

JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT  
FRANKFURT AM MAIN  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

# **Schwarze Löcher und Remnants in großen Extradimensionen**

von  
Thomas Burschil  
aus Oberursel (Taunus)

Juli 2009



Thomas Burschil  
Moselstrasse 6  
61440 Oberursel  
Deutschland  
burschil@th.physik.uni-frankfurt.de

### **Diplomarbeit**

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik  
Fachbereich Physik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main

Max-von-Laue-Str. 1  
60438 Frankfurt am Main

Betreuer: **JProf. Dr. Marcus Bleicher**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation und Konventionen</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Das Standardmodell</b>	<b>7</b>
2.1	Der Aufbau des Standardmodells . . . . .	7
2.1.1	Die Materie . . . . .	7
2.1.2	Die Wechselwirkungen . . . . .	9
2.1.3	Das Higgsboson . . . . .	10
2.2	Quantenfeldtheorie . . . . .	11
2.2.1	Beschreibung von Materie . . . . .	12
2.2.2	Wechselwirkungen und Symmetrien . . . . .	12
2.2.3	Lagrangedichte des Standardmodells . . . . .	14
2.3	Erfolge und Probleme des Standardmodells . . . . .	14
2.3.1	Hierarchieprobleme . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Gravitation und Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>17</b>
3.1	Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	18
3.1.1	Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	18
3.1.2	Das Äquivalenzprinzip . . . . .	19
3.2	Riemannsche Geometrie . . . . .	20
3.2.1	Koordinaten und Koordinatentransformation . . . . .	20
3.2.2	Tensoren und ihre Algebra . . . . .	20
3.2.3	Kovariante Ableitungen und Christoffelsymbole . . . . .	21
3.2.4	Parallelverschiebung . . . . .	22
3.2.5	Die Raumkrümmung . . . . .	23
3.3	Bewegung im Raum und die Geodäten . . . . .	24
3.4	Einsteinsche Feldgleichungen . . . . .	25
3.4.1	Schwarzschilds Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen . .	26
3.4.2	Weitere Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Quantenfeldtheorie und Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>29</b>
4.1	Planckskala . . . . .	29
4.2	Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit . . . . .	29
4.2.1	Klein-Gordon-Feld in flacher Raumzeit . . . . .	30
4.2.2	Klein-Gordon-Feld in allgemeiner Raumzeit . . . . .	31

4.3	Bogoljubov-Koeffizienten . . . . .	32
4.4	Der Unruh-Effekt . . . . .	33
4.5	Der Hawking-Effekt . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Theorien mit Extradimensionen</b>	<b>39</b>
5.1	Kaluza-Klein Theorie . . . . .	39
5.1.1	Bewegung in der Kaluza-Klein-Theorie . . . . .	40
5.1.2	Effekte der Kaluza-Klein-Theorie . . . . .	41
5.2	ADD-Modell . . . . .	43
5.2.1	Die fundamentale Masse . . . . .	43
5.2.2	Felder im ADD-Modell . . . . .	44
5.2.3	Effekte und Nachweise des ADD-Modells . . . . .	45
5.3	Randall-Sundrum-Modelle . . . . .	46
5.3.1	Randall-Sundrum-Modell Typ 1 . . . . .	46
5.3.2	Der Warp-Faktor und physikalische Auswirkungen . . . . .	47
5.3.3	Randall-Sundrum-Modell Typ 2 . . . . .	47
5.4	Schwarze Löcher in Extradimensionen . . . . .	48
5.4.1	Statische schwarze Löcher . . . . .	48
5.4.2	Rotierende schwarze Löcher . . . . .	49
5.4.3	Lösung im ADD-Modell . . . . .	50
<b>II</b>	<b>Resultate</b>	<b>53</b>
<b>6</b>	<b>Semiklassische Produktion schwarzer Löcher</b>	<b>55</b>
6.1	Grundlagen der Teilchenkollisionen . . . . .	55
6.1.1	Mandelstamvariablen . . . . .	55
6.1.2	Stoßparameter $b$ . . . . .	56
6.1.3	Stringfragmentation und das Lund-Modell . . . . .	56
6.1.4	Jet-Produktion . . . . .	56
6.1.5	Observablen . . . . .	57
6.1.6	Monte-Carlo-Simulationen . . . . .	58
6.2	Modell zur Produktion schwarzer Löcher . . . . .	58
6.2.1	Wirkungsquerschnitte und Produktionsrate . . . . .	59
6.3	Simulation schwarzer Löcher . . . . .	61
6.3.1	Erhaltene Größen . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Strahlung schwarzer Löcher</b>	<b>63</b>
7.1	Zerfallsphasen . . . . .	63
7.2	Endzeitszenarien . . . . .	64
7.2.1	Final Decay . . . . .	64
7.2.2	Remnants . . . . .	65
7.2.3	Simulationsprogramm CHARYBDIS . . . . .	65
7.3	Strahlungsprozess . . . . .	66

7.3.1	Höherdimensionale Hawkingtemperatur . . . . .	66
7.3.2	Entropiebetrachtung der Abstrahlung . . . . .	67
7.3.3	Teilchenerzeugung . . . . .	67
7.4	Modifizierte Entropie . . . . .	69
7.4.1	Glattes Entropiespektrum . . . . .	69
7.4.2	Glattes Energiespektrum in CHUBHS . . . . .	71
7.5	Auswertung mittels CHARYBDIS . . . . .	73
<b>III</b>	<b>Ein neuer Ansatz</b>	<b>79</b>
<b>8</b>	<b>Renormierungsgruppe und schwarze Löcher</b>	<b>81</b>
8.1	Renormierung und Renormierungsgruppe . . . . .	81
8.2	Laufende Kopplung und die Schwarzschildmetrik . . . . .	82
8.2.1	Identifikation mit dem Abstand . . . . .	83
8.2.2	Neue Schwarzschildmetrik . . . . .	85
8.3	Höherdimensionale Erweiterung . . . . .	86
8.3.1	Laufende Kopplung $\tilde{M}_f^{d+2}(k)$ . . . . .	87
8.3.2	Identifikation mit dem Abstand . . . . .	87
8.4	Metrikoeffizienten $f(r)$ . . . . .	90
8.5	Remnants durch kritische Massen $M_{cr}$ . . . . .	92
8.6	Zusammenfassung . . . . .	92
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>95</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>

