Франц Герман

Теория упаковок замкнутых клеточных полей

franz.h-n@yandex.ru

В математике задачей на упаковку принято называть задачу, в которой заданное множество математических объектов требуется как можно более экономно упаковать в заданном пространстве по заданным правилам.

Мартин Гарднер

На самом деле за любой системой счисления стоит, конечно, одна и та же арушка арифметика.

Мартин Гарднер

Содержание

1. Простейшие алгоритмы упаковок стр. 1
2. Упаковки и системы счислеия стр. 16
3. Упаковки и простые числа стр. 26

1. Простейшие алгоритмы упаковок

В этой работе мы познакомимся с некоторыми упаковками (алгоритмами упаковок) замкнутых клеточных полей.

Что такое клеточное поле.

Совокупность из ***n*** клеток будем называть клеточным полем (или решеткой}.

Пример:

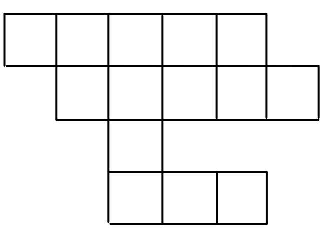


Рис. 1

Если поле содержит ***n*** клеток, то будем говорить, что порядок этого поля равен ***n***. Поле, изображённое на Рис. 1 имеет порядок ***n* = 14**.

Мы будем рассматривать поля, на которых задан порядок следования клеток друг за другом (очерёдность).

Пример:

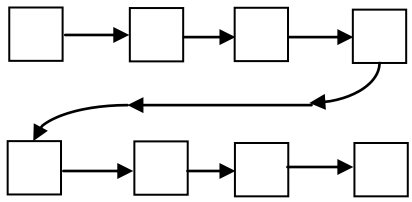


Рис.2

Порядок следования может быть задан словесно, а не обязательно в виде стрелок, как на Рис.2.

Например, клетки поля (Рис.2) заполняются построчно слева-направо и строки чередуются сверху-вниз.

Если поле имеет замкнутый порядок следования клеток, то такое поле будем называть замкнутым клеточным полем.

Пример:

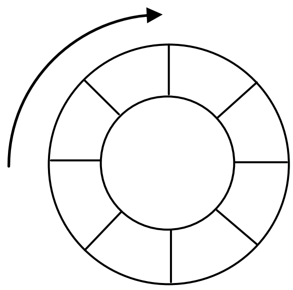


Рис.3

Здесь порядок следования задаётся движением по часовой стрелке. Если поле замкнуто, то его порядок будем называть периодом и обозначать буквой $\boldsymbol{P}$. На Рис.3 изображено поле с периодом $\boldsymbol{P} = \mathbf{8}$.

Скажем ещё два слова о том, что такое упаковка чисел.

Упаковка чисел это определённый алгоритм (правило), по которому числа ставятся в клетки нашего поля. Мы рассмотрим упаковки, которые позволяют заполнять некоторые замкнутые клеточные поля без пробелов, т.е. такие, чтобы ни одна клетка поля не оставалась пустой.

Рассмотрим один из таких алгоритмов упаковки.

1). Число **1** помещается в произвольную клетку замкнутого поля.

2). Число **2** помещается в следующую клетку поля, следуя направлению обхода.

3). Число **3** помещается в клетку, через одну клетку после числа **2**.

4). Число **4** помещается в клетку, через две клетки после числа **3**.

и т.д.

5). Число $\boldsymbol{m}$**+1** помещается в клетку, через $\boldsymbol{m}$**-1** клетку после числа $\boldsymbol{m}$.

и т.д..

6). Число $\boldsymbol{n}$ помещается е клетку, через $\boldsymbol{n}$ **-2** клетки после числа $\boldsymbol{n}$ **-1**.

Пример: пусть имеем замкнутое клеточное поле с периодом $\boldsymbol{P} = \mathbf{8}$. Заполним его, следил нашему алгоритму.

