Франц Герман

Минимальный периметр

franz.h-n@yandex.ru

Геометрическими построениями в задачах такого рода следует пользоваться осторожно…
(Мартин Гарднер)

Нашу заметку можно было бы назвать «Изопериметрические задачи». Но тогда, возможно, возникла бы путаница. Изопериметрическими, как правило, называют задачи, где задан постоянный периметр, а ищут минимальную площадь. Мы будем искать минимальный периметр при постоянной площади. И хотя выдающийся матемаитик Д. Пойа и утверждал, «что эти два утверждения равносильны», мы подчеркнули в названии статьи, что будем работать именно с минимальным периметром.

Рассмотрим такую задачу.

Задача 1. Имеется прямоугольник, площадь которого S – является величиной постоянной. Чему равен минимальный периметр такого прямоугольника?

Введём обозначения: a_1, a_2 - стороны искомого прямоугольника. Можем записать такую систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = S \\ a_1 + a_2 = \dfrac{P}{2} \end{cases}, \qquad (1)$$

где P – периметр искомого прямоугольника. Системе (1) соответствует квадратное уравнение:

$$a^2 - \frac{P}{2} \cdot a + S = 0. \qquad (2)$$

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2 + S}{a}. \qquad (3)$$

Известно, что для того чтобы найти экстремум функции необходимо вычислить её производную и, полученное выражение приравнять к нулю. Так и поступим.

$$P_a' = 2 \cdot \frac{(2a \cdot a) - (a^2 + S)}{a^2} = 2 \cdot \frac{a^2 - S}{a^2} = 0. \qquad (4)$$

Вычислим вторую производную: $P_a'' = \dfrac{4S}{a^3}$. Величина a всегда положительна, следовательно, вторая производная тоже будет положительна при любом a.

Следовательно, в точке, где первая производная равна нулю, будем иметь минимум функции. Из уравнения (4) находим: $a_1 = a_2 = \sqrt{S}$.

Подставляя, полученное значение в (3), находим:

$$P_{min} = 4\sqrt{S} \ .$$

Из этого результата можно сделать заключение, что минимальный периметр, при заданной площади S, будет иметь квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

Задача 2 (О минимальном периметре выпуклого четырёхугольника).

Дано: выпуклый четырёхугольник $ABCD$ (Рис. 1).

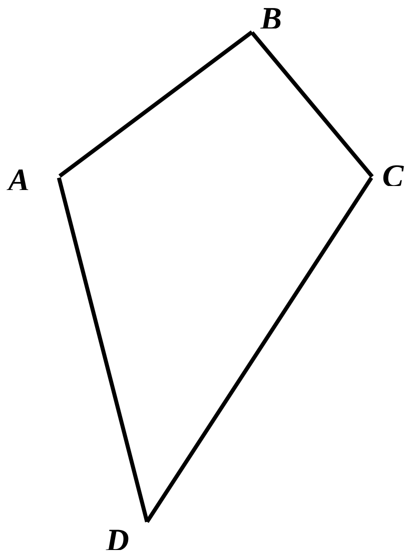

Рис. 1

Предварительно решим такую задачу.

Пусть имеем некоторый треугольник, одна из сторон которого, равна a, а площадь равна S. Выясним чему равен наименьший периметр такого треугольника?

Используя формулу Герона запишем выражение для площади нашего треугольника:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{5}$$

где p – полупериметр данного треугольника: $2p = a + b + c$. Последнее выражение перепишем следующим образом: $a = (p-b)+(p-c)$. И введём обозначения: $(p-b) = t_1$, $(p-c) = t_2$, т. е. $t_1 + t_2 = a$. Тогда формула (5) будет иметь выражение: $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{S^2}{p(p-a)}$. Т. е. имеем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = a \\ t_1 \cdot t_2 = \dfrac{S^2}{p(p-a)} \end{cases} . \tag{6}$$

Известно, что системе (6) соответствует квадратное уравнение:

$$t^2 - a \cdot t + \frac{S^2}{p(p-a)} = 0. \qquad (7)$$

Перепишим последнее уравнение таким образом:

$$p^2 - a \cdot p + \frac{S^2}{t(t-a)} = 0. \qquad (8)$$

Решая уравнение (8), получаем.

$$p = \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{4S^2}{t(t-a)}}}{2}. \qquad (9)$$

Знак минус «-» перед корнем в числителе выражения (9) отсутствует из тех соображений, что $p = \frac{a+b+c}{2}$, т. е. $\sqrt{a^2 - \frac{4S^2}{t(t-a)}} = b + c$. Теперь найдём производную функции (9) и приравняем её нулю:

$$p_a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-\left(\frac{-4S^2(2t-a)}{(t^2-ta)^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \frac{4S^2}{t^2-ta}}} = 0. \qquad (10)$$

Можно показать, что вторая производная всегда положительна, т. е. при условии, что $p_a' = 0$ будем иметь минимум функции или $2t - a = 0$. Откуда получаем $t = \frac{a}{2}$. Подставим это значение в (9), получим:

$$p_{min} = \frac{a + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^4 + 16S^2}}{2}. \qquad (11)$$

Вычислим выражение $p(p-a)$ при $p = p_{min}$.

$$p(p-a) = \left(\frac{a + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^4 + 16S^2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^4 + 16S^2}}{2} - a\right) = \frac{4S^2}{a^2}.$$

Подставим полученное выражение в (7): $t^2 - a \cdot t + \frac{a^2}{4} = 0$. Решая это уравнение, получаем:

$t_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - a^2}}{2} = \dfrac{a}{2}$ или $t_1 = t_2 = \dfrac{a}{2}$. Откуда: $p - b = p - c$, т. е. $b = c$. Следовательно, минимальный периметр будет у равнобедренного треугольника.