## Abbildungsverzeichnis

4.1	Penrose-Diagramm . . . . .	36
6.1	Jet-Produktion am LHC . . . . .	57
6.2	Produktion eines schwarzen Loches . . . . .	59
6.3	Differentieller Wirkungsquerschnitt . . . . .	61
6.4	Totaler Wirkungsquerschnitt und Produktionsrate . . . . .	62
7.1	Spektrale Teilchendichten (berechnet) . . . . .	71
7.2	Spektrale Teilchendichten (simuliert) . . . . .	72
7.3	Multiplizitätsspektren . . . . .	74
7.4	Spektren der Transversalimpulse . . . . .	75
7.5	Höherdimensionale klassische Hawking-Temperatur . . . . .	76
8.1	4-dimensionale Metrikoeffizienten mit laufender Kopplung . . . . .	85
8.2	Höherdimensionale Metrikoeffizienten mit laufender Kopplung . . . . .	91
8.3	Kritische Massen für $\tilde{t} = 0,1$ . . . . .	92
8.4	Kritische Massen in Abhängigkeit von $\tilde{t}$ . . . . .	93

## Tabellenverzeichnis

2.1	Quarks und Leptonen . . . . .	8
2.2	Austauschteilchen . . . . .	10
3.1	Metriken für verschiedene schwarze Löcher . . . . .	28
5.1	Minimale Radien von schwarzen Löchern . . . . .	51
7.1	Statistiken für Fermionen, Bosonen und klassische Teilchen . . . . .	68
8.1	Metrikoeffizienten mit und ohne laufender Kopplung . . . . .	90

# 1 Motivation

Im Verlauf des letzten Jahrhunderts wurden die Grundlagen der modernen Physik gelegt und die heute bekannten physikalischen Theorien bis auf den gegenwärtigen Stand verfeinert. So sind derzeit vier fundamentale Kräfte bekannt, die sich in zwei Bereiche unterteilen. Auf der einen Seite stehen die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkungen und auf der anderen Seite die Gravitation.

Mit der Quantenhypothese und dem Strahlungsgesetz von Max Planck (1900) wurde die bisherige Physik revolutioniert. Dies war der Grundstein für eine Hälfte der heutigen Physik. Das *Standardmodell der Teilchenphysik* (SM, Kap. 2) beschreibt, in Form einer Quantenfeldtheorie (QFT, Kap. 2.2), das Verhalten von Materie und deren Wechselwirkung.

Neben drei elektrisch neutralen Neutrinos existieren drei weitere, geladene Leptonen und sechs Quarks, die in drei Familien eingeteilt werden und die Grundlage der Materie bilden. Zwischen ihnen vermitteln 12 Austauschteilchen. Über acht Gluonen koppelt die starke Kraft, die durch die Quantenchromodynamik<sup>1.1</sup> (QCD) beschrieben wird. Die Austauschteilchen der elektroschwachen Vereinheitlichung stellen sowohl die  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen als auch das Photon  $\gamma$  dar.

Neben diesen drei Wechselwirkungen steht die Gravitation, die nicht durch das SM beschrieben wird. Albert Einstein veröffentlichte 1915 seine Arbeit zur *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART, Kap. 3), die die Gravitation beschreibt. Die ART verbindet Energie mit der Geometrie der Raumzeit und wird besonders elegant in den Einsteinschen Feldgleichungen dargestellt. Aus einer reinen Anziehung von Massen wird eine übergreifende Raumordnung mit neuen Vorhersagen und der bisherigen Physik als Grenzfall. So kann man aus der ART sowohl die newtonsche Gravitation als auch die vorher entwickelte Spezielle Relativitätstheorie als Grenzfälle herleiten. Durch die Erklärung der gemessenen Periheldrehung des Merkur und die Vorhersage der Lichtablenkung bei einer Sonnenfinsternis (bestätigt 1919) wurde die ART schnell anerkannt.

Eine einheitliche Theorie, die die gesamte Physik im Rahmen einer einzigen Theorie beschreibt, wird von Physikern seit jeher gesucht. Eine solche Weltformel<sup>1.2</sup> muss aus heutiger Sicht sowohl das SM als auch die ART beschreiben. Bisher ist dies jedoch noch keiner Theorie gelungen. Ein Grund dafür liegt im Hierarchieproblem (Kap. 2.3.1). Die Kopplungskonstante der Gravitation ist um viele Größenordnungen schwächer als die der anderen Wechselwirkungen. Vereint man sie in einer einzigen formalen Beschreibung, so muss es eine Erklärung geben, wieso die Skalenbereiche

---

<sup>1.1</sup> griech. *chromos*, die Farbe

<sup>1.2</sup> engl. *theory of everything*; TOE

so unterschiedlich sind und es zu dieser Hierarchie kommt. Mit einer einzigen Kopplungskonstanten müssen entweder die Wechselwirkungen des SMs abgeschwächt werden oder die Gravitation an Stärke dazugewinnen. Da aber eine Änderung der Skalenbereiche ohne weitere Erklärung nicht mehr die physikalischen Beobachtungen beschreibt, muss auch ein neues Gesamtkonzept gefunden werden.

