Франц Герман

Локально параметрическая симметрия двух функций

franz.h-n@yandex.ru

Представим себе такую ситуацию. Пусть один процесс описывается функцией f_1, а другой – функцией f_2. Но теоретик или экспериментатор свои звериным чутьём учёного понимает, что это один и тот же процесс (или очень похожие), только рассматривается с разных сторон.

Возникает задача, построить соответствие между функциями f_1 и f_2 или доказать, что такое соответствие невозможно. Конечно же, абсурдно говорить о полном совпадении двух различных функций. Речь идёт только о примерном совпадении на каком-то общем участке.

Мы можем поступить следующим образом. Разложем данные функции в похожие ряды (если это конечно возможно), введя в исходные функции свободные параметры. Пусть точность наших вычислений удовлетворяется разложением в ряд первыми 4-мя его членами. Более конкретно это можно представить следующим образом:

$$f_1(x,a,b) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3 + \cdots$$

$$f_2(x,c,d) = \eta_0 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3 + \cdots$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\xi_i = \eta_i \text{, где } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Наши свободные параметры ***a, b, c*** и ***d*** являются неизвестными полученной системы.

Находя решения этой системы получаем соответствие между функциями f_1 и f_2.

Очевидно, что не для всяких функций может быть построено такое соответствие.

Рассмотрим конкретный пример построения соответствия для функций e^{-x} и x^{-k}. Данные функции имеют схожее разложение в ряд:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$(x+1)^{-k} = 1 - \frac{x}{1!}k + \frac{x^2}{2!}k(k+1) - \frac{x^3}{3!}k(k+1)(k+2) + \cdots$$

Мы будем строить 4-х параметрическое соответствие (число параметров определяется числом членов в ряду разложения). Для этого представим наши функции в следующем виде:

$$y_1 = e^{-z_1}, \qquad \text{где } z_1 = a(x+b),$$

И получаем такое разложение в ряд:

$$y_1 = 1 - \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^{\ 2}}{2!} - \frac{z_1^{\ 3}}{3!} + \cdots \qquad (1)$$

$y_2 = (z_2 + 1)^{-c}$, где $z_2 = (x + d)$. Тогда, соответственно получаем такое разложение в ряд:

$$y_2 = 1 - \frac{z_2}{1!}c + \frac{z_2^{\ 2}}{2!}c(c+1) - \frac{z_2^{\ 3}}{3!}c(c+1)(c+2) + \cdots \qquad (2)$$

Заметим, что это не единственная возможность для введения параметров ***a, b, c*** и ***d*** таким образом.

Подставим z_1 и z_2 в разложения (1) и (2) и приведём их к виду:

$$y_1 = \xi_0 + \xi_1\frac{x}{1!} + \xi_2\frac{x^2}{2!} + \xi_3\frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ для (1) и}$$

$$y_2 = \eta_0 + \eta_1\frac{x}{1!} + \eta_2\frac{x^2}{2!} + \eta_3\frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ для (2).}$$

Покажем коэффициенты разложений в развёрнутом виде
для (1):

$$\xi_0 = 1 - ab + \frac{a^2b^2}{2} - \frac{a^3b^3}{6};$$

$$\xi_1 = -a + a^2b - \frac{a^3b^2}{2};$$

$$\xi_2 = \frac{a^2 - a^3b}{2};$$

$$\xi_3 = -\frac{a^3}{6}.$$

Для (2) имеем:

$$\eta_0 = 1 - cd + \frac{c(c+1)d^2}{2} - \frac{c(c+1)(c+2)d^3}{6};$$

$$\eta_1 = -c + d(c+1) - \frac{c(c+1)(c+2)}{2};$$

$$\eta_2 = \frac{c(c+1) - c(c+1)(c+2)d}{2};$$

$$\eta_3 = -\frac{c(c+1)(c+2)}{6}.$$

Приравнивая $\xi_i = \eta_i$, получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} ab\left(1-\frac{ab}{2}+\frac{a^2b^2}{6}\right)=cd\left(1-\frac{d(c+1)}{2}+\frac{d^2(c+1)(c+2)}{6}\right) \\ a\left(1-ab+\frac{a^2b^2}{2}\right)=c\left(1-d(c+1)+\frac{d^2(c+1)(c+1)}{2}\right) \\ a^2(1-ab)=c(c+1)(1-d(c+2)) \\ a^3=c(c+1)(c+2) \end{cases} \qquad (3)$$

Как видим, четвёртое уравнение системы (3) содержит только два неизвестных a и c. Т. о. Всё систему (3) в принципе можно свести к системе из 3-х уравнений с тремя неизвестными.

