Франц Герман

Теория планарных пропорций

franz.h-n@yandex.ru

Сам термин «Теория пропорций» известен с незапамятных времён и восходит, наверное, ещё ко временам Эвклида. Понятие «золотая пропорция» связано с делением единичного отрезка на части, когда отношение длины самого отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части отрезка к его меньшей части. В виде пропорции это можно записать таким образом:

$$\frac{1}{X} = \frac{X}{1-X}. \quad (1)$$

Данная пропорция соответствует квадратному уравнению: $X^2 + X - 1 = 0$. А положительным корнем данного уравнения является знаменитое число $\Phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034...$. Широко известны обобщения этой пропорции, которым соответствуют уравнениям: $X^{S+1} + X - 1 = 0$ и $X^{S+1} - X^S - 1 = 0$. Такие обобщения будем называть алгебраическими пропорциями.

Пропорции, которым мы посвятим наше исследование, будем называть планарными, т. к. связаны они с делением не единичного отрезка и алгебраическими пропорциями, а с делением единичного квадрата. Т. е. за числами наших пропорций будут пониматься кусочки плоскостей, площади этих кусочков.

Итак, рассмотрим квадрат, сторона которого равна единице (Рис. 1).

Существует, как минимум, два варианта в исследовании этой задачи. Первый вариант – тривиальный. Здесь мы рассматриваем деление квадрата на две части таким образом, чтобы из них можно было составить пропоцию, подобную линейной пропорции (1).

Второй вариант будем называть методом ортогональных сечений, когда внутри данного единичного квадрата берётся произвольная точка и через неё проводится два ортогональных сечения квадрата. И уже после этого рассматриваются пропорции, составленные из полученных площадей.

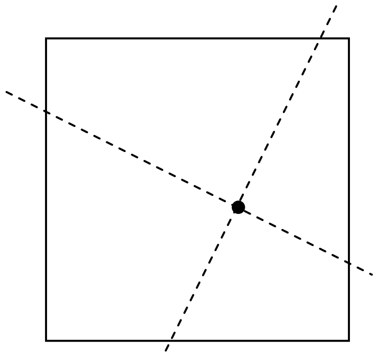


Рис. 1

Вариант 1 (тривиальный).

Рассмотрим квадрат единичной площади. Введём обозначение для площади данного квадрата $S_0 = 1$. Пусть наш квадрат разделён на две части, площади которых обозначены через S_X и S_Y.

Рассмотрим такую пропорцию:

$$\frac{S_0}{S_X} = \frac{S_X}{S_Y}. \tag{2}$$

В соответствии с нашими условиями пропорцию (2) можем записать в виде уравнения:

$$S_X^2 + S_X - 1 = 0. \tag{3}$$

А т. к. мы рассматриваем квадраты, можем записать $X^2 + Y^2 = 1$. В самом начале мы уже упоминали, что положительным корнем такого уравнения будет значение $S_X = \Phi - 1$ и тогда $X = \sqrt{\Phi - 1}$. Площадь $S_Y = 2 - \Phi$ и, соответственно, $Y = \sqrt{2 - \Phi}$.

Покажем точные построения «золотых квадратов». «Золотыми» будем называть квадраты, площади которых связаны пропорцией (2).

