О симметрии и асимметрии

Соображения симметрии и инвариантноси
давно уже играют в физике важную роль.

Е. Вигнер ([1], стр. 214)

«Когда-то симметрию называли «гармонией мира»» [1]. Сегодня с этим словом знакомится каждый школьник, как только он начинает изучать геометрию. Такие понятия, как осевая или зеркальная симметрия, центральная симметрия, симметрия поворотов знакомы всем. Каждый, кто хоть раз сталкнулся с восточными узорами в архитектуре, настенной и напольной мозаикой или завораживающими переплетениями на коврах (Рис. 1), невольно начинает понимать, что все эти хитросплетения относятся к симметрии, которую принято называть геометрической.

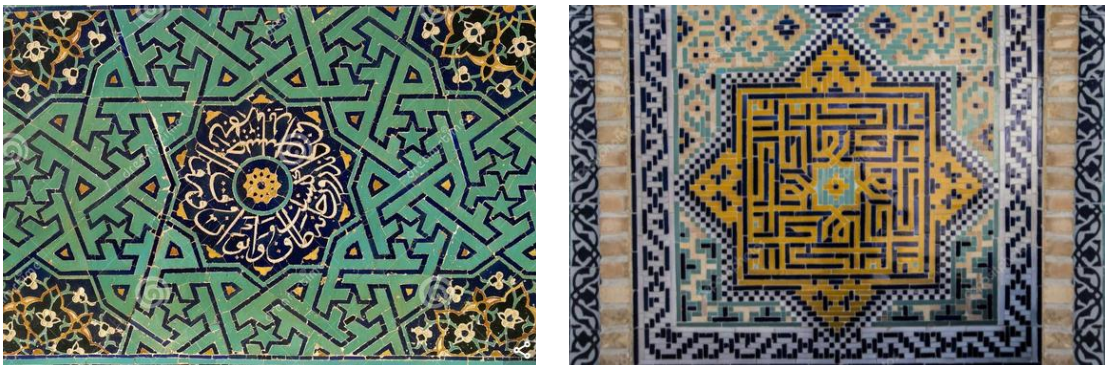

Рис. 1

А, между тем, мало кто задумывался, сколько же всего существует разновидностей (типов) плоских орнаментов. В своё время такой вопрос поставили математики и выяснилось (например, [3], стр. 125), что существует всего 17 существенно различных типов орнаментов. Не так уж и много. Их даже можно все показать, но мы не будем тратить на это время. В узорах ревних архитекторов все они были использованы, хотя вряд ли кто из них в те далёкие времена мог об этом задумываться.

Симметрию, порой, не сразу можно и заметить. Симметрия, зачастую, бывает скрытной. Всем известны три знаменитых трансцендентных числа $\boldsymbol{\pi}$ (пи), $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ (фи). Ни наука, ни искусство, ни сама жизнь не могут обойтись без этих чисел. Вернее – эти числа сами вдруг появляются в нашем поле зрения. Мы не ищем их специально, но они упорно дают о себе знать. Все эти числа трансцендентные – десятичный «хвост» каждого из этих чисел бесконечен. Какая уж здесь симметрия. А между тем, каждое из этих чисел по своему связано с симметрией. Число $\boldsymbol{\pi}$ – это отношение длины окружности к её диаметру. Уж более чем окружность нет на плоскости симметричной фигуры. И осевая –

зеркальная, и центральная, и поворотная всё здесь. Подобным образом можно определить и число φ («золотая» пропорция) – отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне. Правильный пятиугольник – фигура тоже очень симметричная. А в живой природе симметрия пятого порядка, пожалуй, самая распространённая. А многочисленные вирусы почти все обладают симметрией икосаэдра, в основе которой также лежит симметрия пятого порядка. Так что числа π и φ напрямую связаны с симметрией (Рис.2).

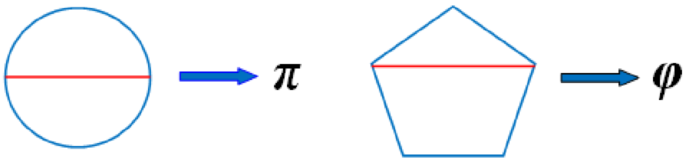

Рис. 2

Немного по другому обстоит дело с числом e – основанием натуральных логарифмов.