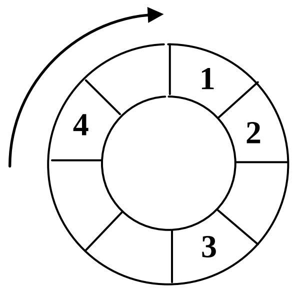


Рис. 4

И т. д.
Получаем такую картину:

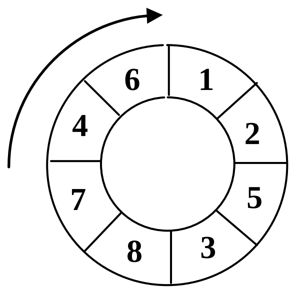


Рис.5

Сразу скажем, что пользуясь таким алгоритмом можно заполнить (упаковать) поля только определённого периода $\boldsymbol{P}$. Чему же равен период таких полей нам и предстоит выяснить.

Предположим, что в нашем распоряжении есть бесконечное клеточное поле в виде строки (Рис. 6).

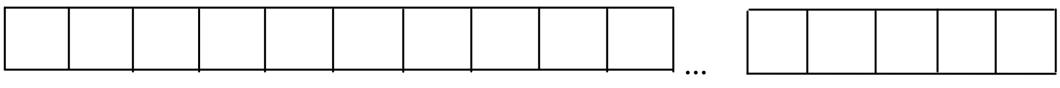


Рис. 6

Используя наш алгоритм, поместим в это поле числа от **1** до $\boldsymbol{n}$.

1	**2**		**3**			**4**				…	$\boldsymbol{n}$**-1**		…		$\boldsymbol{n}$

Рис. 7

Не трудно заметить, что число клеток нашего поля, не включая последнюю клетку (Рис.7), составляет сумму чисел натурального ряда от **1** до ***n-1***, т.е.

$$\frac{1+(n-1)}{2}(n-1).$$

Тогда период поля, в последней клетке которого стоит число ***n***, равен:

$$P=\frac{n(n-1)}{2}+1. \tag{1}$$

Пусть имеем поле периода ***P***. Рассмотрим случай, когда два числа данного поля n_1 и n_2 попадают в одну клетку при заполнении поля по нашему алгоритму (имеется в виду конечно же замкнутое поле). Т. е. - это задача обратная задаче поставленной ранее, т. к. мы ищем поля с периодом ***P***, которые не заполняются по описанному алгоритму.

Подставим в формулу (1) числа n_1 и n_2, получим:

$$P_1=\frac{n_1(n_1-1)}{2}+1, \quad P_2=\frac{n_2(n_2-1)}{2}+1.$$

Пусть для определённости $n_1<n_2$, тогда $n_1<n_2\le P$. Если n_1 и n_2 попадают в одну клетку при заполнении нашего поля, то

$$P_2-P_1=q\cdot P,$$

где ***q***, - целое число. Т. е. разность P_2-P_1 должна быть кратна периоду нашего исходного поля.

$$\frac{(n_2-n_1)(n_2+n_1-1)}{2P}=q. \tag{2}$$

Формула (2) - это и есть условие,при котором замкнутое поле невозможно заполнить по нашему алгоритму.

Рассмотрим все возможные случаи для $\boldsymbol{P}$.

I). Пусть $\boldsymbol{P}$ - нечётное число. Заметим, что среди чисел $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, , $\boldsymbol{P}$ всегда можно подобрать два числа n_1 и n_2 такие, что $n_2 + n_1 - 1 = P$, где n_1 и n_2 оба чётные. Это очевидно. Т. е. формула (2) имеет смысл при $\boldsymbol{P}$ - нечётном. Т. е. всегда существуют такие n_1 и n_2, что подставляя их в формулу (2) получаем целое значение $\boldsymbol{q}$.

Т. о., поля, период которых $\boldsymbol{P}$ равен нечётному числу, не заполняются по такому алгоритму.

