопересечение. Т. е. нам надо провести хотя бы две дополнительные грани, но таким образом, чтобы они имели внутри икосаэдра линию пересечения.

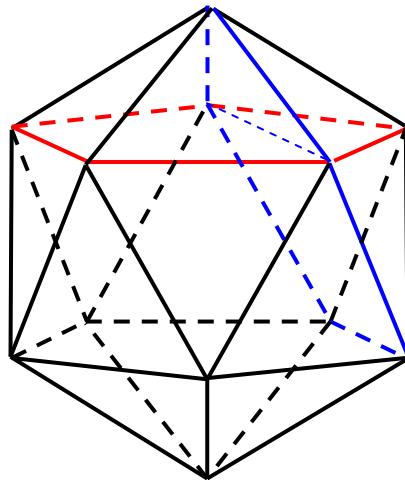


Рис. 5

Итак,  $\Gamma_D = 2$ . Следовательно, в силу формулы (4) мы получаем  $\Gamma_Y = 3$ . Т. е. мы должны удалить из нашего икосаэдра три грани. В связи с тем, что мы добавили две внутренние грани степень десяти рёбер (5 синих и 5 красных) увеличилась на единицу. Но мы помним, что каждое ребро должно всегда иметь степень равную 2. С учётом сказанного, можно записать такое равенство:

$$\Gamma_H \cdot (n+1) = \Gamma_B \cdot n, \quad (5)$$

где  $\Gamma_H$  – степень грани икосаэдра,  $\Gamma_B$  – степень внутренней (добавленной) грани икосаэдра. Формула (5) говорит о том, что на сколько степень некоторых рёбер увеличилась при добавлении внутренних граней, на столько степень этих же рёбер

должна и уменьшиться при выбрасывании нескольких граней икосаэдра. Здесь  $n$  – число жобавленных граней.  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_v$  константы, т. к. икосаэдр – правильный многогранник и равны **3** и **5** соответственно. Решая (5) при этих значениях находим, что  $n$  – дробное число, а этого быть не может. Т. е. мы получили противоречие. Следовательно икосаэдр не годится для построения модели проективной плоскости.

Среди полуправильных полиэдров наиболее простейшим, который можно рассматривать на роль многогранника для перестройки в модель  $RP^2$ , по-видимому является кубооктаэдр. В этом многограннике также возможно строить внутренние грани.

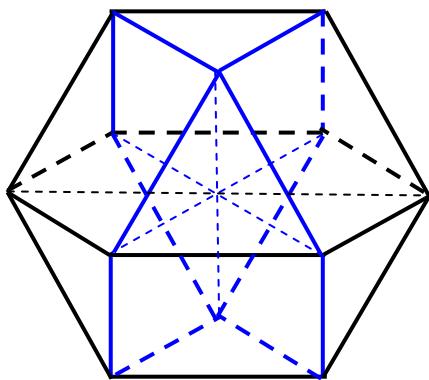


Рис. 6

На Рис. 6 показан кубооктаэдр, в котором проведено **4** внутренних грани (**2** синих шестиугольника и **2** чёрных шестиугольника). При этом степень всех **24** рёбер стала равна **3**. По условию построения модели мы должны удалить **5** граней исходного многогранника, причём таким образом, чтобы степень каждого ребра снова стала равна **2**. Предположим, что мы удалили **5** квадратных граней. Все квадратные грани кубооктаэдра не имеют общих рёбер. Из этого следует, что только **20** рёбер вновь будут иметь степень равную 2-м.

При добавлении только 2-х или 3-х внутренних граней также не удается построить интересующую нас модель. Можем сделать вывод, что кубооктаэдр не подходит для нашего исследования.

Поиск нужного нам многогранника можно вести и по другому сценарию. Будем рассматривать уже известный нам полиэдр и добавлять на его рёбрах дополнительные вершины и потом в гранях добавлять новые рёбра. Такое дополнительное преобразование многогранника позволит строить внутренние рёбра и получать возможность самопересечения.

Начнём с простейшего многогранника – тетраэдра.

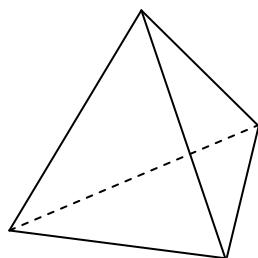


Рис. 7

В исходном тетраэдре невозможно построить дополнительные внутренние грани.

Рассмотрим грань правильного тетраэдра. Взяв в центре грани и в серединах каждого ребра по новой вершине, можно дополнительно провести новые рёбра.

