Посвящаю моим сыновьям
Михаилу и Георгию

Франц Герман
(franz.h-n@yandex.ru)

Математика в живой природе

(Лекция, прочитанная перед победителями мат. олимпиад г. Дрездена
16 декабря 1998г. при вступлении в должность профессора
математической гимназии „MANOS“).

Математику справедливо называют царицей наук. И, пожалуй, невозможно найти в наши дни такую область деятельности человека, куда бы не проникла математика. Переоценить роль математики очень трудно. Но, несмотря на это, математика по-прежнему остаётся в большом долгу перед естествознанием. В первую очередь здесь имеется в виду познание живой природы. По сей день не существует математического аппарата, столь же мощного, какой используется в физике, при помощи которого можно было бы исследовать окружающую нас живую природу. А, между тем, опыт исследования живой природы показывает , что законы математики присущи организации и развитию растительного и животного мира. И в первую очередь это связано с числами Фибоначчи и различными проявлениями понятия симметрии. На этих двух вопросах мы и сосредоточим наше внимание.

Впервые числа Фибоначчи появились в 1202 году в книге итальянского математика Леонардо Фибоначчи из Пизы. Годы жизни Фибоначчи примерно с 1180 по 1240. Точные даты не известны и в разных источниках можно встретить различные даты, немного отличающиеся друг от друга. Леонардо Фибоначчи много путешествовал по Китаю, Индии и другим восточным странам, и эта книга явилась, как бы итогом его странствий. В ней он изложил знания, которые почерпнул во время путешествий.

Что представляют собой числа Фибоначчи. Мы будем обозначать этот числовой ряд как $\{F_n\}$ - это значит, что каждое число Фибоначчи будет иметь буквенное обозначение в виде буквы F и своего порядкового номера n в ряду.

Первым числом этого ряда является число **0**, вторым – число **1**, т. е. $F_0 = 0,\ F_1 = 1$. Третье число получается из сложения этих двух чисел, т. е. $F_2 = 0 + 1 = 1$. Аналогично получаются и последующие числа ряда $\{F_n\}$. Т.е. $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2,\ F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,\ F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$ и т. д. Получаем такой ряд (запишем его в виде таблицы (**Таб. 1**)).

Таб. 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...

Этот ряд $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ обладает очень многими интересными свойствами:

Рассмотрим сумму из k последовательных членов ряда $\{F_n\}$. Пусть $k = 3$, и мы хотим найти сумму k первых членов ряда:

$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 = 0 + 1 + 1 + 2 = F_5 - 1 = 5 - 1 = 4;$$

При $k = 6$ имеем:

$$0+1+1+2+3+5+8 = F_8 - 1 = 20;$$

При $k = 11$:

$$0+1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89 = F_{13} - 1 = 232;$$

Здесь можно подметить такую закономерность, которую в общем виде запишем такой формулой:

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Мы не будем сегодня заниматься точными выводами наших формул, т. к. задача нашей беседы состоит в другом. Но отметим ещё несколько свойств ряда $\{F_n\}$.

Рассмотрим сумму последовательных чисел ряда $\{F_n\}$ с нечётными номерами. Например:

$$F_1 + F_3 = 1+2 = 3 = F_4;$$

$$F_1 + F_3 + F_5 = 1+2+5 = F_6;$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 = 1+2+5+13+34 = F_{10};$$

т.е. имеем такую общую формулу:

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Число $(2n-1)$, если в него вместо n подставить числа **1, 2, 3**, ... и т. д., будет давать нам только нечётные числа.

Теперь будем рассматривать суммы последовательных чётных чисел Фибоначчи.

$$F_0 + F_2 = 0+1 = 1 = F_3 - 1;$$

$$F_0 + F_2 + F_4 = 0+1+3 = F_5 - 1;$$

$$F_0 + F_2 + F_4 + F_6 + F_8 = 0+1+3+8+21 = 33 = F_9 - 1;$$

т. о., в общем виде можем записать:

$$F_0 + F_2 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Рассмотрим ещё одно интересное свойство нашего ряда. Найдём сумму квадратов нескольких последовательных первых чисел ряда Фибоначчи.

