Теорема о восьмивершиннике

Посвящаю Л.

Теорема:

Если два, вписанных в конику четырёхвершинника, имеют общую точку пересечения диагоналей, то прямые, соединяющие противоположные вершины восьмивершинника, образованного последовательным пересечением сторон данных четырёхвершинников, конкурентны в точке пересечения диагоналей данных четырёхвершинников.

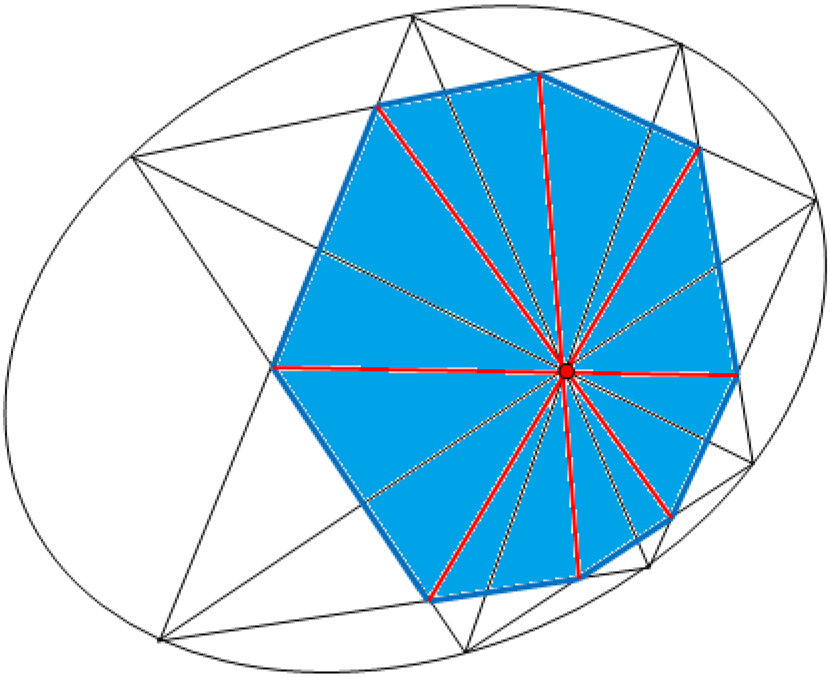

Рис. 1

Доказательство:

Введём обозначения (Рис. 2).

Рассмотрим шестивершинник $B_1B_2A_3A_1A_4B_3$. Определим точки пересечений его противоположных сторон.

$$(B_1B_2 \cap A_1A_4) \equiv C_1; \qquad (B_2A_3 \cap A_4B_3) \equiv E; \qquad (B_1B_3 \cap A_1A_3) \equiv O.$$

По условию теоремы диагонали четырёхвершинников пересекаются в одной точке. В силу теоремы Паскаля точки C_1, E и ,O лежат на одной прямой.

Рассмотрим ещё один шестивершинник $A_4A_2A_3B_2B_4B_3$. Определим точки пересечений его противоположных сторон.

$$(B_4B_2 \cap A_2A_4) \equiv O; \qquad (B_2A_3 \cap A_4B_3) \equiv E; \qquad (B_4B_3 \cap A_2A_3) \equiv C_5.$$

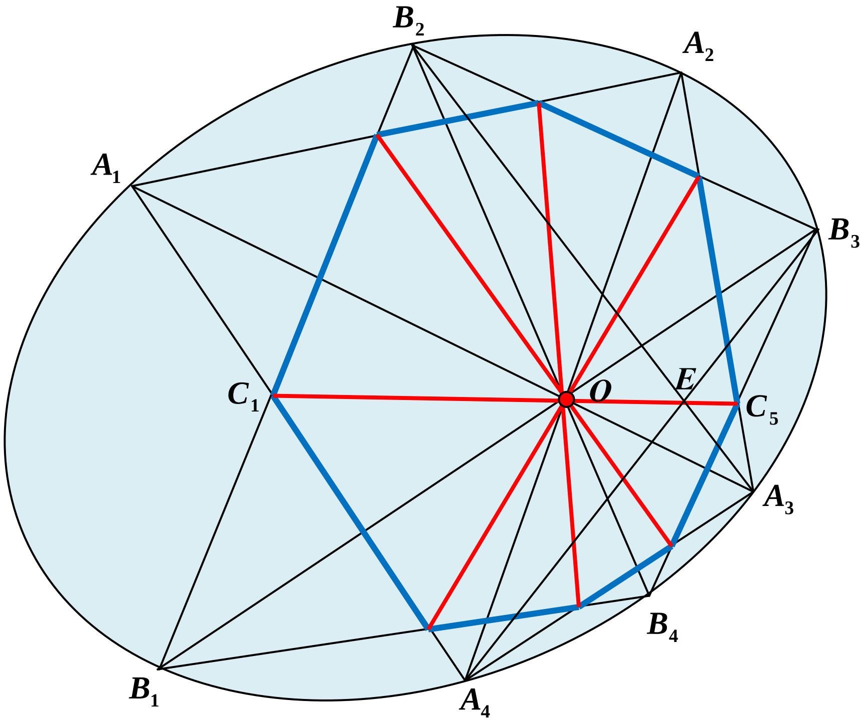

Рис. 2

Следовательно эти точки по теореме Паскаля также должны лежать на одной прямой. Отсюда заключаем, что и точки C_1 O и C_5 лежат на одной прямой, а точки C_1 и C_5 являются противоположными вершинами интересующего нас восьмивершинника.

Аналогично доказывается, что и другие прямые, проходящие через противоположные вершины нашего восьмиврщинника, проходят через точку O.

Что и требовалось доказать.

Ф. Герман