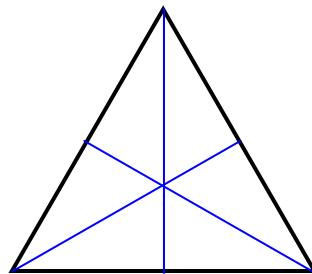


Рис. 8

Проделав такую же операцию и с остальными гранями тетраэдра получим новый полиэдр, который имеет вершин  $B = 14$ , граней  $\Gamma = 24$  и рёбер  $P = 36$ . Не трудно проверить, что  $\chi = 2$ .

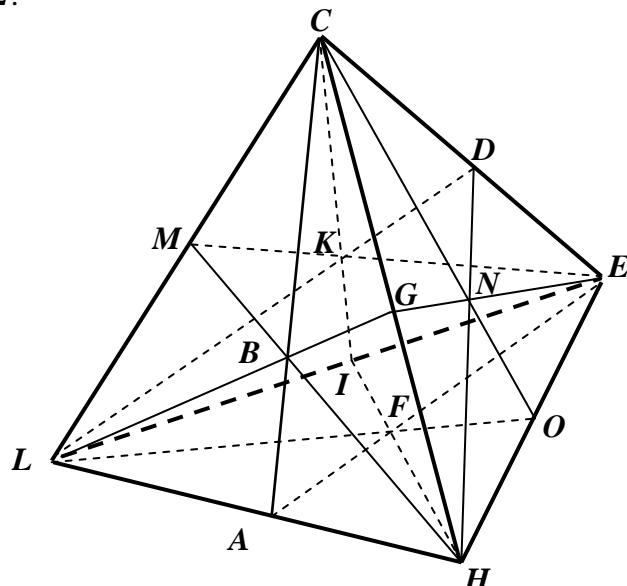


Рис. 9

Проведём три внутренних грани через ребра  $LC$ ,  $HC$  и  $EC$  перпендикулярно основанию  $LEH$ . Каждая из внутренних граней является шестиугольником:  $ABCDEF$ ,  $ONCMLF$  и  $IKCGHF$ . Все эти грани не имеют общих рёбер. Т. о. 18 рёбер стали иметь степень равную 3. Согласно теории мы должны удалить 4 грани из исходного полиэдра. Все эти грани являются треугольниками. Т. е. если мы выбросим грани, не имеющие общих рёбер, то убавим на единицу степень только 12-ти рёбер, а не 18-ти.

Можно начальный тетраэдр  $LCEH$  преобразовать и по другому. Возьмём только три дополнительных вершины:  $A$ ,  $O$  и  $F$ . И проведём дополнительные рёбра:  $CA$ ,  $CO$ ,  $LF$ ,  $FO$ ,  $AF$  и  $FE$ . Получим новый полиэдр, у которого вершин  $B = 7$ , граней  $\Gamma = 9$  и рёбер  $P = 14$ . Добавим две внутренних грани:  $ACEF$  и  $COFL$ . При этом суммарная степень рёбер увеличится на 8. А удалить нам надо три внешних грани. Все они треугольные. Т. е. суммарная степень рёбер уменьшится на 9. Опять не выполняется равенство (5).

Попробуем применить такой сценарий перестройки ещё к одному известному многограннику – кубу.

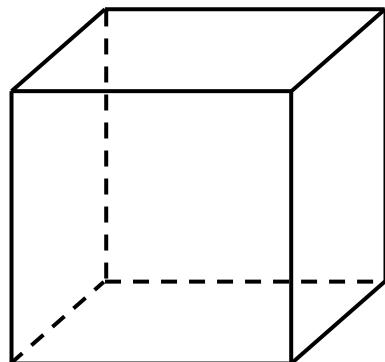


Рис. 10

Проведя в каждой грани по диагонале (дополнительное ребро) получим новый полиэдр:  $B = 8$ ,  $\Gamma = 12$ ,  $P = 18$ .

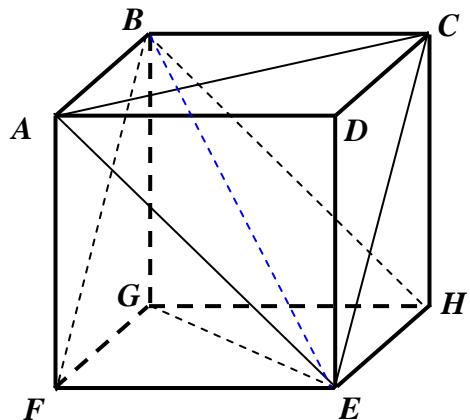


Рис. 11

В новом полиэдре можно провести дополнительные внутренние грани, например:  $ACE$ ,  $AEBH$ ,  $FBCD$ . Линия пересечения двух последних граней показана синим пунктиром (Рис. 11). Т. о. сумма добавленных рёберных степеней равна  $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$ . А убрать надо 4 треугольных грани, т. е. сумма рёберных степеней при удалении граней равна 12. Опять получаем противоречие.

