Франц Герман
(franz.h-n@yandex.ru)

Представление групп 12-го порядка минимальными подстановками

Всего существует пять групп 12-го порядка. В книге О. Ю. Шмидта подробно рассмотрены все эти группы и поэлементно сведены в таблицу.

	a_{12}	a_6	a_4	a_3	a_2
G_1	4	2	2	2	1
G_2	0	6	0	2	3
G_3	0	2	0	2	7
G_4	0	2	6	2	1
G_5	0	0	0	8	3

Рис. 1

Здесь через a_i – обозначено количество элементов группы i-го порядка.

Группа G_1 – циклическая, поэтому её легко представить своим образующим элементом, порядок которого равен 12-ти.

Все остальные элементы будут являться степенями образующего элемента. Очевидно, что минимальное число элементов в подстановке, имеющей порядок 12, равно семи.

Пример: $a = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2651743 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 6 \quad 4)\cdot(3 \quad 5 \quad 7)$,

т. к. порядок подстановки равен наименьшему общему кратному порядков независимых циклов подстановки.

Группа G_5 может быть представлена подстановками из 4-х элементов (пример можно найти в книге О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп»).

$$\begin{array}{lll} a_1 = (1)(2)(3)(4), & a_2 = (1)(2\,3\,4), & a_3 = (1)(2\,4\,3), \\ a_4 = (3)(1\,4\,2), & a_5 = (4)(1\,3\,2), & a_6 = (2)(1\,4\,3), \\ a_7 = (4)(1\,2\,3), & a_8 = (3)(1\,2\,4), & a_9 = (2)(1\,3\,4), \\ a_{10} = (1\,3)(4\,2) & a_{11} = (1\,2)(3\,4) & a_{12} = (1\,4)(2\,3) \end{array}$$

Очевидно, что группы G_2, G_3, G_4, невозможно представить подстановками из 4-х элементов, т. к. в каждой из этих групп присутствуют элементы 6-го порядка, которые невозможно представить такими подстановками.

Рассмотрим, ожно ли представить группы G_2, G_3, G_4 подстановками из 5-ти элементов.

Начнём с группы G_2. Она состоит из 6-ти элементов шестого порядка, двух элементов третьего порядка и трёх элементов второго порядка.

Среди подстановок из 5-ти элементов существуют подстановки 6-го порядка, которые имеют вид: $a = (a_1\, a_2)(a_3\, a_4\, a_5)$, где $a_i \in \{1,2,3,4,5\}$. Квадрат такой подстановки будет иметь вид:

$$a^2 = (a_1)(a_2)(a_3\, a_4\, a_5)$$

Обозначим элементы шестого порядка через e_i и d_i:

$$e_1 \qquad e_2 \qquad e_3 \qquad d_1 \qquad d_2 \qquad d_3.$$

Т. к. элементов третьего порядка всего два, то должны выполняться равенства:

$$f_1 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2; \qquad f_2 = d_1^2 = d_2^2 = d_3^2$$

А т. к. элементов второго порядка три, получим такие формулы:

$$h_1 = e_1^3 = d_1^3; \qquad h_2 = e_2^3 = d_2^3 \qquad h_3 = e_3^3 = d_3^3$$

Рассмотрим подстановки $a = (a_1)(a_2)(a_3\, a_4\, a_5)$ и $b = (b_1)(b_2)(b_3\, b_4\, b_5)$.

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Пусть $a^2 = b^2$, т. е. $a^2 = (a_1)(a_2)(a_3\, a_4\, a_5)$, $b^2 = (b_1)(b_2)(b_3\, b_4\, b_5)$.

Цикл третьего порядка при возведении в квадрат подстановки переходит в цикл третьего порядка, поэтому из равенства $a^2 = b^2$ следует, что $a = b$.