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 = 0+1+1 = 2 = F_2 \cdot F_3;$$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 0+1+1+4+9 = 15 = F_4 \cdot F_5;$$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 40 = F_5 \cdot F_6;$$

Т. о., получаем такую красивую формулу:

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1};$$

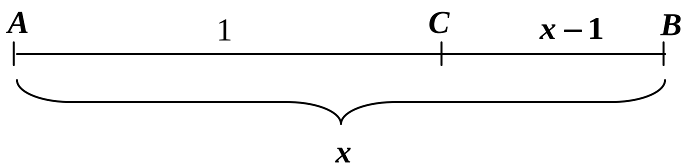
И, наконец, покажем ещё одно свойство ряда $\{F_n\}$, очень важное для нас, как мы увидим в последствии.

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + k,$$

где для n чётного - $k = -1$, а для n нечётного - $k = 1$. Вы можете сами проверить это свойство на конкретных примерах.

Числа Фибоначчи довольно широко встречаются в живой природе. Мы ещё рассмотрим этот вопрос. А сейчас нам необходимо познакомиться с понятием, которое в математике называется «золотое сечение».

Рассмотрим отрезок AB длиной x. Пусть $AC = 1$. Тогда $CB = x - 1$.



Если справедливо равенство отношений $x : 1 = 1 : (x - 1)$, то $x = 1{,}618033\ldots$. Это число обозначается греческой буквой φ (фи) и называется «золотым сечением».

$$\varphi = 1{,}618033\ldots$$

Для числа φ существует точная формула, которая выводится из вышеприведённого отношения.

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Оказывается, что число φ тесно связано с числами Фибоначчи. Существует формула для общего члена ряда Фибоначчи, в которой главную роль играет число φ.

$$F_n = \frac{\varphi - (1 - \varphi)^n}{2\varphi - 1}$$

Вывел эту формулу французский математик Бине (его именем и названа эта формула) лишь в 1843 году, т.е. 641 год спустя после открытия ряда Фибоначчи.

Но это не единственная связь чисел Фибоначчи и числа φ. Отношение числа F_{n+1} к числу F_n, т.е. $F_{n+1} : F_n$ стремится к числу φ. В математике это записывается так

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

или в более понятной для вас записи: $\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \varphi$. Давайте проверим это: **8:5 = 1,6; 13:8 = 1,625; 21:13 = 1,6153...; 377:233 = 1,6180258....** Чем больше номер n, тем отношение чисел ближе к числу φ.

Интересно то, что число φ окружает нас со всех сторон.

Уже древние архитекторы в своих проектах использовали это число. Примером тому могут быть Египетские пирамиды.

Число φ часто встречается и в математике. Я приведу здесь два самых простых примера.

Рассмотрим правильный пятиугольник.

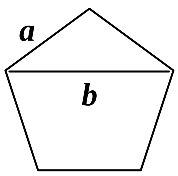


Рис. 1

Если длину его стороны обозначить через a, а длину диагонали – через b, то $\frac{b}{a} = \varphi$.

Рассмотрим квадрат со стороной a, симметрично вписанный в полуокружность.

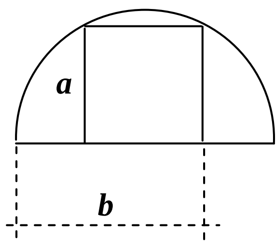


Рис. 2

Обозначим отрезок диаметра, как показано на Рис. 2, через b , тогда $\frac{b}{a} = \varphi$. Сделаем дополнительное построение на нашем рисунке (Рис. 3).

