Франц Герман

Нелинейная теория матриц

franz.h-n@yandex.ru

Содержание

1. Оператор обращения

Объектом нашего исследования будут невырожденные матрицы второго порядка. Обозначать матрицы будем традиционно, как принято в большинстве литературы: $A=\|a_{ij}\|=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. В некоторых случаях матрицу будем называть оператором.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A, если выполняется равенство:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ - единичная матрица.

В абсолютном большинстве литературы для вычисление обратной матрицы приводится конкретное правило (мы не приводим его здесь), но нигде не говорится об операторе обращения. Введём

Определение:

Матрицу $\boldsymbol{A_O}$ будем называть оператором обращения матрицы $\boldsymbol{A}$, если справедливо выражение $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

Свойства оператора обращения $\boldsymbol{A_O}$.

1. Коммутативность $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}$.

Действительно, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^{-1}$. Умножем второе равенство на $\boldsymbol{A}^{-1}$ слева, получим: $\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$ или $\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$. Полученное выражение умножем справа на $\boldsymbol{A}$, получим: $\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

Что и требовалось доказать

2. $\boldsymbol{A_O}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$ (см. Свойство 1)

3. Перестановоченость $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

Доказательство этого свойства очевидно следует из Свойства 1.

4. $\boldsymbol{A_O}^{-1}=\boldsymbol{A}^2$.

$\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A_O}^{-1}=\boldsymbol{E}$, но $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A_O}^{-1}=\boldsymbol{A_O}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{A_O}^{-1}=\boldsymbol{A}^2$

Что и требовалось доказать.

5. Если $\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{C}$, то $\left(\boldsymbol{B_O}\cdot\boldsymbol{A_O}\right)^2=\boldsymbol{C_O}$

Рассмотрим тождество $\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)_{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{E}$. Чтобы оно выполнялось должно выполняться равенство $\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)_{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{B_O}\boldsymbol{A_O}\boldsymbol{B_O}\boldsymbol{A_O}$. Действительно,

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\underbrace{\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{B_O}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{A_O}\boldsymbol{B_O}\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\underbrace{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A_O}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{B_O}\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^2\underbrace{\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{B_O}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A_O}=\boldsymbol{E},$$

т. е. так как $A^2 \cdot B^2 = C$, то $\left(B^2 \cdot A^2\right)_O = C_O = B_O A_O B_O A_O = \left(B_O A_O\right) \cdot \left(B_O A_O\right) = \left(B_O A_O\right)^2$ или $\left(B_O \cdot A_O\right)^2 = C_O$.

Что и требовалось доказать.

Вычислим элементы a_{ij} для матрицы A_O.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, где $|A|$ - определитель матрицы A (иногда определитель $|A|$ также будем обозначать $\mathbf{det}(A)$), а A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Обозначим $A_O = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$A \cdot A_O = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Можем составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = \dfrac{A_{11}}{|A|} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = \dfrac{A_{12}}{|A|} \end{cases}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = \dfrac{A_{21}}{|A|} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = \dfrac{A_{22}}{|A|} \end{cases}. \tag{2}$$

Из решения системы (1) находим элементы x_{11} и x_{21}, а из решения системы (2) - x_{12} и x_{22}.

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & a_{12} \\ A_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|^2}; \quad x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & A_{11} \\ a_{21} & A_{12} \end{vmatrix}}{|A|^2}; \quad x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} A_{21} & a_{12} \\ A_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|^2}; \quad x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & A_{21} \\ a_{21} & A_{22} \end{vmatrix}}{|A|^2}.$$

Выразим элементы x_{ij} через элементы a_{ij}.

Известно, что $A_{11} = a_{22}$, $A_{22} = a_{11}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, тогда:

$$x_{11} = \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{|A|^2};\ x_{12} = \frac{-a_{12}(a_{22} + a_{11})}{|A|^2};\ x_{21} = \frac{-a_{21}(a_{22} + a_{11})}{|A|^2};\ x_{22} = \frac{a_{11}^2 + a_{12}a_{21}}{|A|^2}$$

Определитель $|A_O| = \dfrac{1}{|A|^2}$ и $|A| \cdot |A_O| = |A^{-1}|$

Пример:

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, используя оператор обращения $A_O = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

Определитель данной матрицы равен **1**. Вычислим элементы оператора обращения: $x_{11} = 17$, $x_{12} = -12$, $x_{21} = -24$, $x_{22} = 17$, т. е. $A_O = \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{pmatrix}$. Находим обратную матрицу.

$$A \cdot A_O = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что $A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Теорема о разложении матрицы в линейную комбинацию ее сопряжённых корней.

Воспользуемся формулой для вычисления квадратных корней из невырожденной квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ([1], стр. 277).

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}}} \left(A \pm E\sqrt{\det A}\right), \tag{3}$$

при условии, что $a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A} \neq 0$.