Если бы $a_1 \neq b_1$ или $a_1 \neq b_2$, то и $a^2 \neq b^2$ в силу того, что элементарные циклы (первого порядка (a_i)) сохраняются при возведении в квадрат, в разложении a^2 имелось бы по крайней мере три элементарных цикла (из того, что $a^2 = b^2$), но этого быть не может. Следовательно, среди подстановок из 5-ти элементов не существует даже хотя бы двух подстановок 6-го порядка, квадраты которых были бы равны между собой. Из этого следует, что группу G_2 невозможно представить подстановками из 5-ти элементов.

Группа G_3 может быть представлена подстановками из 5-ти элементов.

$e_1 = (2\,1)(4\,3\,5)$, $\quad e_1 = (2\,1)(4\,5\,3)$ - элементы 6 – го порядка.
$f_1 = (1)(2)(3\,5\,4)$, $\quad f_2 = (1)(2)(3\,4\,5)$ - элементы 3 – го порядка.
$h_1 = (1)(2)(3)(5\,4)$, $\quad h_2 = (1)(2)(4\,3)(5)$, $\quad h_3 = (1)(2)(3\,5)(4)$, $\quad h_4 = (1\,2)(4)(3\,5)$,
$h_5 = (1\,2)(3)(4)(5)$, $\quad h_6 = (1\,2)(3)(5\,4)$, $\quad h_7 = (1\,2)(4\,3)(5)$ - элементы 2-го порядка.

Теперь снова вернёмся к группе G_2 и рассмотрим подстановки шестого порядка из 6-ти элементов.

Подстановки шестого порядка из 6-ти элементов могут быть двух видов:

1. $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6)$
2. $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6)$.

Рассмотрение подстановок вида 1 сводится к предыдущему рассмотрению, как в случае подстановок из 5-ти элементов.

Остаётся рассмотреть подстановки вида 2.

Рассмотрим две такие подстановки:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix}$$

Найдём квадрат подстановки $\boldsymbol{e}_1$.

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

Зная $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_1^2$ попробуем найти подстановку шестого порядка $\boldsymbol{e}_2$, для которой $\boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_1^2$ и $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{e}_2$.

Предположим, что в подстановке $\boldsymbol{e}_2$ элемент $\boldsymbol{a}_1$ переходит в элемент $\boldsymbol{a}_2$, тогда элемент $\boldsymbol{a}_2$ будет переходить в элемент $\boldsymbol{a}_5$, т. к. в подстановке $\boldsymbol{e}_1^2$ элемент $\boldsymbol{a}_1$ переходит в элемент $\boldsymbol{a}_5$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_5 & & \cdot & \cdot\ \boldsymbol{a}_6 & \end{pmatrix}$$

Если элемент $\boldsymbol{a}_2$ переходит в элемент $\boldsymbol{a}_5$, тогда элемент $\boldsymbol{a}_5$ переходит в элемент $\boldsymbol{a}_6$, т. к. в подстановке $\boldsymbol{e}_1^2$ элемент $\boldsymbol{a}_2$ переходит в элемент $\boldsymbol{a}_6$.

Получаем:

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

Аналогично будем строить и подстановку $\boldsymbol{e}_3$, для которой также $\boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_1^2$, $\boldsymbol{e}_3 \neq \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \neq \boldsymbol{e}_2$.

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 \\ \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix}$$

Это тоже подстановка шестого порядка.

Возможно ли ещё построить подстановку 6-го порядка, квадрат которой равен был бы $\boldsymbol{e}_1^2$

$$e_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & & a_5 & & a_1 & \end{pmatrix} = (a_1\, a_3\, a_5)(a_2\, a_4\, a_6)$$

Это подстановка третьего порядка.