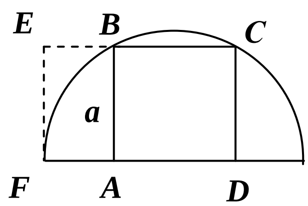


Рис. 3

Прямоугольник ***ECDF*** называется в математике «золотым прямоугольником». Он замечателен тем, что если от него отрезать квадрат, то оставшийся прямоугольник будет снова «золотым». Т.е. в нашем случае прямоугольник ***EBAF*** тоже «золотой».

Удивительно то, что число φ можно встретить почти в любой области человеческой деятельности. В науке, в архитектуре, в живописи и даже в спорте.

Рассмотрим пример, который, я думаю, будет вам особенно близок и понятен. Тот кто играет в футбол почти всегда чувствует, что одно футбольное поле по своим размерам более удобно чем другое. Как вы наверное знаете, точного стандарта для размеров футбольного поля не существует. В этом можно убедиться, взяв в руки любой учебник по футболу. И. как оказывается, наиболее удобным футбольным полем будет именно «золотой прямоугольник». Из учебника по футболу мы имеем:

М $\mathbf{1 \div 1000}$

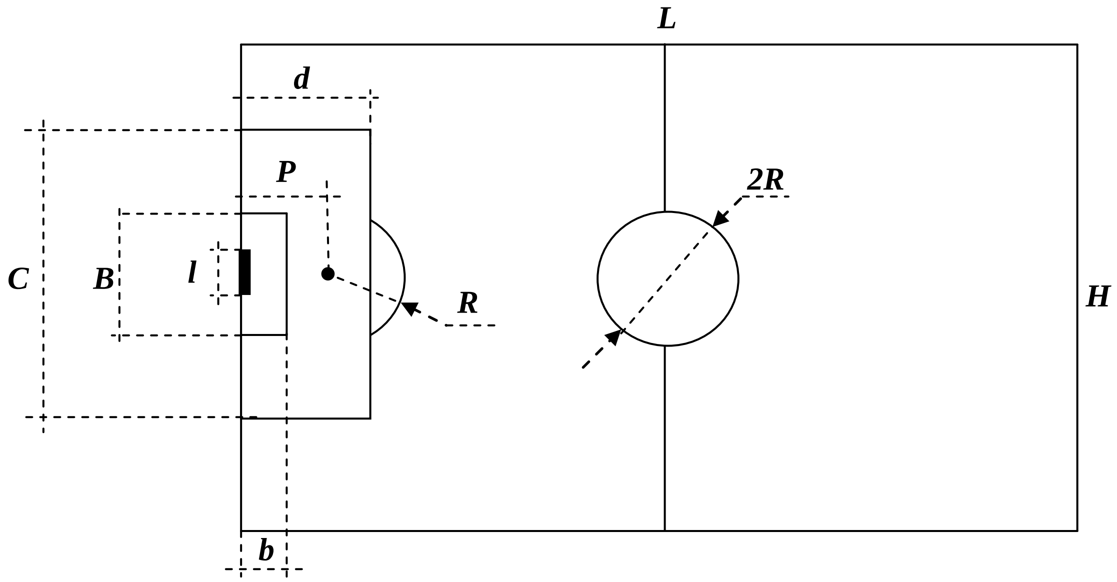


Рис. 4

$\boldsymbol{b}$ - ширина вратарской площадки, $\mathbf{3}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ - ширина штрафной площади, $\mathbf{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{B}$ - длина вратарской площадки, $\mathbf{2}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{C}$ - длина штрафной площади, $\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{R}$ - радиус центрального круга, $\mathbf{2}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{P}$ - расстояние пенальти. Но размеры футбольных ворот имеют точный стандарт.

