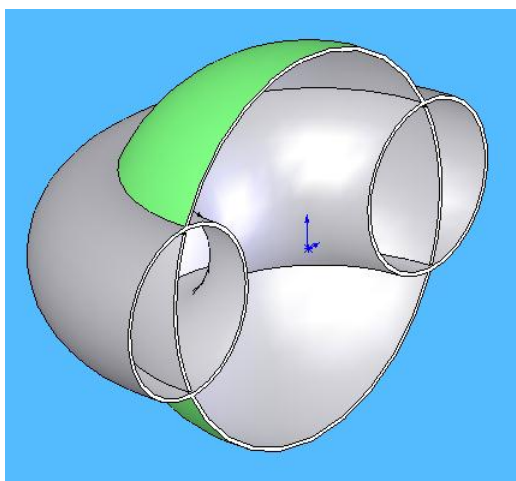


Франц Герман

**Математическая модель
машины времени**

franz.h-n@yandex.ru



2008

Математическая модель машины времени

Явление тора

Я - обыкновенный человек, т.е. человек, не наделённый никакими паранормальными и контактёрскими способностями, но вокруг меня всегда были люди, у которых хотя бы по разу такие случаи в жизни происходили. Отец увидел однажды вещий сон, между мамой и тётёй Катей (маминой сестрой) однажды произошла телепатическая связь на огромном расстоянии (Красноярск – Грозный), у родной моей сестры Виктории был контакт сначала с каким-то шаровым объектом (возможно это была шаровая молния), потом на кухне у неё произошёл полтергейст (если бы это произошло не со столь близким мне человеком – не поверил бы, всё как в сказках), двоюродная сестра – дипломированный астролог, двоюродного брата моей жены кто-то похищал, а после возвращения он внезапно умер в 40-летнем возрасте без видимой причины. С родным же братом моей жены случилось аж три фантастических случая: однажды он телепартировал прямёхонько с чердака во двор дома, в другой раз его водило, он всю ночь не мог сойти с замкнутого маршрута, а в третий раз и вовсе какая-то чертовщина. Со мной же ничего подобного не происходило, но однажды я видел НЛО. Это было настолько потрясающее зрелище, что я стал после этого интересоваться подобными событиями. Но ни об одном похожем случае больше никогда не читал и не слышал. Вот об этом случае я и хочу рассказать поподробнее. Именно тогда и появился интерес к тору.

К сожалению я не помню точной даты. Случилось это поздней осенью в 1972 году. Был морозный ясный (абсолютно безоблачный) вечер и уже давно стемнело. Мы с друзьями играли в футбол (мы играли тогда в футбол круглый год и летом, и зимой) в самом центре города Красноярска (это место я обозначил на карте красным кружком (Рис. 1). Вдруг Юра, мой друг, с которым мы играли в футбол, говорит мне: «смотри, знамение». Я посмотрел на небо и остолбенел.

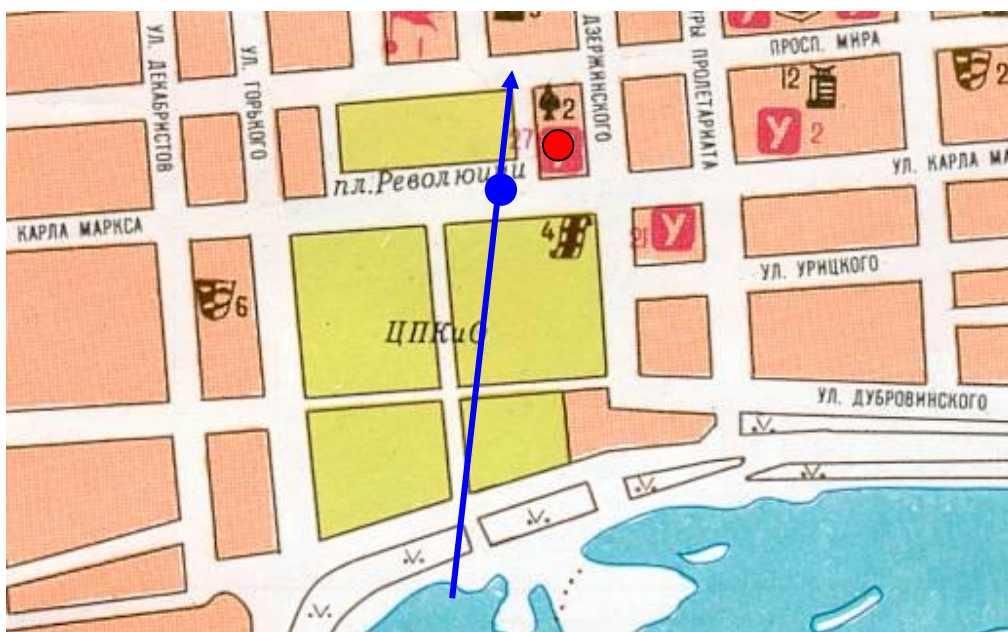


Рис. 1

По небу плыл почти строго на север огромный тор. Был он бледно голубого цвета не прозрачный, идеальной формы (Рис. 2).