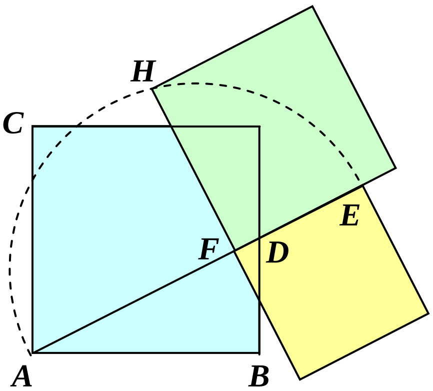


Рис. 2

На единичном отрезке $AB = 1$ построен квадрат. Точка D является серединой стороны квадрата. На продолжении отрезка AD отложим DE = BD. Тогда $AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. Построим на AE полуокружность, как на диаметре. Отложим AF = AB. Восставим в точке F перпендикуляр до пересечения с, построенной полуокружностью в точке H. Из подобных треугольников AFH и FHE можем записать $\frac{AF}{FH} = \frac{FH}{DE}$ или $FH = \sqrt{\Phi - 1} = X$. Т. о., на отрезке FH, как на стороне строим квадрат площади S_X. Отрезок $FE = \Phi - 1$. Из выражения $X^2 + Y^2 = 1$ находим: $Y = \sqrt{1 - X^2} = \sqrt{2 - \Phi}$, а с учётом, что $X^2 - X - 1 = 0$, получаем $FE = \Phi - 1 = \sqrt{2 - \Phi}$. Т. о., на стороне FE строим квадрат, площади S_Y. И в заключение этой части отметим, что $\frac{S_X}{S_Y} = \Phi$.

Очевидно, что стороны квадратов, показанные на Рис. 2, являются Пифагоровой тройкой.

В свете вышеизложенного всё построение «золотой» пропорции для единичного квадрата значительно упрощается. Сначала проводим отрезок AD. Потом из точки D, как из центра, радиусом BD находим точку O. Затем на отрезке AB, как на диаметре строим полуокружность. И из точки A, как из центра, радиусом AO строим точку C. Отрезки AC и BC являются сторонами «золотых» квадратов.

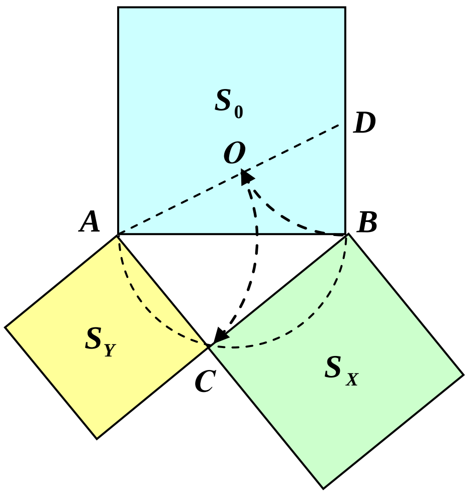


Рис. 3

Напомним, что для единичного квадрата $S_0 = S_X + S_Y$.

Вариант 2 (метод ортогональных сечений).

Пусть прямые сечения всегда параллельны сторонам данного квадрата и не зависят друг от друга. Т. е., данный квадрат поделён на четыре части горизонтальной и вертикальной прямыми (Рис.4).

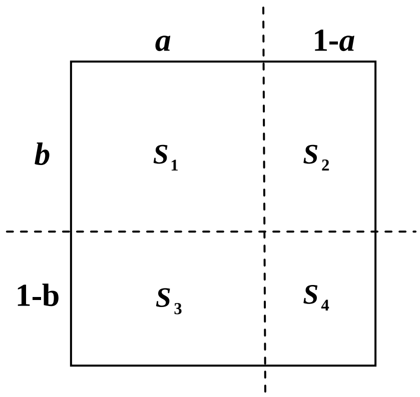


Рис. 4

Введём обозначения: $S = 1$ - площадь данного квадрата.

Значения параметров a и b расположены в интервале от нуля до единицы. В предельных случаях, когда олин из параметров равен нулю, мы получим частный случай, а именно – «золотую» пропорцию.

Составить пропорции типа (1) для нашего квадрата можно различными способами (видами). Мы рассмотрим три вида пропорций.

1). Горизонтальный
2). Вертикальный
3). Диагональный.

Надо отметить, что для каждого вида пропорций существуют ещё, так сказать, внутренние случаи (подвиды). Чтобы не путаться, для каждого подвида пропорций будум вводить специальные символьные обозначения.

1).

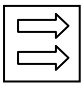
1.1 Первому горизонтальному случаю сопоставим такие пропорции: $\frac{S}{S_1} = \frac{S_1}{S_2}$ и $\frac{S}{S_3} = \frac{S_3}{S_4}$.

Подставляя в пропорции данные параметров, как на Рис. 4, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - a = a^2 b \\ 1 - a = a^2(1 - b) \end{cases}. \tag{4}$$

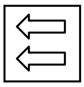
Решая систему, находим: $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \frac{1}{2}$.