Оказывается, что существует не только геометрическая симметрия, но и алгебраическая. Сейчас вы всё поймёте. Неискушённый читатель вряд ли знаком с теоремой об «Исключении» ([5], стр. 160). Простыми словами, не прибегая к математическим иероглифам, эту теорему можно описать так. Рассмотрим действительные числа большие единицы. Оказывается, что для любого числа X существует такое число Y не равное X, что выполняется равенство: $X^Y = Y^X$. Но исключением для данной теоремы как раз и является число e. Для числа e нет числа отличного от e, чтобы выполнялось данное равенство.

$$X^Y = Y^X \longrightarrow e$$

Рис. 3

Думаю, что каждый из вас видит алгебраическую симметрию уравнения теоремы об «Исключении».

Немного отвлечёмся и отметим, что числа π и e связаны между собой удивительной формулой Эйлера - $e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$. Кроме того. Есть исследования [6], где показано, что числа эти связаны с симметрией самого пространства-времени (П-В). Число π отвечает за изотропность П-В (одинаковость по всем направлениям), а число e связано с однородностью П-В.

Более хитро связаны между собой числа $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\varphi}$. Это относится опять же к теореме об «Исключении». Но оказывается, что есть формула, которая связывает все три знаменитых числа вместе. Эта формула имеет вид: $\boldsymbol{w} = \dfrac{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{\pi}}$. Связана она с изучением паркетов и теорией вероятностей ([5], стр. 179). Но сегодня мы говорить об этом не будем.

Говоря о геометрической симметрии мы имели в виду симметрию на плоскости. Симметрия пространства связана в первую очередь с миром природы, миром кристаллов. Ведущую роль в исследовании пространственных кристаллографических групп сыграли работы известного российского учёного Е. С. Фёдорова ещё в позапрошлом веке. Таких групп симметрий оказалось ровно 230. Помните, на плоскости существует 17 групп, а в пространстве – 230. В нашем разговоре появилось слово «группа» и это не случайно, но об этом чуть позже.

Системно подошёл к исследованию симметрии французский учёный, лауреат Нобелевской премии (получена не за изучение симметрии) Пьер Кюри. Он ввёл понятие: *предельная группа симметрии*. Оказалось, что предельных групп существует 7. Наглядно их можно представить тремя фигурами: Шаром (двух видов: стационарным и закрученным вокруг выбранного диаметра), конусом (двух видов: опять же стационарным и закрученным вокруг своей высоты) и цилиндром (трёх видов: стационарным, закрученным и скрученным, подробнее об этом см. [7]).

Как оказалось симметрии не только помогают увидеть скрытые стороны каких-то объектов, но и сами могут выступать в качестве элементарных объектов геометрических и алгебраических структур. Все мы знаем, что существует не мало различных геометрий. Всем нам знакома геометрия Эвклида, которую мы изучаем в школе или геометрии Лобачевского и Римана, которые взяли на вооружение физики. Но оказывается можно построить геометрию, где в качестве точек будут использованы одни симметрии, а в качестве прямых – другие [4]. Пока – это экзотические исследования, но не исключаю возможности, что когда-нибудь и геометрия, построенная на основе понятия симметрии, будет востребована, например, в биологии или экологии.

Симметрия во многом помогает науке правильно понимать законы природы. Очень показательным в этом случае является создание теории электромагнетизма. Только вдумайтесь, ведь вся наша цивилизация построена на этой теории. Мы уже не можем педставить себя без электричества, без интернета, без телефонов и телевизоров, без полётов в космос и пр.. «*Электромагнитное взаимодействие* лежит в основе большинства процессов окружающего нас мира – от масштабов нашей планеты до атомов и молекул» ([9], стр. 95). А в основе всего лежат уравнения Максвелла.