Сопряжёнными корнями матрицы A будем называть матрицы:

$$\sqrt{A_1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} + 2\sqrt{\det A}}} \left(A + E\sqrt{\det A}\right),$$

$$\sqrt{A_2} = \frac{-1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\det A}}}\left(A - E\sqrt{\det A}\right)$$

Произведение сопряжённых квадратных корней коммутативно, т. е. $\sqrt{A_1}\sqrt{A_2} = \sqrt{A_2}\sqrt{A_1}$. В этом не трудно убедиться прямым вычислением.

Справедлива следующая

Теорема 1:

Если матрица второго порядка имеет квадратные корни, то её можно представить в виде линейной комбинации своих сопряжённых корней.

Доказательство.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеет квадратные корни. Докажем, что $A = k_1\sqrt{A_1} + k_2\sqrt{A_2}$.

Умножим $\sqrt{A_1}$ на $k_1 = \frac{\sqrt{a_{11} + a_{22} + 2\sqrt{\det A}}}{2}$, а $\sqrt{A_2}$ на $k_2 = -\frac{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\det A}}}{2}$ и сложим полученные выражения, получим:

$$k_1\sqrt{A_1} + k_2\sqrt{A_2} = \frac{1}{2}\left(A + E\sqrt{\det A}\right) + \frac{1}{2}\left(A - E\sqrt{\det A}\right) = A,$$ и окончательно:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + E\sqrt{\det A}\right) + \frac{1}{2}\left(A - E\sqrt{\det A}\right)$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим разложение матриц в линейную комбинацию сопряжённых корней на примере известных матриц Паули: $S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдём сопряжённые корни для матрицы S^1.

$$\sqrt{S_1^1} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \sqrt{S_2^1} = -\frac{1}{i\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты линейного разложения имеют вид:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2i}}{2}, \qquad k_2 = -\frac{i\sqrt{2i}}{2}.$$

Получаем такое разложение:

$$S^1 = \sqrt{\frac{i}{2}}\left(\sqrt{S_1^1} - i\sqrt{S_2^1}\right)$$

Аналогичные выражения получаем и для других матриц:

$$S^2 = \sqrt{\frac{i}{2}}\left(\sqrt{S_1^2} - i\sqrt{S_2^2}\right), \qquad S^3 = \sqrt{\frac{i}{2}}\left(\sqrt{S_1^3} - i\sqrt{S_2^3}\right)$$

В общем виде можем записать:

$$S^k = \frac{1}{\sqrt{2i}}\left(\sqrt{S_2^k} + i\sqrt{S_1^k}\right). \tag{4}$$

Как оказалось, произведение сопряжённых корней матриц Паули равно единичной матрице.

$$\sqrt{S_1^k} \cdot \sqrt{S_2^k} = E. \tag{5}$$

Интересно также, что оператор обращения для $\sqrt{S_1^k}$ совпадант с оператором обращения для $\sqrt{S_2^k}$. Действительно, в силу (5) матрица $\sqrt{S_2^k}$ является обратной для матрицы $\sqrt{S_1^k}$ и наоборот. Т. о. можем записать:

$$\sqrt{S_1^k} \cdot \left(\sqrt{S_1^k}\right)_O = \sqrt{S_2^k}, \qquad \sqrt{S_2^k} \cdot \left(\sqrt{S_2^k}\right)_O = \sqrt{S_1^k}.$$

Из свойств 2 и 4 операторов обращения имеем: $\left(\sqrt{S_1^k}\right)_O = \left(\sqrt{S_2^k}\right)^2 = S^k$, $\left(\sqrt{S_2^k}\right)_O = \left(\sqrt{S_1^k}\right)^2 = S^k$, т. е. $\left(\sqrt{S_1^k}\right)_O = \left(\sqrt{S_2^k}\right)_O$.

Примечание.

Формула (4) по своей структуре очень напоминает формулу векторного бозона $W_\alpha^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[A(1)_\alpha \mp A(2)_\alpha\right]$ ([2], стр. 127). Сравнивая формулу векторного бозона с формулой (4), можем записать: $\sqrt{S_1^k} = \mp A(2)_\alpha$, $\sqrt{S_2^k} = A(1)_\alpha$ и $W_\alpha^{\pm} = S^k\sqrt{i}$ Мы советую физикам-теоретикам обратить на это внимание.

Кроме того заметим, обратим внимание на формулу рождения элементарной частицы Каон ([8], стр. 62): $\boldsymbol{K^0} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\boldsymbol{K}_1^0 + \boldsymbol{K}_2^0\right)$. Не правда ли, и эта формула очень похожа на формулу (4). Возможно, физикам теоретикам надо обратить внимание на ***Теорему* 1**.

Но продолжим.

Справедлива следующая

Теорема 2:

Любая матрица Паули вместе со своими матрицами квадратных корней и единичной матрицей образует циклическую группу четвёртого порядка.

