Calc1

Sven Köppel

koeppel@fias.uni-frankfurt.de

Generation date: Friday 25th October, 2013, 12:44

1 From Density to Metric

1.1 Problem: Mass distribution is wrong!?

Ansatz, mit Plancklänge $L_P = L$ und Masse M, Density ρ:

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi r} \frac{L_P}{(r^2 + L_P^2)^2} \tag{1}$$

This density has two limes

$$\frac{M}{8\pi L_P^3} \xleftarrow{r \simeq L_P} \rho(r) \xrightarrow{r \gg L_P} 0 \tag{2}$$

Man kann daraus eine Massenverteilung ableiten: $\rho = -T_0^0$:

$$\mu(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}x\, x^2 \rho(x) \tag{3}$$

$$m(r) = 4\pi \int_r^\infty \mathrm{d}x\, x^2 (-\rho(x)) \tag{4}$$

Das unbestimmte Integral ist $4\pi \int x^2 \rho(x) \mathrm{d}x = -\frac{LM}{L^2+x^2} + C$, aber die bestimmten Integrale haben die eindeutige Lösung

$$\mu(r) = \frac{Mr^2}{L^2 + r^2} \tag{5}$$

$$m(r) = -\frac{L^2 M}{L^2 + r^2} \tag{6}$$

$$\frac{M}{L} = \mu(r) + m(r) \tag{7}$$

BUT the paper states

$$m(r) = \frac{Mr^2}{L^2 + r^2} = M - \frac{LM}{L^2 + r^2} \tag{8}$$

Which one is right? Equation 8 and 6 only differ by constant: $M + m_6(r) = m_8(r)$.

1.2 Problem: Source of EOS?

On some way this yields to a stress energy tensor

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-\rho, p_r, p_\perp, p_\perp) \tag{9}$$

Conservation of stress-energy tensor

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{10}$$

yields $p_r = -\rho$ and $p_\perp = p_r + \frac{r}{2}\partial_r p_r$, as statet in the paper. Wie kommt man dazu? This determines $T_{\mu\nu}$ components to

$$T_{00} = T_{11} = -\rho \tag{11}$$

$$T_{11} = T_{22} = -\frac{3}{2}\rho - \frac{2\rho}{r^3 + rL_P} = -\frac{L^2 M\left(L^2 - 3r^2\right)}{4\pi r\left(L^2 + r^2\right)^3} \tag{12}$$

Siehe weiter unten warum das ein Problem ist.

1.3 Notes

Ist die folgende Formel eine Ab-Initio-Annahme?

$$g_{00} = -\left(1 - \rho\frac{M^2 G}{\pi L_P^2}\right) = -g_{11}^{-1} \tag{13}$$

Griffith-Podolsky leiten mit der inneren Schwarzschildgleichung her:

$$\mu(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x)\mathrm{d}x \tag{14}$$

Außerdem ist die Schwarzschild-Lösung SSM

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{15}$$

Vgl A.S Vaidya Radiating SSM wo $m = m(r)$. Inner Schwarzschild:

$$\mathrm{d}s^2 = -\exp\left(2\Phi(r)\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2\mu(r)}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{16}$$

Aus Einsteingleichungen folgert man da typischerweise Constraints an $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$. Ist $\mu(r) = m(r)$? Außerdem haben wir offensichtlich kein isotropes p, wovon inner Schwarzschild immer ausgeht.

Dazu: Adler Razin Seite 262ff

Sowie Inner Schwarzschild S. 290

2 From metric to density and pressure

Isotropic static metric, Standardform (Achtung, Signatur $+---$!)

$$ds^2 = B(r)\mathrm{d}t^2 - A(r)\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{17}$$

Hier: $B(r) = 1 - \frac{2m(r)G}{r} = 1/A(r)$ mit $m(r) = Mr^2/(L^2 + r^2)$, $L = L_P$.
Berechne Inverse Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(B, -A, -r^2, -r^2\sin^2\theta) \tag{18}$$

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{B}, \frac{-1}{A}, \frac{-1}{r^2}, \frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right) = g_{\mu\nu}^{-1} \tag{19}$$

2.1 Kristoffels und Kovariante Ableitung

Berechne damit Kristoffelsymbole:

