

Франц Герман

Инвертированный репер franz.h-n@yandex.ru

Рассмотрим произвольный четырёхвершинник $A_1A_2A_3A_4$ на проективной плоскости (Рис.1).

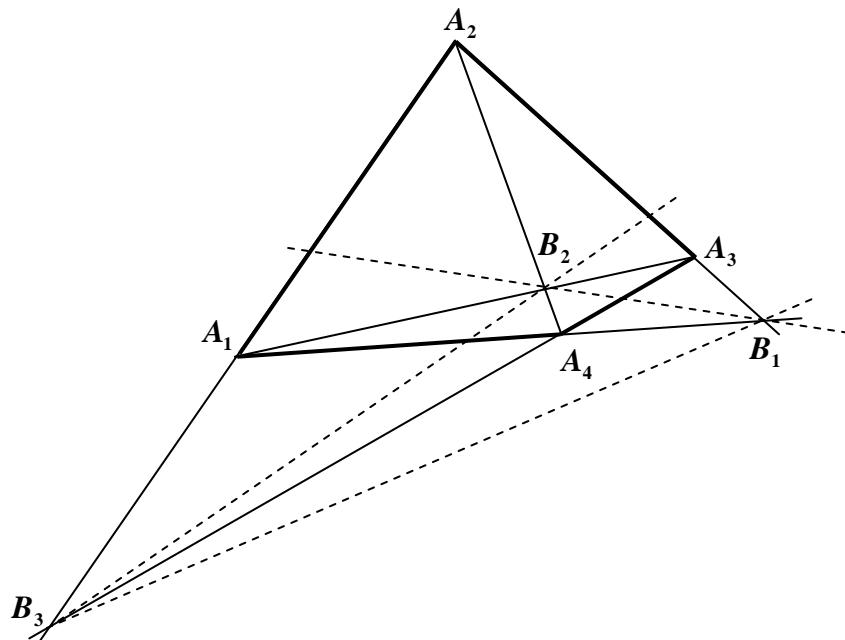


Рис. 1

Традиционно определим координатный репер R : $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $A_4(1:1:1)$. Теперь вычислим координаты точек B_i . Точка $B_1 \equiv A_1A_4 \cap A_2A_3$. Прямая A_1A_4 имеет уравнение:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_3 - x_2 = 0. \quad \text{Уравнение прямой } A_2A_3 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 = 0.$$

Решая систему уравнений: $\begin{cases} x_3 - x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$, находим координаты точки $B_1(0:1:1)$. Аналогично находим координаты точек $B_2(1:0:1)$ и $B_3(1:1:0)$. Заметим, что координаты точек A_i и B_i инвертированы относительно друг друга. Отсюда и вводится понятие инвертированного репера. Репер R^* : $\{B_1, B_2, B_3, A_4\}$ будем называть **инвертированным репером** по отношению к реперу R .

Найдём преобразование плоскости, которое переводит точки репера R в точки репера R^* .

Пусть наше преобразование задаётся матрицей $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ и

$$B_i = M \cdot A_i.$$

Преобразование M будем называть преобразованием координатного инвертирования или K – *инверсией* (не путать с инверсией на евклидовой плоскости). Очевидно, что такое преобразование не однозначно. В общем случае таких преобразований может быть 6, в зависимости от того, какая точка одного репера преобразуется в какую точку другого репера. Сначала рассмотрим преобразования для $i = j$, т. е. $B_i = M_1 \cdot A_i$.

Вычислим элементы преобразования M_1 .

Развернём уравнения $B_i = M_1 \cdot A_i$. Получим три системы уравнений с девятью неизвестными m_{ij} . Из уравнения $B_1 = M_1 \cdot A_1$ получаем систему:

$$\begin{cases} m_{11} \cdot 1 + m_{12} \cdot 0 + m_{13} \cdot 0 = 0 \\ m_{21} \cdot 1 + m_{22} \cdot 0 + m_{23} \cdot 0 = 1. \\ m_{31} \cdot 1 + m_{32} \cdot 0 + m_{33} \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

Откуда получаем: $m_{11} = 0$, $m_{21} = 1$, $m_{31} = 1$.