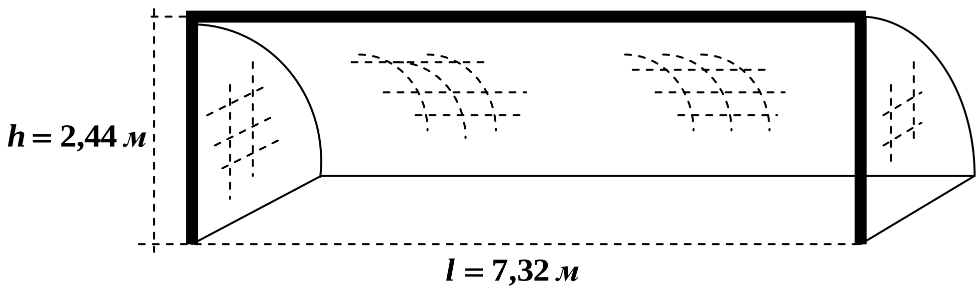


Рис. 5

Чтобы вычислить величины $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{R}$ надо знать число $\boldsymbol{P}$. Обозначим через $\boldsymbol{S}$ площадь ворот, т.е. $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{l}$.

Как оказалось:

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \varphi^2 \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}} = \mathbf{11}\ \textit{м}\ \mathbf{6}\ \textit{см}}$$

Это главная формула футбольного поля. Теперь не трудно вычислить все другие размеры. Кроме того, выяснилось, что $H = \varphi \cdot C$, т.е. $H \approx 65{,}4\ м$. Тогда самая «удобная» длина поля будет $L = \varphi \cdot H \approx 105{,}8\ м$. В учебнике по футболу мы находим: $H \approx 45 \div 90\ м$, $L \approx 90 \div 120\ м$. Вычисленные нами размеры для L и H лежат почти точно в середине указанных в учебнике размеров.

В повседневной жизни мы тоже часто сталкиваемся с «золотым прямоугольником». Например, персональная карточка АОК (страхование медицинского обслуживания в Германии), которая у каждого из вас есть, имеет форму «золотого прямоугольника». Точно такие же размеры имеют все без исключения кредитные карточки банков и популярных клубов. Например, клуб АДАС (экстренняя техническая помощь на дорогах).

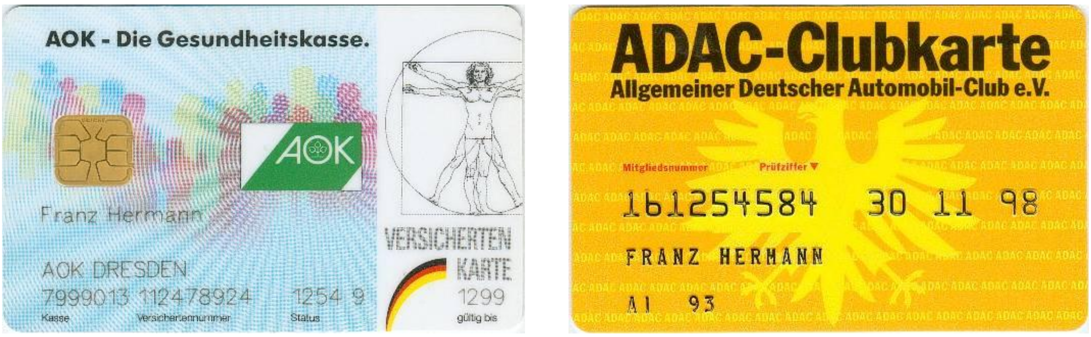


Рис. 6

Зададим себе вопрос. Почему же это так? Да потому, что число φ заложено в самой природе, а значит и в самом человеке. И осознанно или неосознанно проявляется в его деятельности.

Вот об этом мы теперь и поговорим.

Рассмотрим снова «золотой прямоугольник». Как мы уже говорили, если отрезать от него квадрат, то снова получим «золотой прямоугольник».