Теперь найдём квадрат подстановки d_1

$$d_1^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Построим подстановку d_2, такую, что $d_2 \neq d_1$ и $d_2^2 \neq d_1^2$.

$$d_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_1 & a_6 & a_3 & a_2 & a_5 \end{pmatrix}$$

Аналогично предыдущему находится и подстановка d_3, при условии, что $d_3 \neq d_2 \neq d_1$ и $d_3^2 = d_1^2$.

$$d_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_6 & a_5 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что $e_1^3 = d_1^3$, $e_2^3 = d_2^3$, $e_3^3 = d_3^3$. Действительно:

$$e_1^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad d_1^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$e_2^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_6 & a_3 & a_2 & a_5 & a_4 & a_1 \end{pmatrix} \quad d_2^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_6 & a_3 & a_2 & a_5 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$e_3^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 \end{pmatrix} \quad d_3^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли представление группы G_2 подстановками из 6-ти элементов.

Осталось рассмотреть группу G_4.

Группа G_4 среди своих элементов имеет 6 элементов 4-го порядка и всего лишь один элемент второго порядка. Т. е. среди искомых подстановок должно быть 6 подстановок 4-го порядка, квадрат которых равен между собой.

Начнём рассмотрение с подстановок из 5-ти элементов. Подстановка из 5 элементов 4-го порядка может иметь только такой вид:

$$a = (a_1)(a_2\, a_3\, a_4\, a_5)$$

Следовательно, её квадрат будет иметь вид:

$$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_5). \qquad (1)$$

Рассмотрим две подстановки 4-го порядка.

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5) \qquad \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4\ \boldsymbol{b}_5),$$

Где $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{b}_1$. Из этого условия можем заключить, что $\boldsymbol{a}^2 \neq \boldsymbol{b}^2$, т. к. $\boldsymbol{a}^2$ и $\boldsymbol{b}^2$ это подстановки второго порядка, которые должны иметь вид (1), но в случае $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$ эта подстановка должна была бы иметь циклы $(\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{b}_1)$, но тогда нарушается вид (1). Следовательно, из условия $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$ должно вытекать условие $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1$ для подстановок $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Рассмотрим возможные комбинации элементов в подстановке $\boldsymbol{a}$**.** Всего возможных сочетаний будет $\boldsymbol{C}_4^2 = \boldsymbol{6}$, а т. к. в подстановке вида (1) два цикла второго порядка, то всего будет три возожных варианта квадратов:

$$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_5)$$

$$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5)$$

$$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_5)(\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$$

Каждая из данных подстановок может быть общим квадратом только для двух подстановок. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5)$$

$$\boldsymbol{a}^2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_5)$$

Найдём $\boldsymbol{b}$ такую, что $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$.

Элемент $\boldsymbol{a}_2$ не может отображаться на элемент $\boldsymbol{a}_3$, т. к. элемент $\boldsymbol{a}_2$ отображается на элемент $\boldsymbol{a}_3$ в подстановке $\boldsymbol{a}$, а $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$. Элемент $\boldsymbol{a}_2$ не может отображаться на элемент $\boldsymbol{a}_4$, т. к. элемент $\boldsymbol{a}_2$ отображается на элемент $\boldsymbol{a}_4$ в подстановке $\boldsymbol{a}^2$. И элемент $\boldsymbol{a}_2$ не может отображаться на элемент $\boldsymbol{a}_2$, т. к. цикл первого порядка должен быть один в подстановке $\boldsymbol{a}^2$. Поэтому элемент $\boldsymbol{a}_2$ отображается на элемент $\boldsymbol{a}_5$ В подстановке $\boldsymbol{a}^2$ элемент $\boldsymbol{a}_2$ отображается на элемент $\boldsymbol{a}_4$, следовательно в подстановке $\boldsymbol{b}$ элемент $\boldsymbol{a}_5$ будет отображаться на элемент $\boldsymbol{a}_4$. В подстановке $\boldsymbol{a}^2$ элемент $\boldsymbol{a}_5$ отображается на элемент $\boldsymbol{a}_3$, следовательно в подстановке в подстановке $\boldsymbol{b}$ элемент $\boldsymbol{a}_4$ будет отображаться на элемент $\boldsymbol{a}_3$. И, аналогично рассуждая, находим, что элемент $\boldsymbol{a}_3$ отображается на элемент $\boldsymbol{a}_2$. Получаем такую подстановку $\boldsymbol{b}$**:**

$$b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_5 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} = (a_1)(a_2\ a_5\ a_4\ a_3).$$