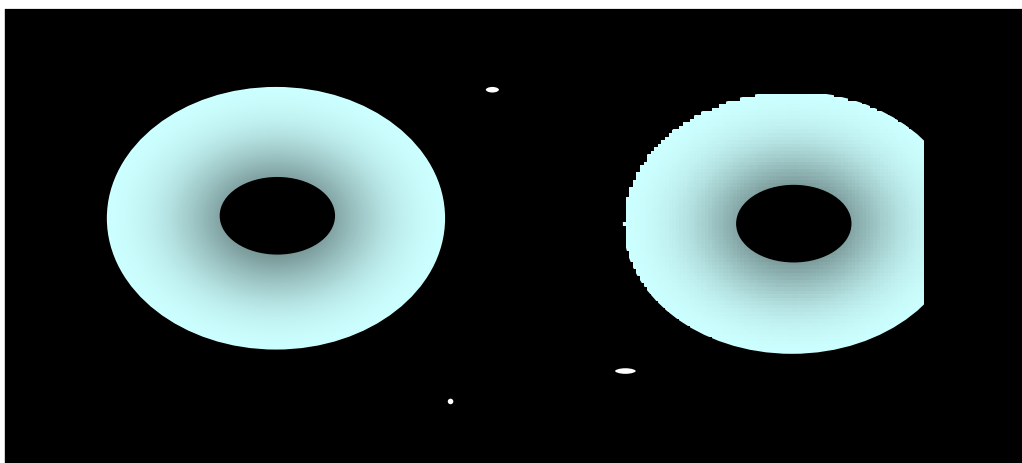


Рис. 2

Движение не сопровождалось ни звуковыми, ни световыми эффектами. Ощущение было такое, что он шёл не очень высоко, что потом и подтвердили другие очевидцы. Маршрут его я обозначил на карте синей стрелкой. Я увидел его примерно в том месте, где на стрелке стоит синий кружок. Тор проплыл вдоль крыши краевой библиотеки и вдруг начал исчезать. Выглядело это так будто он просачивается в какую-то невидимую нам щель в пространстве, в тоже время он был объёмный, и поэтому тут же возникло ощущение, что он не просачивается в щель, а уходит за угол, которого тоже не видно. При этом скорость его не изменилась. Он медленно уплыл, а мы, не сговариваясь, кинулись на проспект Мира, казалось, что из другой точки мы снова его увидим. На проспекте всё замерло, множество людей таращилось на небо, но там больше уже ничего не произошло. Маленькие ребята из нашего же двора рассказали мне потом, что заметили они этот объект с четвёртого этажа, где они грелись в подъезде, когда тор летел (плыл) над Енисеем. Основываясь на этих свидетельствах я заключил (может быть ошибочно), что летел он довольно низко. Всё увиденное меня просто потрясло, а исчезновение тора было ошеломляющим.

Тор и физика

Мы как-то слишком просто смотрим на окружающее нас пространство. Все наши представления о длине, ширине и высоте большой примитив. Приведу всего лишь три примера из математики.

1. Существует в топологии теорема Шенфлиса об окружности, которая делит двумерное пространство на два множества. Казалось бы, добавим ещё одну координату, заменим окружность сферой и готова теорема Шенфлиса для пространства трёх измерений. Ан нет, что-то с пространством происходит и теорема Шенфлиса в трёх измерениях не работает.

2. Ещё более простой пример. На плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников. А в трёх измерениях – всего пять правильных многогранников (Платоновы тела).

3. Какой фигурой можно замостить плоскость без пробелов. Для этого годится правильный треугольник, квадрат и шестиугольник. Среди неправильных фигур – вообще любой треугольник, любой четырёхугольник (необязательно выпуклый!), 14 классов неправильных пятиугольников, а сколько неправильных шестиугольников, кажется ещё никто и не сосчитал. А пространство трёх измерений можно упаковать

только правильным кубом. А из неправильных – только параллелепипедами и ромбическим додекаэдром.

Все подобные факты наводят меня на мысль, что пространство также как и время должно иметь какие-то более глубокие характеристики, а не просто длину ширину и высоту. Вернее, мне представляется, что пространство должно иметь точно такие же характеристики как и время. Например плотность пространства. А плотность по отношению к чему? Только по отношению ко времени, другой категории у П-В нет. Так же как и плотность времени может рассматриваться только по отношению к пространству.

Когда читаешь популярные, да и не только популярные, книги по теории относительности, зачастую, в качестве модели пространства-времени (П-В) рассматривают сферу. Говорят о расширении П-В, как о расширяющейся сфере. Горизонт событий гравитационного коллапса - опять же сфера Шварцшильда. А за горизонтом событий происходит «выворачивание» П-В наизнанку, т.е. П-В превращается в В-П (здесь теорию коллапса можно рассматривать в качестве математической модели машины времени (МВ), т. к. до «выворачивания», до коллапса можно путешествовать взад и вперёд только по пространству, а после выворачивания, наверно, можно путешествовать туда-сюда по времени?). Возникает вопрос: логична ли такая модель? Ведь сфера характеризуется только одним параметром – радиусом, а П-В двумя: пространством и временем. Что же происходит при выворачивании наизнанку? Где зацепка для математика, чтобы описать такое выворачивание на языке уравнений и формул. Не слишком ли примитивно пытаемся мы построить модель коллапса и модель самой Вселенной, сводя всё к сферическим образам?