2).Пусть $P = 2^k m$, где $\boldsymbol{m}$ - нечётное.

Для доказательства незаполняемости таких полей достаточно доказать хотя бы один частный случай.

Пусть $q = 1$, тогда:

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2^{k+1} m} = 1. \qquad (3)$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = 2^{k+1} \\ n_2 + n_1 - 1 = m \end{cases}.$$

$$n_1 = \frac{m + 1 - 2^{k+1}}{2}; \quad n_2 = \frac{m + 1 + 2^{k+1}}{2};$$

n_1 и n_2 будут целыми числами при $m > 2^{k+1} - 1$. Тогда возникает вопрос, существуют ли такие целые n_1 и n_2 при $m \le 2^{k+1} - 1$, для которых формула (3) была бы справедлива.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = m \\ n_2 + n_1 - 1 = 2^{k+1} \end{cases}.$$

$$n_1 = \frac{2^{k+1} + 1 - m}{2}; \quad n_2 = \frac{2^{k+1} + m + 1}{2}.$$

Получаем целые n_1 и n_2 при $m < 2^{k+1} + 1$. Т. к. $\boldsymbol{m}$ - нечётное, то из полученного неравенства справедливо следует неравенство:

$$m \le 2^{k+1} - 1.$$

Остаётся рассмотреть третий случай.

3) $\boldsymbol{P} = \mathbf{2}^{k}$, т. е. формула (3) будет иметь вид:

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2^{k+1}} = q.$$

Один из сомножителей числителя всегда нечётный. Тогда для того, чтобы q было целым числом необходимо, чтобы другой сомножитель был бы по крайней мере равен 2^{k+1}. Число 2^{k+1} в два раза превышает период P, поэтому имеем: при $n_1 < n_2 \le P$, $n_2 + n_1 - 1 < 2^{k+1}$ и, тем более, $n_2 - n_1 - 1 < 2^{k+1}$. Таким образом, ни при каких n_1 и n_2, где $n_1 < n_2 \le P$, $P = 2^{k}$ выражение

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2P}$$

не может быть целым числом.

Т. о. выяснилось, что только поля, период которых $P = 2^{k}$, могут заполняться без пробелов по нашему алгоритму.

Рассмотрим несколько следствий, вытекающих из такой упаковки клеточных полей.

Следствие 1.

При любом произволе начальной клетки, одна клетка поля будет содержать свой собственный номер.

Поясним это на примере.

Пример: ***P* = 8**.

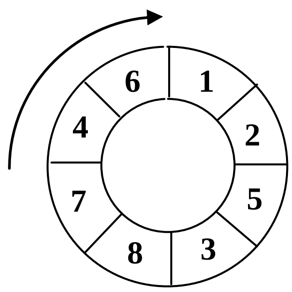
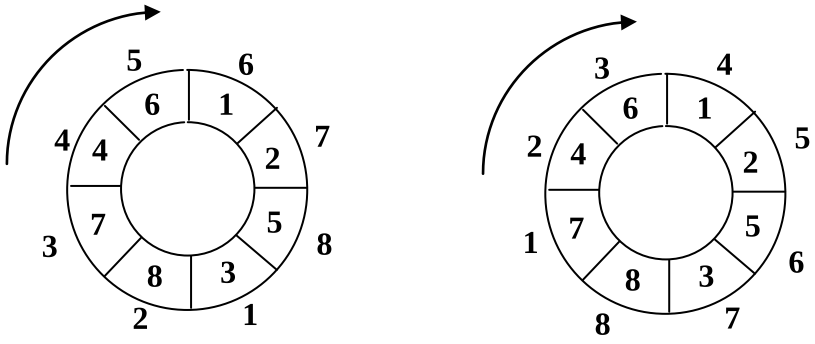


Рис. 8

Теперь пронумеруем последовательно в том же направлении клетки нашего поля. Начиная с любой произвольной клетки.