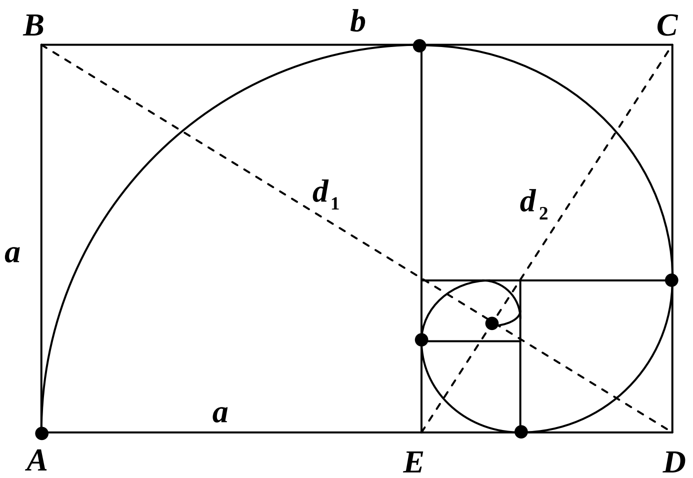


Рис. 7

Соединим жирные точки плавной кривой. Эта кривая в математике называется логарифмической спиралью. Конечной (или начальной) точкой такой спирали будет точка пересечения диагоналей $\boldsymbol{d_1 = BD}$ и $\boldsymbol{d_2 = CE}$, причём $\dfrac{\boldsymbol{d_1}}{\boldsymbol{d_2}} = \boldsymbol{\varphi}$.

Логарифмическая спираль очень широко встречается в живой природе. Например, в морских ракушках. Вглядитесь в нашу картинку. Конечно же, наша спираль напоминает домик улитки.

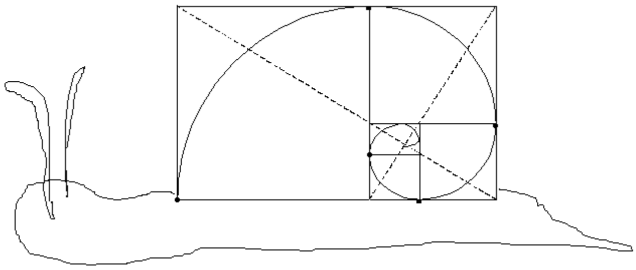


Рис. 8

Домик улитки построен по законам логарифмической спирали.

И спирали и числа Фибоначчи можно встретить и среди растений. Я думаю, что вы легко найдёте лист дерева, который можно вписать в «золотой прямоугольник», или веточку дерева, у которой отношение расстояний между листьями будет равно числу $\boldsymbol{\varphi}$.

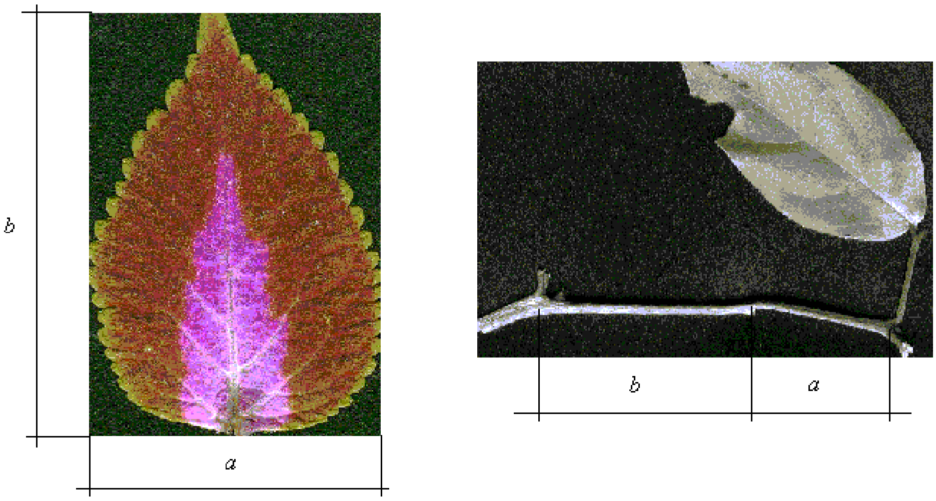


Рис. 9

Здесь $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\varphi}$.