Давайте пофантазируем. Следующей по сложности замкнутой фигурой в топологии трёх измерений идёт тор. Вот тор характеризуется как раз двумя параметрами, двумя радиусами (тор, как тело вращения окружности с радиусом r_2 вокруг оси $Z-Z$ на расстоянии r_1 от центра окружности до данной оси (Рис. 3).

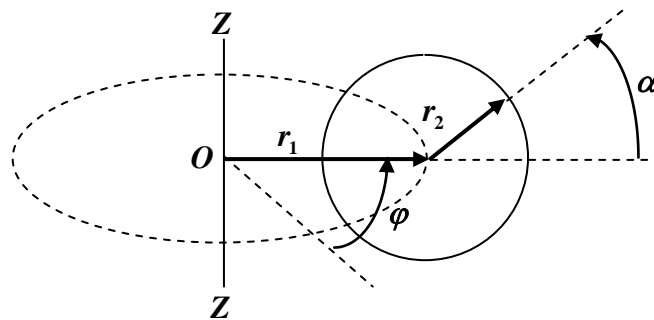


Рис. 3

Идём дальше. Астрономы доказали, что объём Вселенной вычисляется по формуле $V = 2\pi^2 R^3$. И точно по такой же формуле вычисляется объём простейшего тора, у которого $r_1 = r_2 = R$. Правда, справедливости ради, надо заметить, что в случае со Вселенной речь идёт о радиусе кривизны, а для тора – это геометрический радиус. Но надо помнить, что мы вовсе не собираемся всю Вселенную засунуть в тор, а только лишь пытаемся набросать штрихи модели Вселенной в первом, так сказать, приближении. Кстати, у такого тора центр симметрии просто сам просится на роль сингулярности в нашей математической модели (а спирали галактик не от тора ли?).

Далее. Как быть с выворачиванием тора, т.е. нашего моделируемого П-В наизнанку?

Замкнутые кривые, расположенные на торе и не стягивающиеся в точку, я называю тороидами. Различают два класса тороид. Тороиды продольного типа, которые стягиваются к дырке тора и тороиды поперечного типа, которые охватывают сам обруч тора. Топологи доказали, что при выворачивании тора наизнанку тороиды продольного и поперечного типа меняются местами. Вот в этом и есть зацепка для математика, чтобы выворачивание наизнанку описать на языке формул. Тор красиво характеризуется спиралевидными тороидами продольного и поперечного типов (Рис. 4). Соответствующие уравнения таких тороид имеют вид:

$$\vec{\rho} = \left(1 + \cos\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)\right)\vec{e} + \sin\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)\vec{k}, \quad \vec{\rho} = (1 + \cos(\omega \cdot \varphi))\vec{e} + \sin(\omega \cdot \varphi)\vec{k},$$

где $\vec{e} = \vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)$, ω - число витков тороиды, $\frac{\varphi}{\omega} = \alpha$ (или $\omega \cdot \varphi = \alpha$) (Рис. 3).

Как видим, чтобы описать выворачивание тора наизнанку необходимо в уравнении тороиды продольного типа параметр ω заменить на обратный $\frac{1}{\omega}$ и наоборот.

На Рис. 4 число витков ω равно четырём.

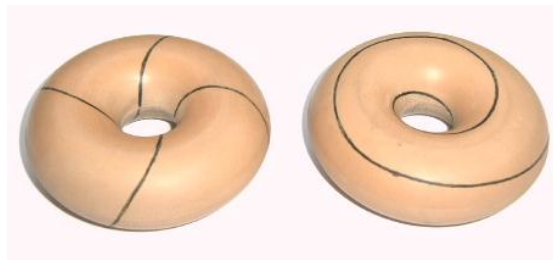


Рис. 4

Какой же математический аппарат необходимо привлечь для такой операции? Мне представляется, что таким аппаратом должен быть аппарат теории групп, так как одна из аксиом теории групп говорит о необходимости существования для каждого элемента ему обратного. Кроме того вопросы П-В являются самыми фундаментальными в вопросах познания и для решения таких вопросов необходимо привлекать и самые фундаментальные математические теории. А одной из самых фундаментальных, бесспорно, является теория групп, т.к. для её построения требуется всего лишь 4 аксиомы!

С точки зрения коллапса, П-В должно быть симметрично, следовательно, мы должны рассматривать три размерности пространства и три размерности времени. Ну что ж, самое время взглянуть на одну из групп шестого порядка. Таких групп всего две. Мы будем рассматривать некоммутативную группу. Таблица Кэли этой группы имеет такой вид (Рис. 5):

Как оказалось, эта группа имеет **уникальное алгебраическое представление**. Насколько мне известно, ни одна из групп более высоких порядков не имеет подобного представления.

$$x_1 = \omega; x_2 = -\frac{1+\omega}{\omega}; x_3 = -\frac{1}{1+\omega}; t_1 = \frac{1}{\omega}; t_2 = -\frac{\omega}{1+\omega}; t_3 = -(1+\omega).$$

Как видим, в рамках данного представления, каждый элемент группы имеет себе обратный элемент, не только в групповом смысле, но и в алгебраическом.