Диагонали в гранях куба можно провести и по другому.

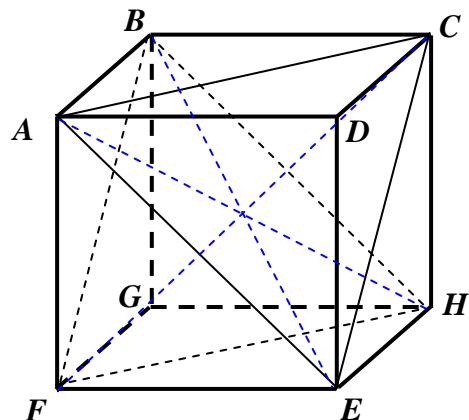


Рис. 12

В полиэдре (Рис. 12) добавим такие внутренние грани: ***ABHE, BCEF*** и ***AFHC***. При этом степень **3** получили **12** рёбер: ***AB, BH, HE, EA, BC, CE, EF, FB, AF, FH, HC, CA***. Удалить мы должны **4** внешних грани, а т. к. грани треугольные, то суммарная степень тоже равна **12**. Т. е. наша задача состоит в том, чтобы из выделенных рёбер получить **4** треугольника, причём каждое ребро должно быть использовано только один раз. В противном случае мы будем иметь ребро степени **1**, а это противоречит определению поверхности.

Начнём прямо по списку с ребра ***AB***. Это ребро может принадлежать треугольнику (***AB, BC, CA***). Все рёбра этого треугольника есть в нашем списке. Следующее по списку ребро – ***BH***. Это ребро может принадлежать треугольнику (***BH, HF, FB***). Все рёбра, полученного треугольника из нашего списка, но данный треугольник не является внешней гранью. Значит не подходит.

Ищем другой треугольник, где могло бы быть ребро ***BH***. Удивительно возможный здесь треугольник – (***BH, HC, CB***). Но замечаем, что ребро ***BC*** уже использовалось в первом треугольнике и других треугольников для ребра ***BH*** уже построить невозможно. Т. е. начинаем всё сначала – ищем новый треугольник для ребра ***AB***.

Новым треугольником может быть треугольник – (***AB, BF, FA***). Единственная возможность для двух следующих треугольников – это: (***BH, HC, CB***); (***HE, EF, FH***). Осталось как раз три ребра и они образуют треугольник: (***EA, AC, CE***), но он не является внешней гранью. Других возможностей для использования ребра ***AB*** у нас нет. Можем констатировать, что построение модели ***RP<sup>2</sup>*** снова не удалось.

Можно в качестве внутренних граней брать два треугольника и один прямоугольник, но построить модель в этом случае тоже не получается.

На роль исходного полиэдра пробовались многие многогранники, но построить из них модель проективной плоскости нам так и не удалось.

Неотвратимо преследует мысль об **уникальности гептаэдра**.

## Литература

1. Л. А. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия. Т. 2», М., «Просвещение», 1987
2. А. Т. Фоменко, «Наглядная геометрия и топология», М., изд-во «ЧеРо», 1998
3. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
4. Ф. Клейн, «Элементарная геометрия с точки зрения высшей», Т. 2», М., «НАУКА», 1987
5. Н. А. Глаголев, «Проективная геометрия», М., «Высшая школа», 1963
6. Дж. Милнор, А. Уоллес, «Дифференциальная топология», М., «Мир», 1972
7. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, «Наглядная топология», М., «НАУКА», 1982.
8. Ст. Барр, «Россыпи головоломок», М., «Мир», 1987
9. С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Элементы дифференциальной геометрии и топологии», М., «НАУКА», 1987
10. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., «НАУКА», 1989
11. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М., «НАУКА», 1981
12. Ю. Г. Борисович и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980
13. Д. Пойа, «Математическое открытие», М., «НАУКА», 1970
14. Дж. Франсис, «Книжка с картинками по топологии», М., «Мир», 1991
15. Ф. Герман, «*RP<sup>2</sup>* - проективная плоскость», LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015
16. У. Болл, Г. Коксетер, «Математические эссе и развлечения», М., «Мир», 1986