Обратим наше внимание на строение деревьев. Например, вишни. Возьмём кусочек ветки с листьями и исследуем его. Можно построить математическую модель этой веточки в виде цилиндра.

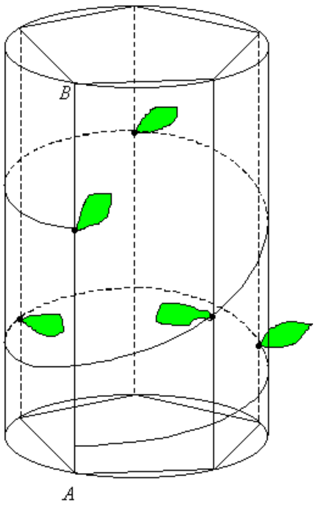


Рис. 10

Замечаем, что листья на ветке располагаются строго по спирали. Если смотреть на эту модель с торца, то мы увидим, что листья прикрепляются в вершинах правильного пятиугольника. Наша спираль делает два полных оборота, чтобы лист снова вернулся на исходную образующую нашего цилиндра (прямая AB). Всего на спирали имеем 5 листьев. Учёные исследовали множество деревьев и других растений таким образом. Некоторые из результатов можно показать в виде таблицы (Таб. 2).

Таб. 2

Растение Дерево	Липа Берёза	Тюльпан Виноград	Дуб Вишня Слива Смородина	Капуста Малина Груша Тополь	Ель Жасмин Облепиха
Число витков спирали	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**
Число листьев	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**

Можно заметить, что и первая и вторая строки таблицы – это ни что иное, как числа и ряды Фибоначчи. И это всегда так. Только числа Фибоначчи стоят в таких таблицах. Например, нам никогда не встретится число 6.

Хорошо просматривается симметрия и в цветах различных деревьев и растений.

Взгляните на цветы сирени. Здесь явно просматривается симметрия четвёртого порядка. Но если внимательно рассматривать букет, можно заметить, что среди огромного количества цветов с четырьмя лепестками нет, нет да попадётся цветочек, у которого пять лепестков.

То же самое мы можем наблюдать и с цветами незабудки.

Здесь уже наблюдается симметрия пятого порядка. Но нет-нет и проскочит цветок с шестью лепестками. Нарушения симметрии в живой природе – это своего рода страховка от кристаллизации.

Симметрию в живой природе хорошо наблюдать и по плодам растений. Причём симметрия цветка и симметрия плода остаются неизменными. Например яблоня. И если разрезать яблоко поперёк, мы увидим ту же симметрию пятого порядка, как и у цветка.

Причём симметрия эта очень стабильна. Мне никогда ещё не удавалось найти яблоко с симметрией, например, шестого порядка. В отличие, скажем, от граната. Всем известно, что гранат (и цветок, и плод) имеют симметрию шестого порядка. Но почти всегда среди десятка гранатов найдётся хотя бы один с симметрией пятого порядка.

Теперь я хочу коснуться вопроса о живой и неживой материи.

Рассмотрим такую таблицу.

Таб. 3

вещество	мёртвая неорганическая материя	?	живая материя
	кварки, элементарные частицы, молекулы, кристаллы	?	растения, вирусы, микробы, насекомые, животные
наиболее распространённый вид симметрии	$\sum_3$; $\sum_4$; $\sum_6$	?	$\sum_5$

Каждую из данных симметрий можно сопоставить с вращением правильного многоугольника. Симметрия третьего порядка $\sum_3$ связана с правильным треугольником △ и т.д..

$\sum_4$ - □ ; $\sum_5$ - ⬠ ; $\sum_6$ - ⬡

Ранее мы отметили, что правильный пятиугольник связан с числом φ, а значит и во всей живой природе, где имеется симметрия 5-го порядка, мы будем находить число φ. Возникает вопрос, какое же мёртвое неорганическое вещество будет находиться в таблице 3 на границе с живой материей? Многие учёные сходятся к мысли, что этим веществом является вода.