Какая же групповая операция соответствует данному представлению? Введём обозначение для нашей групповой операции – « \circ ».

	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3
x_1	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3
x_2	x_2	x_3	x_1	t_2	t_3	t_1
x_3	x_3	x_1	x_2	t_3	t_1	t_2
t_1	t_1	t_3	t_2	x_1	x_3	x_2
t_2	t_2	t_1	t_3	x_2	x_1	x_3
t_3	t_3	t_2	t_1	x_3	x_2	x_1

Рис. 5

Пример действия групповой операции:

$$x_3 \circ t_2 = -\frac{x_3}{1+x_3} = -\frac{-\frac{1}{1+\omega}}{1-\frac{1}{1+\omega}} = \frac{1}{\omega} = t_1.$$

Как видим, надо элемент x_3 подставить в элемент t_2 на место параметра ω и выполнить алгебраические преобразования.

Данное представление хорошо ещё и тем, что даёт большие возможности для параметра ω . Это может быть и число, и матрица (или тензор), и спинор, и функция и ещё Бог знает что.

Сделаем ещё один шаг в наших математических фантазиях – вычислим производные функций представления по параметру ω , получим:

$$\frac{dx_1}{d\omega} = -\frac{dt_3}{d\omega} = 1; \quad \frac{dx_2}{d\omega} = -\frac{dt_1}{d\omega} = \frac{1}{\omega}; \quad \frac{dx_3}{d\omega} = -\frac{dt_2}{d\omega} = \frac{1}{(1+\omega)^2}.$$

Здесь мы имеем ещё две обратимости: так сказать обратимость по направлению (производные меняют знак) и пространственно-временную обратимость, т. к. производной пространственной характеристики x_i ставится в соответствие производная временной характеристики t_j . Кстати, пространственно-временную обратимость имеют и сами функции представления, но обратимость эта другого характера, здесь $x_i = \frac{1}{t_i}$.

И, наконец, в рамках нашего представления, каждый элемент группы можно выразить через отношение двух других по таким правилам:

$$x_i = \frac{t_j}{x_k} = \frac{t_k}{x_j}, \quad t_i = \frac{x_j}{t_k} = \frac{x_k}{t_j}.$$

С точки зрения физики, такие отношения можно рассматривать как характеристики плотности, давления, скорости или ускорения или ещё чего-либо. Отметим, что подобные выражения рассматривал в своё время известный астрофизик Н. А. Козырев, изучая причинно-следственные отношения и вводя понятия: «ход времени» [1, стр. 338] и «плотность времени» [1, стр. 368].

Кроме того:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{d\omega} = x_3 t_3 \\ \frac{dx_3}{d\omega} = -\frac{x_1 t_1}{t_3} - \frac{1}{t_3 x_2} \\ \frac{dx_2}{d\omega} = \frac{t_1}{x_1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dt_3}{d\omega} = -x_1 t_1 \\ \frac{dt_1}{d\omega} = \frac{x_3 t_3}{x_1} + \frac{1}{x_1 t_2} \\ \frac{dt_2}{d\omega} = -\frac{x_3}{t_3} \end{array} \right.$$

Не правда ли, эти формулы напоминают известные из курса дифференциальной геометрии формулы Френе [2, стр. 171]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{ds} = kn \\ \frac{dn}{ds} = \mathfrak{K}b - kt, \\ \frac{db}{ds} = -\mathfrak{K}n \end{array} \right.$$

где k – кривизна кривой, \mathfrak{K} – кручение кривой.

Вот так отталкиваясь от тора и его выворачивания наизнанку можно обнаружить удивительные математические закономерности.

Параллельно заметим, что значения сложного отношения четырёх точек на прямой $\delta = (AB, CD)$ в проективном пространстве образуют ту же самую группу [3]. А само сложное отношение является единственным инвариантом проективной геометрии. Как известно, проективная геометрия – является, так сказать, базовой геометрией [4] из которой, как частный случай, получается и геометрия Евклида, и Лобачевская, и Римана, и вообще любая мыслимая геометрия. Можно предположить, что и в основе нашего физического П-В лежит проективная геометрия. Есть косвенные факты указывающие на это предположение (см. работы автора «От ошибки Гильберта к исчислению сфер», «Математика тонкого мира»).

Но прежде чем окончательно обуздать нашу математико-физическую фантазию сделаем ещё два таких предположения (гипотезы).

На первую гипотезу меня натолкнул тот факт, что орбита луны представляет собой сложную замкнутую кривую, расположенную ... на поверхности **тора** [5, стр. 64].

Правда тор здесь геометрически не идеальный, но с точки зрения топологии – это стопроцентный тор.

Как известно, орбиты планет имеют не эллипсовидную природу, хотя и очень на неё похожую. Я предполагаю, что **орбитами планет могут быть тороиды**. Установление этого факта имело бы жирный плюс в пользу тороидальности метрики всего нашего пространства и, в конечном счёте, для тороидальной модели МВ.

В своё время (лет 20 тому назад) я нашёл точные решения дифференциальных уравнений (1) для геодезических линий на простейшем (единичном) торе. А орбиты планет – это ни что иное как геодезические линии нашего П-В.