Ein erster Schritt, Gravitation mit der klassischen Elektrodynamik zu verbinden, gelang 1921 dem Theoretiker Theodor Kaluza (Kap. 5.1). Er erweiterte die Beschreibung der ART von vier auf fünf Dimensionen und konnte so die elektromagnetische Wechselwirkung in die Einsteinschen Feldgleichungen einbauen. Da diese fünfte Dimension nicht beobachtet werden kann, erklärte sie Oskar Klein später durch eine kompaktifizierte Dimension<sup>1,3</sup>. Wegen Problemen bei der Quantisierbarkeit dieser Theorie (heute unter dem Begriff *Kaluza-Klein-Theorie* bekannt) wurde sie schließlich verworfen.

Eine Renaissance erlebten die Extradimensionen im Rahmen der Stringtheorien. In den 80er Jahren führten Michael B. Green und John H. Schwarz universelle Extradimensionen ein, um der supersymmetrischen Stringtheorie ein konsistente Beschreibung zu geben.

Aus diesen universellen Extradimensionen entwickelten Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos und Gia Dvali Ende der 90er ihr Modell (das *ADD-Modell*) mit großen Extradimensionen (Kap. 5.2). Im Gegensatz zum den universellen Extradimensionen ist der Kompaktifizierungsradius der Extradimensionen groß. Mit den großen Extradimensionen und einer neuen gravitativen Kopplung mindert das ADD-Modell die Hierarchie zwischen dem SM und der Gravitation, was eine einheitliche Theorie wahrscheinlicher macht. Dabei sind die Extradimensionen aufgerollt, dass sie nicht gesehen werden können, und die Teilchen des SMs können sich nicht darin bewegen. Nur die Gravitation wirkt als Geometrie des Raumes in den Extradimensionen, sodass ein Teil ihrer Wirkung für uns nicht spürbar ist. In dem Modell wird eine neue Wechselwirkungskonstante, die *fundamentale Masse*  $M_f$ , eingeführt, deren Kopplung von der Anzahl der Extradimensionen ( $d = 2 \dots 7$ ) abhängt. Bei großen Extradimensionen kann die fundamentale Masse bis in den TeV-Bereich reichen und liegt damit in einem vergleichbaren Bereich zum SM.

Neben dem ADD-Modell entwickelten Lisa Randall und Raman Sundrum ein Modell (*RS-Modell*, Kap. 5.3), das mit nur einer Extradimension und einer fundamentalen Masse im TeV-Bereich auskommt. Im Gegensatz zum ADD-Modell ist hier die verwendete Metrik nicht mehr faktorisierbar. Aufgebaut ist das RS-Modell aus einem Hauptteil, dem *Bulk*, mit zwei 4-dimensionalen Ebenen, *Branen* genannt, von denen eine sichtbar und die andere versteckt ist. Die Materie ist auf die sichtbare Ebene beschränkt und kann nicht im Bulk propagieren. Durch einen Skalierungsfaktor erreicht die fundamentale Masse den TeV-Bereich und somit fast die Kopplungsstärke des SMs.

---

<sup>1,3</sup>Eine kompaktifizierte Dimension hat periodische Randbedingungen, man kann sie sich als eine unabhängige, zusätzliche Schleife an jedem Punkt in der Raumzeit vorstellen.



Fühlbare Auswirkungen haben die Extradimensionen auf unser tägliches Leben nicht, da die Materie des SMs nicht in den Extradimensionen propagiert oder nicht in diesen angeregt ist. Betrachtet man allerdings moderne Experimente wie ATLAS, CMS oder ALICE am Large Hadron Collider (LHC) am CERN<sup>1,4</sup>, bei denen sehr hohe Energiedichten erreicht werden, entsteht eine neue Möglichkeit: der Schwarzschildradius in Extradimensionen ist größer als in konventionellen Theorien, sodass bei semiklassischer Betrachtung schwarze Löcher im LHC erzeugt werden können (Kap. 6). Diese schwarzen Löcher werden nach dem Hawking-Effekt praktisch instantan zerfallen und ihre Signaturen, die sich von Szenarien ohne Extradimensionen und schwarzen Löchern unterscheiden, in den Detektoren hinterlassen.

Das Simulationsprogramm CHARYBDIS wurde 2003 von Christopher Harris, Peter Richardson und Bryan Webber auf der Grundlage des Eventgenerators PYTHIA entwickelt. Mit diesem Programm kann man die Erzeugung und Zerstrahlung von schwarzen Löchern simulieren und deren Signaturen bestimmen (Kap. 7). Eine Überprüfung, ob eine Theorie mit Extradimensionen realistisch ist, werden vielleicht die Ergebnisse des LHC liefern.

Neben der Frage, ob es schwarze Löcher gibt, stellt sich die Frage, wie diese zerstrahlen. Enden sie in einem Feuerwerk aus einer geringen Anzahl von Teilchen (*Final Decay*) oder wird ein stabiler Rest (*Remnant*) zurückbleiben? Hier kommen quantengravitative Effekte zum Tragen, die ohne eine Theorie der Quantengravitation nicht erklärt werden können.

In dieser Arbeit wird der Zerfall des schwarzen Loches zu einem Remnant weiterentwickelt und die Signaturen dazu herausgearbeitet (Kap. 7.4). Dabei wird vor allem auf den Unterschied zum Final Decay und zu der ursprünglichen Remnant-Theorie eingegangen. Außerdem wird eine Theorie weiterentwickelt, die Remnants liefert, ohne diese postulieren zu müssen (Kap. 8).

Zuerst werden die Grundlagen der verwendeten Theorien entwickelt und anschließend zu einem logischen Ergebnis zusammengefasst, auf dem verschiedene Berechnungen aufbauen.

