Франц Герман

Теория циклического изоморфизма

franz.h-n@yandex.ru

Общая теория

В данной работе рассматривается свойство изоморфных подгрупп некоторой абстрактной группы G, которое мы называем циклическим изоморфизмом. А также приводится пример матричного представления такого циклического изоморфизма.

Определение:

Если для k изоморфных подгрупп A_1, A_2, ..., A_k некоторой группы G существуют преобразования:

$$a_1A_2a_1^{-1} = A_3, \quad a_2A_3a_2^{-1} = A_4, \quad \ldots, \quad a_{k-1}A_ka_{k-1}^{-1} = A_1, \quad a_kA_1a_k^{-1} = A_2,$$

где a_i - изоморфные элементы соответствующих подгрупп A_i, то такое преобразование будем называть циклическим изоморфизмом.

Приступим к поискам циклического изоморфизма среди подгрупп 2-го порядка. Таблица Кэли для таких групп имеет вид (Рис. 1).

	a_0	a_1
a_0	a_0	a_1
a_1	a_1	a_0

Рис. 1

Предположем, что мы имеем три подгруппы второго порядка (группы второго порядка всегда изоморфны), обладающие свойством циклического изоморфизма.:

A:{ e, a }, B:{ e, b }, C:{ e, c }, , где e - нейтральный элемент. Каждый элемент в такой группе является обратным самому себе, поэтому можем записать:

$$aCa = B, \quad cBc = A, \quad bAb = C \quad . \qquad (1)$$

Циклический изоморфизм удобно изображать в виде диагрвммы (Рис. 2).

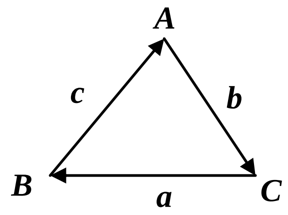

Рис. 2

Из равенств (1) легко получить обратные преобразования:

$$aBa = C,\ \ cAc = B,\ \ bCb = A.$$

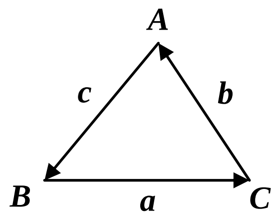

Рис. 3

Очевидно, что обе диаграммы можно объединить.

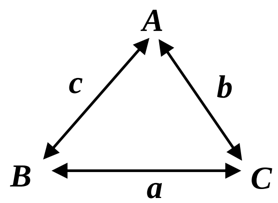

Рис. 4

Как видим, простейший циклический изоморфизм симметричен или, вернее сказать, по своему коммутативен, т. е. $aBa = bAb,\ \ cAc = aCa,\ \ bCb = cBc$.

Из равенств рассмотренного циклического изоморфизма можно получить два таких выражения:

$$ab = bc = ca = d,\ ba = cb = ac = f.$$

Не трудно заметить, что элементы ***e, a, b, c, d, f*** образуют некоммутативную группу шестого порядка, изоморфную группе подстановок 3-го порядка. Таблица Кэли такой группы показана на Рис. 5.

	e	***a***	***b***	***c***	***d***	***f***
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
a	*a*	*e*	*d*	*f*	*b*	*c*
b	*b*	*f*	*e*	*d*	*c*	*a*
c	*c*	*d*	*f*	*e*	*a*	*b*
d	*d*	*c*	*a*	*b*	*f*	*e*
f	*f*	*b*	*c*	*a*	*e*	*d*

Рис. 5

Для симметрической группы подстановок третьего порядка будем иметь такие соответствия:

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix},\ \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}.$$

Всякая группа, изоморфная группе подстановок 3-го порядка имеет три подгруппы, обладающие элементарным циклическим изоморфизмом. Данный изоморфизм мы назвали элементарным, т. к. он построен для подгрупп минимального порядка.