Максвелл, записывая свои уравнения, руководствовался тем, чтобы символы, которые описывают магнитные явления были симметричны в уравнениях символам, описывающих электрические явления. Он умышленно приводил свои уравнения в кватернионовом виде к симметричному представлению [8]. Чуть позже Хевиссайд, переписывая и подстраивая уравнения Максвелла для инженерных нужд уже в векторном виде, тоже старался придавать им симметричный вид [2]. В результате мы получили изумительную первую теорию поля. Не будь этой симметрии в уравнениях, возможно, и не случилось бы открытия электромагнитного поля. По сути – это теория симметрии электричества и магнетизма.

Сегодня теорию групп, порой, называют теорией симметрии. Возможно, историки науки будут называть когда-нибудь XX век эпохой симметрии [9]. Сегодня вся передовая наука немыслима без теории групп. А началось всё наверное с «Эрлангенской программы», когда немецкий математик Ф. Клейн предложил рассматривать каждую геометрию в непосредственной связи с конкретной группой Ли (группой преобразований). В связи с этим можно например отметить, что каждой из семнадцати групп плоских орнаментов соответствует своя геометрия [10].

Сегодня теоретическая физика и особенно стандартная модель (СМ) вся пронизана экзотическими симметриями. Четыре силы взаимодействий, которые сегодня известны в науке (электромагнитное, слабое, сильное или ядерное и гравитационное), начали своё великое объединение благодаря открытию симметрий, которыми они описываются. Вообще вся современная квантовая механика очень тесно связана с теорией групп. Симметрии, которые описываются группами, используемыми в квантовой механике, имеют общее название калибровочных потому, что используют калибровочные преобразования. Одна из черт этих преобразований, которая привлекла физиков, это то, что калибровочная симметрия описывает дальнодействующие поля. А мы знаем, что свойством дальнодействия обладает и электромагнитноен поле, и гравитационное.

Симметрия, которая объединила два взаимодействия электромагнитное и слабое в рамках СМ, называается унитарной симметрией и обозначается $\boldsymbol{SU}(2)$. Ядерное взаимодействие описывается симметрией $\boldsymbol{SU}(3)$. «Поиск новых симметрий стал главным средством, помогающим физику в наши дни продвигаться к пониманию мира» [8]. Может быть это будет какая-то новая симметрия $\boldsymbol{SU}(2)$ X $\boldsymbol{SU}(3)$ = $\boldsymbol{SU}(5)$.

Уже очерчены общие характерные контуры в свойствах и строении теории атомных ядер. Симметрия, описывающая эти своиства назвается симметрией изотопического спина. По словам П. Девиса «...все взаимодействия существуют лишь для того, чтобы поддерживать в природе некий набор абстрактных симметрий» ([8], стр. 123).

Чтобы объединить все силы взаимодействия в одну требуется какая-то неизвестная пока *суперсимметрия*. Дело поиска этой суперсимметрии – задача математиков.

Однако, вторя Е. Вигнеру, а его слова и сегодня очень актуальны, хочется задать вопрос: «почему теория групп описывает природу»?

Теперь скажем несколько слов об асимметрии.

Мы говорили о симметрии в окружающем нас мире и что большую, даже основополагающую роль в описании симметрии играет теория групп. Но всмотримся в то, что нас окружает в повседневной жизни. Глядя в зеркало мы видим, что наше тело в общем-то симметрично и при этом помним, что у нас например, одно сердце и одна печень, но расположены они в организме не симметрично. Сердце -слева, печень – справа. Листья на деревьях похожи один на другой. Это называется симметрией подобия, но, всмотревшись в них повнимательнее замечаем, что каждый лист индивидуален. А вот миллионы и миллиарды электронов неразличимы между собой (Правда недавно появились сообщения, что электрон состоит из трёх виртуальных частиц $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ и, возможно, скоро каждый электрон получит свои уникальные отличия). Неразличимость электронов – это одна из причин почему квантовой механике понадобились группы. Элементы группы тоже неразличимы, но бинарные отношения между элементами играют существенную роль. Кстати, говоря о группах, надо помнить, что внутренняя структура группы двояка. Есть группы с симметричной структурой, они называются абелевы. И есть группы асимметричные - неабелевы. Если рассматривать два элемента группы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, то для абелевых групп характерно выражение произведения $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, а для неабелевых групп существенно неравенство: $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Последнее выражение очень актуально для квантовой механики. Молодой Гейзенберг чуть рассудка не лишился не понимая, как это может быть, что реальные физические операции $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ могут быть не коммутативны, т. е. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Кстати, рассуждая над последним неравенством можно записать: $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{\hbar}$ – какая-то малая величина (квантовая механика описывает ведь микромир). А обозначив: $\boldsymbol{A} = \Delta \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{B} = \Delta \boldsymbol{x}$ (имея в виду импульс и координату соответственно) и, сделав необходимые преобразования, получаем $\Delta \boldsymbol{p} \Delta \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\hbar}$. Возможно именно такие рассуждения привели Гейзенберга к важнейшему закону кантовой механики - принципу неопределённостей.