## Konventionen der Einheiten

Zur leichteren Berechnung und Verdeutlichung von Größen können in der Physik unabhängige Naturkonstanten frei gewählt werden. In der Hochenergiephysik setzt man normalerweise die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  auf 1. Dieser Satz von Einheiten heißt *natürliche Einheiten*

$$c = \hbar = 1 \quad (1.1)$$

und wird zusammen mit  $k_B = 1$  in dieser Arbeit verwendet. Als Verknüpfung zwischen Energie und Länge besteht die Relation

$$\hbar \cdot c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} . \quad (1.2)$$

---

<sup>1,4</sup>franz. *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*, Europäische Organisation für Kernforschung; [www.cern.de](http://www.cern.de)

## 1 Motivation und Konventionen

Mit  $k_B = 1$  stellt eine Temperatur eine Energie dar. Da schwarze Löcher thermisch zerstrahlen, lässt sich der Temperatur des schwarzen Loches einfach Teilchenenergien zuordnen und die Hawkingstrahlung wird in Elektronenvolt angegeben.

Bei der Einführung der Planckskala (Kap. 4.1) wird anstatt der natürlichen Einheiten das *cgs*-Einheitensystem verwendet, da es sich um die ursprüngliche Darstellung von Max Planck handelt und dieses Einheitensystem eine bessere Vorstellung der Werte liefert.

In anderen Konventionen werden weitere, beziehungsweise andere Naturkonstanten wie die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  oder die Gravitationskonstante  $G$  auf 1 gesetzt wird. Jede Konvention bietet Vorteile, so vereinfacht sich bei der Wahl von  $\epsilon_0 = 1$  die Feinstrukturkonstante der Atomphysik auf  $e^2/4\pi$  oder bei einer Wahl von  $G = 1$  ist der Schwarzschildradius direkt durch die Masse des Objekts gegeben.

In den natürlichen Einheiten verbleibt als einzige Einheit die Energie. Die Einheit der Energie wird im Allgemeinen in Elektronenvolt eV angegeben. Dies entspricht der Energie, die ein Elektron erhält, das mit einem Volt beschleunigt wird, in SI-Einheiten:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Charybdis arbeitet in Energieeinheiten von GeV und somit wird in dieser Diplomarbeit diese Skala verwendet. An einigen Stellen ist es allerdings sinnvoller, Größen in TeV anzugeben, gerade wenn es um die Massen der schwarzen Löcher oder die fundamentale Masse geht. Die Einheit der Energie wird deswegen stets mit angegeben.

# **Teil I**

## **Grundlagen**



## 2 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell (SM) ist eine vereinheitlichte Beschreibung von drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen. Dabei wird in dem Gerüst der Quantenfeldtheorien (QFT) die starke und schwache Kraft sowie die elektromagnetische Wechselwirkung erklärt. In Kapitel 2.2 wird genauer auf die Quantenfeldtheorien und damit die mathematische Beschreibung des SMs eingegangen. Jede Wechselwirkung wird durch eine Symmetriegruppe beschrieben. Die Symmetriegruppen der starken Kraft ( $SU_C(3)$ ), der schwachen Kraft ( $SU_I(2)$ ) und der elektromagnetischen Wechselwirkung ( $U(1)$ ) bilden zusammen die  $SU_C(3) \otimes SU_I(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie des SMs. Die Träger der Wechselwirkung sind bosonische Austauschteilchen, die zwischen der fermionischen Materie vermitteln.

Aus jeder Symmetrie des Standardmodells ergibt sich, nach Emmy Noethers Theorem, ein erhaltener Strom, der durch Integration über den Raum zu einer erhaltenen Ladung oder Quantenzahl führt.

Eine gute Einführung in das Standardmodell und allgemein die Kern- und Teilchenphysik bietet [Pov04]. Für die theoretische Beschreibung empfehlen sich Bücher über Quantenfeldtheorie [Ryd96, Pes93, Gro99].

### 2.1 Der Aufbau des Standardmodells

Das Standardmodell setzt sich grundlegend aus der Materie, Antimaterie und den Wechselwirkungen zusammen. Die Massen der Elementarteilchen werden dabei durch den Higgsmechanismus generiert.

#### 2.1.1 Die Materie

Die Materie des Standardmodells besteht aus Quarks und Leptonen mit verschiedenen Eigenschaften. Sie alle sind Fermionen und somit Spin 1/2-Teilchen. Sowohl Quarks als auch Leptonen unterteilen sich in drei Familien, auch Generationen genannt, mit je zwei Vertretern. Eine weitere Unterteilung ist die Händigkeit der Teilchen, wobei es sowohl rechts- als auch linkshändige Teilchen gibt. Die linkshändigen Teilchen einer Familie besitzen den schwachen *Isospin*<sup>2.1</sup>  $I$  und beide Vertreter einer Familie stellen zusammen ein Isospin-Dublett ( $I = 1/2$ ) dar. Die  $z$ -Komponente nimmt die Werte  $I_z = \pm 1/2$  an und so ergeben sich zwei unterschiedliche Zustände

---

<sup>2.1</sup>Der Isospin ist ein Drehimpuls im Isospinraum mit den üblichen, quantenmechanischen Drehimpulseigenschaften und der Drehimpulsalgebra.

## 2 Das Standardmodell

eines sonst identischen Teilchens. Rechtshändige Teilchen dagegen werden nicht durch den Isospin beeinflusst.

Alle Teilchen unterliegen der elektroschwachen Wechselwirkung. Die starke Kraft dagegen wirkt nur auf Quarks, da diese eine Farbladung tragen. In Tabelle 2.1 sind die unterschiedlichen Teilchen, die die Materie bilden, dargestellt. Zu jedem Teilchen existiert ein Antiteilchen, das die selbe Masse, aber eine entgegengesetzte Ladung aufweist. Üblicherweise werden Antiteilchen durch einen Strich über dem Namen dargestellt.

