Франц Герман
franz.h-n@yandex.ru

Теория развёрток сферических графов.

Остовы полиэдров изоморфны графам, то есть множествам точек (вершин), соединённых линиями (рёбрами).

Мартин Гарднер

Теория графов - это один из разделов высшей математики. Изучают его в высших математических и технических учебных заведениях. Однако, первые понятия теории графов достаточно просты и не требуют специальной математической подготовки. Кроме этого теория графов очень наглядна и красива и, используя её методы, можно облегчить себе путь к решению некоторых задач. Мы уже познакомили читателя с орграфами при помощи которых удобно отыскивать различные упаковки чисел на замкнутых клеточных полях ([1], стр 40. В данной работе мы покажем, как при помощи графов можно исследовать различные полиэдры (многогранники) и их развёртки.

Можно рассматривать данную главу и как элементарное введение в теорию планарных графов. От читателя не требуется никаких дополнительных знаний.

Как и всякая новая теория, теория графов начинается с ввода основных определений.

Определение 1.

Графом называется непустое множество $\boldsymbol{G}$, состоящее из $\boldsymbol{B}$ вершин и заданного неупорядоченного множества $\boldsymbol{P_{ij}}$ пар вершин $\{\boldsymbol{B_i B_j}\}$, называемых рёбрами.

Пример:

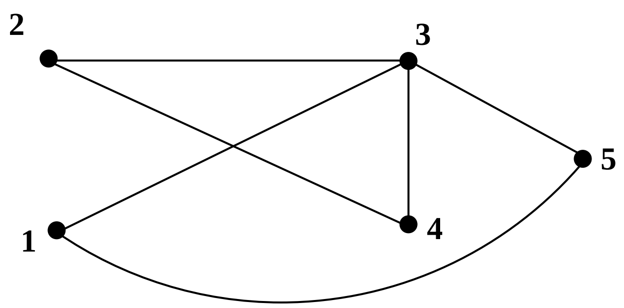


Рис. 1

На Рис.1 показан граф, имеющий пять вершин, обозначенных числами **1, 2, 3, 4, 5** и шесть рёбер $\{1{,}3\}$, $\{1{,}5\}$, $\{2{,}3\}$, $\{2{,}4\}$, $\{3{,}4\}$, $\{3{,}5\}$. Каждая пара вершин, определяющих ребро, называется неупорядоченной, т.к. для нас в данный момент не имеет значения как записать $\{3{,}5\}$ или $\{5{,}3\}$. Ясно, что это ребро, которое соединяет вершины **3** и **5**. В таких графах каждое ребро снабжено стрелочкой, т. е. в этом случае мы говорили бы уже об упорядоченной паре вершин.

Определение 2.

Петлёй называется ребро, начало и конец которого принадлежат одной вершине, т. е. $\boldsymbol{P_{ii}} = \{\boldsymbol{B_i B_i}\}$.

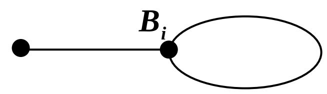


Рис. 2

Определение 3.

Рёбра называются кратными, если они соединяют одни и те же вершины.

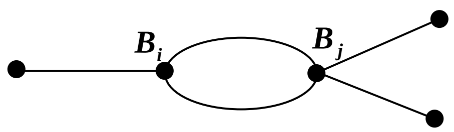


Рис.3

Вершины $\boldsymbol{B_i}$ и $\boldsymbol{B_j}$ соединены кратными рёбрами. Число кратности равно 2, по числу рёбер.

Определение 4

Степенью вершины называется число инцидентных (присоединённых, входящих) ей рёбер и обозначается $\mathbf{deg}\,\boldsymbol{B_i}$.Для графа, показанного на Рис.1, имеем: **deg1=2, deg2=2, deg3=4, deg4=2, deg2=2**.

Лемма («о рукопожатиях»).

Сумма степеней всех вершин графа - чётное число, равное удвоенному числу рёбер.

$$\sum \mathbf{deg}\,\boldsymbol{B_i} = 2\boldsymbol{P}. \tag{1}$$

Доказательство леммы очевидно. Действительно, каждое ребро соединяет строго 2 вершины, т. е. даёт вклад в сумму степеней вершин равный 2. Если наш граф имеет $\boldsymbol{P}$ рёбер, то сразу получаем, что сумма степеней вершин равна $\mathbf{2}\boldsymbol{P}$, т. е. формулу (1).

Определение 5.

Плоским графом называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а рёбра - непрерывными плоскими линиями без самопересечений.

Во всех предыдущих примерах все графы, показанные на Рис. 1, 2, 3, являются плоскими.

