Франц Герман

Теория геометрической телепортации на проективной плоскости

franz.h-n@yandex.ru

Известно [1], что на действительной проективной плоскости $\boldsymbol{RP^2}$ ввести понятие метрики (расстояния между двумя точками) можно, например, при помощи метода Кэли-Клейна (вообще этим методом можно индуцировать многие геометрии [6]). Выбрав на $\boldsymbol{RP^2}$ кривую второго порядка в качестве инварианта проективного преобразования плоскости (абсолюта), индуцируется сразу две геометрии. Внутри абсолюта получается гиперболическая геометрия (Лобачевского др.), снаружи – эллиптическая геометрия (Римана и др.) (Рис. 1).

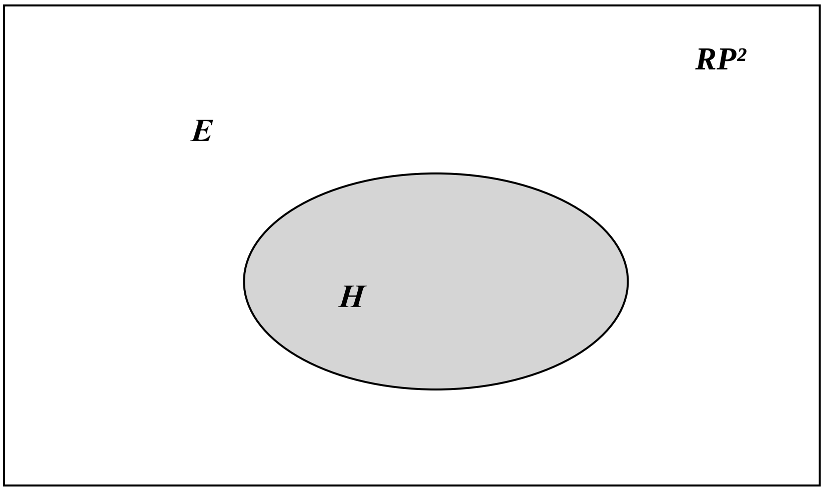

Рис. 1

Буквой $\boldsymbol{H}$ будем обозначать гиперболическую метрику, а буквой $\boldsymbol{E}$ – эллиптическую.

При этом выбраться из абсолюта, перемещаясь по плоскости невозможно, точно также как и проникнуть в абсолют извне [1].

Зададим абсолют простейшим уравнением действительной кривой второго порядка $\boldsymbol{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0}$ (уравнения всех линий второго порядка есть, например, в [9], стр. 386). Введём понятие квазискалярного произведения двух точек, принадлежащих абсолюту, по формуле:

$$\boldsymbol{x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0}$$

Также введём понятие квазискалярного произведения двух точек на проективной плоскости аналогично квазискалярному произведению для точек на абсолюте.

Рассмотрим две точки на проективной плоскости $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Не нарушая общности, однородные координаты точек можно задать следующим образом: $X(x_1 : x_2 : 1)$ и $Y(y_1 : y_2 : 1)$. Тогда квазискалярное произведение двух точек $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ будет вычисляться по формуле:

$$X \circ Y = x_1 y_1 - x_2 y_2 + 1$$

Аналогично введём также понятие собственного квазискалярного произведения точки:

$$X \circ X = x_1^2 - x_2^2 + 1.$$

В дальнейшем для краткости записи квазискалярные произведения будем обозначать следующим образом: $X \circ X = a$, $Y \circ Y = b$, $X \circ Y = c$. В этих обозначениях метрики, полученных геометрий, будут иметь формулы:

$$H = ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - ab}}{c - \sqrt{c^2 - ab}}\right) \tag{1}$$

$$E = arccos\left(\frac{c'}{\sqrt{a' b'}}\right) \tag{2}$$

Здесь все величины a, b, c должны иметь отрицательные значения, т. к. точки $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ находятся внутри абсолюта ([11], стр. 263) и $c^2 > bc$ ([10], стр. 323) а величины a', b' и c' - положительные, причём, в силу области определения функции арккосинуса должно быть $c' < \sqrt{a' b'}$. Т. о. квазискалярные произведения накладывают ограничения на выбор точек для данного абсолюта.

Покажем, что вводя некоторую псевдогиперболическую (мнимую) геометрию с метрикой $\overline{H}$, всё таки можно телепортировать отрезок прямой из области внути абсолюта во внешнюю область на $\boldsymbol{RP^2}$.

Введём обозначение: $H = ln(h)$.