Доказательство:

Зная (5) можем записать: $\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k} \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}_2^k} \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}_2^k} = \sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$, т. е. $\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k} \cdot \boldsymbol{S}^k = \sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$. Аналогично: $\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k} \cdot \boldsymbol{S}^k = \sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$. Можем составить таблицу умножения для матриц $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{S}^k$, $\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$, $\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$.

	$\boldsymbol{E}$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$	$\boldsymbol{S}^k$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$
$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$	$\boldsymbol{S}^k$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$
$\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$	$\boldsymbol{S}^k$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$	$\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{S}^k$	$\boldsymbol{S}^k$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$	$\boldsymbol{E}$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$
$\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_2^k}$	$\boldsymbol{E}$	$\sqrt{\boldsymbol{S}_1^k}$	$\boldsymbol{S}^k$

Множество этих четырёх матриц, таблицу умножения которых мы только что составили, будем обозначать через $\boldsymbol{G}^k$. Убедимся, что это множество действительно является группой.

Первое, существует единичный элемент. Это матрица $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Второе, для всякой матрицы из множества $\boldsymbol{G}^k$ существует матрица ей обратная.

Третье, произведение двух матриц из множества $\boldsymbol{G}^k$ снова даёт матрицу этого же множества.

И, наконец, четвёртое, операция умножения является ассоциативной, это следует непосредственно из свойств умножения матриц.

Т. о. все аксиомы группы выполняются, следовательно множество $\boldsymbol{G}^k$ действительно является группой.

Заметим, что группа $\boldsymbol{G}^k$ изоморфна группе вращений квадрата.

Совершенно очевидно, что $\boldsymbol{G}^1$, $\boldsymbol{G}^2$ и $\boldsymbol{G}^3$ изоморфны между собой.

3. Доказательство существования бесконечного множества корней квадратных из матриц вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Для доказательства достаточно показать, что существует бесконечное множество корней квадратных из матрицы $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Действительно, все матрицы $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2k} \\ k & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ будут являться корнями матрицы $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $k \neq 0$ и k – любое число.

Проверим это прямым вычислением.

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2k} \\ k & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2k} \\ k & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2k\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2k\sqrt{2}}\right) \\ \frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. О невозможности извлечения квадратного корняиз матриц вида $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$.

Для доказательства достаточно показать, что квадратного корня не существует у матрицы $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство:

Пусть такой корень существует $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, т. е. $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$ или

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из чего получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ d^2 + bc = -1 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = -1 \end{cases}.$$

Т. к. $\det A = 0$, то и $ad - bc = 0$, т. е. $ad = bc$. Из первого уравнения полученной системы имеем $a^2 + ad = 1$ или $d = \frac{1-a^2}{a}$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы: $\left(\frac{1-a^2}{a}\right)^2 + 1 - a^2 = -1$ или $(1-a^2)^2 + a^2(1-a^2) = -a^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем явное противоречие: $1 = 0$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ все выкладки проделываются аналогично.

5. Условие идемпотентности квадратных матриц второго порядка

Матрица A называется идемпотентной, если выполняется условие $A^2 = A$ ([3], стр. 61).или $\sqrt{A} = A$, т. е.

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}}} \begin{pmatrix} a_{11} \pm \sqrt{\det A} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \pm \sqrt{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \pm a_{11}\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}} = a_{11} \pm \sqrt{\det A} \\ \pm a_{12}\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}} = a_{12} \\ \pm a_{21}\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}} = a_{21} \\ \pm a_{22}\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}} = a_{22} \pm \sqrt{\det A} \end{cases}.$$

Из второго (или третьего) уравнения, полученной системы имеем: $a_{11} + a_{22} = 1 \mp 2\sqrt{\det A}$ (необходимо следить за согласованием знаков $\pm$ и $\mp$). Подставим это выражение в первое уравнение, получим: $\pm a_{11} = a_{11} \pm \sqrt{\det A}$. Откуда заключаем:

$$\det A = 0, \qquad a_{11} + a_{22} = 1. \tag{6}$$

Условия (6) и есть условия идемпотентности матрицы.

Пример:

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Как видим, условия идемпотентности выполняются. Убедимся, что матрица A дествительно идемпотентна. Т. е. вычислим A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-12 & -6+8 \\ 18-26 & -12+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

6. Нелинейные системы уравнений второго порядка, задаваемые матричными уравнениями

Рассмотрим матричное уравнение (о матричных уравнениях см. ([4], стр. 196)).

$$X^2 + BX + C = 0, \tag{7}$$

где $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Уравнению (7) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} + bx_{11} + c_{11} = 0 \\ x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} + bx_{12} + c_{12} = 0 \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} + bx_{21} + c_{21} = 0 \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 + bx_{22} + c_{22} = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Решив (7), получим решения системы уравнений (8). В общем случае можем записать:

$$X = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда $x_{12} = x_{21}$ и $c_{12} = c_{21}$, тогда второе и третье уравнения системы (8) будут тождественны и система примет такой вид:

Вся работа передана в РАН