Аналогично находим и остальные элементы преобразования M_1 :

$$m_{12} = 1, m_{13} = 1, m_{22} = 0, m_{23} = 1, m_{32} = 1, m_{33} = 0, \text{ т. е. } M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем остальные пять преобразований M_i . Для преобразования

$$A_1 \rightarrow B_1, \quad A_2 \rightarrow B_3, \quad A_3 \rightarrow B_2 \quad \text{получаем преобразование: } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ соответствует преобразованию: } A_1 \rightarrow B_2, \quad A_2 \rightarrow B_1, \quad A_3 \rightarrow B_3.$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ соответствует преобразованию: } A_1 \rightarrow B_2, \quad A_2 \rightarrow B_3, \quad A_3 \rightarrow B_1.$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ соответствует преобразованию: } A_1 \rightarrow B_3, \quad A_2 \rightarrow B_1, \quad A_3 \rightarrow B_2.$$

$$\text{И последнее преобразование } M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ переводит: } A_1 \rightarrow B_3, \quad A_2 \rightarrow B_2,$$

$A_3 \rightarrow B_1$. В дальнейшем мы будем рассматривать только преобразование $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, т. к. исследования остальных преобразований M_i строятся аналогично.

Рассмотрим реперные треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ (Рис. 2). Как видим, эти треугольники имеют центр перспективы в точке A_4 . Рассмотрим в какую точку $X(x_1 : x_2 : x_3)$ преобразуется точка A_4 . Т. е. решим систему уравнений $x_i = M_1 \cdot a_i$, где a_i - координаты точки A_4 . Как оказалось, точка A_4 при данном преобразовании переходит в саму себя, т. е. остаётся неподвижной. Напомним, что в проективной геометрии однородные координаты точки определяются с точностью до постоянного множителя p : $X(x_1 : x_2 : x_3) \equiv X^*(px_1 : px_2 : px_3)$, т. е. точки X и X^* - тождественны (одна и та же точка).