а)
б)

Рис. 9

Начальной клеткой в случае Рис.9 а) мы выбрали клетку, в которой стоит число **3**. Пронумеровав клетки замечаем, что число **4** стоит в клетке, порядковый номер которой равен четырём.

Во втором случае Рис. 9 б) начальной клеткой была клетка с числом **7**. В этом случае клетка с числом **8** получила порядковый номер равный **8**.

Докажем следствие 1.

Пусть клетка, где стоит число **1**, имеет порядковый номер X. Клетка с числом **2** будет иметь порядковый номер X**+1.** Клетка с числом **3** - (X**+3**). Клетка с числом **4** - (X**+6**) и т. д. Клетка с числом n будет иметь какой-то порядковый номер t. Порядковый номер клетки всегда $\leq P$, т.е. $t \leq P$. Если число $t > P$, то мы должны записать порядковый номер равный остатку от деления числа t на P, Какова общая формула для вычисления t ?

Посмотрев снова на Рис.49, мы замечаем, что между числом **1** и числом n находится $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ клетка. Тогда, если начальная клетка имеет порядковый номер X, то клетка, где стоит число n, будет иметь порядковый номер $t = X + \frac{n(n-1)}{2}$.

Можем записать такое уравнение:

$$X + \frac{n(n-1)}{2} = q \cdot P + t,$$

здесь q - какое-то целое число.

Определим предельные границы числа q. Очевидно, что минимальное значение q **= 0.** Максимальную границу для q получаем при максимальных X и n, т. е. когда $X = n = P$. Получаем:

$$P + \frac{P(P-1)}{2} = \frac{P(P+1)}{2}.$$

Разделив это выражение на $\boldsymbol{P}$ получаем $\frac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Целая часть этого выражения и есть максимальная граница для $\boldsymbol{q}$, т.е.

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{q} \le \frac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{2}}.$$

Рассмотрим случай, когда порядковый номер клетки с числом $\boldsymbol{n}$ равен $\boldsymbol{n}$, т. е. имеем такое уравнение:

$$\boldsymbol{X}+\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{P}+\boldsymbol{n},$$

или преобразовав его, получаем уравнение:

$$\boldsymbol{n}^2-3\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{Pq}=\mathbf{0}. \qquad (4)$$

Это квадратное уранение, да ещё с тремя неизвестными $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{q}$. Причём все они должны быть целыми числами. Такие уравнения называются диофантовыми. По имени античного математика Диофанта. Существуют методы исследования таких уравнении, но это выходит за рамки нашей книги, поэтому мы изберём другой путь для доказательства Следствия 1.

Сначала решим такую задачу.

Предположил, что у нас есть замкнутое клеточное поле, заполненное по правилам нашего алгоритма. Например поле, как на Рис.50. Выясним, существуют ли в этой расстановке чисел два числа $\boldsymbol{n}$ и ($\boldsymbol{n}$ + $\boldsymbol{k}$), удалённые друг от друга на ($\boldsymbol{k}$ - **1**) клетку. Т.е. если двигаться по часовой стрелке (для заполнения замкнутого поля договоримся всегда выбирать это направление) от числа $\boldsymbol{n}$ к числу ($\boldsymbol{n}$ + $\boldsymbol{k}$), то мы насчитаем между ними ($\boldsymbol{k}$ - **1**) клетку. Точно такое же расстояние (количество чисел) числа $\boldsymbol{n}$ и ($\boldsymbol{n}$ + $\boldsymbol{k}$) меют в натуральном ряде чисел.

Предположим, что у нас есть достаточно длинное клеточное поле. Поставим в первую его клетку число $\boldsymbol{n}$ и, используя алгоритм упаковки (АУ), впишем в это поле числа ($\boldsymbol{n}$ + **1**), ($\boldsymbol{n}$ + **2**), ... , ($\boldsymbol{n}$ + $\boldsymbol{k}$).

