Франц Герман

Промежуточный ряд

(franz.h-n@yandex.ru)

Посвящаю другу М. Л.

В данной заметке будет рассмотрен числовой ряд, который мы назвали «Промежуточным» и элементы, которого имеют очень много неожиданных свойств. По числу интересных и необычных свойств данный ряд может быть сравним разве что со знаменитым рядом чисел Фибоначчи.

Исследуемый ряд будем обозначать: $\{H\}$, а элементы ряда - h_n.

Покажем несколько первых членов нашего ряда.

$$\{H\}:\ 3, 5, 14, 18, 33, 39, 60, 68, 95, 105, 138, 150, 189, 203, 248, 264, 315, 333, 390, 410, 473, 495, \ldots$$

Рассмотрим открытый интервал $\left(n^2, (n+1)^2\right)$ на числовой оси натурального ряда чисел. Данный интервал содержит $2n$ последовательных чисел . Заметим, что разность чисел на границах интервала равна сумме чисел оснований квадратов этих же граничных чисел.

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1) + n = 2n + 1 = a. \qquad (1)$$

Ни число n^2, ни число $(n+1)^2$ не делится нацело на число a. И т. к. на интервале всегда находится ровно $2n$ чисел, то существует всего лишь одно единственное число на $\left(n^2, (n+1)^2\right)$, которое нацело делится на a.

Именно из таких чисел и состоит наш ряд $\{H\}$.

Например, рассмотрим интервал **(5² , 6²)**. Число ***a = 5+6 = 11.*** Интервал содержит числа: ***26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35***. Как видим, на интервале находится единственное число, которое нацело делится на число a. Это число ***33***.

График значений первых 14-ти элементов ряда показан на Рис.1.

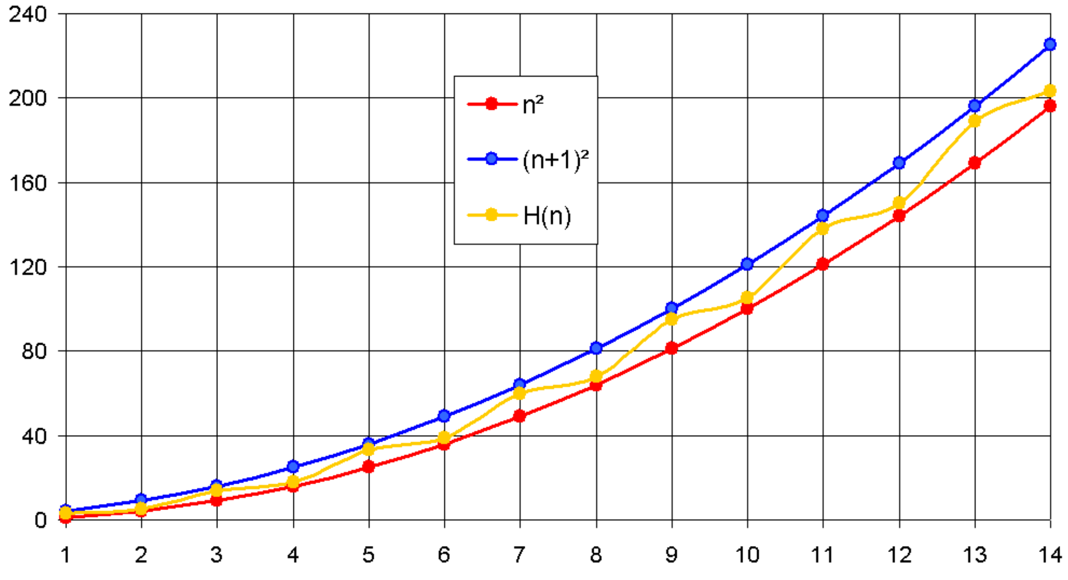

Рис. 1

Рассмотрим два ряда $\{X\}$ и $\{Y\}$:

$$\{X\}: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \ldots,$$

$$\{Y\}: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, \ldots.$$

Не трудно заметить, что $h_n = x_n \cdot y_n$.

