Франц Герман

К вопросу о магическом шестиугольнике

franz.h-n@yandex.ru

Что такое магический квадрат известно каждому, кто интересуется занимательной математикой.

Понятие магического шестиугольника не так известно. И вот почему. Первооткрывателем магического шестиугольника является наверно Ернст фон Хазелберг (Ernst von Haselberg). Его статья [1] была опубликована в 1887 году. Потом о нём забыли и переоткрывали заново уже позже. Пожалуй наиболее полно о магическом шестиугольнике рассказал М. Гарднер в одной из своих книг [2]. Напомним, о чём идёт речь.

Структура, показанная на Рис. 1, называется магическим шестиугольником третьего порядка. Шестиугольник содержит последовательные числа от 1 до 19. В каждом ряду сумма чисел равна 38. Всего рядов пятьнадцать. По пять в трёх направлениях. Доказано, что такой шестиугольник единственный (с точностью до поворотов и зеркальных отражений). Причём, не существует магичских шестиугольников и более высоких порядков.

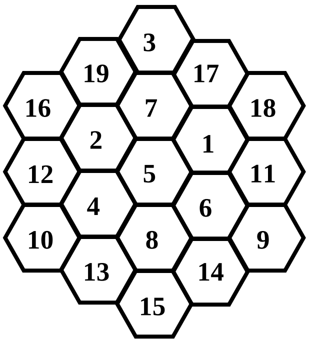


Рис. 1

Казалось бы - задача решена и больше здесь делать нечего. Однако А. Саускан из Калининграда по новому посмотрел на эту задачу. И ставит такой вопрос. А существуют ли магические шестиугольники для других последовательностей чисел? В частности он предлагает рассмотреть последовательность чисел **6, 7, …, 24**. Если существуют магические шестиугольники третьего порядка для этой последовательности, то сколько их, и, может быть, существуют и магические шестиугольники более высоких порядков - 4-го, 5-го и выше, ряд чисел которых начинается не с единицы. Можно ли алгоритмизировать эту задачу?

Прежде чем приступить к поиску новых магических шестиугольников мы решили хоть как-то поисследовать имеющееся единственное решение. Покажем все магические кортежи чисел данного решения.

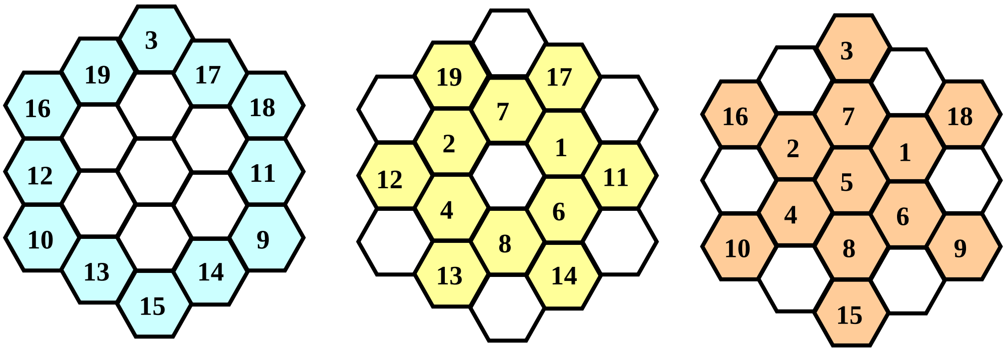


Рис. 2

Числовые кортежи магического шестиугольника могут быть трёх типов: третьего порядка, четвёртого порядка и пятого порядка. Все они показаны разными цветами на Рис. 2. Имеем по шесть кортежей третьего и четвёртого порядков и три кортежа пятого порядка. Отметим также, что каждое число из интервала ***I*** = [**1, 2, …,19**] в кортежах магического шестиугольника встречается ровно три раза. Например число **11** находится в одном кортеже третьего (**18, 11, 9**) порядка и в двух кортежах четвёртого порядка:, (**11, 6,8,13**) и (**11,1,7, 19**).