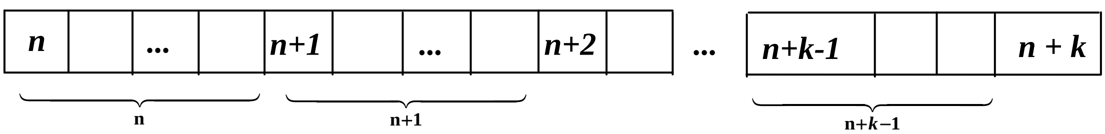


Рис. 10

Вычислим, используя формулу для суммы арифметической прогрессии, сколько клеток имеется в этом поле до клетки с числом ($\boldsymbol{n}$ + $\boldsymbol{k}$).

$$\frac{n+(n+k-1)}{2}k=\frac{(2n+k-1)k}{2}.$$

Тогда очевидно, что между клеткой с числом $\boldsymbol{n}$ и клеткой с числом ($\boldsymbol{n}$ + $\boldsymbol{k}$) имеется $\frac{(2n+k-1)k}{2}-1$ клетка. Вычтем из этого выражения число ($\boldsymbol{k}$ - **1**), получим:

$$\frac{k(2n+k-3)}{2}. \qquad (5)$$

При каких $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{n}$ выражение (5) будет кратно периоду $\boldsymbol{P}$ нашего замкнутого поля? Сразу заметим, что при $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{\kappa}$=**1** выражение (5) равно нулю, т. е. является кратным для любого периода $\boldsymbol{P}$. Т. е. числа $\boldsymbol{n}$ = **1** и $\boldsymbol{n}$+$\boldsymbol{\kappa}$=**2** стоят в нашем поле точно также как они стоят в натуральном ряде чисел. И это всегда так согласно (АУ). Существуют ли другие числа?

Число $n<P$, число $n+k\le P$.Очевидно, что $k<P$. Перепишем выражение (5) таким образом:

$$\frac{k(n+(n+k)-3)}{2}.$$

Тогда справедливо такое неравенство:

$$\frac{k(n+(n+k)-3)}{2}<\frac{P(2P-3)}{2}<P^2.$$

Поделив каждую часть этого неравенства на $\boldsymbol{P}$ получаем:

$$\frac{k(n+(n+k)-3)}{2P}<\frac{2P-3}{2}<P.$$

А это значит, что выражение (5) ни при каких $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ не может быть кратно $\boldsymbol{P}$. За исключением случая $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{\kappa}$=**1.** Следовательно и чисел $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\kappa}$**,** удалённых друг от друга на расстояние ($\boldsymbol{k}$ - **1**) клетка, в нашей расстановке не существует.

Теперь вернёмся к доказательству следствия 1.

Пойдём обратным путём. Пусть клетка с числом $\boldsymbol{n}$ имеет порядковый номер $\boldsymbol{n}$. Отталкиваясь от этого номера пронумеруем остальные клетки. Идя по часовой стрелке от номера $\boldsymbol{n}$ будем присваивать номера ($\boldsymbol{n}$+**1**), (***n***+**2**), ... ,***P,*** а идя против часовой стрелки - (***n***-**1**), (***n***-**2**), ... ,**1** .Т. е. всегда будем иметь клетку с каким-то числом, у которой порядковый номер **1**.

Пример: ***n*** =**3**, ***P*** = **8** .

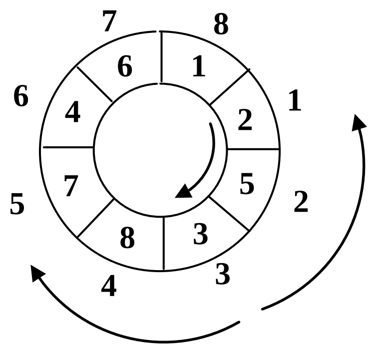


Рис. 11

Т. е., начиная нумерацию с клетки с числом **2,** получим картину, как на Рис.11, где клетка с числом **3** имеет порядковый номер **3**.