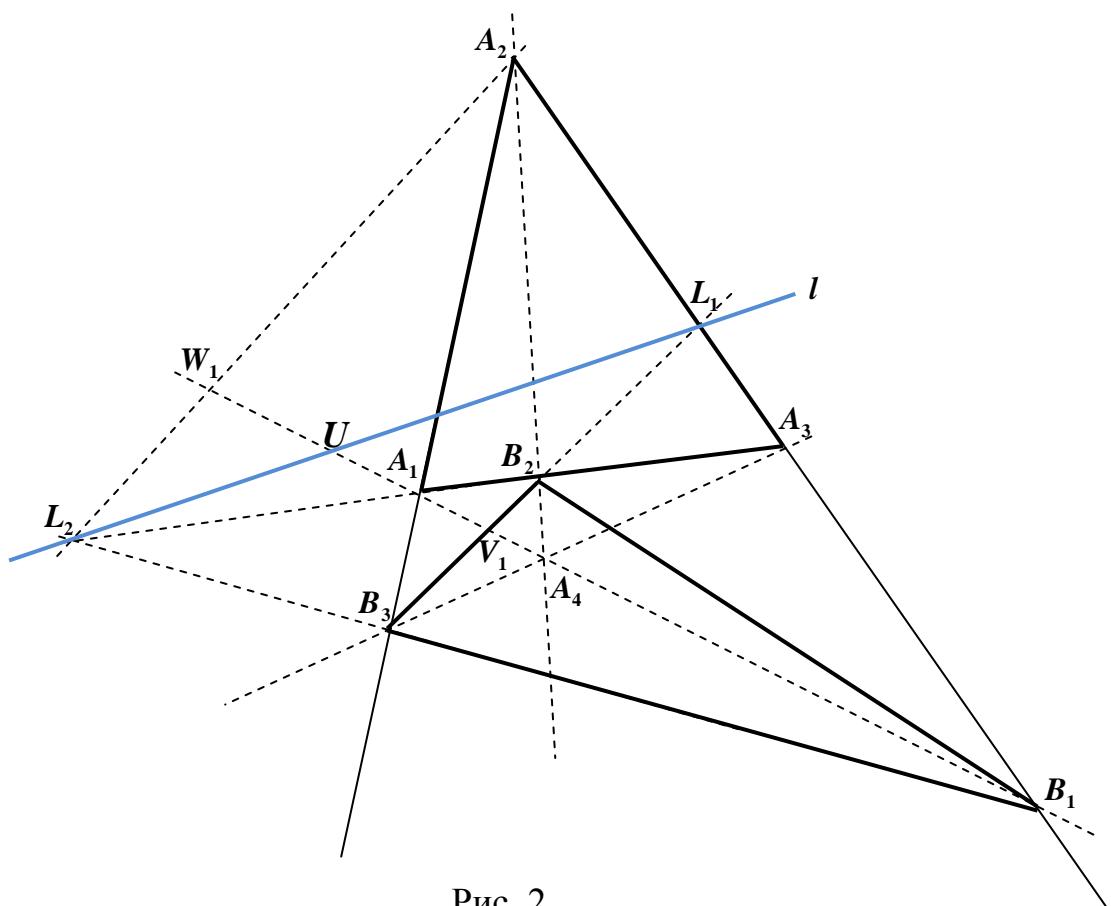


Рис. 2

Рассмотрим в общем виде вопрос о неподвижных точках преобразования M_1 . Обозначим через $X(x_1 : x_2 : x_3)$ неподвижные точки. Тогда имеем такую систему уравнений: $px_i = M_1 \cdot x_i$. Или $M_1 \cdot (1-p) \cdot x_i = 0$. Развёрнём данное уравнение:

$$(1-p) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

В результате получаем: $(1-p) \cdot (x_i + x_j) = 0$, где p – произвольный множитель. В общем виде решение можем записать:

$$\begin{cases} (x_i + x_j) = 0 \\ x_k = 0 \end{cases}, i \neq j \neq k \quad (1)$$

Покажем примеры неподвижных точек.

Точка $L_1 \equiv A_2A_3 \cap B_2B_3$. Уравнение прямой A_2A_3 имеет вид: $x_1 = 0$.

Уравнение прямой B_2B_3 : $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_2 + x_3 - x_1 = 0$. Из решения этих

уравнений находим координаты точки $L_1(0:1:-1)$. Не трудно убедиться, что координаты этой точки удовлетворяют системе (1) для неподвижных точек. Координаты точки $L_2 \equiv A_1A_3 \cap B_1B_3$ находятся аналогично $L_2(1:0:-1)$.

По теореме Дезарга точки L_i лежат на одной прямой. С другой стороны точки $L_i \equiv A_jA_k \cap B_jB_k$ определяют неподвижные точки пересечения прямых образа и прообраза преобразования M_1 . Т. о., прямая $l \equiv L_1L_2$ будет являться осью перспективы для центра перспективы в точке A_4 . Т. е. M_1 – является перспективным преобразованием плоскости.

Докажем линейность преобразования M_1 . Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку A_4 . Возьмём три точки на этой прямой. Не нарушая общности, можем взять точки: A_1 , A_4 и некоторую точку

$X(1:m:n)$. Т. к. эти точки лежат на одной прямой, то $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & n \end{vmatrix} = n - m = 0$, т.

е. $m = n$. После преобразования точка A_1 перейдёт в точку B_1 . Точка A_4 останется на месте. А точка X перейдёт в некоторую точку $Y \equiv M_1 \cdot X$. Из последнего тождества определяем координаты точки Y .

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n \end{pmatrix}$$

Т. о. получаем: $Y(2n:1+n:1+n)$. Вычислим определитель, составленный из точек B_1, A_4, Y .

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2n & 1+n & 1+n \end{vmatrix} = 2n+1+n-2n-1-n = 0$$

А т. к. определитель равен нулю, то, полученные точки, лежат на одной прямой.