Tabelle 2.1: Quarks und Leptonen im Standardmodell [Pov04]

Materie	FAMILIE			ELEKTR. LADUNG	FARBE	SCHWACHER ISOSPIN $I$		SPIN
	I	II	III			LINKSHDG.	RECHTSHDG.	
LEPTONEN	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0	-	1/2	-	1/2
	$e$	$\mu$	$\tau$	-1			0	
QUARKS	$u$	$c$	$t$	+2/3	r,g,b	1/2	0	1/2
	$d$	$s$	$b$	-1/3			0	

### Leptonen

Das Elektron ist der bekannteste Vertreter der Leptonen. Es hat eine Ladung von  $q_e = -1e$  und gehört zur ersten Familie. Sein Partner ist das ungeladene Elektron-Neutrino<sup>2,2</sup>, das Wolfgang Pauli 1930 postulierte, um den  $\beta$ -Zerfall zu erklären. Die massiven Leptonen ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ) bilden mit ihren Neutrino-Partnern linkshändige Isospin-Dubletts, existieren aber auch als rechtshändige Isospin-Singulets. Zusammen stellen diese neun Teilchen die Leptonen dar. Neben allen Neutrinos ist das Elektron mit einer Ruhemasse von  $m_e = 511 \text{ keV}$  das einzig stabile Lepton. Der Grund dafür liegt in der Erhaltung der elektrischen Ladung  $e$  und der Leptonenzahl ( $L_e$ ,  $L_\mu$ ,  $L_\tau$ ), die jede Familie hat. Da Leptonen nur Ladungen der elektroschwachen Wechselwirkung tragen, reagieren sie nicht auf die starke Kernkraft und werden von den Prozessen der QCD nicht beeinflusst.

### Quarks und Hadronen

Der andere Bestandteil der Materie sind Quarks. Sie sind in ihren Familien ebenso wie die Leptonen linkshändige Isospin-Dubletts, da aber alle Quarks Masse besitzen, existieren alle auch als rechtshändige Isospin-Singulets. Die Quarks werden durch eine *flavour*<sup>2,3</sup>-Eigenschaft unterschieden, die ihnen die interessanten Namen

<sup>2,2</sup>Untersuchungen der Neutrinooszillation stellen einen Nachweis für Neutrinomassen ( $< 3 \text{ eV}$ ) dar und werden in [Bar02, Fuk02] diskutiert. Bei massiven Neutrinos müsste das SM um drei rechtshändige Neutrinos erweitert werden, wie beispielsweise in [Kin04] beschrieben.

<sup>2,3</sup>engl., Geschmack; eine Eigenschaft wie Farbe

*up, down, strange, charm, bottom* und *top* verleiht.

Aus Beobachtungen wissen wir, dass Quarks nicht einzeln vorkommen, sondern nur in einem Verbund, den Hadronen. Quarks tragen Farbladung, wobei ausschließlich „weiße“ Materie beobachtet werden kann. Diese Eigenschaft der QCD wird als *confinement* bezeichnet. Die Farbe weiß liefern entweder alle drei Farben (rot, grün, blau) oder Antifarben (antirot, antigrün, antiblau) zusammen oder eine Farbe mit der dazugehörigen Antifarbe. Eine solche Einteilung beschreibt am besten die Beobachtung von leichteren Mesonen ( $q\bar{q}$ ), bestehend aus Quark und Antiquark, und schwereren Baryonen ( $qqq$ ) aus drei Quarks. Andere mögliche weiße Hadronen wie Tetra- oder Pentaquarks sind Bestandteil gegenwärtiger Untersuchungen [Hei09].

Analog zur Erhaltung der Leptonenzahl ist die Baryonenzahl erhalten. Jedes Quark/Antiquark trägt eine Baryonladung von  $\pm 1/3$ , sodass Proton und Neutron, die Bestandteile der Atomkerne, eine Baryonenzahl von +1 haben und Mesonen eine Baryonenzahl von 0. Bei einer Erzeugung von Hadronen aus dem Vakuum kann somit bei genügend hoher Energie eine beliebige Anzahl von Mesonen, aber nur eine gerade Anzahl von Baryonen erzeugt werden. Außerdem muss auf die Erhaltung von anderen Quantenzahlen wie Impuls, Energie und Ladung geachtet werden.

Die einzig stabilen, frei vorkommenden Hadronen sind die Protonen. Ein Protonenzerfall ist bisher noch nicht beobachtet worden. Das Neutron dagegen ist nur in manchen Atomkernen stabil und zerfällt unter dem  $\beta$ -Zerfall der elektroschwachen Wechselwirkung.

### 2.1.2 Die Wechselwirkungen

Die Interaktion zwischen der Materie erfolgt über Eichbosonen als Austauscheteilchen. Jede Wechselwirkung hat ihre eigenen Austauscheteilchen. In Tabelle 2.2 sind die Träger aller Wechselwirkungen dargestellt.

Die Austauscheteilchen im SM sind Vektorbosonen, die einen ganzzahligen Spin (+1) haben. Das Graviton gehört zwar nicht in das SM, wird aber zur Vollständigkeit erwähnt. Mit einem Spin von (+2) ist das hypothetische Teilchen ein Tensorboson. Als Bosonen besitzen sie andere Eigenschaften als die Elementarteilchen der Materie und unterliegen der Bose-Einstein-Verteilung. Eine Folge ist, dass beliebig viele Teilchen das gleiche Energieniveau besetzen können. Fermionen, die sich an einem Ort befinden, müssen sich in mindestens einer Quantenzahl von den anderen unterscheiden. Das ist als Pauli-Prinzip bekannt.