Перейдём к рассмотрению циклического изоморфизма для групп 3-го порядка. Таблица Кэли для таких групп имеет вид:

	$\boldsymbol{a}_0$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$
$\boldsymbol{a}_0$	$\boldsymbol{a}_0$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$
$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_0$
$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_0$	$\boldsymbol{a}_1$

Рис. 6

Пусть имеем три изоморфных подгруппы с элементами $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{c}_i$ и нейтральным элементом $\boldsymbol{e}$, для которых справедлив циклический изоморфизм. Зная таблицу Кэли и определение циклического изоморфизма, можем записать: $a_1Ba_2 = C$ или $a_1b_ia_2 = c_i$, а отсюда получаем:

$$a_2b_ia_1 = a_1c_ia_2. \qquad (2)$$

Из равенства (2) замечаем, что т. к. в левой и правой части сопряжённые элементы принадлежат одной и той же группе, а b_i и c_i - элементы других разных групп, то на основании определения циклического изоморфизма заключаем, что для существования циклического изоморфизма для подгрупп 3-го порядка необходимо, как минимум, четырёх изоморфных подгрупп.

Ниже мы вернёмся ещё к циклическому изоморфизму для подгрупп 3-го порядка.

Для циклического изоморфизма справедлива следующая

Теорема:

*Если среди подгрупп некоторой конечной группы **G** существуют хотя бы две изоморфные взаимнопростые подгруппы **A** и **B**, и существует хотя бы один элемент a_i, некоммутативный с подгруппой **B** (т. е. $a_iB \neq Ba_i$), то между подгрупп этого порядка существует циклический изоморфизм.*

Доказательство:

Пусть некоторая группа ***G*** имеет две изомофные подгруппы ***A*** и ***B***, и существует элемент $a_i \in A$, такой, что $a_iB \neq Ba_i$. Здесь под некоммутативностью элемента a_i и подгруппы ***B*** имеется в виду, что a_iB и Ba_i образуют разные подгруппы в группе ***G***.

Очевидно, что элементы $a_iBa_i^{-1}$ также образуют подгруппу, причём в силу неравенства $a_iB \neq Ba_i$ - это будет подгруппа, отличная от подгрупп ***A*** и ***B***, но изоморфная им. Обозначим её $C = a_iBa_i^{-1}$.

Рассмотрим элементы $b_iCb_i^{-1}$, где b_i - элемент соответственно изоморфный элементу a_i. В силу изоморфизма подгрупп ***A***, ***B*** и ***C***, элементы $b_iCb_i^{-1}$ вновь образуют подгруппу, изоморфную данным.

Т. к. группа ***G*** конечная, то она имеет конечное число подгрупп. Продолжая наши построения подобным образом, мы в конце концов получим элементы уже существующей подгруппы. Т. е. получаем, согласно определения, циклический изоморфизм прдгрупп ***A***, ***B***, ***C***, ...

Что и требовалось доказать.

Циклический изоморфизм может быть довольно сложным. Мы убедимся в этом уже при рассмотрении подгрупп группы подстановок 4-го порядка.

Среди подгрупп данной группы можно выделить три изоморфных подгруппы четвёртого порядка ***A, B, C***. Причём существует элемент $\boldsymbol{a_i}$ такой, что $\boldsymbol{a_i B \neq B a_i}$. Следовательно, в силу вышеизложенной теоремы, данные подгруппы связаны циклическим изоморфизмом. В этом не трудно убедиться.

$$\boldsymbol{A:\left\{e, a_1 = \begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}\right\}},$$

$$\boldsymbol{B:\left\{e, b_1 = \begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}\right\}},$$

$$\boldsymbol{C:\left\{e, c_1 = \begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}\right\}}, \text{ здесь } \boldsymbol{e = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}}.$$

Таблица Кэли для таких групп имеет вид:

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_3	a_0	a_2
a_2	a_2	a_0	a_3	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

Рис. 7

Элементом, отвечающим требованиям теоремы о циклическом изоморфизме, является элемент $\boldsymbol{a_1}$ и, сответственно, - $\boldsymbol{a_2}$, т. к. $\boldsymbol{a_2 = a_1^{-1}}$. Получаем такой циклический изоморфизм:

$$\boldsymbol{a_1 B a_1^{-1} = C}, \quad \boldsymbol{b_1 C b_1^{-1} = A}, \quad \boldsymbol{c_1 A c_1^{-1} = B}. \qquad (3)$$