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) \tag{20}$$

Berechne Komponenten (Fließbach ART, S. 134)

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2B} = \frac{GM\left(r^2 - L^2\right)}{\left(L^2 + r^2\right)\left(r(r - 2GM) + L^2\right)} \tag{21}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2A} = \frac{GM\left(r^2 - L^2\right)}{A\left(L^2 + r^2\right)^2} \tag{22}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2A} = \frac{GM(L - r)(L + r)}{\left(L^2 + r^2\right)\left(r(r - 2GM) + L^2\right)} \tag{23}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \tag{24}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{A} \tag{25}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{A} \tag{26}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \tag{27}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta \tag{28}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \tag{29}$$

Die anderen Komponenten sind alle 0.

Dies erlaubt nun das Berechnen der kovarianten Ableitung:

$$\nabla_a t^\nu = \partial_a t^\nu + \Gamma^\mu_{ac} t^c \tag{30}$$
$$\nabla_a T^{\mu\nu} = \partial_a T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{sa} T^{s\nu} + \Gamma^\nu_{as} T^{\mu s} \tag{31}$$

Nun können wir für die Metrik ausrechnen, was die Kontraktion

$$0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{s\mu} T^{s\nu} + \Gamma^\nu_{\mu s} T^{\mu s} \tag{32}$$

bedeutet. Dies ist ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen ($0 = 0^\nu$). Mit Ansatz $T^{\mu\nu} = \text{diag}(p_1 := \rho, p_2 := -\rho, p_3, p_4)$ kann man nun mit 4 Gleichungen die zwei Unbekannte $p_3 = p_3(p_1, p_2)$, $p_4 = p_4(p_1, p_2)$ ausdrücken:

$$p_3 = \frac{\frac{GMr\left(r^2-L^2\right)\rho(r)}{\left(L^2+r^2\right)^2} + \frac{p_r(r)\left(L^2 r(4r-3GM)+r^3(2r-5GM)+2L^4\right)}{\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2}}{2r^2} \tag{33}$$

$$p_4 = \frac{\csc^2(\theta)\left(\frac{GMr\left(r^2-L^2\right)\rho(r)}{\left(L^2+r^2\right)^2} + \frac{p_r(r)\left(L^2 r(4r-3GM)+r^3(2r-5GM)+2L^4\right)}{\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2}\right)}{2r^2} \tag{34}$$

BUT Gleichungen 33 und 34 sind unvereinbar mit 12 aus dem Paper, also

$$p_3 = p_4 \neq -\rho(r) - \frac{r}{2}\partial_r \rho(r) \quad !!! \tag{35}$$

Alternativ kann man auch erst mal die Energieerhaltungsgleichungen außen vor lassen und die Einsteingleichungen lösen.

2.2 Ricci-Tensor und Einstein-Gleichungen

Berechne nun Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = g^{\kappa\rho} R_{\kappa\mu\rho\nu} \tag{36}$$
$$= \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} \tag{37}$$

Erhalte hierbei

$$R_{00} = \frac{2GL^2M\left(L^2-3r^2\right)\left(r(r-2GM)+L^2\right)}{r\left(L^2+r^2\right)^4} \tag{38}$$

$$R_{11} = -\frac{2GM\left(L^4-3L^2r^2\right)}{r\left(L^2+r^2\right)^2\left(r(r-2GM)+L^2\right)} \tag{39}$$

$$R_{22} = -\frac{4GL^2Mr}{\left(L^2+r^2\right)^2} \tag{40}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \tag{41}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu \tag{42}$$

Der Ricci-Skalar $R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ lautet

$$R = -\frac{40GL^2Mr}{\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{24GL^4M}{r\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{18L^2r^2}{\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{6r^4}{\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{6L^6}{r^2\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{18L^4}{\left(L^2+r^2\right)^3} \tag{43}$$

und sieht damit irgendwie falsch aus. Er geht in die Einstein-Gleichungen ein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{44}$$

Wenn wir in gleicher Weise die Energiespur $T = T^\mu_\mu$ definieren, ergibt Kontraktion der Einsteingleichung $-R = -\frac{8\pi G}{c^4}T$ und damit eine andere Schreibweise von Einstein:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right) \tag{45}$$