Нам представляется, что поиск магического шестиугольника удобнее всего начать с поиска всех возможных кортежей третьего порядка. Магическая сумма кортежа известна – ***S* = 38**. Формула магической суммы для шестиугольника третьего порядка $\boldsymbol{S_3}$ на данном интервале $\boldsymbol{I=[a_1,a_2,\cdots,a_{19}]}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{S_3=\frac{a_1+a_{19}}{10}\cdot 19} \qquad (1)$$

По анализу найденных кортежей можно сразу сделать заключение – имеет ли смысл искать магические шестиугольники на данном интервале или нет. Главным критерием такого заключения является количество различных чисел, которые имеются в множестве кортежей. Если число различных чисел меньше 12-ти, то, очевидно, что магичких шестиугольников на данном интервале точно не существует.

Рассмотрим один из возможных алгоритмов, при помощи которого находятся все интересующие нас кортежи – (***a, b, c***) на данном интервале.

Шаг 1. Выбираем макимально возможное ***a*** из данного интервала. Выбираем максимально возможное $\boldsymbol{b=S-a}$ из оставшихся чисел интервала. Тогда $\boldsymbol{c=S-a-b}$. Получаем первый кортеж – (***a, b, c***).

Шаг 2. – кортеж (***a, b*-1, *c*+1**)

Шаг 3. – кортеж (***a*, *b*-2, *c*+2**)

И т. д. пока $b-n \geq c+n$

Далее выбираем новое ***a*** = ***a*-1** и переходим к шагу **1** уже для интервала ***I* - *a***. При этом необходимо помнить, что два кортежа считаются одинаковыми если числа, составляющие кортежи равны между собой. Например, (**18, 3, 11**) = (**3, 11, 18**). И кроме того в кортеже не должны быть двух одинаковых чисел. Покажем все кортежи, полученные при помощи этого алгоритма

(19, 18, 1)	**(18, 17, 3)**	**(17, 16, 5)**	**(16, 15, 7)**	**(15, 14, 9)**	**(14, 13, 11)**
(19, 17, 2)	**(18, 16, 4)**	**(17, 15, 6)**	**(16, 14, 8)**	**(15, 13, 10)**	
(19, 16, 3)	**(18, 15, 5)**	**(17, 14, 7)**	**(16, 13, 9)**	**(15, 12, 11)**	
(19, 15, 4)	**(18, 14, 6)**	**(17, 13, 8)**	**(16, 12, 10)**		
(19, 14, 5)	**(18, 13, 7)**	**(17, 12, 9)**			
(19, 13, 6)	**(18, 12, 8)**	**(17, 11, 10)**			
(19, 12, 7)	**(18, 11, 9)**				
(19, 11, 8)					
(19, 10, 9)					

Итого, получили **30** кортежей с нужной нам суммой чисел. Теперь из полученных кортежей надо выбрать **6** таких кортежей, которые бы образовывали замкнутую цепь:

Нам известно, что существует только единственное решение. Поэтому и замкнутая цепочка кортежей должна быть единственной.

(3, 17, 18) **(18, 11, 9)** **(9, 14, 15)** **(15, 13, 10)** **(10, 12, 16)** **(16, 19, 3)**.

Вычислим магическую сумму для шестиугольника на интервале ***I*** = [**6, 7, …, 24**].

$$S_3 = \frac{6+24}{10} \cdot 19 = 57$$

Теперь приступим к поиску кортежей третьего порядка на этом интервале, используя вышеизложенный алгоритм. Как оказалось, существует **19** таких кортежей.

(24, 23, 10)	**(23, 22, 12)**	**(22, 21, 14)**	**(21, 20, 16)**	**(20, 19, 18)**
(24, 22, 11)	**(23, 21, 13)**	**(22, 20, 15)**	**(21, 19, 17)**	
(24, 21, 12)	**(23, 20, 14)**	**(22, 19, 16)**		
(24, 20, 13)	**(23, 19, 15)**	**(22, 18, 17)**		
(24, 19, 14)	**(23, 18, 16)**			
(24, 18, 15)				
(24, 17, 16)				

Рассмотрим, отвечают ли данные кортежи критерию существования магического шестиугольника, т. е. надо выяснить количество различных чисел в кортежах. Найденные кортежи содержат **15** различных чисел. Т. е. из наших кортежей в принципе можно составить замкнутую цепочку. Число **24** встречается в кортежах наибольшее число раз. Мы помним, что числа внутри одного кортежа могут находиться на разных местах. Простым перебором не сложно проверить, что число **24** может находиться только на крайнем месте внутри кортежа, т. е в вершине искомого шестиугольника. Покажем все замкнутые цепочки, которые нам удалось построить.

