Франц Герман

Поэзия разума

LAP LAMBERT
Academic Publishing

Франц Герман

Поэзия разума

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

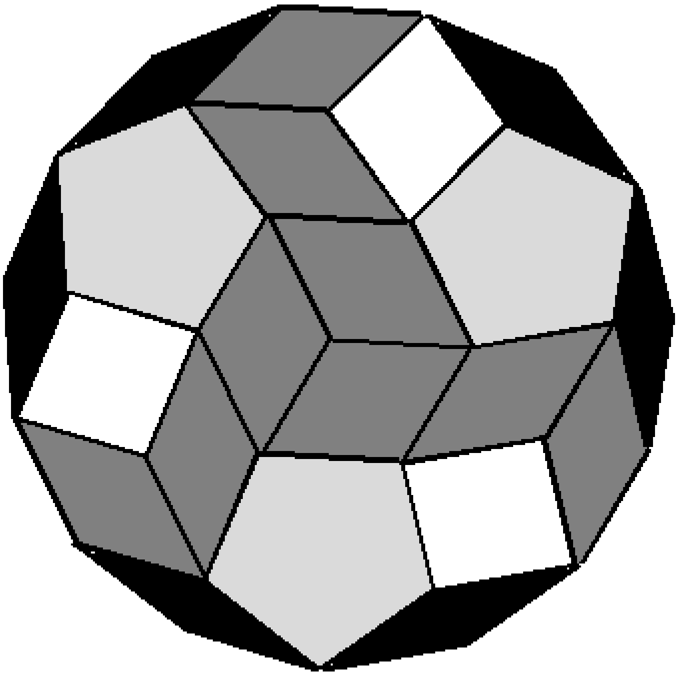
Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-79331-8

ФРАНЦ ГЕРМАН

ПОЭЗИЯ РАЗУМА



«В конце концов, что такое математика, как
не систематические попытки найти всё лучшие и
лучшие ответы на те головоломки, которые
ставит перед нами природа.»
([4], стр. 8)

Мартин Гарднер

Посвящаю выдающемуся популяризатору математики

Мартину Гарднеру

Содержание

Предисловие

Дорогой читатель!

Перед тобой небольшая книга о математике. Автор относит эту книгу к разряду научно-популярной и занимательной математики, хотя сам жанр «Занимательная математика», как нам кажется, давно уже требует официальной дифференциации, т. е. разделения на более узкие разделы. Например: «Занимательные математические игры», «Математические софизмы», «Математические головоломки» и т. д. В любой библиотеке, если посмотреть каталог, то можно найти раздел «Математика».В разделе "Математика" есть множество подразделов, например: "Геометрия", "Алгебра", и т.д. В, свою очередь каждый подраздел содержит ещё более узкие направления. "Занимательная математика" также является разделом в общем математическом каталоге, но не имеющим, пока во всяком случае, своих подразделов. Видимо, когда-нибудь такое деление произойдёт. По крайней мере, автору очень хочется на это надеяться.

Книг по занимательной математике, а также научно-популярных книг по математике написано превеликое множество. Именно поэтому взять на себя смелость написать ещё одну книгу такого жанра - для автора большой и очень ответственный шаг. Автор много лет колебался и задавал себе один и тот же вечный вопрос: нужна ли ещё одна такая книга?

В конце концов, промучившись почти десять лет, автор принял решение взяться за перо, мотивируя этот шаг тем, что раз развитие математики вечно, то и тема научно-популярной и занимательной математики, как её подраздела, всегда будет актуальна.

Настоящий сборник содержет 8 глав. Все они не связаны между собой. Читатель может изучать эту книгу как с конца, так и с начала. Сразу скажем, что книга не проста и чтобы понять её полностью необхо димы знания в размере средней школы. Кроме этого, конечно же, тре-буются терпение и настойчивость. Каждая проблема, рассматриваемая в сборнике, снабжена решением, известным на сегодняшний момент автору. Кроме того, большинство глав имеют темы, ещё не исследованные, а также гипотезы, которые надо доказать или опровергнуть. Читатель, который будет внимательно изучать эту книгу, получит много вопросов, которые могут стать темами его самостоятельных исследований.

Автор адресует эту книгу в первую очередь ученикам старших клас-сов, тем кто интересуется математикой, также студентам-математикам университетов и всем любителям и поклонникам этой удивительной на-уки. Кроме того, как нам кажется, такая книга будет интересна и по-лезна учителям и преподавателям математики, которые ведут математические кружки и факультативные занятия. Тема каждой главы может быть отдельной темой целого направления факультативной работы математического кружка.

Автор отбирал проблемы для этой книги, руководствуясь исключительно "принципом красоты": гипотеза должна быть верной, если она красива. Зачастую этот принцип был ведущей нитью к поиску решений многих математических гипотез. Как показывает история науки, этим принципом пользовались многие великие математики. Решать же насколько красива та или иная задача этого сборника предстоит конечно же читателю.

Автор будет очень счастлив, если хотя бы одна задача затронет математическую душу хотя бы одного читателя.