Мне не известно, каких групп больше абелевых или неабелевых. И тех, и других очень много и сушественную роль, видимо, играют асимметричные группы, т. е. неабелевы. Если вдуматься, то именно асимметрия делает наш мир таким каким мы его воспринимаем (и визуально, и через приборы).

Появившаяся в физике асимметричность поначалу очень удивляла учёных. Но потом эта асимметричность была строго доказана и все приняли это за закон природы. Очень показателен в этом асимметричный процесс $\boldsymbol{\beta}$ – распада, когда из зеркально симметричной установки электроны вылетают асимметрично.

Какждый из нас наверно задумывался, почему не существует антимир? Ведь существуют же античастицы. Из них точно так же могут складываться атомы и молекулы и в конечном итоге – жизнь. Оказалось, что и в этом надо винить (или благодарить) закон рождения частиц и античастиц. На каждые 100000 античастиц рождалось 100000+1 частица. Потом 100000 частиц и античастиц анигилировали, превратившись в фотоны, а одна частица оставалась. И таким образом сформировался наш мир. Не исключено, что существует Вселенная, где работает закон обратной асимметрии, где на 100000 частиц рождалось 100000+1 античастица. В такой Вселенной существовал бы антимир.

Или вспомним проблему с магнитным монополем. Элементарный целый электрический заряд существует – это заряд электрона. А частицы с элементарным магнитным зарядом не существует, хотя может быть его ещё просто не открыли.

Порой, проявление асимметрии настолько незначительно, что казалось об этом и говорить не стоит. Как в случае с космологической постоянной. Оказывается она существует ([11]. стр. 200). Причём, её первые 119 десятичных цифр равны нулю, а отлична от нуля только 120-ая. Только представьте себе: если бы первой значащей цифрой была 119-ая, то мир бы разлетелся и никакие галактики так и не могли бы сформироваться. А если бы значащей была 121 десятичная цифра, то всё во Вселенной после Большого Взрыва, только начав расширяться, схлопнулось бы вдруг в одну большую чёрную дыру. Страшно подумать на каком волоске держится Мироздание. И держится довольно устойчиво.

Практически вся биология асимметрична (ДНК и прочие спирали).

А взять снежинки. Каждая снежинка обладает симметрией шестого порядка, но двух одинаковых не найти их просто не бывает. Сплошная асимметрия.

Рис.4

Отдельно хотелось бы поговорить об одной научной задаче - асимметрии на плоскости. Имеется в виду мозаика из плоских плиток, выложенная на полу без пробелов. Симметрия таких мозаик хорошо изучена. Потом взялись изучать асимметрию плоских мозаик. Вопрос стоял так: существуют ли плитки из которых всегда выкладывается асимметричная (непериодическая) мозаика? Набор первых таких плиток был очень большим. Потом его удалось уменьшить до 104 плиток. Потом уменьшили до шести, потом - до трёх (Рис. 5, слева), потом - до двух (Рис. 5, в центре), а потом и до одной плитки (Рис. 5, справа).