Оказывается, что до сих пор тайна жидкой воды до конца не раскрыта, несмотря на то, что вода является одним из самых хорошо изученных веществ в природе.

Каждое вещество может находиться в трёх состояниях: твёрдом, жидком и газообразном. Твёрдое состояние для воды – это лёд. Структура льда хорошо изучена учёными. Снежинки являются одной из разновидностей твёрдого состояния воды и всегда имеют симметрию $\sum_6$.

Рис. 11

Газообразное состояние воды – водяной пар – тоже хорошо изучено. А вот жидкое состояние воды до сих пор остаётся загадкой. Например, спектральный анализ показывает, что водородные связи у жидкой воды не разорваны, как у пара, но в то же время жидкая вода обладает текучестью. И много других загадок.

Существует несколько математических моделей структуры жидкой воды. Одна из них мне наиболее нравится. Это кластерная модель.

Рис. 12

В качестве модели кластера можно рассматривать футбольный ромбиковый мяч. 12 таких кластеров самым оптимальным образом могут располагаться в пространстве вокруг одного кластера. Кластеры произвольно перекатываются друг по другу. При этом разорванные водородные связи между кластерами (кластеры сцепляются друг с другом в этой модели оранжевыми пятиугольниками) мгновенно восстанавливаются за счёт максимально плотного расположения кластеров. Из-за такого перекатывания и возникает текучесть воды.

В каждой вершине многогранника этой модели располагается одна молекула воды. И все 60 молекул связаны друг с другом в такой кластер. Размер такого кластера можно точно рассчитать. Его радиус вычисляется по формуле:

$$R = l\sqrt{10 + 9\cdot\varphi} = 13.8\,\mathring{A}$$ (ангстрем)*)

Здесь l - диаметр молекулы воды (или расстояние между молекулами, что для воды в общем-то одно и то же).

Как видим, в формуле для R присутствует опять число φ. Наш кластер обладает симметрией шестого и пятого порядков ($\sum_6$, $\sum_5$). Если окажется (это могут установить только физики экспериментаторы), что такая модель действительно соответствует струкруре жидкой воды, то в нашу таблицу 3 на пустое место с вопросительным знаком как раз можно поставить воду, обладающую в жидком состоянии как симметрией 5-го, так и 6-го порядков. И тогда воду можно будет считать связующим звеном между живой и неживой материей. И в конечном итоге – залогом возникновения и развития жизни. Кстати, вспомните, в народных сказках частенько можно встретить упоминания о живой и мёртвой воде.

И последний вопрос на котором я хочу сегодня остановиться.

В современной науке сравнительно недавно появилась область, которая называется общей теорией систем (ОТС). Эта теория рассматривает различные вопросы, которые связаны с проблемами симметрии. В основе этой теории лежит математическая теория, которая называется теория групп. В ОТС вводится новое число, которое называеся «золотой вурф». Покажем, что же такое «золотой вурф».

Рассмотрим отрезок, разделённый на три части.

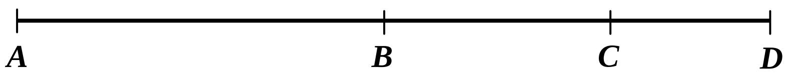


Рис. 13

Составим такое отношение (в математике его называют сложным отношением или двойным):

$$W = \frac{(AC)\cdot(BD)}{(BC)\cdot(AD)}.$$

Если длины наших отрезков соответственно равны: $AB = \varphi^2$, $BC = \varphi$, $CD = 1$, то $W = 1{,}30901...$. Это число и называется «золотой вурф». «Золотой вурф» связан с числом φ простой формулой

$$2W = \varphi^2$$

С учётом этого главную формулу футбольного поля можем переписать таким образом:

$$P = 2W\cdot\sqrt{S}$$

*) $1\,\mathring{A}$ = 1мм : 10.000.000

ОТС много занимается исследованием живой природы и непосредственно человека. Человек в своём строении имеет некоторые части тела, состоящии из трёх частей. Например, бедро-голень-стопа, плечо-предплечье-кисть. Каждый палец состоит из трёх фаланг. Учёные провели исследования и оказалось, что строение человека в своих относительных размерах очень точно описывается «золотым вурфом».