Т. о. среди всех подстановок 4-го порядка из 5-ти элементов может быть только две подстановки, квадраты которых равны между собой. Т. е. подстановки из 5-ти элементов не подходят для нашего исследования

Перейдём к рассмотрению подстановок из 6-ти элементов.

Подстановки 4-го порядка из 6-ти элементов могут быть двух видов:

1. $a = (a_1)(a_2)(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$

2. $a = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$

Квадрат же обеих подстановок может иметь только такой вид:

$$a^2 = (a_1)(a_2)(a_3\ a_5)(a_4\ a_6).$$

Сразу можем сказать, что для подстановок $a \neq b$, где $a = (a_1)(a_2)(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$ и $b = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$ будем иметь $a^2 = b^2$.

Ранее было показано, что подстановки $(a_1)(a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$ и $(a_1)(a_2\ a_5\ a_4\ a_3)$ имеют одинаковый квадрат. Следовательно и подстановки $(a_6)(a_1)(a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$ и $(a_6)(a_1)(a_2\ a_5\ a_4\ a_3)$ будут иметь одинаковый квадрат подстановки. Такой же квадрат, по аналогии с предыдущим, будут иметь подстановки $(a_6\ a_1)(a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$ и $(a_6\ a_1)(a_2\ a_5\ a_4\ a_3)$.

Т. о. для подстановок из 6-ти элементов будем иметь уже 4 различных подстановки, квадраты которых равны между собой.

Если в подстановках $a = (a_1)(a_2)(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$ и $b = (b_1)(b_2)(b_3\ b_4\ b_5\ b_6)$ хотя бы один из элементов a_1 или a_2 не равен ни одному из элементов b_1 или b_2, то $a^2 \neq b^2$, как было показано ранее.

Аналогично и для подстановок $a = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$ и $b = (b_1\ b_2)(b_3\ b_4\ b_5\ b_6)$, где хотя бы $a_1 \neq b_1$, не могут иметь одинаковых квадратов.

Окончательно, т. о. получаем, что среди всех подстановок 4-го порядка из 6-ти элементов существует не более чем 4-х подстановок, квадрат которых одинаков. Напомним, что нам требуется 6 подстановок 4-го порядка, квадрат которых одинаков, чтобы построить представление группы G_4.

Рассмотрим подстановки 4-го порядка из из 7-ми элементов. Они могут быть двух видов:

1. $a = (a_1)(a_2\ a_3)(a_4\ a_5\ a_6\ a_7)$

2. $a = (a_1)(a_2)(a_3)(a_4\ a_5\ a_6\ a_7)$

Квадрат обеих видов подстановок даёт подстановку одного вида:

$$a^2 = (a_1)(a_2)(a_3)(a_4\ a_6)(a_5\ a_7)$$

И поэтому все рассуждения сводятся фактически к случаю подстановок из 6-ти элементов. Т. е. такие подстановки нам тоже не подходят.

Рассмотрим подстановки 4-го порядка из 8-ми элементов. Они могут быть трёх видов:

1. $a = (a_1)(a_2)(a_3)(a_4)(a_5\ a_6\ a_7\ a_8)$

2. $a = (a_1)(a_2)(a_3\ a_4)(a_5\ a_6\ a_7\ a_8)$

3. $a = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4)(a_5\ a_6\ a_7\ a_8)$.

Квадраты таких подстановок имеют одинаковый вид:

$$a^2 = (a_1)(a_2)(a_3)(a_4)(a_5\ a_7)(a_6\ a_8)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем вывод, что среди всех подстановок 4-го порядка из 8-ми элементов обязательно найдётся 6 подстановок, квадраты которых равны между собой.