Теперь выясним как преобразуется прямая, не проходящая через точку A_4 . Не нарушая общности можно выбрать три точки на произвольной прямой. Это могут быть точки A_1, A_2 и $X(1:n:0)$. Очевидно, что эти точки лежат на одной прямой. После преобразования, выбранные точки перейдут в точки: B_1, B_2 и $Y(n:1:1+n)$. Не трудно убедиться, что новые точки тоже лежат на одной прямой. Т. о., мы убедились, что преобразование M_1 является линейным. Так же не трудно убедиться в том, что точки образа и прообраза всегда лежат на прямой, проходящей через центр перспективы. Для этого достаточно вычислить определитель, составленный из координат точек $X(1:n:0), Y(n:1:1+n)$ и A_4 . Наконец, убедимся, что точки пересечения прямых образа и прообраза принадлежат оси перспективы, т. е прямой l .

Определим уравнение прямой l :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Уравнение прямой $A_1A_2: x_3 = 0$ (одна из прямых взятого координатного репера). Уравнение прямой $B_1B_2:$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + x_2 - x_3 = 0. \text{ Решая систему из двух последних уравнений}$$

$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ находим точку пересечения: $N(1:-1:0)$. Прямая

подстановка координат этой точки в уравнение прямой l , убеждает нас, что $N \in l$. Т. е., как мы и говорили ранее, такое преобразование, задаваемое оператором M_1 , называется перспективным.

Кроме этого убедимся, что преобразование M_1 является и проективным преобразованием. По определению проективного преобразования его единственным инвариантам должно быть сложное отношение четырёх точек на прямой. Покажем это. Сложное отношение

четырёх точек ($ABCD$) на прямой (Рис. 3) можно вычислять различными способами. Мы будем использовать координатный способ.



Рис. 3

Для вычисления сложного отношения должны быть использованы две из трёх координат взятых четырёх точек:

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (2)$$

В формуле (2) показано применение первой и второй координат точек.

Пример. Воспользуемся Рис. 2. Точки $L_2(1:0:-1)$, $A_1(1:0:0)$, $B_2(1:0:1)$, $A_3(0:0:1)$ лежат на одной прямой и координаты их известны. Вычислим сложное отношение этих точек. Заметим, что вторая координата у всех точек равна нулю, поэтому удобнее будет воспользоваться первой и третьей координатами.

$$(L_2A_1B_2A_3) = \frac{\begin{vmatrix} l_{21} & a_{11} \\ l_{23} & a_{13} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & a_{31} \\ b_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_{21} & a_{31} \\ l_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & a_{11} \\ b_{23} & a_{13} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1.$$

Кстати заметим, что сложное отношение четырёх точек называется гармоническим, если оно равно **-1**.

Теперь вычислим сложное отношение четырёх точек образа и прообраза. Для этого снова воспользуемся Рис. 2. Возьмём четыре точки $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $B_3(1:1:0)$ и $X(1:n:0)$, лежащие на одной прямой. Как расположены эти точки относительно друг друга мы не знаем. Важно, чтобы точки после преобразования были расположены относительно друг друга точно также, как и точки прообразов. Помним, что точки образа и прообраза связаны прямой, проходящей через центр перспективы. Можем построить такую схему расположения точек (Рис. 4):

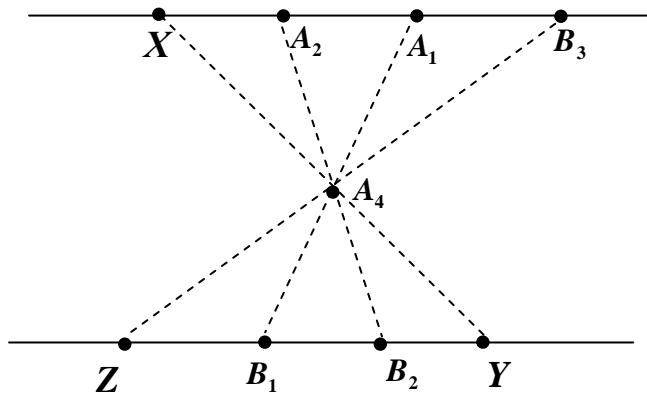


Рис. 4

Вычислим координаты точки Z . Это можно сделать по разному. Вычислить, как точку пересечения прямых $Z \equiv B_1B_2 \cap A_4B_3$ или, как образ точки $B_3 \xrightarrow{M_1} Z$. Имеем: $Z(1:1:2)$. Координаты остальных точек нам уже известны. Теперь вычисляем сложное отношение.

$$(XA_2A_1B_3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-n}, \quad (ZB_1B_2Y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-n}.$$

Т. о, мы показали, что преобразование M_1 также является и проективным преобразованием.