Gluonen sind als Austauscheteilchen der starken Wechselwirkung farbgeladen. Sie besitzen immer eine Farbe und eine Antifarbe und können somit sowohl zwei Quarks zusammenhalten als auch untereinander wechselwirken. Sogenannte *glueballs*, die nur aus Gluonen bestehen, werden in der Theorie diskutiert [Kle07] und können vielleicht am FAIR<sup>2,4</sup> in Darmstadt [Mes07] erzeugt werden. Die Kopplungsstärke der Gluo-

---

<sup>2,4</sup>**Facility for Antiproton and Ion Research**, eine Erweiterung der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt, GSI

## 2 Das Standardmodell

Tabelle 2.2: Träger der Wechselwirkung im Standardmodell

Die Gravitation zählt dabei nicht zu den Wechselwirkungen des Standardmodells

	SPIN $J$	MASSE [ GeV]	ZERFALLS- BREITE [ GeV]	KOPPLUNGSTÄRKE	REICHWEITE
$g$ GLUON	1	0	0	$\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \sim 1$	$< 1 \text{ fm}$ „CONFINEMENT“
$\gamma$ PHOTON	1	0	0	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$	$\infty$
$W^\pm$ W-BOSONEN	1	80,425 $\pm 0,038$	2,138 $\pm 0,044$	$Gm^2 = 1,01 \cdot 10^{-5}$	$< 2 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$
$Z^0$ Z-BOSON	1	91,188 $\pm 0,0021$	2,4952 $\pm 0,0023$		
$G$ GRAVITON	2	0	0	$\frac{\gamma m_N^2}{\hbar c} = 5,76 \cdot 10^{-36}$	$\infty$

nen ist ungefähr 1, was eine störungstheoretische Betrachtung<sup>2.5</sup> schwierig macht. Photonen sind die Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung. Das Photon selbst trägt keine Ladung und da es masselos ist, hat es theoretisch eine unendliche Reichweite.

Die Austauscbosonen der schwachen Wechselwirkung wurden erst nach ihrer Vorhersage durch das SM 1983 am CERN entdeckt. Ihre hohe Masse von über 80 GeV (beziehungsweise über 91 GeV) bedingt eine sehr geringe Reichweite (kleiner als  $2 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$ ). Ihre Entdeckung am Gargamelle-Detektor/CERN gilt als eine Bestätigung des SMs.

### 2.1.3 Das Higgsboson

Neben diesen Trägern der Wechselwirkung gibt es im SM noch ein weiteres Boson. Im Weinberg-Salam-Modell, das die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung vereint, erzeugen zwei weitere, komplexe Felder durch den Higgsmechanismus die Massen aller Elementarteilchen. Neben den Massen der Materie generiert die spontane Brechung der  $SU_I(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie die drei Massen der  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen. Das Photon verbleibt als Austauschteilchen der  $U(1)$  masselos. Bei der Brechung entsteht das Higgsboson als freies Teilchen, dessen Masse ein weiterer Parameter des SMs ist. Diese Masse soll der LHC bestimmen. Genauere Erläuterungen zur Massengenerierung und dem Higgsmechanismus finden sich in [Ryd96].

<sup>2.5</sup>Die Störungstheorie geht von einem Grundzustand aus, der durch eine Wechselwirkung gering verändert wird. Bei Kopplungskonstanten  $\ll 1$  entwickelt man in der Quantenfeldtheorie um den bekannten Vakuumzustand und erhält mit jedem Entwicklungsschritt ein besseres Ergebnis.



## 2.2 Quantenfeldtheorie

Das Standardmodell kann mithilfe einer Quantenfeldtheorie beschrieben werden. Über den Lagrangeformalismus und dessen Bewegungsgleichungen, hergeleitet über das *Hamiltonsche Variationsprinzip*, kann die klassische Bewegung von Feldern erklärt werden. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (2.1)$$

beschreibt dabei den Zustand des Systems, aus dem man mit Hilfe der Bewegungsgleichungen die zeitliche Entwicklung eines klassischen Feldes  $\psi$  berechnet. Dabei gilt der Welle/Teilchen-Dualismus, bei dem beide Beschreibungen äquivalent sind. Wie in der gesamten Quantentheorie gibt, nach der statistischen Interpretation<sup>2.6</sup>, das Quadrat der Wellenfunktion  $\psi$  die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis an.

### Quantisierung

Eine solche Theorie ist noch klassisch und muss quantisiert werden. Die Quantisierung eines klassischen Feldes bezeichnet man allgemein als zweite Quantisierung. Zwei Methoden, diese Quantisierung durchzuführen, sind die der *kanonischen Quantisierung* und Richard Feynmans Methode der *Pfadintegrale*.

Die kanonische Quantisierung geht von einem Vakuum als Grundzustand  $|0\rangle$  aus, der sich durch Leiteroperatoren<sup>2.7</sup> verändern lässt. Die Leiteroperatoren manipulieren die Zustände  $|n\rangle$  und der Teilchenzahloperator  $\hat{a}^+\hat{a}$  gibt an, wieviele Teilchen sich in einem Zustand befinden (siehe dazu [Sak95]). Auf diese Weise lassen sich Quantenzustände elegant darstellen und berechnen.

Die Methode der Pfadintegrale geht auf Richard P. Feynman und seinen Beitrag zur Quantenelektrodynamik (QED) zurück. Ein generierendes Funktional  $\mathcal{Z}$  fasst alle Bestandteile zusammen und beschreibt die gesamte Physik. In dieser Methode sind die Teilchen schon direkt quantisiert und eine vorhandene Theorie muss nicht erst noch quantisiert werden. Die ganze Vielfalt der *Funktionalintegral-Formulierung der QFT* befindet sich in [Ryd96].

Die Beschreibung des SMs mittels der QFT wird später benötigt, um den Hawkingeffekt herzuleiten (siehe Kap. 4). Das SM, dass in flacher Raumzeit aufgestellt wurde, wird auf einen gekrümmten Raum verallgemeinert. Durch die starke Raumkrümmung in der Nähe des Ereignishorizontes eines schwarzen Loches emittiert es thermische Strahlung.