(24, 10, 23) (23, 13, 21) (21, 14, 22) (22, 15, 20) (20, 19, 17) (17, 16, 24).

(24, 10, 23) (23, 12, 22) (22, 15, 20) (20, 16, 21) (21, 17, 19) (19, 14, 24).

(24, 10, 23) (23, 12, 22) (22, 14, 21) (21, 16, 20) (20, 19, 18) (18, 15, 24).

(24, 10, 23) (23, 13, 21) (21, 17, 19) (19, 18, 20) (20, 15, 22) (22, 11, 24).

(24, 10, 23) (23, 13, 21) (21, 17, 19) (19, 16, 22) (22, 20, 15) (15, 18, 24).

(24, 10, 23) (23, 14, 20) (20, 16, 21) (21, 19, 17) (17, 18, 22) (22, 11, 24).

(24, 10, 23) (23, 14, 20) (20, 15, 22) (22, 18, 17) (17, 19, 21) (21, 12, 24).

(24, 11, 22) (22, 12, 23) (23, 13, 21) (21, 16, 20) (20, 18, 19) (19, 14, 24).

(24, 11, 22) (22, 12, 23) (23, 13, 21) (21, 16, 20) (20, 19, 18) (18, 15, 24).

(24, 11, 22) (22, 15, 20) (20, 14, 23) (23, 16, 17) (17, 19, 21) (21, 12, 24).

(24, 11, 22) (22, 15, 20) (20, 14, 23) (23, 13, 21) (21, 19, 17) (17, 16, 24).

(24, 11, 22) (22, 15, 20) (20, 14, 23) (23, 13, 21) (21, 20, 16) (16, 17, 24).

(24, 12, 21) (21, 13, 23) (23, 14, 20) (20, 15, 22) (22, 19, 16) (16, 17, 24).

(24, 12, 21) (21, 13, 23) (23, 14, 20) (20, 15, 22) (22, 18, 17) (17, 16, 24).

(24, 13, 20) (20, 14, 23) (23, 18, 16) (16, 22, 19) (19, 17, 21) (21, 12, 24).

(24, 14, 19) (19, 17, 21) (21, 13, 23) (23, 12, 22) (22, 20, 15) (15, 18, 24).

(24, 16, 17) (17, 19, 21) (21, 13, 23) (23, 14, 20) (20, 22, 15) (15, 18, 24).

(24, 18, 15) (15, 20, 22) (22, 12, 23) (23, 13, 21) (21, 17, 19) (19, 14, 24).

(24, 18, 15) (15, 19, 23) (23, 12, 22) (22, 14, 21) (21, 20, 16) (16, 17, 24).

(24, 18, 15) (15, 19, 23) (23, 12, 22) (22, 14, 21) (21, 16, 20) (20, 13, 24).

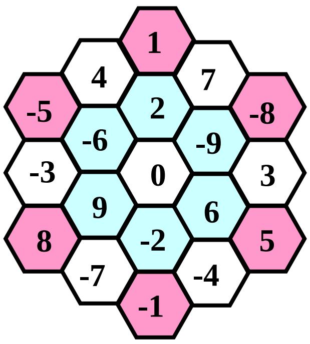
Несмотря на такое обилие замкнутых цепочек кортежей третьего порядка ни один из них не пригоден для построения магического шестиугольника.

Мы показали все найденные цепочки, но нет никакой уверенности, что найдены все возможные. Может быть кому-то повезёт больше. Вообще мы склонны предположить, что на данном интервале магических шестиугольников не существует.