Формула общего члена для элементов ряда $\{Y\}$ имеет вид $2n+1$. Это нечётные члены натурального ряда чисел, начиная с тройки.

Нечётные элементы ряда $\{X\}$ имеют формулу общего члена $\frac{n+1}{2}$, а чётные вычисляются по формуле $\frac{n}{2}$.

Обозначим нечётные и чётные элементы, исследуемого ряда, через $\bar{h}_n$ и $\bar{\bar{h}}_n$ соответственно. Тогда можем записать:

$$\bar{h}_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{2} \qquad (2)$$

$$\bar{\bar{h}}_n = \frac{n(2n+1)}{2} \qquad (3)$$

Как видим и чётные и нечётные члены ряда $\{H\}$ нацело делятся на число $2n+1$ и принадлежат интервалу $\left(n^2, (n+1)^2\right)$.

Из формул (2) и (3) можно вывести формулу общего члена для ряда $\{H\}$, введя слагаемое , от которого зависит чётность и нечётность текущего элемента:

$$h_n = \frac{(2n+1)\left(2n+1-(-1)^n\right)}{4} \qquad (4)$$

Надо заметить, что для многих конкретных вычислений удобнее использовать формулы (2) и (3) нежели формулу (4).

Выведем формулу суммы n первых членов ряда $\{H\}$.

Рассмотрим сумму двух последовательных чисел ряда $\{H\}$ h_{n-1} и h_n при n – чётном. Первый, из рассматриваемых членов, можно записать, используя формулу (2), а второй – формулу (3). Т. е. получаем:

$$\bar{h}_{n-1} + \bar{\bar{h}}_n = \frac{(n-1+1)(2(n-1)+1)}{2} + \frac{n(2n+1)}{2} = 2n^2$$

или

$$\bar{h}_{n-1} + \bar{\bar{h}}_n = 2n^2 \qquad (5)$$

Т. о., сумму первых n – членов для нечётного n можно записать в виде такой последовательности:

$$\bar{\bar{S}}_n = 2\left(2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+n^2\right) = 8\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right).$$

Но формула для суммы чисел, стоящих в последних скобках, известна: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Подставив последнее выражение в предыдущее с учётом, что $k = \frac{n}{2}$, окончательно получаем:

$$\bar{\bar{S}}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad (6)$$

Теперь найдём формулу для суммы $\bar{S}$ первых n чисел при n – нечётном.

Очевидно, что $\overline{S_n} = \bar{\bar{S}}_{n-1} + \bar{h}_n$. Все формулы для правой части последнего выражения известны, поэтому, после элементарных преобразований, получаем искомую формулу:

$$\overline{S_n} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+3)}{6} \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7) можно представить следующим образом:

$$\bar{S}_n = \frac{n+1}{3}\left(n^2+2n+\frac{3}{2}\right) \qquad (8)$$

$$\bar{\bar{S}}_n = \frac{n+1}{3}\left(n^2+2n\right) \qquad (9)$$

Рассмотрим две функции: $\bar{f}(n) = n^2+2n+\frac{3}{2}$ и $\bar{\bar{f}}(n) = n^2+2n$. Используя данные функции, построим новую функцию $f(n)$, которая бы при n – нечётном давала функцию $\bar{f}(n)$, а при n – чётном – функцию $\bar{\bar{f}}(n)$.

Это можно сделать, например, следующим образом:

$$f(n) = n^2+2n+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}(-1)^n$$

Тогда общую формулу для суммы первых членов ряда $\{H\}$ можно записать:

$$S_n = \frac{n+1}{3} f(n)$$

или в развёрнутом виде:

$$S_n = \frac{n+1}{12}\left(4(n+1)^2 - 1 - 3(-1)^n\right) \qquad (10)$$

Теперь приступим к изучению нашего ряда.