Das Thema der Renormalisierung wird in Kapitel 8 behandelt, da es dort verwendet wird.

<sup>2.6</sup>Für die *statistische Interpretation der Wellenfunktion* erhielt Max Born 1954 den Physik-Nobelpreis [Nob54].

<sup>2.7</sup>Leiteroperatoren sind Aufsteige-  $\hat{a}^+(\vec{k})$  und Absteigeoperatoren  $\hat{a}(\vec{k})$ , die einen Zustand  $|n\rangle$  um den Wert von  $\pm 1$  verändern ( $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  und  $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ).

### 2.2.1 Beschreibung von Materie

Als relativistische Verallgemeinerung der klassischen Schrödingergleichung beschreiben die Dirac- und die Klein-Gordon-Gleichung die Materie. Dabei hängt das Verhalten der Teilchen von ihrem Spin ab. Teilchen mit einem halbzahligen Spin (Fermionen) werden über die Dirac-Gleichung, die sich durch Ableiten aus der Dirac-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \quad (2.2)$$

ergibt, beschreiben. Die Felder  $\psi$  und  $\bar{\psi} = \gamma^0 \psi^\dagger$  stellen einen Dirac-Spinor im 4-dimensionalen Dirac-Raum dar.  $\psi$  besteht dabei aus zwei Teilchen und zwei Antiteilchen mit jeweils dem Spin  $\pm 1/2$ . Die Umrechnung der Teilchen erfolgt über die Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$ . Die kovarianten Ableitungen  $D_\mu$  sichern die Eichinvarianz der partiellen Ableitungen und stellen die Wechselwirkung der Teilchen mit den Eichfeldern dar. Je nach Art der Teilchen und der Kopplung besteht  $D_\mu$  aus den partiellen Ableitungen und den Eichfeldern, die mit den Teilchen wechselwirken. Im Fall des Photonfeldes wird die kovariante Ableitung zu

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu .$$

Diese Gleichung beschreibt alle elementare Materie, da Leptonen und Quarks einen halbzahligen Spin haben.

Teilchen mit ganzzahligem Spin (Bosonen) verhalten sich nach der Klein-Gordon-Gleichung mit der Klein-Gordon-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{KG} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi . \quad (2.3)$$

Das skalare Feld  $\Phi$  mit der Masse  $m$  beschreibt zum Beispiel Pseudoskalare wie Pionen, die sich aus zwei Quarks zusammen setzen und somit einen ganzzahligen Spin haben.

Die Beschreibung des skalaren Higgsfeldes erfolgt auf einem ähnlichen Weg. Mittels einer  $\Phi^4$ -Theorie lassen sich die Massen der Elementarteilchen und der Austauschteilchen berechnen. Dabei existiert in der Higgs-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda \left( \Phi^\dagger \Phi \right)^2 \quad (2.4)$$

zusätzlich zur bisherigen Klein-Gordon-Lagrangedichte ein Term der Ordnung  $\mathcal{O}(\Phi^4)$ , der über eine spontane Symmetriebrechung und die Wechselwirkung mit den Feldern Massen generiert [Ryd96].

### 2.2.2 Beschreibung der Wechselwirkungen und Symmetrien

Das SM ist eine Eichtheorie, bei der die Wechselwirkungen durch Eichfelder beschrieben werden. Jede Kraft hat eine eigenständige Symmetriegruppe mit  $g$  als

Kopplungsstärke. Die Lagrangedichte ist gegenüber den Eich- und Symmetrietransformationen invariant.

Eine Symmetrietransformation eines Vektors  $|p\rangle$  mit dem Gruppenelement  $U(\alpha)$  und dem ortsabhängigen Parameter  $\alpha(x)$

$$|p\rangle \rightarrow |p'\rangle = U(\alpha)|p\rangle \quad (2.5)$$

unterscheidet sich von der Anwendung der Transformation auf einen Operator

$$\hat{O}(x) \rightarrow \hat{O}'(x) = U(\alpha)\hat{O}(x)U^\dagger(\alpha) . \quad (2.6)$$

In der QFT interessante Symmetriegruppen lassen sich mit den Parametern  $\alpha$  in der Form

$$U(\alpha) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} \quad (2.7)$$

darstellen. Die Generatoren der Gruppe<sup>2.8</sup>  $\vec{\tau}$  bezeichnen die fundamentale Repräsentation. Daraus folgt die Transformation für fermionische Materiefelder  $\psi$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} \psi . \quad (2.8)$$

Die Transformation eines Eichfeldes  $\mathcal{A}_\mu$  und dessen Feldkomponenten  $A_\mu^i$  in der Repräsentation der Gruppe ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(x) &\rightarrow \mathcal{A}_\mu(x)' = U\mathcal{A}_\mu(x)U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= \frac{1}{2}\tau_i A_\mu^i(x) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Auf diesem Weg lässt sich ein eichinvarianter Ausdruck zur Beschreibung der Felder finden. Über die Feldstärketensoren  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , die sich aus den Eichfeldern  $\mathcal{A}_\mu$  zusammensetzen, entsteht die Lagrangedichte für Felder

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu + ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Der Kommutator im Feldstärketensor beschreibt die Selbstwechselwirkung der Felder. Für das Photonfeld verschwindet dieser Ausdruck aus dem Tensor, da Photonen keine Selbstwechselwirkung besitzen. Im Standardmodell liefert somit jede Symmetriegruppe eine Lagrangedichte, die die Felder beschreibt und eine Modifizierung der kovarianten Ableitungen.