Рассмотрим например палец (мой средний палец на левой руке).

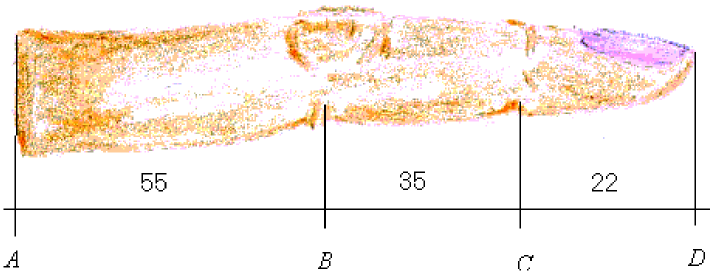


Рис. 14

$$W = \frac{90 \cdot 57}{35 \cdot 112} = 1.30867...$$

Параллельно замечу, что отношение роста человека к расстоянию от пола до пупка, равно примерно числу φ.

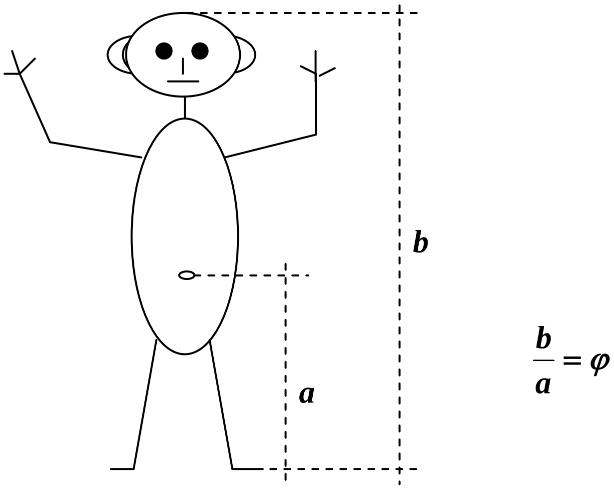


Рис. 15

В математике изучается множество различных геометрических преобразований. В ОТС говорится, что наилучшим преобразованием, которое может описывать изменение растений и живых организмов в процессе их роста и развития, является конформное преобразование или инверсия. Точная математическая формула конформного преобразования имеет вид:

$$R^2 = P_1 \cdot P_2$$

Для живой природы конформное преобразование может иметь вид:

$$R^2 = P_1 \cdot P_2 + \xi\ ,$$

где ξ - фактор внешних влияний.

Вспомните одну из главных формул ряда Фибоначчи (Стр. 3):

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + k .$$

Не правда ли, очень похожие формулы.

Подводя итог, хочу отметить, что существуют три фундаментальных очень важных числа, широко встречающихся и в математике и в живой природе. Одно из них вам хорошо знакомо – это число $\pi = 3.14159...$. Со вторым числом мы только что познакомились - $\varphi = 1.61803...$. И третье число – основание натуральных логарифмов, с которым вы познакомитесь в старших классах, - $e = 2.71828...$. Для чисел π и e существует связывающая их формула, которую вывел Леонард Эйлер. Связь между числами e и φ удалось найти мне. Возможно, когда-нибудь, кто-нибудь из вас сумеет открыть формулу, связывающую все три знаменитых числа π, e и φ. Это будет великое математическое открытие, которое возможно, явится ключом к пониманию живой природы. Я имею твёрдое убеждение, что такая формула обязательно должна существовать.