Отметим, что каждый член ряда, в зависимости от чётности (нечётности), связан с суммой либо числового ряда квадратов, либо числового ряда кубов натуральных чисел.

$$\overline{\overline{h}}_n = \frac{2}{n}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\right) - \frac{n^3}{2} \qquad (11)$$

$$\overline{h}_n = \frac{3}{n}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) \qquad (12)$$

Т. е. квадрат любого чётного числа ряда $\{H\}$ может быть представлен в виде разложения кубов натурального рада по формуле (11). А любое нечётное число нашего ряда связано с суммой квадратов чисел натурального ряда формулой (12).

Покажем несколько рекуррентных форму.

Рассмотрим разность квадратов h_n^2 и h_{n-1}^2 двух последовательных чисел ряда для n – чётного. Как оказалось:

$$h_n^2 - h_{n-1}^2 = \overline{\overline{h}}_n^2 - \overline{h}_{n-1}^2 = 2n^3 \qquad (13)$$

Вспоминая формулу (5), получаем такое выражение: $\overline{\overline{h}}_n^2 - \overline{h}_{n-1}^2 = n\left(\overline{\overline{h}}_n + \overline{h_{n-1}}\right)$. Откуда следует первая рекуррентная формула:

$$\overline{\overline{h}}_n = \overline{h}_{n-1} + n \qquad (14)$$

Не сложно вычисляется рекуррентная формула и для n – нечётного:

$$\overline{h}_n = \overline{\overline{h}}_{n-1} + 3n \qquad (15)$$

Для k и n – чётных справедливы такие рекуррентные формулы:

$$\overline{\overline{h}}_n + \overline{\overline{h}}_k + 2nk = \overline{\overline{h}}_{n+k} \qquad (16)$$

$$\overline{\overline{h}}_n - \overline{\overline{h}}_k = \overline{\overline{h}}_{n-k} + 2k(n-k) = \frac{n-k}{n+k}\overline{\overline{h}}_{n+k}, \qquad (17)$$

$$\overline{\overline{h}}_n = \frac{n}{n+k}\overline{\overline{h}}_{n+k} + n^2, \qquad (18)$$

при $n > k$.

Для k и n – нечётных справедливы такие рекуррентные формулы:

$$\overline{h}_n + \overline{h}_k + 2nk - n - k - 1 = \overline{\overline{h}}_{n+k} \qquad (19)$$

$$\overline{h}_n - \overline{h}_k = 2\overline{\overline{h}}_{n-k} + \frac{n+k+2k(n-k-1)}{2} = \overline{\overline{h}}_{n-k} + (n-k)(2k+1), \qquad (20)$$

при $n > k$.

Для чётного и нечётного членов ряда справедливы следующие формулы:

$$\overline{\overline{h}}_n + \overline{h}_k = \overline{h}_{n+k} - n(2k+1) = \overline{h}_{n-k} + n(2k-1) + 3k \qquad (21)$$

$$\overline{h}_n - \overline{\overline{h}}_k = \overline{h}_{n-k} + k(2(n-k)+1) \qquad (22)$$

$$\overline{\overline{h}}_n - \overline{h}_k = \overline{h}_{n-k} + 2k(n-k) - n - 1 \qquad (23)$$

Из (17) и (18) получаем такую, красивую на наш взгляд, рекуррентную формулу:

$$k\overline{\overline{h}}_n - n\overline{\overline{h}}_k = kn(n-k) \qquad (24)$$

Мы показали лишь самые простейшие из рекуррентных формул. Их намного больше. Доказательства мы не приводим. Все эти формулы легко доказываются с использованием формул (2) и (3).

Прежде чем перейти к исследованию некоторых свойств нашего ряда, покажем несколько формул, связанных с произведением двух последовательных членов и их квадратов.