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin^2\theta \cdot \sin 2\theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 4\operatorname{Ctg}\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения геодезических линий на торе (решение системы (1)) в сферических координатах имеют такой вид:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a - (1 + \operatorname{Ctg}^2\theta)^2} + b.$$

Как работать с таким уравнением. Необходимо взять координаты (φ, θ) трёх конкретных близкорасположенных точек орбиты какой-нибудь планеты. Координаты крайних точек подставить в данное уравнение и из решения системы, двух полученных уравнений, вычислить константы a и b , характеризующие данный кусок геодезической линии. Если координаты промежуточной точки будут удовлетворять нашему уравнению геодезической линии, с учётом найденных констант, то данный кусок орбиты можно считать куском тороиды и т. д.. К сожалению, я не располагаю точными астрономическими данными и не имею знакомств среди астрономов, которых бы заинтересовала такая идея.

На вторую гипотезу меня навела известная загадка о том, почему орбиты всех планет, включая астероиды, в нашей Солнечной Системе лежат практически в одной плоскости. На эту загадку обращал внимание В. И. Вернадский, считая это явление не случайностью, а проявлением некоего «стройного космического механизма» [6, стр. 193], который имеет не маловажную роль для существования жизни в нашей Солнечной Системе.

Можно предположить, что наряду с законом всемирного притяжения существует и **закон всемирного отталкивания**. Поле отталкивания создаётся за счёт вращения массивного тела, только, в отличие от силы притяжения, сила отталкивания направлена не от центра, вращающегося тела, а от оси его вращения и ей перпендикулярна (Рис. 6).

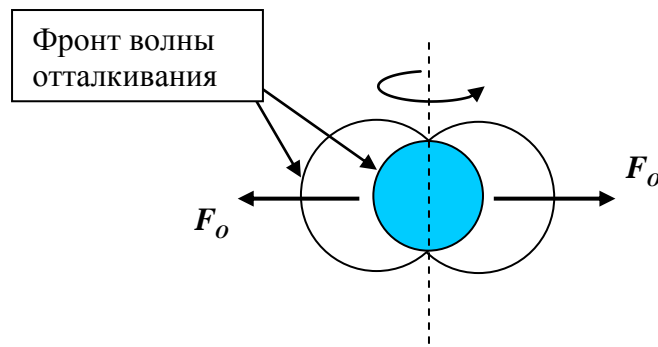


Рис. 6

В крупномасштабной картине Солнечной Системы силовые линии (фронт волны отталкивания) могут выглядеть в разрезе плоскости Рис. 7 в виде сечений торов. Чёрный кружок в середине символизирует Солнце. Возможно, сила отталкивания намного слабее силы притяжения и, практически, никак не проявляет себя на поверхности Земли, но в крупномасштабной картине её действие уже становится заметным.

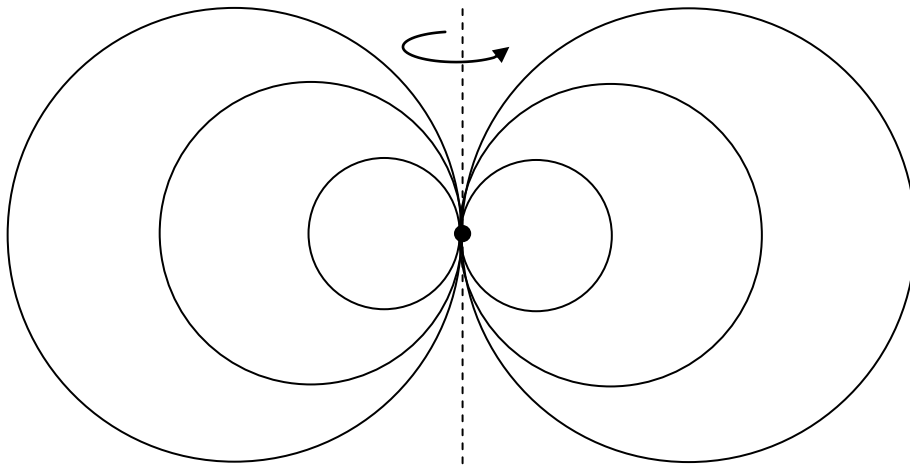


Рис. 7

Можем предположить, что величина этой силы зависит не только от массы и расстояния, отталкивающихся тел, но также и от силы вращения этих тел.

На Рис. 8 показана схема действия сил притяжения F_{II} и отталкивания F_o на планету, плоскость орбиты которой показана прямой $P-P$, а сама планета изображена синим кружком. В этом случае результирующая сила (синяя стрелка) всегда будет направлена в сторону плоскости, которая показана на Рис. 8 горизонтальной пунктирной прямой.