Рассмотрим последовательности точек на прямой A_1B_1 : $B_1 \xrightarrow{M_1} V_1 \xrightarrow{M_1} V_2 \xrightarrow{M_1} \dots \xrightarrow{M_1} V_n$ и $A_1 \xleftarrow{M_1} W_1 \xleftarrow{M_1} W_2 \xleftarrow{M_1} \dots \xleftarrow{M_1} W_n$ (Рис. 2).

Определим координаты точки $V_1(2:1:1)$.

$$\begin{cases} v_1 = m_{11} \cdot b_1 + m_{12} \cdot b_2 + m_{13} \cdot b_3 \\ v_2 = m_{21} \cdot b_1 + m_{22} \cdot b_2 + m_{23} \cdot b_3 \\ v_3 = m_{31} \cdot b_1 + m_{32} \cdot b_2 + m_{33} \cdot b_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v_1 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ v_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \\ v_3 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Получаем точку $V_1(2:1:1)$.

Определим координаты точки $W_1(w_1 : w_2 : w_3)$, которая переходит при преобразовании M_1 в точку исходного репера $A_1(a_1 : a_2 : a_3)$. Для этого необходимо решить систему уравнений $A_1 = M_1 \cdot W_1$. Получаем точку: $W_1(-1:1:1)$. Продолжая вычисления, находим следующие точки: $V_2(2:3:3)$, $V_3(6:5:5)$, $V_4(10:11:11)$, $V_5(22:21:21)$, $V_6(42:43:43)$ и т. д. и

точки $W_2(-3:1:1)$, $W_3(-5:3:3)$, $W_4(-11:5:5)$, $W_5(-21:11:11)$,
 $W_6(-43:21:21)$ и т. д..

Можно представить полученные результаты в таком табличном виде:

$W_6(-43:21:21)$	$W_6(-43:21:21)$
$W_5(-21:11:11)$	$W_5(-21:11:11)$
$W_4(-11:5:5)$	$W_4(-11:5:5)$
$W_3(-5:3:3)$	$W_3(-5:3:3)$
$W_2(-3:1:1)$	$W_2(-3:1:1)$
$W_1(-1:1:1)$	$W_1(-1:1:1)$
$A_1(1:0:0)$	$W_0 \equiv U_0(1:0:0) \equiv A_1$
$B_1(0:1:1)$	$U_1(0:1:1) \equiv B_1$
$V_1(2:1:1)$	$U_2(2:1:1) \equiv V_1$
$V_2(2:3:3)$	$U_3(2:3:3) \equiv V_2$
$V_3(6:5:5)$	$U_4(6:5:5) \equiv V_3$
$V_4(10:11:11)$	$U_5(10:11:11) \equiv V_4$
$V_5(22:21:21)$	$U_6(22:21:21) \equiv V_5$

и т. д.. Второй столбец подчёркивает координатное соответствие между точками U_n и W_n . Замечаем, что $x_2 = x_3$ для всех найденных точек. Более того, значения координат являются значениями числового ряда: **0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, ...**. Возникает задача, определить общую формулу, показанного ряда.

Обозначим общий член этого ряда через $T(n)$, где $n = \{0, 1, \dots, \infty\}$. Т. е. $T(0)=0$, $T(1)=1$, $T(2)=1$, $T(3)=3$ и т. д.. Справедливы рекурентные формулы:

$$T(n+1) = 2T(n) + (-1)^n, \quad (3)$$

$$T(n+1) = 2^n - T(n). \quad (4)$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} T(n+1) = 2T(n) + (-1)^n \\ T(n+1) = 2^n - T(n) \end{cases}$$

находим формулу общего члена, исследуемого ряда:

$$T(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \quad (5)$$

Теперь можем в общем виде представить точки W_n и U_n :

$$W_n(-T(n+1):T(n):T(n)) \equiv \left(-\frac{T(n+1)}{T(n)} : 1 : 1 \right)$$

$$U_n(2T(n-1):T(n):T(n)) \equiv \left(\frac{2T(n-1)}{T(n)} : 1 : 1 \right)$$

Вычисляя пределы координатных выражений при $n \rightarrow \infty$ получаем, что $W_n \rightarrow U(-2:1:1)$ (точка U показана на Рис. 2) и $U_n \rightarrow V_1(2:1:1)$. Схематично преобразование, взятых точек на исследуемой проективной прямой, можно показать на Рис. 5.