Этот вид будем обозначать таким значком:



Верхняя стрелка говорит о том, что мы используем сначала верхнюю левую область квадрата S_1, затем правую верхнюю область S_2. Кроме того эти области будут рассматриваться слева-направо.

1.2 Рассмотрим ситуацию, которая в наших обозначениях имеет значок:



Такому случаю будут соответствовать пропорции: $\frac{S}{S_2} = \frac{S_2}{S_1}$ и $\frac{S}{S_4} = \frac{S_4}{S_3}$.

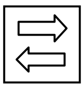
А система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = b(1-a)^2 \\ a = (1-a)^2(1-b) \end{cases} \qquad (5)$$

Такая система уравнений имеет два решения: $\begin{cases} a_1 = 2+\sqrt{3} \\ b_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} a_2 = 2-\sqrt{3} \\ b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Первое решение не подходит, т. к. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ должны быть меньше единицы.

1.3 Следующий тип горизонтальных пропорций будет иметь обозначение:



Для него имеем такие пропорции: $\frac{S}{S_1} = \frac{S_1}{S_2}$ и $\frac{S}{S_4} = \frac{S_4}{S_3}$. На основании этих пропорций получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1-a = ba^2 \\ a = (1-a)^2(1-b) \end{cases} \qquad (6)$$

Уравнения этой системы можно свести к одному уравнению четвёртого порядка:

$$a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 3a - 1 = 0. \qquad (7)$$

Точного значения решений данного уравнения вычислить не удаётся. Но приближённый анализ мы сделать можем. Во первых, из четырёх корней данного уравнения только два являются действительными числами. Во-вторых, и эти два решения не попадают в область допустимых значений. Напомним, что $\boldsymbol{0 \le a \le 1}$.

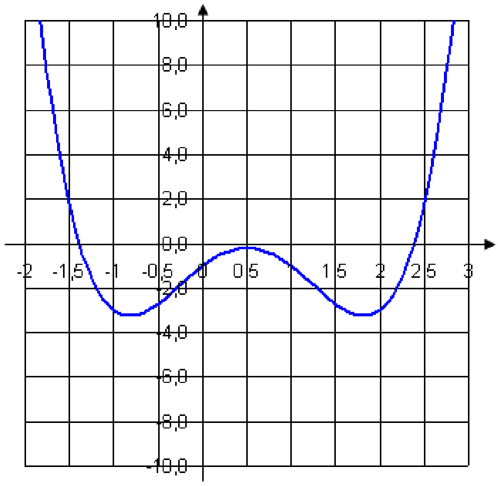
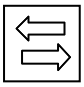


Рис. 5

На Рис. 5 показан участок кривой, соответствующей уравнению (7). По оси абсцисс расположены значения параметра $\boldsymbol{a}$.

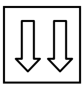
1.4 Рассмотрим последний случай горизонтальных пропорций. В нашей символике он имеет обозначение:



Не прибегая к вычислениям можем сказать, что данный случай сводится к решению уравнения (7). Что также нас не устраивает.

2).

Рассмотрим второй случай (Вертикальный).

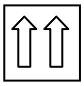


2.1 В соответствии с этим случаем имеем такие пропорции: $\boldsymbol{\frac{S}{S_1} = \frac{S_1}{S_3}}$ и $\boldsymbol{\frac{S}{S_2} = \frac{S_2}{S_4}}$. Этим пропорциям соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{1 - b = ab^2} \\ \boldsymbol{1 - b = b^2(1 - a)} \end{cases}. \qquad (8)$$

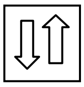
Находим: $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{3} - 1$.

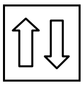
2.2 имеет условное обозначение:



Это соответствует пропорциям: $\frac{S}{S_3} = \frac{S_3}{S_1}$ и $\frac{S}{S_4} = \frac{S_4}{S_2}$. Решая систему уравнений, полученную на основании данных пропорций, находим значения параметров: $a = \frac{1}{2}$, $b = 2 - \sqrt{3}$

2.3 и 2.4





Эти два случая приводятся к варианту 1.3 только относительно параметра b. Т. е., эти варианты нам не подходят.

Переходим к диагональным случаям

3).