$$\overline{h}_{n-1} \cdot \overline{\overline{h}}_n = \frac{1}{4}\overline{h}_{2n^2-1} = \frac{3n}{4}\left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) \qquad (25)$$

$$\overline{\overline{h}}_{n-1} \cdot \overline{h}_n = \frac{1}{2}\left(\overline{h}_{n^2-1} + n^2\right) \qquad (26)$$

$$\overline{\overline{h}}_n \cdot \overline{h}_{n+1} = \frac{n(n+2)}{2}\left(\overline{\overline{h}}_n + \overline{h}_{n+1} - \frac{3}{2}\right) \qquad (27)$$

$$\overline{h}_n \cdot \overline{\overline{h}}_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2}\left(\overline{h}_n + \overline{\overline{h}}_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \qquad (28)$$

$$\overline{\overline{h}}_n^{\,2} = \frac{1}{4}\overline{h}_{2n^2-1} + n\overline{\overline{h}}_n \qquad (29)$$

$$\overline{h}_{n-1}^{\,2} = \frac{1}{4}\overline{\overline{h}}_{2n^2} - n^3 \qquad (30)$$

Кроме этого существуют и довольно экзотические формулы.

Как оказалось, члены нашего ряда могут быть представлены формулами через чётно-чётные $\boldsymbol{k}$- угольные числа.

Предварительно, надо напомнить, что такое $\boldsymbol{k}$- угольное число. Покажем несколько примеров.

Общая формула для $\boldsymbol{k}$- угольных чисел имеет вид:

$$\alpha_n^k = \frac{n((k-2)(n-1)+2)}{2} \tag{31}$$

Каждое $\boldsymbol{k}$- угольное число имеет геометрическое представление.

Например, пятое треугольное число $\alpha_5^3 = 15$ имеет вид (Рис. 2):

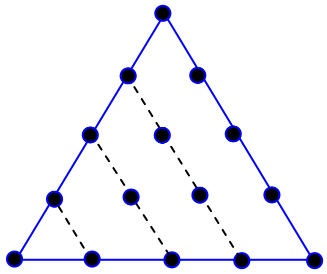

Рис. 2

Числа $\alpha_3^4 = 9$ и $\alpha_4^5 = 22$ показаны на Рис. 3

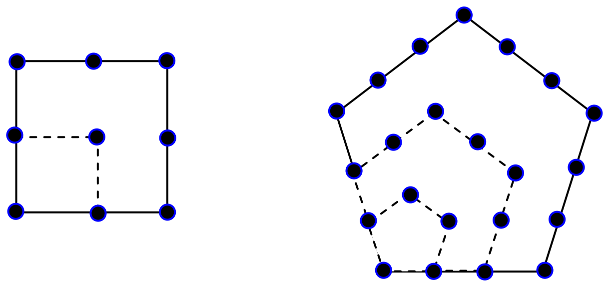

Рис. 3

Общие формулы для треугольных, четырёхугольных, пятиугольных и шестиугольных чисел соответственно имеют вид: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $Q_n = n^2$, $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, $G_n = n(2n-1)$.

Формулу (31) не трудно представить через общую формулу треугольных чисел:

$$\alpha_n^k = T_n + (k-3)T_{n-1} = (k-2)T_{n-1} + n \tag{32}$$

Существует множество формул, где одни $\boldsymbol{k}$-угольные числа могут быть представлены через другие $\boldsymbol{k}$-угольные числа. Покажем некоторые из них.

$$8T_n + 1 = Q_{2n+1} \tag{33}$$

$$Q_n = T_n + T_{n+1} = 2T_{n-1} + n \tag{34}$$

$$P_n = 3T_{n-1} + n = T_{n-1} + n^2 = T_n + 2T_{n-1} \tag{35}$$

$$G_n = T_{2n-1} = T_n + 3T_{n-1} = n + 4T_{n-1} \tag{36}$$

Но закончим экскурс в k-угольные числа и вернёмся к нашему ряду. Как уже было сказано, числа ряда $\{H\}$ могут быть выражены через k-угольные числа:

$$\bar{\bar{h}}_n = \frac{\alpha_{2n}^k - 2n}{2(k-2)} + n \tag{37}$$

$$\bar{h}_{n-1} = \frac{\alpha_{2n}^k - 2n}{2(k-2)} \tag{38}$$

Покажем и обратную формулу:

$$\alpha_n^k = (k-2)\left(h_n - \frac{n(n+2)}{2} - \frac{(2n+1)\left(1-(-1)^n\right)}{4}\right) + n \tag{39}$$

Приступим к рассмотрению некоторых свойств ряда $\{H\}$.