Т. е., чтобы построить группу G_4 необходимо взять подстановки из 8-ми и более элементов.

Сведём полученные результаты в таблицу, где каждой группе 12-го порядка поставлено в соответствие минимальное число элементов в подстановке, при помощи которых можно представить данную группу.

G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
7	**6**	**5**	**8**	**4**

На этом наше исследование можно считать законченным.

Приложение 1

Разложение группы G_3 12-го порядка в прямое произведение своих подгрупп.

Дело в том, что по известной автору литературе (см. *Приложение 2*) эта группа допускает единственное разложение в прямое произведение своих подгрупп. На самом деле это не так.

Это мы и хотим здесь показать.

Известно, группа $\boldsymbol{G_3}$ 12-порядка неабелева и распадается в прямое произведение своих подгрупп (см. например, О. Ю. Шмидт, «Абстрактная теория групп»)

$$\boldsymbol{G_3} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{D_1}, \tag{1}$$

Где $\boldsymbol{D_1} = \{\boldsymbol{D_1}\}$ - группа второго порядка, а $\boldsymbol{S}$ неабелева группа шестого порядка, определяемая равенством:

$$\boldsymbol{DTD} = \boldsymbol{T}^2. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{D}$ – элемент второго порядка, $\boldsymbol{T}$ – элемент третьего порядка.

Определим все элементы $\boldsymbol{S}$, используя равенство (2):

$$\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{D}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{TD} \qquad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{DT}, \qquad \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{T}^2.$$

Построим таблицу Кэли для $\boldsymbol{S}$.

	1	***D***	***TD***	***DT***	***T***	***T²***
1	1	*D*	*TD*	*DT*	*T*	T^2
D	*D*	1	T^2	*T*	*DT*	*TD*
TD	*TD*	*T*	1	T^2	*D*	*DT*
DT	*DT*	T^2	*T*	1	*TD*	*D*
T	*T*	*TD*	*DT*	*D*	T^2	1
T²	T^2	*DT*	*D*	*TD*	1	*T*

Группа $\boldsymbol{G_3}$ определяется равенствами:

$$\boldsymbol{DTD} = \boldsymbol{T}^2, \quad \boldsymbol{DD_1} = \boldsymbol{D_1 D}, \quad \boldsymbol{TD_1} = \boldsymbol{D_1 T}. \tag{3}$$

Найдём элементы группы $\boldsymbol{G_3}$, как прямое произведение $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{D_1}$.

$$a_0 = 1,\quad a_1 = D,\quad a_2 = TD\quad a_3 = DT,\quad a_4 = T\quad a_5 = T^2,$$
$$a_6 = D_1,\quad a_7 = TD_1,\quad a_8 = T^2D_1\quad a_9 = DD_1,\quad a_{10} = TDD_1\quad a_{11} = DTD_1.$$

С другой стороны равенство $TD_1 = D_1T$ среди равенств (3), является определяющим для группы 6-го порядка, но абелевой, где определяющий элемент группы будет $\{TD_1\}$.

Обозначим полученную абелеву группу шестого порядка через $S_1 = \{TD_1\}$, тогда G_3 разложима в прямое произведение групп S_1 и D, где $D = \{D\}$.

$$G_3 = S_1 \cdot D$$

Найдём все элементы группы S_1, как степени элемента TD_1, помня что $TD_1 = D_1T$.

$$(TD_1)^1 = TD_1,\quad (TD_1)^2 = (TD_1)(TD_1) = T^2,\quad (TD_1)^3 = T^2 \cdot TD_1 = D_1,$$
$$(TD_1)^4 = D_1 \cdot TD_1 = T,\quad (TD_1)^5 = T \cdot TD_1 = T^2D_1,\quad (TD_1)^6 = T^2D_1 \cdot TD_1 = 1.$$

Теперь снова найдём элементы группы G_3, как прямое произведение групп S_1 и D.