3.1

Данному варианту соответствуют пропорции: $\frac{S}{S_1} = \frac{S_1}{S_4}$ и $\frac{S}{S_2} = \frac{S_2}{S_3}$, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} a^2 b^2 = (1-a)(1-b) \\ a(1-b) = b^2 (1-a)^2 \end{cases}. \qquad (9)$$

Получаем удовлетворяющее нас решение $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{3} - 1$.

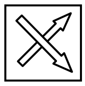
3.2 Рассмотрим вариант

Для него справедливы пропорции $\frac{S}{S_4}=\frac{S_4}{S_1}$ и $\frac{S}{S_3}=\frac{S_3}{S_2}$, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} ab=(1-a)^2(1-b)^2 \\ b(1-a)=a^2(1-b)^2 \end{cases}. \qquad (10)$$

После решения получаем: $a=\frac{1}{2}$, $b=2-\sqrt{3}$

3.3 соответствует схеме

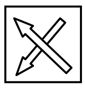


Имеем такие пропорции и систему уравнений: $\frac{S}{S_1}=\frac{S_1}{S_4}$ и $\frac{S}{S_3}=\frac{S_3}{S_2}$,

$$\begin{cases} a^2b^2=(1-a)(1-b) \\ b(1-a)=a^2(1-b)^2 \end{cases}. \qquad (11)$$

Находим значения наших параметров: $b=\frac{1}{2}$, $a=\sqrt{3}-1$.

3.4 имеет схему



Составим пропорции, соответствующие данной схеме: $\frac{S}{S_4}=\frac{S_4}{S_1}$ и $\frac{S}{S_2}=\frac{S_2}{S_3}$. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} ab=(1-a)^2(1-b)^2 \\ a(1-b)=b^2(1-a)^2 \end{cases}. \qquad (12)$$

Из всех предыдущих случаев решение данной системы представляется не совсем очевидным. Поэтому мы его здесь покажем. Представим первое уравнение системы (12) в виде: $(1-a)^2=\frac{ab}{(1-b)^2}$. Второе уравнение системы (12) можно представить таким образом: $(1-a)^2=\frac{a(1-b)}{b^2}$. Приравнивая правые части, полученных выражений, записываем: $\frac{b}{(1-b)^2}=\frac{1-b}{b^2}$ или

$b^3 = (1-b)^3$. Корнями последнего уравнения будут два комплексных сопряжённых числа и одно вещественное $b = \frac{1}{2}$. Подставляя это значение находим: $a = 2 - \sqrt{3}$.

Все полученные результаты сведём в таблицу.

Вид	Вариант	Параметр	
		a	b
Горизонтальный	1.1	$\sqrt{3}-1$	$\frac{1}{2}$
	1.2	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
	1.3	-	-
	1.4	-	-
Вертикальный	2.1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}-1$
	2.2	$\frac{1}{2}$	$2-\sqrt{3}$
	2.3	-	-
	2.4	-	-
Диагональный	3.1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}-1$
	3.2	$\frac{1}{2}$	$2-\sqrt{3}$
	3.3	$\sqrt{3}-1$	$\frac{1}{2}$
	3.4	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$

Попробуем подвести некоторые итоги. Мы рассмотрели все возможные планарные пропорции типа (1) на теле единичного квадрата. Каждой из 12-ти пропорций соответствует своя система уравнений. Как видим из таблицы, достаточно было рассмотреть только диагональный вид пропорций. Остальные – это уже повторения. Если брать полученные решения в виде координат точек, то получим такую картинку:

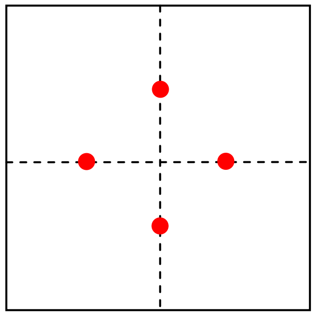


Рис. 3

Красные точки на Рис. 3 имеют по отношению к единичному квадрату координаты: $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}-1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2-\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Рассмотрим среднеарифметические значения полученных координат.