Новую псевдогиперболическую метрику будем строить следующим параметрическим образом. Пусть

$$\overline{H} = ln\left(\frac{c^2 + k^2}{(c' + i \cdot k)^2}\right), \tag{3}$$

здесь $c^2 + k^2 = h$ и $c' = \left|\sqrt{c^2}\right|$.

Выражение (3) можем записать и так:

$$\overline{H} = ln\left(\frac{c' - i \cdot k}{c' + i \cdot k}\right) \tag{4}$$

Рассмотрим две точки $X'(x'_1 : x'_2 : 1)$ и $Y'(y'_1 : y'_2 : 1)$ из внешней области абсолюта. Первую точку возьмём таким образом, чтобы $X' \circ X' = a' > 0$. Тогда координаты второй точки можно найти решая уравнение:

$$\begin{cases} (y'_1)^2 - (y'_2)^2 = \dfrac{c^2 + k^2}{a'} - 1, \\ x'_1\, y'_1 - x'_2\, y'_2 = c' - 1 \end{cases} \tag{5}$$

здесь $\frac{c^2 + k^2}{a'} = b'$. Т. к. координаты x'_1 и x'_2 известны, то система (5) является системой двух уравнений с двумя неизвестными. Решая (5) находим y'_1 и y'_2.

На этом можно было бы закончить наше исследование, т. к. мы построили отрезок во внешней части абсолюта, соответствующий заданному отрезку внутри абсолюта. Но хотелось бы определить уравнение, связывающее метрики $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Теперь можем записать параметр $\boldsymbol{k}$ в таком виде:

$$k^2 = a'\, b' - c^2 = -(c^2 - a'\, b'), \qquad k = i\sqrt{c^2 - a'\, b'}\,.$$

С учётом того, что $c^2 = (c')^2$ и известна формула параметра $\boldsymbol{k}$, выражение (4) принимает вид:

$$\overline{H} = ln\left(\frac{c' + \sqrt{(c')^2 - a'\, b'}}{c' - \sqrt{(c')^2 - a'\, b'}}\right) \tag{6}$$

Т. о. выражение (2) и (6) являются функциями одних и тех же трёх параметров. Заметим, что из $k = i\sqrt{(c')^2 - a'\, b'}$ и $c' < \sqrt{a'\, b'}$ величина $\boldsymbol{k}$ должна быть отрицательна. Теперь найдём связь между выражениями (2) и (6).

Из выражения (2) можем записать:

$$cos(E) = \frac{c'}{\sqrt{a'\, b'}}, \tag{7}$$

тогда $sin(E) = \sqrt{1 - cos^2(E)} = \sqrt{1 - \left(\frac{c'}{\sqrt{a'\, b'}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a'\, b' - (c')^2}{a'\, b'}}$

или $-i \cdot sin(E) = \frac{\sqrt{(c')^2 - a'b'}}{\sqrt{a'b'}}$.

Теперь вычислим выражения $cos(E) - i \cdot sin(E)$ и $cos(E) + i \cdot sin(E)$. Получаем:

$$cos(E) - i \cdot sin(E) = \frac{c' + \sqrt{(c')^2 - a'b'}}{\sqrt{a'b'}}$$

$$cos(E) + i \cdot sin(E) = \frac{c' - \sqrt{(c')^2 - a'b'}}{\sqrt{a'b'}}.$$

Разделив первое выражение на второе мы получаем выражение $e^{\overline{H}}$ или:

$$\frac{cos(E) - i \cdot sin(E)}{cos(E) + i \cdot sin(E)} = \frac{(cos(E) - i \cdot sin(E)) \cdot (cos(E) - i \cdot sin(E))}{(cos(E) + i \cdot sin(E)) \cdot (cos(E) - i \cdot sin(E))} = cos(2E) - i \cdot sin(2E)$$

Преобразуем последнее выражение с использованием формулы Эйлера $e^{iw} = cos(w) + i \cdot sin(w)$. Тогда

$$cos(2E) - i \cdot sin(2E) = -exp(i \cdot (\pi - 2E)). \tag{8}$$

Откуда можем записать: $exp(\overline{H}) = -exp(i \cdot (\pi - 2E)) = -\frac{exp(i \cdot \pi)}{exp(i \cdot 2E)}$. С учётом того, что $exp(i \cdot \pi) = -1$ получаем $exp(\overline{H}) = \frac{1}{exp(i \cdot 2E)}$ или окончательно: $exp(\overline{H}) \cdot exp(i \cdot 2E) = exp(\overline{H} + i \cdot 2E) = 1$.

Последнее выражение можно переписать таким образом:

Вся работа передана в РАН