Wenn ich den Argumentationsweg *Metrik* $\rightarrow$ *Christoffel* $\rightarrow$ *Ricci* $\rightarrow$ *Energieimpuls* wähle, stelle ich 44 nach $T_{\mu\nu}$ um ($c = 1$):

$$T_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}}{8\pi G} \tag{46}$$

Das Ergebnis von 46 ist die Monster-Diagonalmatrix

$$T_{00} = -\frac{5GL^2M^2r^2}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^4} + \frac{9GM^2r^4}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^4} + \frac{3r^6}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^4} + \frac{3L^2r^4}{2\pi G\left(L^2+r^2\right)^4} + \frac{3L^8}{8\pi Gr^2\left(L^2+r^2\right)^4} + \frac{3L^6}{2\pi G\left(L^2+r^2\right)^4} - \frac{7GL^4M^2}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^4} + \frac{9L^4r^2}{4\pi G\left(L^2+r^2\right)^4} - \frac{3Mr^5}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^4} - \frac{5L^2Mr^3}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^4} + $$

$$T_{11} = \frac{11GL^2M^2r^2}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^2\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2} + \frac{9GM^2r^4}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^2\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2} + \frac{3r^6}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^2\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2} - \frac{3Mr^5}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^2\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2} + \frac{3L^2r^4}{2\pi G\left(L^2+r^2\right)^2\left(r(r-2GM)+L^2\right)^2}$$

$$T_{22} = \frac{3r^6\csc^2(\theta)}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{3r^6}{4\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{9L^2r^4\csc^2(\theta)}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{9L^2r^4}{4\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{3L^6\csc^2(\theta)}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{3L^6}{4\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{9L^4r^2\csc^2(\theta)}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{9L^4r^2}{4\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{9L^2Mr^3}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{L^4Mr}{2\pi\left(L^2+r^2\right)^3}$$

$$T_{33} = -\frac{3r^6}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{9L^2r^4}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{3L^6}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{9L^4r^2}{8\pi G\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{9L^2Mr^3\cos(2\theta)}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{9L^2Mr^3}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^3} - \frac{L^4Mr\cos(2\theta)}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^3} + \frac{L^4Mr}{4\pi\left(L^2+r^2\right)^3}$$

Das ist garantiert falsch. Warum?

Zum Crosscheck ließe sich mit dem neuen Tensor nochmal $0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu}$ berechnen, aber das führt zu nichts neuem brauchbaren (ähnlich wie oben).

3 Hawking Temperature

Normales Vorgehen ist wohl bei SMM-artigen Metriken:

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial r}\bigg|_{r=r_+} \rightarrow T_H = \frac{\kappa}{2\pi k_B} = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{47}$$

Dabei ist $C(r)$ eigentlich durch den Übergang in Interior/Exterior-Koordinaten gegeben (vgl BH2-Präsentation). Mein erster Ansatz würde einfach einsetzen:

$$C(r) := 1 - \frac{2MLr}{r^2 + L^2} \tag{48}$$

Gemäß dem Paper gilt

$$r_+ = r_h = L^2 \left(M \pm + \sqrt{M^2 - M_p^2} \right) \tag{49}$$

Also ist

$$\kappa = \frac{1}{2}\left(\frac{4LMr^3}{(L^2+r^2)^2} - \frac{4LMr}{L^2+r^2} \right)_{r=r_h} \tag{50}$$

Setzt man hier

$$M = \frac{1}{2L^2 r_h}(r_h^2 + L^2) \tag{51}$$

aus dem Paper ein, dann bekommt man eine seltsame Hawkin-Temperatur von

$$T_H = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{L}{L^2 + r_+^2} \right) \tag{52}$$

Vergleich mit dem gesuchten Ergebnis:

$$T_{H,\text{Paper}} = \frac{1}{4\pi r_+}\left(1 - \frac{2L^2}{r_+^2 + L^2} \right) \tag{53}$$

WHY does this calculation not lead the correct result?
Back-calculation from $T_{H,\text{Paper}}$:

$$C_{\text{Paper}}(r) = 4\pi \int T_{H,\text{Paper}} \mathrm{d}r = \log(abc) \tag{54}$$

Looks like an entry in the SMM inner metric 16, $\mathrm{d}s^2 = -\exp(2\Phi(r))\,\mathrm{d}t^2 + \ldots$. True?