На интервале ***I*** = [**11, 7, …, 29**] магическая сумма ***S*** = **76**. Здесь существует только **10** кортежей третьего порядка, которые содержат только **11** различных чисел. Это говорит о том, что на этом интервале магических шестиугольников быть не может.

Очевидно, что двигаться по числовой оси вправо не имеет смысла. Магическая сумма будет увеличиваться, а число нужных нам кортежей уменьшаться.

Рассмотрим интересный симметричный интервал ***I*** = [**-9, …, 9**]. На этом интервале магическая сумма ***S*** = **0.** Сразу же удаётся построить несколько магических шестиугольников. Причём найденные шестиугольники объединены парами.



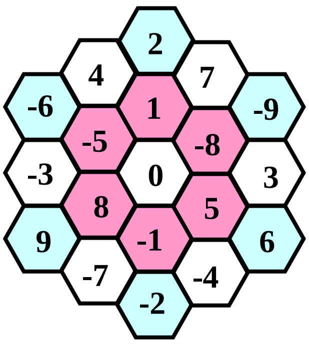


Рис. 3

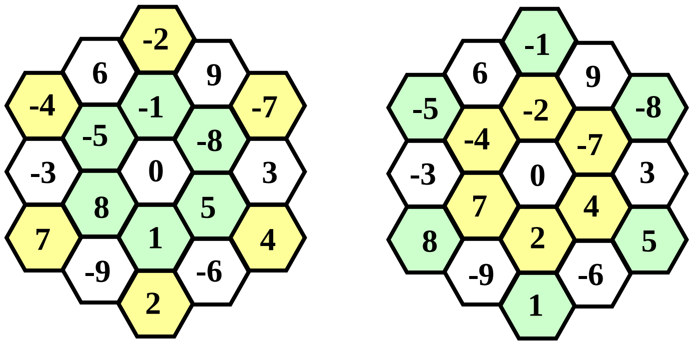


Рис. 4

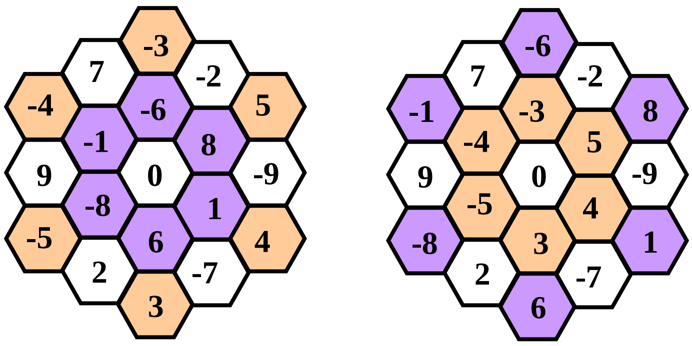


Рис. 5

Числа, отличающиеся знаками, расположены симметрично относительно числа **0** в центре структуры. Кроме того, числа расположенные в узлах структуры крайнего кольца шестиугольников равны числам, расположенным в вершинах структуры среднего кольца шестиугольников парной структуры (на Рис. 3 они показаны одним цветом).

Приложение.

Справедливости ради надо отметить, что не только А. Саускан заинтересовался этой задачей. В разные годы разными авторами были открыты магические шестиугольники более высших порядков на различных интервалах.

Общая формула для магической суммы шестиугольника ***n***–го порядка на интервале $I = [a_1, \cdots,]$ имеет вид:

$$S = \frac{2a_1 + 3n(n-1)}{2(2n-1)}\left(3n^2 - 3n + 1\right)$$

Нам не известно, сколько всего существует магических шестиугольников на интервале ***I*** = [**-9, …, 9**], но известно, что кроме симметричных шестиугольников, показанных на Рис. 3 есть и другие.