Определение 6.

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным.

Что значит изоморфные графы. Это графы, которые имеют одинаковое число вершин и одинаковое число рёбер, причём для вершин графов, можно ввести одинаковые обозначения таким образом, что неупорядоченные пары вершин, обозначающие рёбра, у изоморфных графов будут одинаковы. На Рис.4 показан граф, изоморфный графу Рис.1.

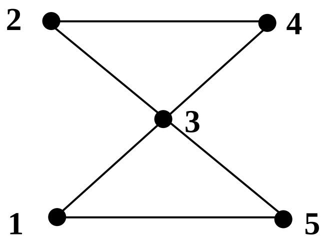


Рис. 4

Определение 7.

Планарный граф, не имеющий петель и кратных рёбер, степени вершин которого $\mathbf{deg}\,\boldsymbol{B}_i \geq \mathbf{3}$, и, однозначно укладываемый на сфере, будем называть простым сферическим графом. Известна такая; **теорема:**

Всякий планарный граф можно уложить на сфере ([2], стр. 151).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки этой книги, поэтому мы его здесь не приводим.

Что значит «уложить на сфере». Это значит, что мы должны на поверхности сферы нарисовать граф, изоморфный данному.

Везде в дальнейшем речь будет идти только о простых сферических графах, поэтому слово «простой» иногда ниже будем опускать.

Из определения 7 ясно, что простой сферический граф, уложенный на сфере, можно рассматривать, как сферический полиэдр, грани которого являются частями данной сферы.

Не для всякого сферического полиэдра существует изоморфный ему многогранник, т. е. полиэдр с плоскими гранями. Мы столкнёмся с таким фактом в нашем исследовании. Обратное же утверждение всегда верно.

Приведём пример простейшего сферического графа.

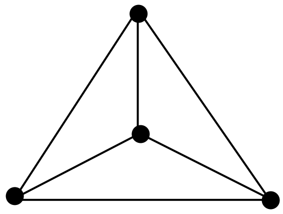


Рис. 5

Всякий плоский граф разбивает плоскость на области, называемые гранями.

Для сферического графа это очень наглядно можно представить, уложив его на сферу. (В качестве модели сферы очень удобно использовать пластмассовый шарик для настольного тенниса). Покажем, как это будет выглядеть в случае нашего простейшего сферического графа (Рис.6).

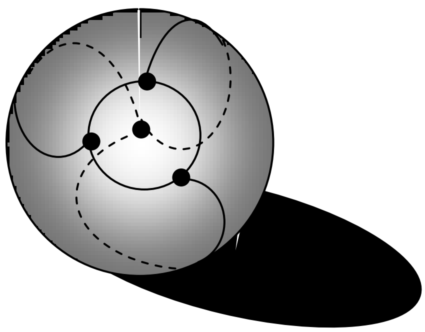


Рис. 6

Как видим, из Рис.6, простейший сферический граф разбивает поверхность сферы на 4 области, т. е. будем говорить, что данный граф имеет 4 грани (будем обозначать это – ***Г*=4**).

Граф, показанный на Рис. 5 также разбивает плоскость на 4 части (три треугольника и внешняя часть).

Заметим, что простейший сферический граф, уложенный на сфере, изоморфен простейшему полиэдру - тетраэдру.

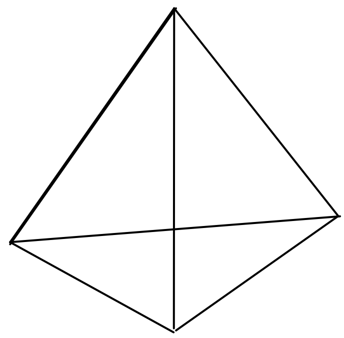


Рис.7

В дальнейшем нам понадобится также теорема Эйлера. Доказательство теоремы Эйлера ([3], стр. 41) мы здесь не приводим.

Теорема Эйлера:

Для всякого полиэдра верно равенство:

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{P} = \mathbf{2}. \tag{2}$$

Следствие:

Для всякого сферического графа справедливо неравенство:

$$\boldsymbol{P} \le \mathbf{3}\boldsymbol{B} - \mathbf{6}. \tag{3}$$

Доказательство:

Каждая грань сферического графа ограничена, по крайней мере, тремя рёбрами. С другой стороны, каждое ребро принадлежит двум граням. Поэтому: $\mathbf{3}\boldsymbol{\Gamma} \le \mathbf{2}\boldsymbol{P}$. Подставим это неравенство в (2), получим:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{2} \le \boldsymbol{B} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{P} - \mathbf{2}$$

или

$$\boldsymbol{P} \le \mathbf{3}\boldsymbol{B} - \mathbf{6}.$$

Покажем примеры простых сферических графов, для которых $\boldsymbol{P} \le \mathbf{12}$. Мы ограничились здесь этим значением $\boldsymbol{P}$, т.к. точно известно, что в этих пределах планарные графы однозначно укладываются на сферу, а при $\boldsymbol{P}$>**12** уже появляются графы, для которых эта однозначность не сохраняется.