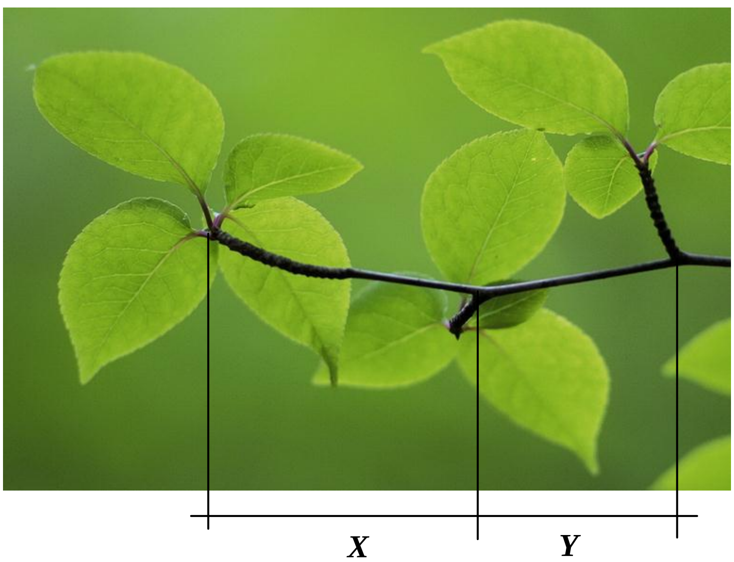
$$\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)+\frac{1}{2}}{2} \approx 0{,}616\ldots, \qquad \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}}{2} \approx 0{,}384\ldots.$$

Оказывается, полученные значения с большой точностью совпадают со значениями, образованными числом «золотой» пропорции:

$$\Phi-1 \approx 0{,}618\ldots, \qquad 2-\Phi \approx 0{,}382\ldots,$$

где число «золотой» пропорции $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$

Среди исследователей «золотой» пропорции распространенно убеждение, что это число тесно связано с окружающим нас растительным и животным миром. Например, с ростом веток на деревьях.



$$\frac{X}{Y} \approx \Phi$$

Можно пофантазировать и предположить, что и площади листочков на таких веточках каким-то образом связаны со значениями «планарных» пропорций.

Используя сценарий данного исследования можно построить *теорию объёмных пропорций*. Мы всё-таки живём в объёмном мире и «золотые» объёмные числа пропорций возможно ещё больше обоготят понимание нашего мира.

***Приложение* 1**

Свойство ряда Фибоначчи

Ряд Фибоначчи имеет очень много интересных математических свойств. Мы рассмотрим одно из них. Это свойство почему-то очень редко встречается в литературе, посвящённой свойствам ряда Фибоначчи $\{F\}$.

Введём обозначение для элементов ряда: F_n. Нижний индекс указывает порядковый номер элемента. Например, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ и т. д..

Введём ещё одно обозначение для **суммы** натуральных чисел, расположенных между двумя последовательными элементами ряда Фибоначчи: S_n. Пример: $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, между ними находятся числа 6 и 7 (не принадлежащие ряду Фибоначчи), следовательно $S_5 = 6 + 7 = 13$. А весь ряд будем обозначать по аналогии с рядом Фибоначчи через $\{S\}$.

Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi \,. \tag{1}$$

Но мало кому известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \Phi^2 \,. \tag{2}$$

Докажем свойство (2).

Известно, что сумму n последовательных натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n можно вычислить по формуле: $A = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$. Тогда $S_n = \frac{F_n + 1 + F_{n+1} - 1}{2}\cdot\left(F_{n+1} - F_n - 1\right) = \frac{F_n + F_{n+1}}{2}\cdot\left(F_{n+1} - F_n - 1\right)$. И мы можем выражение (2) записать в таком виде:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(F_{n+1} + F_{n+2}\right)\left(F_{n+2} - F_{n+1} - 1\right)}{\left(F_n + F_{n+1}\right)\left(F_{n+1} - F_n - 1\right)} \tag{3}$$

Известно, что предел произведения равен произведению пределов. Тогда выражение (3) будет иметь вид:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(F_{n+1} + F_{n+2}\right)}{\left(F_n + F_{n+1}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(F_{n+2} - F_{n+1} - 1\right)}{\left(F_{n+1} - F_n - 1\right)} \tag{4}$$