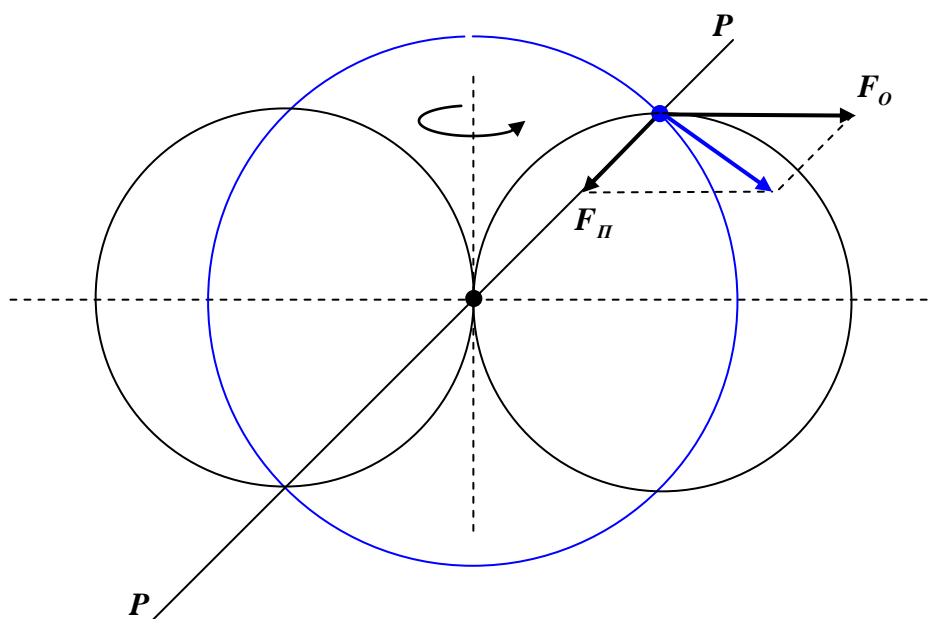


Рис. 8

Именно в этой плоскости и должны в конечном итоге расположиться орбиты всех планет.

Можно предположить, что процесс «укладывания» орбит планет нашей Солнечной Системы ещё не завершён. Наиболее массивные планеты, практически уже имеют орбиты, лежащие в одной плоскости. А орбиты самых маленьких планет наиболее отклонены от общей плоскости. Что мы и имеем в действительности. Плоскость орбиты Меркурия имеет отклонение примерно 7 градусов, а плоскость орбиты Плутона (хотя его уже исключили из числа планет Солнечной Системы) отклонена примерно на 17 градусов. Кстати, Плутон и меньше Меркурия, и дальше от Солнца.

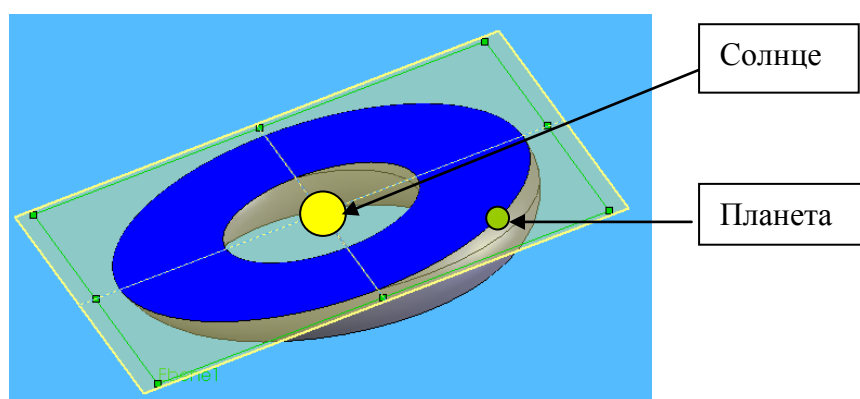


Рис. 9

Можно высказать и такое предположение, что длина волны сил притяжения и длина волны сил отталкивания различны, но накладываясь друг на друга, создают участки стабильности, что, в свою очередь, определяет существующие радиусы орбит.

Если допустить, что в основе нашего физического пространства лежит проективная геометрия, то можно предположить, что электромагнитные силы своей

двойственностью обязаны в какой-то мере закону двойственности проективной геометрии (имеется в виду двойственность точек и прямых). Тогда именно в силу такой двойственности, можно предположить и существование закона всемирного отталкивания. Причём в действии этих сил также усматривается классическая двойственность проективной геометрии. В одном случае направление действия силы определяется центром (точкой) массивного тела, в другом – осью (прямой) вращения этого же тела.

Порой, в физике возникают ситуации, когда общепринятые факты начинают опровергаться новыми опытными данными. Но в результате чего это происходит пока не ясно. Об одной из таких проблем рассказывает физик Д. Мельхиседек. «Это одна из больших проблем в науке – когда вы считаете, что решили проблему, а затем двигаетесь дальше, применяя эту информацию для дальнейших построений. Сейчас науке приходится иметь дело с проблемой такого рода, например, для тел, падающих в вакууме. Всегда считалось, что они падают с одинаковой скоростью, и многое в нашей большой науке основывается на этом фундаментальном «законе». Уже доказано, что это не так, но наука продолжает применять его. Вращающийся шар падает намного быстрее, чем не вращающийся. Когда-нибудь настанет день для научного обоснования этого феномена» [7, стр. 180].