Может ли быть такая ситуация? Клетка с числом ***n*** и клетка с числом (***n*** + ***k***) имеют порядковые номера ***n*** и (***n*** + ***k***) соответственно. Только, что мы доказали, что этого быть не может, за исключением, когда нумерация клеток начинается с клетки с числом **1.** В этом случае клеткам с числами **1** и **2** будут присвоены их собственные порядковые номера. Т. о., для любого ***n*** всегда найдётся клетка с числом ***m***, такая, что начиная с этой клетки нумерацию, получим для клетки с числом ***n*** порядковый номер ***n***.

Однако заметим, что у нас различных чисел ***n***=***P***, но клеток с числом ***m*** мы получили ***P***-**1**, т.к. в двух случаях при ***n*** = **1** и ***n***=**2** получаем одну и туже нумерацию клеток нашего поля.

Иначе говоря, Следствие 1 имеет при каком-то ***m*** исключение, т. е. имеется такая нумерация клеток, что ни одна клетка не имеет порядкового номера, равного числу, которое стоит в этой клетке.

Действительно: при $\boldsymbol{X = \frac{P}{2} + 1}$, $\boldsymbol{q = \frac{P}{2}}$ получаем такие решения уравнения (4):

$$\boldsymbol{n_1 = P + 1; \quad n_2 = -P + 2.}$$

Но $\boldsymbol{1 \le n \le P}$, т. е. ни одно решение нас не удовлетворяет.
Следствие 1 доказано.

Следствие 2.

Сумма чисел, стоящих в клетках, разность порядковых номеров которых равна $\boldsymbol{\frac{P}{2}}$, постоянна и равна ***P***+**1**.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать это следствие. Наше доказательство мы покажем чуть позже, а сейчас рассмотрим клеточные поля, имеющие период $\boldsymbol{P} = \mathbf{2}^{2k}$. Такие поля можно представлять в виде квадратов.

Пример: $\boldsymbol{P} = \mathbf{2}^{k}$, $\boldsymbol{k}$=**4**.

Рис. 12

Заполнять числами такие поля используя (АУ) будем построчно слева-направо и от строки к строке переходя сверху вниз. Договоримся считать также, что за последней правой нижней клеткой идет следом левая верхняя, т.е. наше квадратное поле будем считать тоже замкнутым.

Пронумеруем наше поле от **1** до $\boldsymbol{P}$, начиная с любой клетки.

Пример: $\frac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{2}} = \mathbf{8}$.

12	**13**	**14**	**15**
16	**1**	**2**	**3**
4	**5**	**6**	**7**
8	**9**	**10**	**11**

Рис. 13

Заметим, что клетки, разность порядковых номеров которых равна $\frac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{2}} = \mathbf{8}$, стоят в одном и том же столбце. Например **5**-ая и **13**-ая клетка находятся во втором столбце. Очевидно, что как бы мы не смещали нумерацию клеток, это всегда будет так.

Т.о., заполнив такое поле по правилам (АУ) мы получим квадрат, сумма чисел по столбцам у которого всегда будет постоянной согласно следствия 2.

Пример:

5	14	8	10
13	6	1	2
12	3	9	7
4	11	16	15

Рис. 14

При определённой сноровке, меняя местами числа, стоящие в стобцах, можно получить магический квадрат.

Пример:

5	14	8	10
13	6	1	2
12	3	9	7
4	11	16	15

5	14	8	7
13	6	16	2
4	11	9	10
12	3	1	15

5	14	8	7
13	3	16	2
4	11	9	10
12	6	1	15

5	14	8	7
13	3	16	2
12	6	1	15
4	11	9	10

4	14	9	7
13	3	16	2
12	6	1	15
5	11	8	10

12	14	1	7
13	3	16	2
4	6	9	15
5	11	8	10

Магический квадрат

Рис. 15

Вся работа передана в РАН