Из определения сферического графа заключаем, что

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i \geq 3\boldsymbol{B}\,.$$

Но из (3) имеем $3\boldsymbol{B} \geq \boldsymbol{P}+6$. Кроме этого известно, что $\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i = 2\boldsymbol{P}$**.** Поэтому получаем такое характеристическое неравенство:

$$2\boldsymbol{P} \geq 3\boldsymbol{B} \geq \boldsymbol{P}+6 \qquad (4)$$

и

$$\boldsymbol{P} \geq 6\,.$$

Кроме этого введём ещё один критерий поиска в виде неравенства:

.
$$\max(\mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i) \leq \boldsymbol{B}-1 \qquad (5)$$

Действительно, в противном же случае не избежать петель и кратных рёбер, что противоречит определению простого сферического графа.

Приступим к поиску графов. Т. е., зная ***P*,** нам необходимо найти ***B*,** ***Г*** и $\mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i$. Зная все эти характеристики графа уже можно попытаться представить его наглядно.

Пусть ***P*=6**, тогда из (4) получаем:

$$12 \geq 3\boldsymbol{B} \geq 12\text{, т. е. } \boldsymbol{B} = \mathbf{4}.$$

По формуле Эйлера (2) находим, что ***Г*=4**. Это как раз и есть тот граф, который изображён на Рис. 7. Для этого графа $\mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i = 3$, что не противоречит критерию (5).

Существует ли сферический граф с числом рёбер ***P*=7**? Из (4) заключаем, что должно быть справедливо неравенство:

$$14 \geq 3\boldsymbol{B} \geq 13\,.$$

Но этого не может быть ни при каких целых ***B***. Следовательно, сферического графа с числом рёбер ***P*=7** не существует. Следовательно не существует и многогранника с числом рёбер ***P*=7.**

При ***P*=8** получаем такое характеристическое неравенство:

$$16 \geq 3\boldsymbol{B} \geq 14\text{, т. е. } \boldsymbol{B} = \mathbf{5}.$$

По формуле (2) находим число граней: ***Г*=8+2–5=5**.

$$\sum \deg B_i = 2P = 16 = (3+3+3+3+4).$$

Т. о., получаем такой граф:

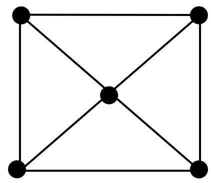


Рис. 8

Прежде, чем продолжить наши поиски, необходимо сделать одно уточнение. Мы ведём свои исследования только среди планарных графов и, потому, необходимо иметь критерий планарности графа. Одним из таких критериев является **теорема** Понтрягина – Куратовского ([4], стр. 133):

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, изоморфных графам:

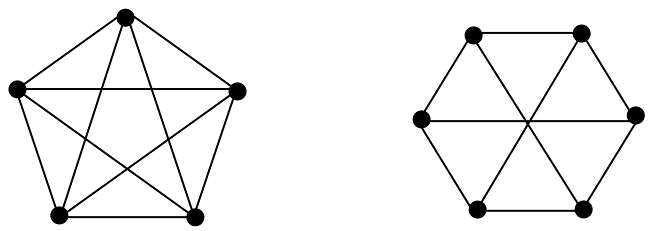


Рис. 9

Теперь продолжим наши исследования.

При $\boldsymbol{P} = \mathbf{9}$ имеем такое соотношение: $18 \geq 3B \geq 15$. Этому неравенству удовлетворяют два значения $\boldsymbol{B}$:

При $\boldsymbol{B}$=**5** получаем: $\boldsymbol{\Gamma}$=**9+2–5=6** и $\sum \deg B_i = 18 = (3+3+4+4+4).$ Этим характеристикам отвечает такой граф:

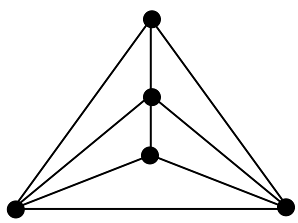
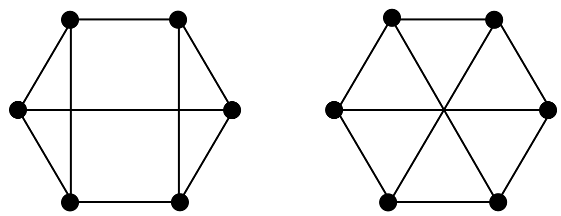


Рис. 10

Кроме этого, $\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i = \mathbf{18}$ допускает ещё два разложения по степеням вершин: **(3+3+3+4+5)** и **(3+3+3+3+6)**, но оба эти разложения противоречат критерию (5).