Представим себе, что закон всемирного отталкивания всё-таки существует. Тогда вышеописанный феномен сразу получает объяснение. Действительно, рассмотрим векторную диаграмму сил падающего вращающегося шара (Рис. 10). Т. к. шар вращается, то возникают силы отталкивания, направленные перпендикулярно к оси вращения. Но гравитационные силы искривляют поле сил отталкивания и силы отталкивания будут уже иметь не перпендикулярное направление к оси вращения, а будут отклонены в сторону сил притяжения. Таким образом, возникает дополнительная результирующая сила (синяя стрелка), направленная в сторону сил притяжения и шар падает быстрее. Если бы он не вращался, то этой дополнительной силы не возникло бы.

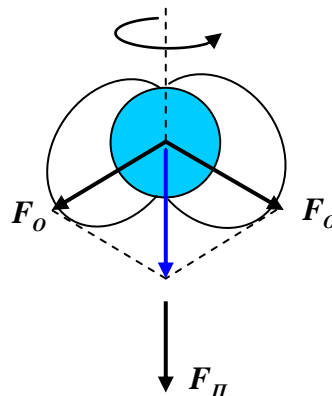


Рис. 10

Тор и геометрия

В заключение хочу познакомить Вас с двумя теоремами, связанными с тором, которые, как мне кажется, могут быть полезными для каких-то конкретных расчётов и построений.

Теорема 1 (о сечении тора сферой)

Если тор (r_1, r_2) и сфера $(R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2})$ имеют общий центр симметрии O , то сфера пересекает тор на две равновеликие части (Рис. 10).

Разрез тора показан чёрным цветом, разрез сферы – синим. Доказать, что $V_1 = V_2$, где V_1 - объём тела, образованного вращением дуг тора ($\cup ABC$) и сферы ($\cup CDA$), а V_2 - объём тела, образованного вращением дуг тора ($\cup AEC$) и сферы ($\cup CDA$) вокруг вертикальной оси.

Доказательство:

Объём V_1 можно вычислить как разность объёмов образованных вращением дуги $\cup ABC$ и дуги $\cup CDA$.

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_0^{r_2} \left(\sqrt{r_2^2 - y^2} + r_1 \right)^2 dy - 2\pi \int_0^{r_2} (r_1^2 + r_2^2 - y^2) dy = \\ &= 2\pi \int_0^{r_2} 2r_1 \sqrt{r_2^2 - y^2} dy = 4\pi r_1 \left(\frac{y}{2} \sqrt{r_2^2 - y^2} + \frac{r_2^2}{2} \text{Arc sin} \frac{y}{r_2} \right) \Big|_0^{r_2} = \pi^2 r_1 r_2^2. \end{aligned}$$

Известно, что объём тора равен $V = 2\pi^2 r_1 r_2^2$, следовательно, $V_1 = \frac{1}{2}V$, а отсюда заключаем, что $V_1 = V_2$.

Что и требовалось доказать.

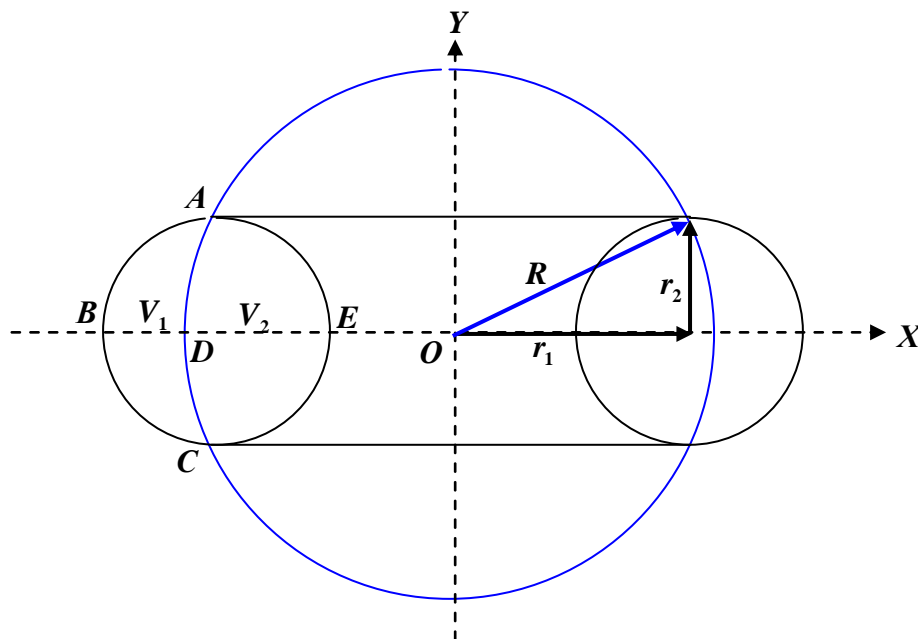


Рис. 11

Теорема 2 (об объёме неправильного тора)

Объём тела (неправильного тора), образованного вращением сегмента круга вокруг оси, проходящей через центр этого круга и параллельно хорде данного сегмента, есть величина постоянная, независящая от радиуса круга данного сегмента и равная объёму шара, диаметром равным длине хорды данного сегмента (Рис. 12).