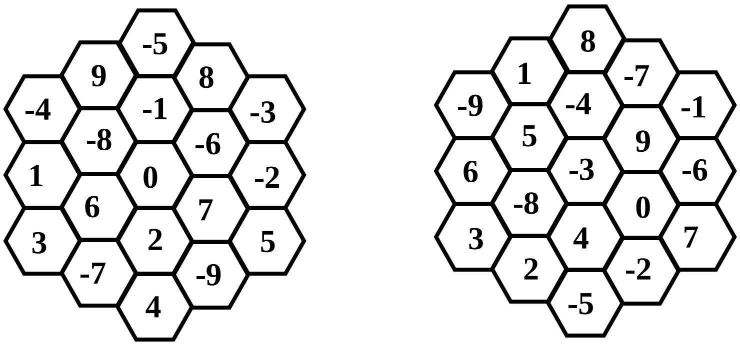


Рис. 6

Как оказалось, на интервале ***I*** = [**-4, …, 14**] тоже существуют магические шестиугольники, но сколько их всего нам не известно

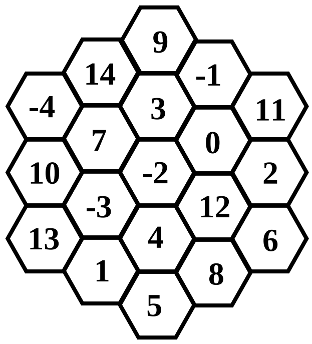


Рис. 7

Существуют магические шестиугольники и более высоких порядков.

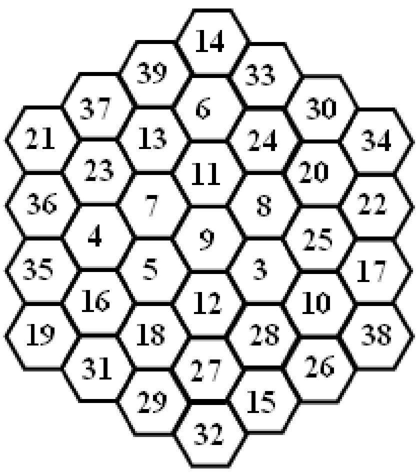
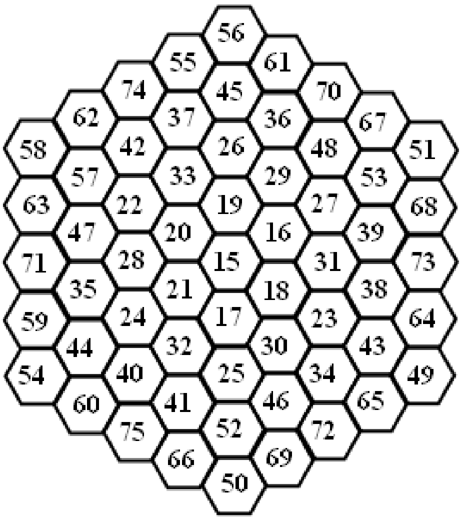


