Геометрический закон расширения

Этот закон берёт своё начало от теоремы Паппа. Напомним её формулировку.

Теорема:

Если на сторонах $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BC}$ произвольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ построены произвольные параллелограммы $\boldsymbol{ABED}$ и $\boldsymbol{BCFG}$ соответственно, то сумма их площадей равна площади параллелограмма $\boldsymbol{ACKL}$, где сторона $\boldsymbol{CK}$ равна и параллельна отрезку $\boldsymbol{BH}$, а $\boldsymbol{H \equiv DE \cap GF}$ (Рис. 1).

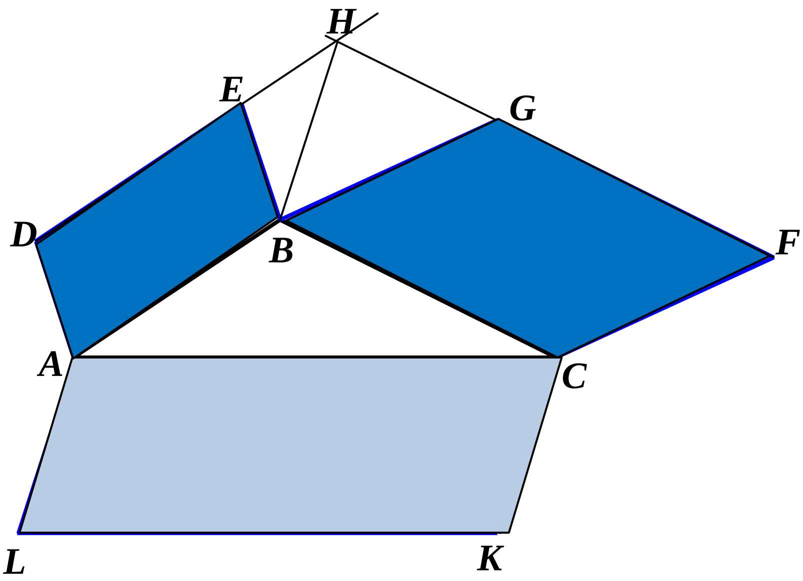

Рис. 1

Рассмотрим равносторонний треугольник $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$. Расширением этого треугольника будем называть треугольник $\boldsymbol{A_1^*A_2^*A_3^*}$, стороны которого параллельны исходному треугольнику (Рис. 2). Через $\boldsymbol{h_i}$ обозначим расстояние между соответствующими стонами: $\boldsymbol{A_iA_j}$ и $\boldsymbol{A_i^*A_j^*}$. Через вершины треугольника $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$ проведём прямые, параллельные его сторонам и опустим на эти прямые перпендикуляры $\boldsymbol{H_i}$ из соответствующих вершин $\boldsymbol{A_i^*}$. Тогда, согласно данной теореме, можно записать: $\boldsymbol{h_1 + h_2 = H_3}$, $\boldsymbol{h_1 + h_3 = H_2}$, $\boldsymbol{h_2 + h_3 = H_1}$. Суммируя эти выражения получаем:

$$\sum_{i=1}^{3} H_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} h_i \qquad (1)$$

или

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} H_i}{\sum_{i=1}^{3} h_i} = 2 \qquad (2)$$

Выражение (2) будем называть *геомоетрическим законом расширения*.

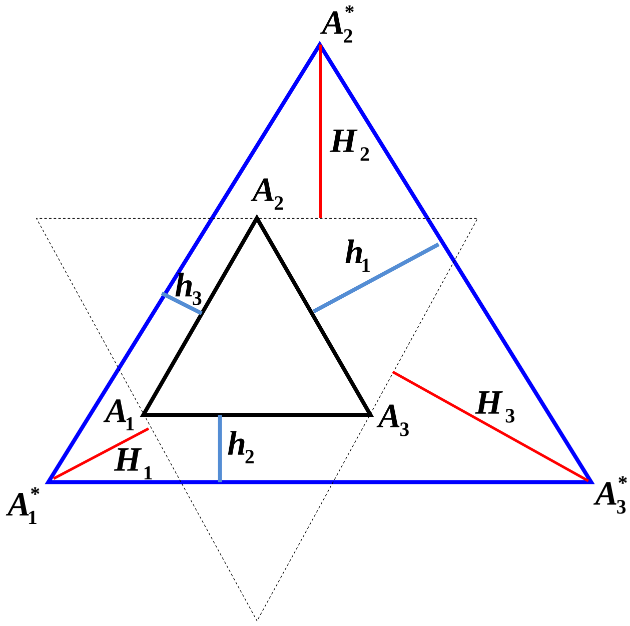

Рис. 2

Ф. Г.