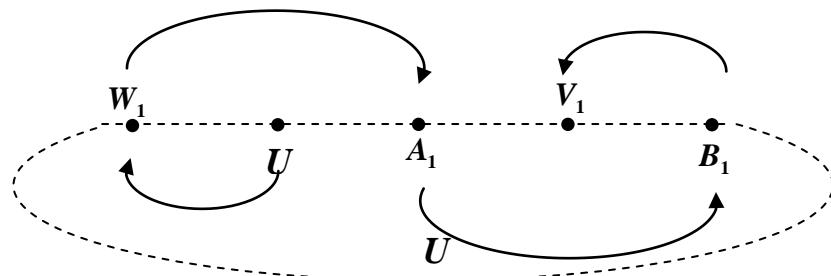


Рис. 5

Введём преобразования: $X = \frac{x_2}{x_1}$, $Y = \frac{x_3}{x_1}$. Теперь преобразования наших точек можем представить в ортогональных координатах X , Y (Рис. 6).

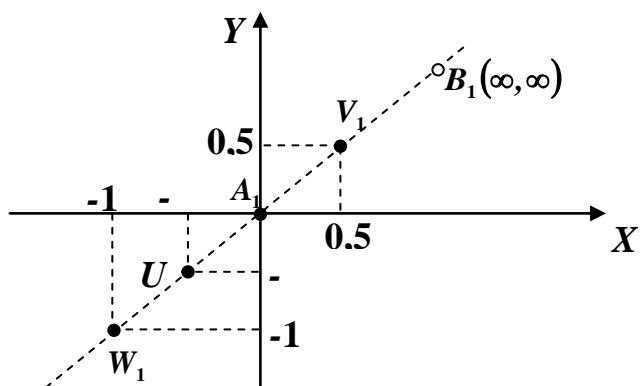


Рис. 6

Приложение**Группа преобразований k -инверсии**

Рассмотрим матрицы E_i :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Не трудно проверить, что эти матрицы образуют неабелеву группу шестого порядка. Определяющие формулы (по О. Ю. Шмидту) имеют вид:

$$(E_2)^2 = E_1, \quad (E_4)^3 = E_1, \quad E_2 E_4 = (E_4)^2 E_2.$$

Групповой операцией здесь является обыкновенная операция умножения двух матриц.

Чтобы показать, что и матрицы M_i преобразования k – инверсии, показанные на стр. 2 нашего изложения, образуют группу, достаточно определить групповую операцию « \circ ».

Итак, чтобы произвести умножение двух элементов группы $M_i \circ M_j$ необходимо:

1. инвертировать элементы матриц $M_i \rightarrow E_i$ и $M_j \rightarrow E_j$,
2. произвести умножение $E_i E_j = E_k$,
3. инвертировать $E_k \rightarrow M_k$,
4. записать $M_i \circ M_j = M_k$.

Пример: $M_5 \circ M_2 = M_6$

Заметим, что это не единственный способ определения групповой операции « \circ ». Кстати, описанная группа, изоморфна группе сложного отношения четырёх точек на проективной прямой, а также – симметрической группе третьего порядка.

Литература

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т., «Геометрия. Часть II», М., «Просвещение», 1987
2. Клиот-Дашинский М. И., «Алгебра матриц и векторов», «Из-во ЛГУ», 1974
3. Сщминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М, «О математической индукции», М., «Наука», 1967
4. Буземан Г., Келли П., «Проективная геометрия и проективные метрики», М., «ИЛ», 1957
5. Шмидт О. Ю., «Абстрактная теория групп», Киев, «Изд. Киевского унта», 1916
6. Бескин Н. М., «Деление отрезка в данном отношении», М., «Наука», 1973