Рассмотрим первый предел произведения в выражении (4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(F_{n+1} + F_{n+2}\right)}{\left(F_n + F_{n+1}\right)} \tag{5}$$

Из определения ряда Фибоначчи имеем: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Подставляя это выражение в (5), получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(F_{n+1}+F_{n+1}+F_n)}{(F_n+F_{n+1})} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n+F_{n+1}}+1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}+1}+1\right) \tag{6}$$

Тогда в силу свойства (1) можем записать:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}+1}+1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\Phi}+1}+1\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{\Phi}+1}+1 \tag{7}$$

Известно также, что $1+\Phi=\Phi^2$. С учётом этого несложно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(F_{n+1}+F_{n+2})}{(F_n+F_{n+1})}=\Phi$.

Рассмотрим второй предел произведения в выражении (4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(F_{n+2}-F_{n+1}-1)}{(F_{n+1}-F_n-1)} \tag{8}$$

Используя аналогичные преобразования, как и в предыдущем случае, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(F_{n+2}-F_{n+1}-1)}{(F_{n+1}-F_n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(F_{n+1}+F_n-F_{n+1}-1)}{(F_{n+1}-F_n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(F_n-1)}{(F_{n+1}-F_n-1)}.$$

Разделив числитель и знаменатель последнего выражения под знаком предела на F_n, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(F_n-1)}{(F_{n+1}-F_n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{F_n}}{\dfrac{F_{n+1}}{F_n}-1-\dfrac{1}{F_n}} \tag{9}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{F_n}=0$. Тогда, с учетом (1), выражение (9) перепишется следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{F_n}}{\frac{F_{n+1}}{F_n}-1-\frac{1}{F_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Phi-1}=\frac{1}{\Phi-1}=\Phi$$

Как видим, и второй предел в произведении (4) тоже равен Φ.

Таким образом, можем записать: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\Phi^2$. Т. е. наше свойство доказано.

Рассмотрим n членов натурального ряда N. Как уже было сказано, сумма этих членов подсчитывается по формуле: $\sum\limits_{K=1}^{n} N_K=\frac{n(1+n)}{2}$.

Известно [1], что сумма чисел ряда Фибоначчи от F_1 до F_n равна $F_{n+2}-1$. По формуле Бине $F_{n+2}=\frac{\Phi^{n+2}-(1-\Phi)^{n+2}}{2\Phi-1}$. Теперь можем записать формулу для суммы n первых членов ряда $\{S\}$.

$$\{S_n\}=\frac{n\cdot(1+n)}{2}-\frac{\Phi^{n+2}-(1-\Phi)^{n+2}}{2\Phi-1}+1. \qquad (10)$$

***Приложение* 2**

«Золотое» уравнение

«Золотое» сечение, порой, возникает в самых неожиданных математических задачах. В данном приложении мы покажем такой пример.

Класс квадратных уравнений, которые мы сейчас рассмотрим, в полной мере можно назвать «золотым»:

$$\boldsymbol{X^2 - L_n \cdot X + (-1)^n = 0} \qquad (1)$$

Здесь коэффициент $\boldsymbol{L_n}$ - является $\boldsymbol{n}$–ым членом числового ряда Люка. Напомним, числовой ряд Люка строится, точно также, как и ряд Фибоначчи по двум первым числам: $\boldsymbol{L_0 = 2}$ и $\boldsymbol{L_1 = 1}$:

$$\boldsymbol{\{L_n\}: 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,}\ \cdots$$

Индекс $\boldsymbol{n}$ пробегает все значения целых чисел от $-\infty$ до $+\infty$, т. е., ряд Люка может быть продолжен, как влево, так и вправо.

Уравнения (1) интересны тем, что при любом $\boldsymbol{n}$ его корнями будут числа:

$$\boldsymbol{X_1 = \Phi^n} \text{ и } \boldsymbol{X_2 = \frac{1}{(-\Phi)^n}},$$

где $\boldsymbol{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034}\ldots$ - и есть известное «золотое» сечение.