С учётом четвёртого уравнения системы (3) третье уравнение можно записать:

$$a^2(1-ab)=c(c+1)-a^3d;$$

Кроме того четвёртое уравнение можно представить в таком виде: $c(c+1)=\frac{a^3}{c+2}$. Тогда третье уравнение системы (3) принимает такой вид:

$$a^2\left(1+ad-ab-\frac{a}{c+2}\right)=0 \qquad (4)$$

Тривиальное решение этого уравнения: $a=0$.

Подставим $a=0$ в систему (3). Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} cd\left(1-\frac{d(c+1)}{2}+\frac{d^2(c+1)(c+2)}{6}\right)=0 \\ c\left(1-d(c+1)+\frac{d^2(c+1)(c+1)}{2}\right)=0 \\ c(c+1)(1-d(c+2))=0 \\ c(c+1)(c+2)=0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим 3 решения: $c_1=0$, $c_2=-1$, $c_3=-2$

Очевидно, что при любом из этих решений уравнения системы превращаются в тривиальные тождества.

Т. о. решение $a=0$ нам не интересно. При $a\neq 0$ и вводя параметр $k=c+2$, уравнение (4) будет иметь вид:

$$k=\frac{a}{1+ad-ab} \qquad (5)$$

Рассмотрим уравнение 2 системы (3). С учётом предыдущих выкладок можем переписать его слудующим образом:

$$c = a - a^2 b + \frac{a^3 b^2}{2} - \frac{a^3 d^2}{2} + \frac{a^3 d}{k}$$

или

$$k - 2 = a - a^2 b + \frac{a^3 b^2}{2} - \frac{a^3 d^2}{2} + \frac{a^3 d}{k}$$

А уравнение 1 системы (3) будет иметь вид:

$$ab - \frac{a^2 b^2}{2} + \frac{a^3 b^3}{6} = d(k-2) - \frac{a^3 d^2}{2k} + \frac{a^3 d^3}{6}$$

Получаем новую систему из дву уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} ab - \dfrac{a^2 b^2}{2} + \dfrac{a^3 b^3}{6} = d(k-2) - \dfrac{a^3 d^2}{2k} + \dfrac{a^3 d^3}{6} \\ k - 2 = a - a^2 b + \dfrac{a^3 b^2}{2} - \dfrac{a^3 d^2}{2} + \dfrac{a^3 d}{k} \end{cases}, \qquad (6)$$

где $k = \dfrac{a}{1 + ad - ab}$. Т. о. одно из неизвестных можно выбрать, как свободный параметр.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Случай 1. Пусть $d = 0$. Тогда система (6) примет такой вид:

$$\begin{cases} ab\left(1 - \dfrac{ab}{2} + \dfrac{a^2 b^2}{6}\right) = 0 \\ k - 2 = a - a^2 b + \dfrac{a^3 b^2}{2} \end{cases},$$

где $k = \dfrac{a}{1 - ab}$.

Рассмотрим уравнение 1, полученной системы.

Напомним, что $a \neq 0$. Тогда можем предположить, что $b = 0$. Но в этом случае второе уоравнение последней системы приводит к противоречию. Следовательно, из первого уравнения имеем:

$$a^2 b^2 - ab + 2 = 0. \qquad (7)$$

Анализ уравнения (7) показывает, что оба параметра не могут одновременно находиться в области действительных значений, что тоже не годится для нашей задачи.

Случай 2 Мы помним, что $a \neq 0$ и $d \neq 0$. Рассмотрим вариант, когда $b = 0$. В этом случае система (6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} d(k-2) = \dfrac{a^3 d^2}{2k} - \dfrac{a^3 d^3}{6} \\ k - 2 = a + \dfrac{a^3 d}{k} - \dfrac{a^3 d^2}{2} \end{cases},$$

или, т. к. $d \neq 0$ получаем:

$$\begin{cases} k-2=\dfrac{a^3d}{2k}-\dfrac{a^3d^2}{6} \\ k-2=a+\dfrac{a^3d}{k}-\dfrac{a^3d^2}{2} \end{cases}, \tag{8}$$

где $k=\dfrac{a}{1+ad}$.

Полученная система является нелинейной, но используя различные компьютерные и численные методы можно найти её решение с любой нужной точностью.

Систему (8) не сложно преобразовать в параметрическое уравнение:

$$d^2a(3-4a)+3d(2-a)-6=0 \tag{9}$$

Решая относительно ***d,*** находим явную связь между параметрами a и ***d.***

$$d_{1,2}=\frac{-3(2-a)\pm\sqrt{9(2-a)^2+24a(3-4a)}}{2a(3-4a)}$$

Подкоренное выражение должно быть всегда положительно. Отсюда можно сделать граничную оценку параметра a. Самая грубая прикидка показывает, $0{,}5<a<0{,}6$.

Напомним, что параметры a и c связаны уравнением 4 системы уравнений (3)