Автор искренне признателен канадскому математику Россу Хонсбергеру из университета Ватерлоо за любезно предоставленную возможность использовать его доказательство при выгоде основной формулы во второй главе.

Все эпиграфы к главам взяты из книг Мартина Гарднера.

1995, Саксония, Косвиг.

Глава 1

Ромбическая мозаика правильных многоугольников

«Насколько мне известно, новых типов
мозаик больше никто не открывал,...»
([1], стр. 203)

Темой нашего первого исследования будут правильные многоугольники.

Известно, что любой правильный $\boldsymbol{n}$ - угольник с чётным числом сторон, т.е. квадрат, шестиугольник и т.д., можно замостить (т.е. выложить на его площади мозаику) $Z_ч$ ромбами (см., например, книгу [7]), где

$$Z_ч = \frac{(n-1)^2 - 1}{8}. \quad (1)$$

Например:

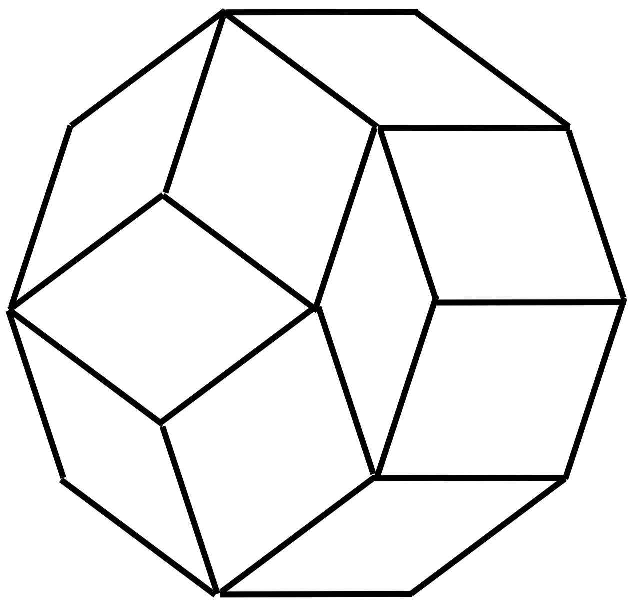


Рис. 1

Здесь $\boldsymbol{n}$ = 10 и $Z_ч = \frac{(10-1)^2 - 1}{8}$ т. е. 10 ромбов умещаются на площади правильного 10-угольника.

Заметим, что формула (1) даёт число ромбов в независимости от их видов. А мы видим, что на площади 10 - тиугольника разместились ромбы двух видов.

Познакомившись с этим результатом пытливый читатель может воскликнуть: "здесь какая-то несправедливость. Почему такая мозаика возможна только для чётных многоугольников? А как же быть с нечётными?" Такие или примерно такие же вопросы возникли и у автора, когда он увидел впервые формулу (1).

Именно это и послужило толчком более внимательно посмотреть на правильные многоугольники с нечётным числом сторон. Исследованием этих многоугольников мы теперь и займёмся.

Начнём с самого простейшего n - угольника, т.е. для $\boldsymbol{n}=3$ (Рис. 2).

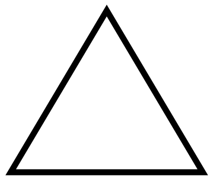


Рис. 2

По существу, это ни что иное как половинка ромба с углами 60 и 120° (Рис. 3).

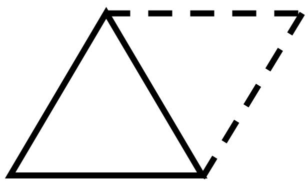


Рис. 3

Сразу возникает гипотеза: а может быть нечётные многоугольники можно замостить ромбами с точностью до половинки ромба? Рассмотрим правильный пятиугольник.

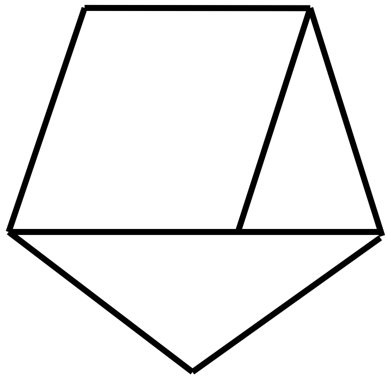


Рис. 4

Как видим, его можно замостить одним целым ромбом и двумя половинками.

Правильный семиугольник имеет мозаику из трёх ромбов и трёх половинок ромбов (Рис. 5).

Заметим, что пятиугольник имеет ромбы и половинки ромбов, принадлежащие к двум тиам ромбов. Семиугольник имеет уже три различных типа ромбов.

Попробуем найти формулу для общего числа ромбов и половинок ромбов для нечётных многоугольников. Мы помним, что формула (1) даёт общее число ромбов в независимости от типов ромбов.