Доказывается это не сложно, прямой подстановкой. Достаточно вспомнить, что $\boldsymbol{L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}}$ и $\boldsymbol{L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n}$. Действительно, подставим $\boldsymbol{X_1 = \Phi^n}$ в уравнение (1), получим верное тождество:

$$\boldsymbol{\Phi^{2n} - \left(\Phi^n + (-\Phi)^{-n}\right) \cdot \Phi^n + (-1)^n = 0}$$

Для $\boldsymbol{X_2 = \frac{1}{(-\Phi)^n}}$ получаем аналогично:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\Phi^{2n}} - \left(\Phi^n + (-\Phi)^{-n}\right) \cdot \frac{1}{\left(-\Phi^n\right)} + (-1)^n = 0}$$

Пример:

Пусть n=4, $L_4 = 7$. Получаем уравнение $X^2 - 7 \cdot X + 1 = 0$. Решая данное уравнение, находим его корни: $X_1 = 2 + 3\Phi = \Phi^4$, $X_2 = 5 - 3\Phi = \frac{1}{(-\Phi)^4}$

На Рис. 1 показано, как выглядят графики функций, соответствующих некоторым уравнениям из класса уравнений (1).

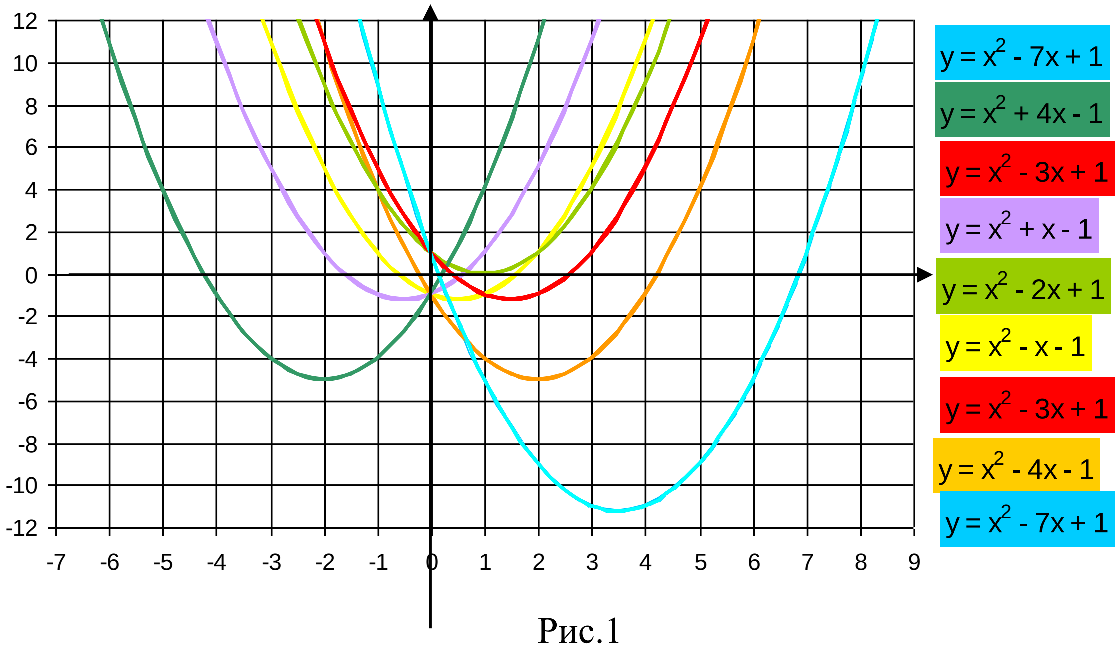


Рис.1

Заметим, что для чётных n и чётных -n получается одно и то же уравнение. Функции таких уравнений выделены на Рис. 1 одним цветом. При $n = 1$ получаем классическое уравнение «золотого» сечения (функция показана жёлтым цветом).

Известно, что числа Люка и числа Фибоначчи связаны различными интересными формулами. Например: $L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ и др.. Здесь через F_n обозначены члены ряда Фибоначчи, а сам ряд начинается при $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$. Поэтому, уравнения (1) могут быть переписаны в другом виде, с учётом вышепоказанных формул.

Литература.

1. Н. Н. Воробьёв, «Числа Фибоначчи», М., «НАУКА», 1984