$a_0 = 1$, $a_1 = T^2D$, $a_2 = T$ $a_3 = D_1$, $a_4 = T^2$ $a_5 = TD_1$,
$a_6 = D$, $a_7 = T^2D_1 \cdot D = T^2DD_1 = DTD_1$, $a_8 = TD$, $a_9 = D_1D$,
$a_{10} = T^2D = DT$, $a_{11} = TD_1D$.

Здесь использовались равенства (3), определяющие группу G_3. Т. е., действительно получаем: $S \cdot D_1 = S_1 \cdot D = G_3$

Построим таблицу Кэли для G_3.

	D	TD	DT	1	T	T^2	D_1	TD_1	T^2D_1	DD_1	TDD_1	DTD_1
D	1	T^2	T	D	DT	TD	DD_1	DTD_1	TDD_1	D_1	T^2D_1	TD_1
TD	T	1	T^2	TD	D	DT	TDD_1	DD_1	DTD_1	TD_1	D_1	T^2D_1
DT	T^2	T	1	DT	TD	D	DTD_1	TDD_1	DD_1	T^2D_1	TD_1	D_1
1	D	TD	DT	1	T	T^2	D_1	TD_1	T^2D_1	DD_1	TDD_1	DTD_1
T	TD	DT	D	T	T^2	1	TD_1	T^2D_1	D_1	TDD_1	DTD_1	DD_1
T^2	DT	D	TD	T^2	1	T	T^2D_1	D_1	TD_1	DTD_1	DD_1	TDD_1
D_1	DD_1	TDD_1	DTD_1	D_1	TD_1	T^2D_1	1	T	T^2	D	TD	DT
TD_1	TDD_1	DTD_1	DD_1	TD_1	T^2D_1	D_1	T	T^2	1	TD	DT	D
T^2D_1	DTD_1	DD_1	TDD_1	T^2D_1	D_1	TD_1	T^2	1	T	DT	D	TD
DD_1	D_1	T^2D_1	TD_1	DD_1	DTD_1	TDD_1	D	DT	TD	1	T^2	T
TDD_1	TD_1	D_1	T^2D_1	TDD_1	DD_1	DTD_1	TD	D	DT	T	1	T^2
DTD_1	T^2D_1	TD_1	D_1	DTD_1	TDD_1	DD_1	DT	TD	D	T^2	T	1

Кстати заметим, что группа $\boldsymbol{G_3}$ имеет ещё одну подгруппу шестого порядка, тоже неабелеву, состоящую из элементов: $\boldsymbol{1, T, T^2, DD_1, TDD_1, DTD_1}$.

Здесь $\boldsymbol{DTD_1 = T^2 \cdot DD_1}$. Элемент DD_1 имеет порядок 2. Обозначим его $\boldsymbol{D_2 = DD_1}$. Тогда вторая группа, неабелева группа шестого порядка будет иметь определяющее равенство:

$$\boldsymbol{D_2TD_2 = T^2}.$$

Если в группе $\boldsymbol{G_3}$ для элементов второго порядка ввести обозначение $\boldsymbol{D_1}$ и $\boldsymbol{D_2}$ то определяющие уравнения группы $\boldsymbol{G_3}$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{D_1D_2 = D_2D_1}, \qquad \boldsymbol{D_iTD_i = T^2}.$$

Литература

О. Ю. Шмидт, «Абстрактная теория групп»

П. С. Александров, «Введение в теорию групп»

А. Г. Курош, «Теория групп»

А. Г. Курош, «Курс высшей алгебры»

М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, «Основы теории групп»

Б. Л. Ван дер Варден. «Алгебра»

Е. Вигнер, «Теория групп и ее приложения к квантомеханической теории атомных спектров».

Г. Вейль, «Теория групп и квантовая механика»