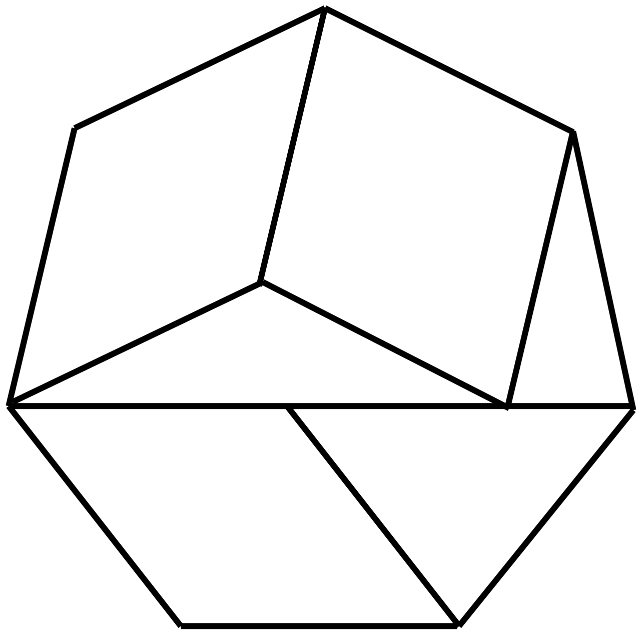


Рис. 5

Введём обозначения. Будем обозначать через r_i сумму ромбов типа i . Понятно, что для разных многоугольников r_i будут различны, т.е. например r_i для правильного треугольника не равна r_i для правильного пятиугольника и т.д. Общее число ромбов нечётного многоугольника обозначим через. Z_H , тогда, на основе прямых построений, будем иметь:

$$Z_H(3) = r_1 = \frac{1}{2};$$

$$Z_H(5) = r_1 + r_2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2;$$

$$Z_H(7) = r_1 + r_2 + r_3 = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2};$$

$$Z_H(9) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8\,;$$

и т. д..

Т.е. напрашивается общая формула:

$$Z_H = \frac{(n-1)^2}{8} \tag{2}$$

Докажем, что это действительно так.

Пусть дан правильный n-угольник, где n - нечётное. Будем последовательно вписывать ромбы, как это показано на Рис. 6. Пусть рассматриваемая часть n-угольника состоит из K сторон.

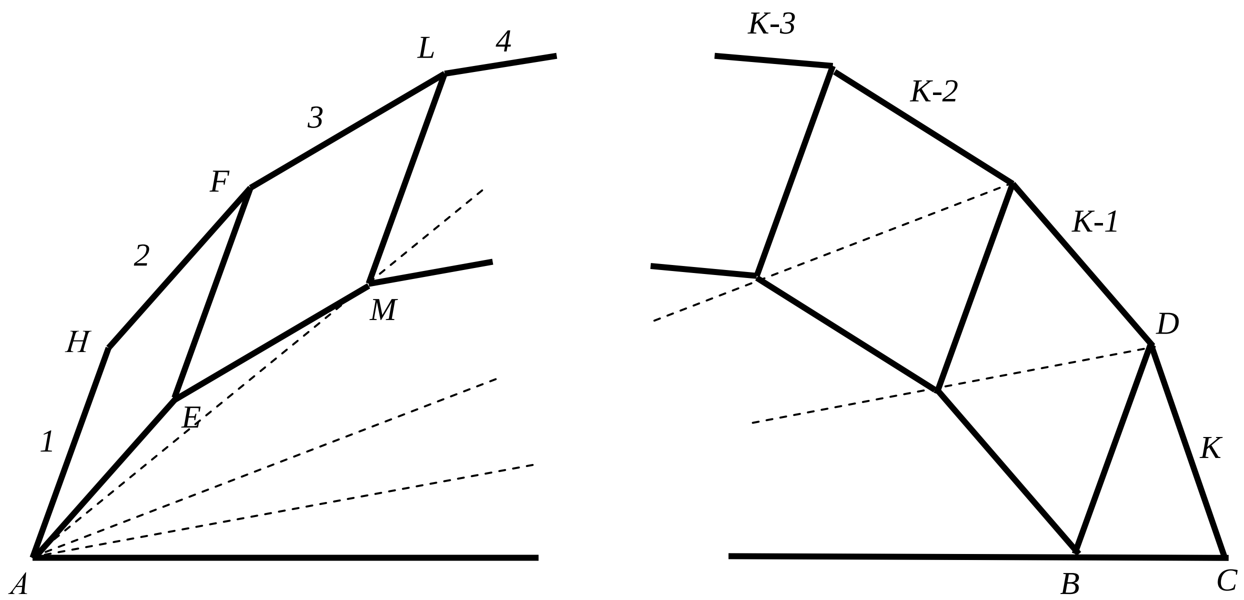


Рис.6

I

Рассмотрим первый вписанный ромб $AHFE$. Угол $\angle AHF = \alpha_1 = \pi - \frac{2\pi}{n}$, т.к. мы рассматриваем правильный n-угольник. Тогда смежный с ним угол этого ромба будет равен $\beta_1 = \frac{2\pi}{n}$. Соответственно будем обозначать для каждой стороны i ($i \geq 1$) нашего правильного n-угольника, прилегающие к ней смежные углы ромбов через α_{i-1} и β_{i-1}.

Определим углы ромба $EFLM$.