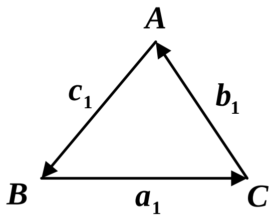

Рис. 8

Из равенств (3) легко получить обратные преобразования циклического изоморфизма.

$$\boldsymbol{a_2 C a_2^{-1} = B}\,,\quad \boldsymbol{c_2 B c_2^{-1} = A}\,,\quad \boldsymbol{b_2 A b_2^{-1} = C}\,.$$

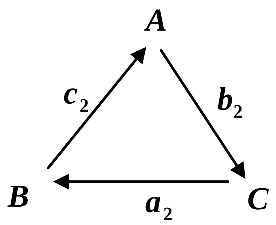

Рис. 9

Элемент $\boldsymbol{a_3}$ не отвечает условиям нашей теоремы, поэтому для построения циклического изоморфизма не годится.

Кроме данных подгрупп этой группы существует ещё четыре подгруппы третьего порядка, отвечающие условиям нашей теоремы. Таблицу Кэли для таких групп мы показали на Рис.6. Ранее мы говорили, что для существования циклического изоморфизма среди подгрупп 3-го порядка необходимо как раз не менее четырёх изоморфных подгрупп.

Введём соответствующие обозначения и покажем диаграммы циклического изоморфизма для этих подгрупп.

$$\boldsymbol{A}:\left\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{1423}\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{1342}\end{pmatrix}\right\},\ \boldsymbol{B}:\left\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{3241}\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{4213}\end{pmatrix}\right\},$$

$$\boldsymbol{C}:\left\{\boldsymbol{e}, \mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{4132}\end{pmatrix}, \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{2431}\end{pmatrix}\right\},\ \boldsymbol{D}:\left\{\boldsymbol{e}, \mathbf{d}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{2314}\end{pmatrix}, \mathbf{d}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1234}\\\mathbf{3124}\end{pmatrix}\right\}.$$

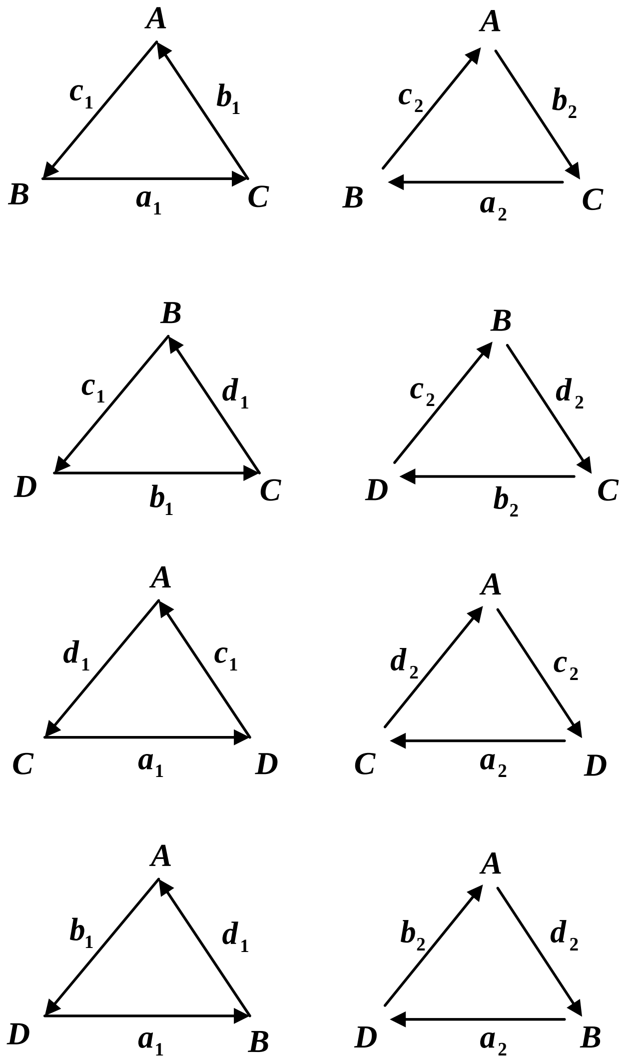

Рис. 10

В данном случае равенство (2) принимает вид:

$$\boldsymbol{a_2 B a_1 = a_1 C a_2 = D}.$$

Среди элементов симметрической группы 4-го порядка осталось ещё 6 элементов, каждый из которых в совокупности с нейтральным элементом образует подгруппу второго порядка. Причём, оставшиеся элементы отвечают требованиям теоремы о циклическом изоморфизме. Следовательно, между оставшихся подгрупп существует циклический изоморфизм.

Введём обозначения:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{1243} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{2134} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{1432} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{1324} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{4231} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{1234} \\ \mathbf{3214} \end{pmatrix}.$$

Подгруппы второго порядка, содержащие данные элементы, обозначим соответственно: ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***F*** и ***H***, тогда

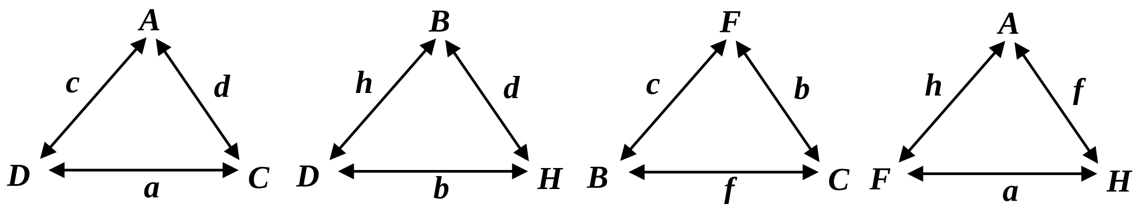

Рис. 11

Как видим из данных примеров, циклический изоморфизм довольно разнообразен.

Теперь займёмся построением группы, подгруппы которой образовывали бы циклический изоморфизм, имеющий четырёхугольную диаграмму Рис. 12.

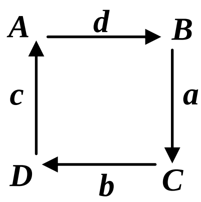

Рис. 12

Простейшие равенства циклического изоморфизма будут иметь вид: ***aBa = C***, ***bCb = D***, ***cDc = A***, ***dAd = B***.

Перепишем эти равенства, введя обозначения, как принято в опренделении циклического изоморфизма:

$$a_1 A_2 a_1 = A_3,\ a_2 A_3 a_2 = A_4,\ a_3 A_4 a_3 = A_1,\ a_4 A_1 a_4 = A_2. \qquad (4)$$

Т. к. мы хотим построить простейшую из возможных групп, то будем считать, что все подгруппы A_1, A_2, A_3 и A_4 второго порядка.

Из равенств (4) получаем дополнительные соотношения: $a_3 a_4 = a_2 a_1 = a_1 a_3 = a_5$, $a_4 a_3 = a_1 a_2 = a_3 a_1 = a_6$, $a_1 a_4 = a_4 a_2 = a_2 a_3 = a_7$, $a_4 a_1 = a_2 a_4 = a_3 a_2 = a_8$. И, кроме этого, необходимо ввести ещё один элемент, определяемый равенством: $a_1 a_8 = a_9$.

Получаем группу 10-го порядка, имеющую такую таблицу Кэли (Рис. 14).

Из теории абстрактных групп известно, что групп 10-го порядка существует только две. Одна из них Абелева, другая нет. Мы построили не

Абелеву группу, представляющую собой прямое произведение двух групп, второго и пятого порядков. Также известно, что такая группа имеет одну подгруппу 5-го порядка и пять подгрупп 2-го порядка.

Действительно, кроме данных нами подгрупп 2-го порядка A_1, A_2, A_3 и A_4, мы имеем ещё одну подгруппу $A_9 : \{a_0, a_9\}$, а элементы a_0, a_5, a_6, a_7, a_8 образуют подгруппу 5-го порядка.