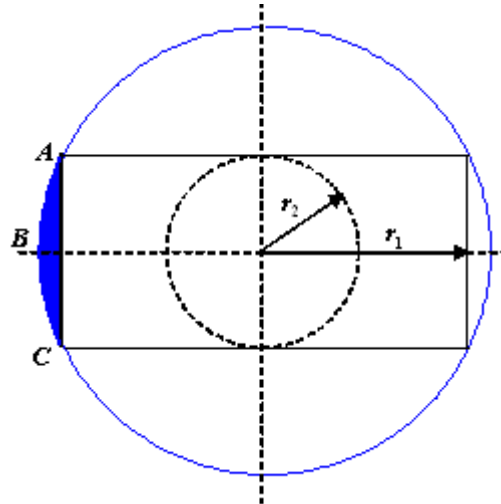


Рис. 12

Доказательство:

Пусть дан сегмент ABC некоторого круга. Длина хорды, стягивающая дугу $\cup ABC$ равна $2r_2$ (в принятых ранее обозначениях). Тогда искомый объем данного тела вращения можно элементарно найти, как разность объемов шарового слоя толщиной $2r_2$ с одинаковыми радиусами оснований r_1 и цилиндра, высотой $2r_2$ и радиусом основания r_1 .

$$V = \frac{\pi r_2}{3} (3r_1^2 + 3r_1^2 + 4r_2^2) - 2\pi r_1^2 r_2 = \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

А эта величина, как раз и соответствует объёму шара с радиусом r_2 .

Что и требовалось доказать.

В заключение хотелось бы высказать такое предположение. Известно, что у человека, который находится «зеркале Козырева», усиливаются паранормальные способности (телепатия), и потому к этим зеркалам проявляется в настоящее время повышенный интерес (исследования Новосибирского университета). С геометрической точки зрения зеркало Козырева, в данном случае, – это цилиндр, а человек должен располагаться вдоль осевой линии данного цилиндра. Можно предположить, что такой цилиндр является частью «глобального тора» (тороидальных силовых линий информационного поля Вселенной) и именно поэтому происходит связь (настройка) с информационным полем, в результате чего усиливаются паранормальные способности.

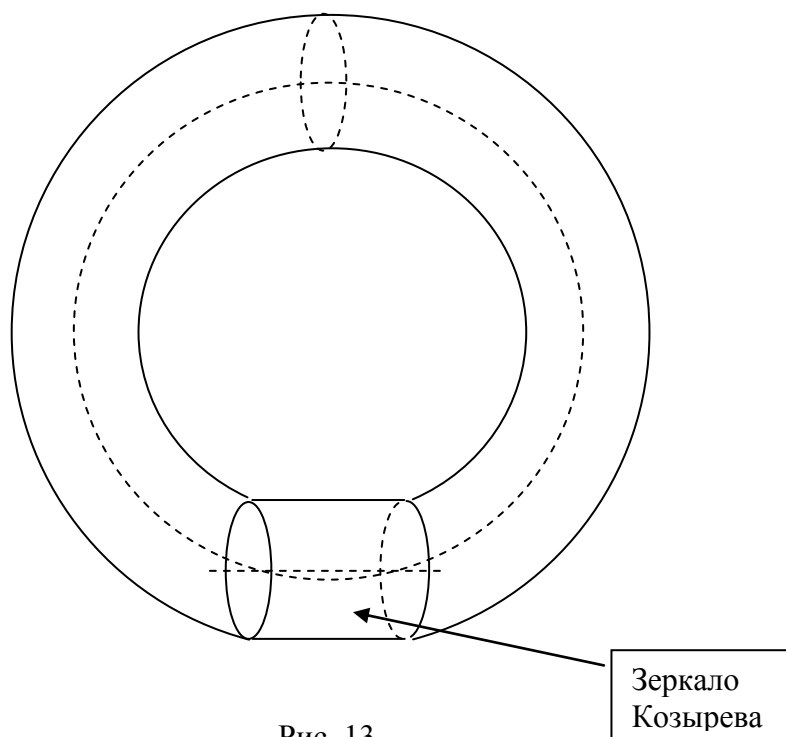


Рис. 13

Не хочу навязывать физикам и будущим создателям машины времени своих идей, но какое-то шестое чувство подсказывает мне произнести эту фразу вслух: **присмотритесь к тору!**

Литература

1. Н. А. Козырев. «Избранные труды», Изд. ЛГУ, Л., 1991
2. П. К. Рашевский. «Курс дифференциальной геометрии», Гос. Изд. технико-теоретической литературы, М., 1956.
3. Н. М. Бескин. «Деление отрезка в данном отношении», «Наука», М., 1973
4. Р. Н. Щербаков, Л.Ф. Пичурин «От проективной геометрии к неевклидовой»
5. А. В. Бялко. «Наша планета Земля», «Наука», М., 1983
6. Сборник «Прометей №15. В. И. Вернадский», «Молодая гвардия», М., 1988
7. Д. Мельхиседек. «Древняя тайна цветка жизни», Т.1, Т.2, «София», М., 2003
8. Н. А. Глаголев. «Проективная геометрия», «Высшая школа», М., 1963
9. П. С. Александров «Введение в теорию групп», «Наука», М., 1980
10. Н. В. Ефимов. «Высшая геометрия», «Наука», М., 1971