Сделаем дополнительные построения (Рис. 2)

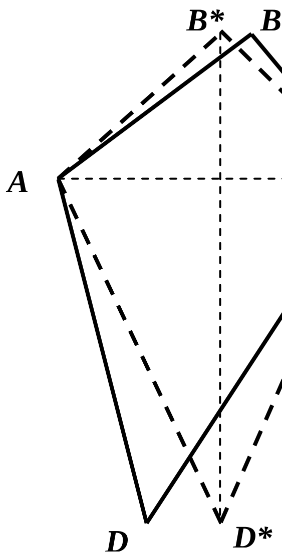

Рис. 2

Здесь треугольники ***AB*C*** и ***AD*C*** – равнобедренные и треугольник ***ABC*** и треугольник ***AB*C*** имеют одинаковые высоты, опущенные на общую сторону ***AC*** (те же построения сделаны и относительно треугольников ***ADC*** и ***AD*C***).

Опираясь на только что полученный результат можно сделать вывод, что периметр четырёхугольника ***AB*CD**** меньше периметра четырёхугольника ***ABCD***.

Пусть площадь этих четырёхугольников равна S. Обозначим диагонали четырёхугольника ***AB*CD**** через d_1 и d_2.

Заметим, что ромб с диагоналями d_1 и d_2 имеет ту же площадь - S. Обозначим сторону такого ромба через a. Справедливы следующие соотношения: $d_1 \cdot d_2 = 2S$, $\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$. Введём промежуточные параметры: $D_i = d_i^2$. Теперь можем записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} D_1 \cdot D_2 = 4S^2 \\ D_1 + D_2 = 4a^2 \end{cases} \qquad (12)$$

Этой системе уравнений соответствует квадратное уравнение:

$$D^2 - 4a^2 D + 4S^2 = 0. \qquad (13)$$

Отсюда получаем такое выражение для a:

$$a = \sqrt{\frac{D^2 + 4S^2}{4D}}. \qquad (14)$$

Очевидно, что пероиметр ромба равен $4a$. Или в наших обозначениях:

$$P = 2\sqrt{\frac{D^2 + 4S^2}{D}} \,. \tag{15}$$

Производная от этого выражения будет иметь вид:

$$P_D^{'} = \frac{D^2 - 4S^2}{D^2 \cdot \sqrt{\frac{D^2 + 4S^2}{D}}} \,. \tag{16}$$

Минимум периметра получаем при $P_D^{'} = 0$, т. е. $D = 2S$. Подставляя это выражение в (15), получаем:

$$P_{min} = 4\sqrt{S} \,.$$

Следовательно сторона ромба равна $\sqrt{S}$, т. е. – это квадрат.

Таким образом, наименьший периметр среди равновеликих выпуклых четырёхугольников имеет квадрат.

Замечание: слово «выпуклый» можно выбросить, т. к. все вышеизложенные рассуждения справедливы и для любого четырёхугольника.

Задача 3 (О минимальном периметре равновеликих треугольников).

Чисто интуитивно мы понимаем, что наименьший периметр среди всех равновеликих треугольников имеет треугольник равносторонний. И, тем не менее, мы покажем здесь аналитическое доказательство этого факта.

В Задаче 2, «о минимальном периметре выпуклого четырёхугольника», было показано, что среди всех равновеликих треугольников площади S наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Среди множества треугольников можно выделить подмножество равнобедренных равновеликих треугольников. Следовательно, чтобы найти наименьший периметр среди всех равновеликих треугольников, необходимо найти наименьший периметр среди равнобедренных равновеликих треугольников.

Рассмотрим равнобедренный треугольник площади S, сторона основания которого обозначена через a (Рис. 3).

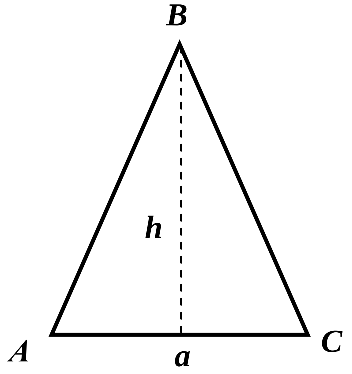

Рис. 3

Тогда $\boldsymbol{P = 2AB + a}$, где $\boldsymbol{P}$ – периметр треугольника, а высота $\boldsymbol{h = \frac{2S}{a}}$. $\boldsymbol{AB}$ находим из прямоугольного треугольника и можем записать:

$$\boldsymbol{P = a + 2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4S^2}{a^2}}}. \tag{17}$$

Вычислим производную $\boldsymbol{P'_a}$. $\boldsymbol{P'_a = a + \dfrac{\frac{a}{2} - 8\frac{S^2}{a^3}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4S^2}{a^2}}}}$. Минимальный периметр находим при условии $\boldsymbol{P'_a = 0}$. Откуда, после упрощения выражения, получаем: $\boldsymbol{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$. Подставив полученное выражение в (17) находим значение минимального периметра: $\boldsymbol{P_{min} = a + 2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{a^2 4}} = a + 2a = 3a}$.

А это значит, что минимальный периметр имеет равносторонний треугольник со стороной ***a.***