При ***B*=6** получаем: ***Г*=9+2–5=5** и единственное разложение по степеням вершин: $\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i = \mathbf{18} = (\mathbf{3+3+3+3+3+3})$.

Существуют два графа с такими характеристиками.



а) б)

Рис. 11

Но замечаем, что граф б) Рис. 11 не отвечает критерию планарности и поэтому мы должны исключить его из нашего рассмотрения.

В дальнейшем не планарные графы мы мы приводить не будем, т. к. они не представляют для нас интереса.

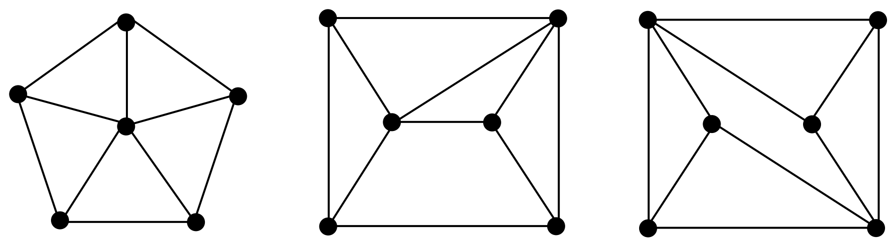
При ***P*=10** имеем такое характеристическое неравенство: $\mathbf{20 \geq 3\boldsymbol{B} \geq 16}$. Этому неравенству удовлетворяет значение ***B*=6**:

$$\boldsymbol{Г}\mathbf{=10+2-6=6,}$$

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_{i,} = \mathbf{20} = (\mathbf{3+3+3+3+4+4}),$$

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_i = \mathbf{20} = (\mathbf{3+3+3+3+3+5}).$$

Получаем такие графы:



а) б) в)

Рис.12

Обращаем внимание читателя на граф, изображённый на Рис.12 в). Для этого сферического графа не существует изоморфного полиэдра (многогранника). Почему? Так же заметим, что на Рис.12 б) и в) изображены графы, у которых число вершин, число рёбер, число граней, разложение по степеням вершин и состав граней (4 треугольника и 2 четырёхугольника) одинаковы. А между тем, топологически эти графы различны (не изоморфны). Это говорит о том, что граф должен иметь ещё какую-то характеристику, скрытую на первый взгляд. Одной из таких характеристик и является изоморфизм сферического графа многограннику.

При $\boldsymbol{P}$=**11** имеем: $\mathbf{22 \geq 3\boldsymbol{B} \geq 17}$.

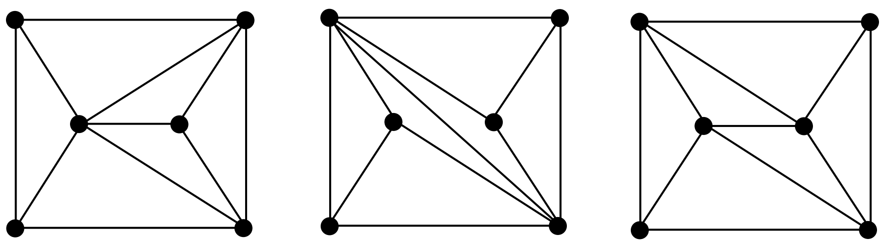
Этому неравенству соответствуют два значения $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{B}$**=6,** $\boldsymbol{B}$**=7.**
При $\boldsymbol{B}$=**6**,

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{=11+2-6=7,}$$

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_{i,} = \mathbf{22} = (\mathbf{3+3+4+4+4+4}),$$

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_{i} = \mathbf{22} = (\mathbf{3+3+3+4+4+5}),$$

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_{i} = \mathbf{22} = (\mathbf{3+3+3+3+5+5}).$$



а) б) в)

Рис. 13

При $\boldsymbol{B}$=**7**,

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{=11+2-7=6,}$$

$$\sum \mathbf{deg}\, \boldsymbol{B}_{i,} = \mathbf{22} = (\mathbf{3+3+3+3+3+3+4}).$$

Вся работа передана в РАН