Рис. 8



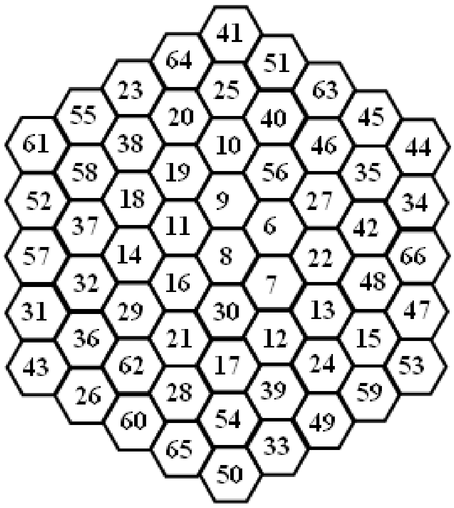


Рис.9

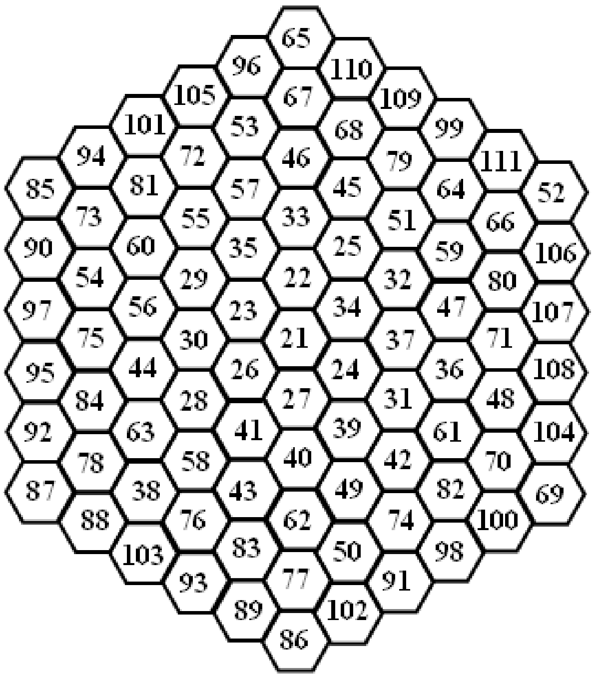


Рис. 10

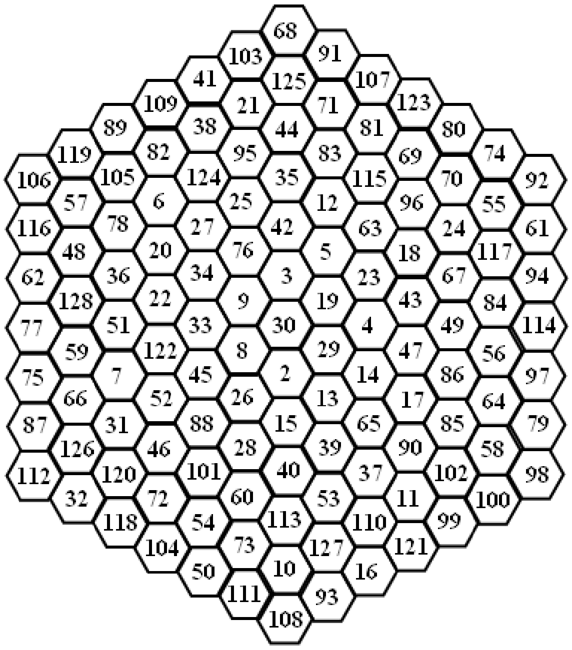
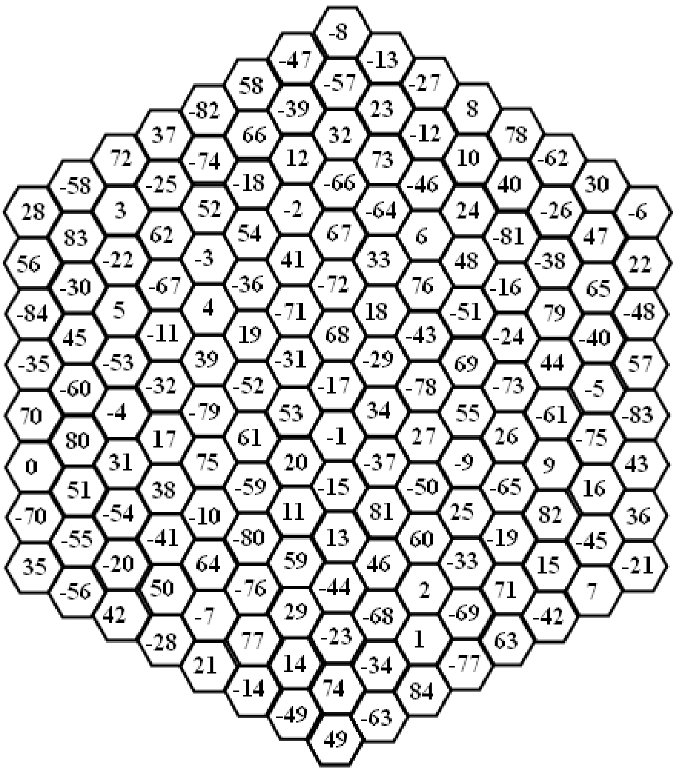


Рис. 11



Литература

1. H.-F. Bauch, internat.Math.Nachrichten, Nr. 219 (2012), 13-24

2. М. Гарднер, «Математические досуги», М., «