Т. к. элемент a_9 отвечает требованиям нашей теоремы, то кроме заданного циклического изоморфизма мы получаем ещё четыре подобных.

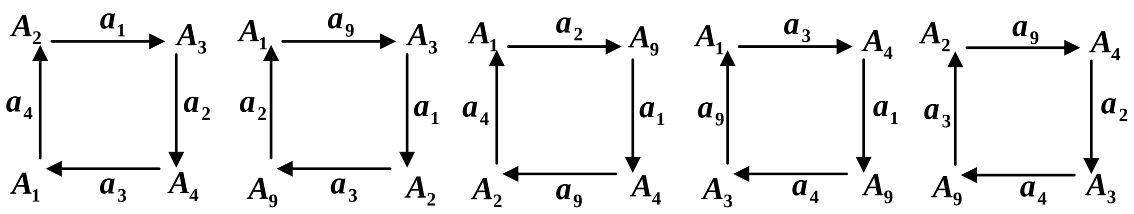

Рис. 13

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	a_1	a_0	a_6	a_5	a_7	a_3	a_2	a_4	a_9	a_8
a_2	a_2	a_5	a_0	a_7	a_8	a_1	a_9	a_3	a_4	a_6
a_3	a_3	a_6	a_8	a_0	a_5	a_4	a_1	a_9	a_2	a_7
a_4	a_4	a_8	a_7	a_6	a_0	a_9	a_3	a_2	a_1	a_5
a_5	a_5	a_2	a_9	a_1	a_3	a_7	a_0	a_8	a_6	a_4
a_6	a_6	a_3	a_1	a_4	a_9	a_0	a_8	a_5	a_7	a_2
a_7	a_7	a_9	a_4	a_2	a_1	a_8	a_5	a_6	a_0	a_3
a_8	a_8	a_4	a_3	a_9	a_2	a_6	a_7	a_0	a_5	a_1
a_9	a_9	a_7	a_5	a_8	a_6	a_2	a_4	a_1	a_3	a_0

Рис. 14

Данный циклический изоморфизм интересен тем, что для каждой отдельной из пяти полученных четырёхгранных диаграмм не существует обратных диаграмм.

Все пять подгрупп можно объединить одной диаграммой (Рис.15).

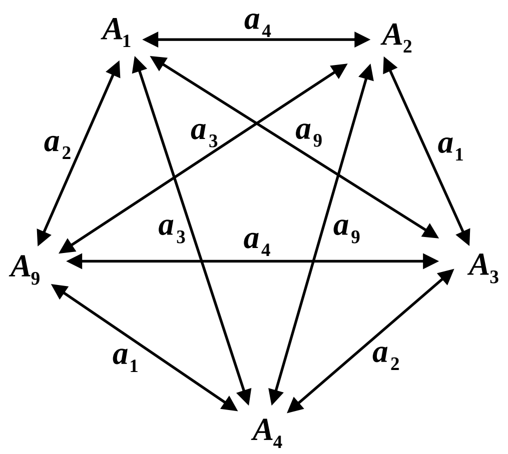

Рис. 15

О существовании пятой подгруппы $\boldsymbol{A_9}$ можно было сделать заключение и из анализа равенств (4).

На этом мы закончим исследование общих вопросов и приступим к построению матричного представления циклического изоморфизма.

Матричное представление

Следует заметить, что однотипным (изоморфным) циклическим изоморфизмом могут быть связаны подгруппы не обязательно изоморфных групп, поэтому мы будем строить матричное представление именно циклического изоморфизма, а не матричное представление абстрактных групп.

Построим циклический изоморфизм для матричных групп 4-го порядка, состоящих из матриц 2-го порядка. Таблица Кэли таких групп показана на Рис. 7.

Рассмотрим частный случай раенств (3).

$$\boldsymbol{a_1 b_3 a_1^{-1} = c_3}, \quad \boldsymbol{b_1 c_3 b_1^{-1} = a_3}, \quad \boldsymbol{c_1 a_3 c_1^{-1} = b_3}. \tag{5}$$

Вся работа передана в РАН