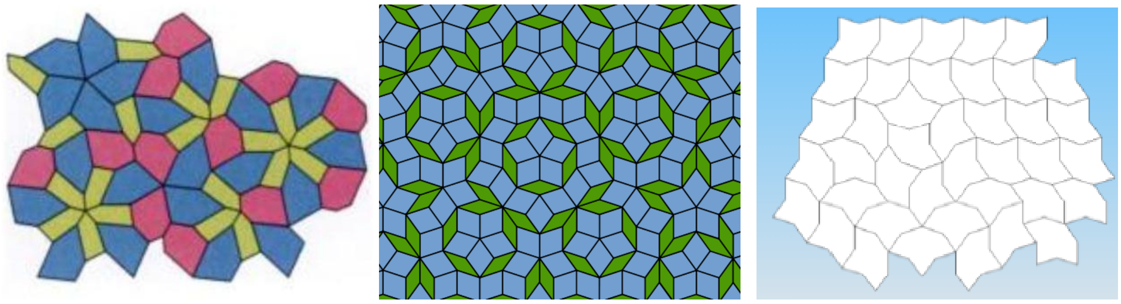

Рис. 5

Как бы мы не присоединяли плитки друг к дргу, мозаика всегда получаась асимметричной.

А потом вдруг произошло невероятное. Израильский химик Д. Шехтман обнаружил в природе квазикристалл (Рис. 6). Асимметрия квазикристалла Шехтмана очень напоминает квазикристалл Пенроуза (Рис. 5, в центре). Д. Шехтман в 2011 году получил за это открытие Нобелевскую премию.

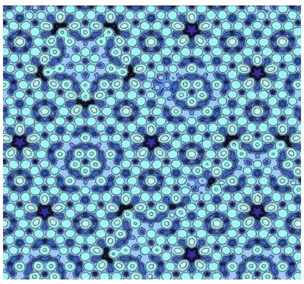

Рис. 6

Так что асимметрия в природе встречается довольно часто.

Если предположить, что асимметрия играет главенствующую роль в мире, то это как-то должно проявляться и в самой математике. Действительно, это так и есть.

Всё в математике началось с числа, а уж потом появилась геометрия. Возьмём натуральный ряд чисел. Этот замечательный ряд глубоко асимметричен. И эту асимметрию вносят в него простые числа, которые непонятным образом разбросаны между другими числами.

А как быть с геометрией? Очнь трудно разыскать фундаментальную асимметрию в евклидовой геометрии. Стоп! Эвклидова геометрия – это не фундаментальные основы геометрии. Эвклидова геометрия – это производная геометрия от геометрии проективной. Именно проективная геометрия является основой всякой другой геометрии и геометрии Эвклида, геометрии Лобачевского, и геометрии Римана, и многих дргих геометрий. Основной и единственный инвариант (неизменный объект при преобразованиях) в проективной геометрии – это сложное отношение четырёх точек на проективной прямой. Этот инвариант характеризуется шестью числовыми значениями, которые образуют группу шестого порядка. И эта группа неабелева. Тут и проявилась фундаментальная асимметрия в геометрии.

Литература

1. Е. Вигнер, «Этюды о симметрии», М., «Мир», 1971
2. В. М. Дуков, «Электродинамика», М., «Высшая школа», 1975
3. Г. Вейль, «симметрия», М., «Наука», 1968
4. Ф. Бахман, «Построение геометрии на основе понятия симметрии», М., «Наука», 1969
5. Ф. Герман, «Поэзия разума», Saarbrücken, „LAP LAMBERT Academic Publishing“, 2015
6. Б. Горобец, «Мировые константы и в основных законах физики и физиологии», «Наука и жизнь» №2, 2004
7. А. С, Сонин, «Постижение совершенства», М., «Знание», 1987
8. П. Девис, «Суперсила», М., «Мир», 1989
9. Ю. С. Владимиров, «Пространство-время: явные и скрытые размерности», М., «Наука», 1989
10. В. В. Никулин, И. Р. Шафаревич, «Геометрии и группы», М., «Наука», 1983
11. Л. Сасскинд, «Космический ландшафт», Издательство «Питер», 2015

Ф. Г.