Свойство 1

$$(h_n + h_{n+k}) - (h_{n+m} + h_{n+k-m}) = 2m(k-m) \tag{40}$$

Для определённости будем считать, что $m < k$. Все члены h_i для формулы (40) должны быть согласованы по чётности. Т. е. либо все члены чётные (имеется в виду порядковый номер элемента ряда), либо – нечётные.

Докажем это свойство. Для этого воспользуемся формулами (16) и (17). Тогда можем записать:

$$h_{n+m} = h_n + 2nm + h_m$$

$$h_{n+k-m} = h_{n+k} - 2m(n+k-m) - h_m.$$

Складывая почленно два последних выражения, сразу же получаем нужный результат, т. е. формулу (40).

Теперь докажем это же свойство для нечётных членов ряда.

Если n и $n+m$ – нечётные, то m – должно быть чётным.

Используя формулы (21) и (22), можем записать соответственно:

$$h_{n+m} = h_n + h_m + m(2n+1)$$

$$h_{n+k-m} = h_{n+k} - h_m - m(2(n+k-m)+1).$$

Сложив два последних выражения почленно и проведя элементарные преобразования, вновь приходим к формуле (40).

Свойство 2

$$\left(\bar{\bar{h}}_n+\bar{h}_{n+k}\right)-\left(\bar{\bar{h}}_{n+m}+\bar{h}_{n+k-m}\right)=m\left(2(k-m)+1\right) \tag{41}$$

Доказательство данного свойства аналогично предыдущим. Для этого надо использовать формулы (16) и (22). Покажем ещё несколько аналогичных свойств.

Свойство3

$$\left(\bar{h}_n+\bar{\bar{h}}_{n+k}\right)-\left(\bar{h}_{n+m}+\bar{\bar{h}}_{n+k-m}\right)=m\left(2(k-m)-1\right) \tag{42}$$

Свойство 4

$$\left(\bar{\bar{h}}_n+\bar{h}_{n+k}\right)-\left(\bar{h}_{n+m}+\bar{\bar{h}}_{n+k-m}\right)=(k-m)(2m+1) \tag{43}$$

Свойство 5

$$\left(\bar{h}_n+\bar{\bar{h}}_{n+k}\right)-\left(\bar{\bar{h}}_{n+m}+\bar{h}_{n+k-m}\right)=(k-m)(2m-1) \tag{44}$$

Свойство 6

$$\frac{\left(\bar{h}_{n+m}+\bar{h}_{n+k+m}\right)-\left(\bar{\bar{h}}_n+\bar{\bar{h}}_{n+k}\right)}{\left(\bar{h}_{n+k+m}-\bar{\bar{h}}_n\right)}=\frac{2(2m+1)}{2m+2k+1} \tag{45}$$

Свойство 7

$$\frac{\left(\bar{h}_{n+m}+\bar{h}_{n+k+m}\right)-\left(\bar{\bar{h}}_n+\bar{\bar{h}}_{n+k}\right)}{\left(\bar{h}_{n+m}-\bar{\bar{h}}_{n+k}\right)}=\frac{2(2m+1)}{2m-2k+1} \tag{46}$$

Свойство 8

$$\frac{\left(\bar{\bar{h}}_{n+m}-\bar{h}_n\right)+\left(\bar{\bar{h}}_{n+k+m}-\bar{h}_{n+k}\right)}{\left(\bar{h}_{n+k}-\bar{\bar{h}}_{n+m}\right)}=\frac{2(2m-1)}{2k-2m+1} \tag{47}$$

Свойство 9

$$\frac{\left(\bar{\bar{h}}_{n+m}-\bar{h}_n\right)+\left(\bar{\bar{h}}_{n+k+m}-\bar{h}_{n+k}\right)}{\left(\bar{\bar{h}}_{n+k+m}-\bar{h}_n\right)}=\frac{2(2m-1)}{2k+2m-1} \tag{48}$$

Дрезден, август 2011