---

<sup>2.8</sup>hier als Beispiel die  $SU(2)_I$ -Gruppe des Isospins

### 2.2.3 Lagrangedichte des Standardmodells

Die gesamte Lagrangedichte des SMs besteht nun aus der Summe der einzelnen Lagrangedichten für alle Materieformen und Symmetrien

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{lep} + \mathcal{L}_{qua} + \mathcal{L}_{gau} + \mathcal{L}_{glu} + \mathcal{L}_H .$$

Zusammenfassend besteht das Standardmodell aus den Lagrangedichten für Leptonen  $\mathcal{L}_{lep}$  und Quarks  $\mathcal{L}_{qua}$ , für die Eichfelder der elektroschwachen Wechselwirkung  $\mathcal{L}_{gau}$  und der Gluonen  $\mathcal{L}_{glu}$  und für das skalare Higgsfeld  $\mathcal{L}_H$ , das als  $\phi^4$ -Theorie beschrieben wird.

## 2.3 Erfolge und Probleme des Standardmodells

Einer der größten Erfolge des SMs ist die Vereinheitlichung von drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen in einem einzigen Modell. Bis auf die Gravitation lässt sich die bekannte Physik mit dem SM beschreiben. Auch macht das SM viele Vorhersagen, die sich anschließend in Experimenten bestätigen. So wurden nach der Vorhersage die Träger der schwachen Wechselwirkung entdeckt. Eine nächste Bestätigung könnte die Entdeckung des Higgsbosons am LHC liefern.

Der wohl größte Nachteil liegt in der Nichtvereinbarkeit des SMs mit der Gravitation. Eine Beschreibung der Gravitation als Quantenfeldtheorie scheitert an der Renormierbarkeit der ART. Auch ist eine Beschreibung des SMs als Geometrie, dem Formalismus der ART, nicht möglich.

Weitere Probleme bringen die Skalenbereiche von Massen und Kopplungskonstanten. Das SM liefert für die großen Unterschiede innerhalb des Modells ebenso wie für den gewaltigen Unterschied zur Gravitation keine Erklärung.

### 2.3.1 Hierarchieprobleme

Einige der vielen Parameter unterscheiden sich um viele Größenordnungen. Diese Unterschiede lassen sich nicht mit dem SM erklären. Für eine einheitliche Theorie ist anzunehmen, dass die Größenordnungen der Massen und der Kopplungskonstanten in einem vergleichbaren Bereich liegen. Als Referenzmasse wird im Allgemeinen die Masse des Higgsbosons ( $m_H \approx 115 - 200 \text{ GeV}$ ) verwendet.

#### Ein Hierarchieproblem im Standardmodell

Für die Massen der Leptonen und weniger stark für die Massen der Eichbosonen im SM stellt sich so eine nicht erklärbare Hierarchie ein

$$\frac{m_{\nu_e}}{m_H} \sim 10^{-11} \qquad \frac{m_e}{m_H} \sim 10^{-6} \qquad \frac{m_{Z^0}}{m_H} \sim 1 .$$

Diese Hierarchie kann durch die Einführung von supersymmetrischen Teilchen auf akzeptable Skalen heruntergebrochen werden.

### Die Gravitation und das Standardmodell

Ein viel größeres Hierarchieproblem liefert die Gravitation, wenn man sie mit der Wechselwirkung im SM vergleicht. Als Wechselwirkungsskala verwendet man in der Gravitation die Planckmasse  $M_{Pl}$ , die sich aus der newtonschen Kopplungskonstante der Gravitation  $G_N$  ergibt (siehe Kap. 4.1).

Der Vergleich der Planckmasse  $M_{Pl} \approx 10^{19}$  GeV mit der Higgsmasse zeigt die Hierarchie zwischen Gravitation und SM

$$\frac{m_H}{M_{Pl}} \sim 10^{-17} .$$

Eine vereinheitlichte Theorie zwischen ART und SM ist verständlicher, wenn die Higgsmasse im Grenzfall die Größenordnung von  $10^{19}$  GeV erreicht, oder wenn man die Planck-Masse auf die Größenordnung im TeV-Bereich herunterbrechen kann. Mit der Einführung von Extradimensionen ist dies möglich. Da nur die Gravitation in den Extradimensionen propagiert und das SM auf die üblichen vier Dimensionen reduziert ist, kann auch die Beobachtung einer solchen Hierarchie erklärt werden.



### 3 Gravitation und Allgemeine Relativitätstheorie

Neben dem Standardmodell der Teilchenphysik gibt es die Gravitation als vierte fundamentale Wechselwirkung. Im 17. Jahrhundert fand Isaac Newton nach erfolgreicher Vorarbeit von Galileo Galilei und Johannes Kepler eine grundlegende Beschreibung der Physik. Die *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* von 1686 gilt als Geburtsstunde der Mechanik. Darin befindet sich die Beschreibung der Gravitationskraft  $\mathbf{F}_{Newton}(\mathbf{r})$  zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit dem Abstand  $\mathbf{r}$  und dem Betrag des Abstandes  $r$

$$\mathbf{F}_{Newton}(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

Der Wert der Gravitationskonstanten von  $G = 6,6625 \cdot 10^{-11} \text{ Nm/kg}^2$  muss dabei experimentell ermittelt werden. Bis in das 20. Jahrhundert änderte sich an dieser Beschreibung der Gravitation nichts.

Als Albert Einstein 1905 seine *Spezielle Relativitätstheorie* (SRT) präsentierte, deren Grenzfall die newtonsche Mechanik darstellt, wandelte sich das Bild der Dimensionen. Raum und Zeit erhalten den gleichen Status und als einzige Konstante der SRT verbleibt die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Daraus resultierende Effekte wie die Längenkontraktion oder die Zeitdilatation wurden schnell durch den Myonenzerfall nachgewiesen. Dabei werden in der Atmosphäre durch kosmische Strahlung erzeugte Myonen betrachtet. Mit einer mittleren Lebensdauer von  $t_{1/2} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  beträgt im klassischen Fall die Reichweite bei annähernd Lichtgeschwindigkeit ca. 600 m. Die Myonen zerfallen in ihrem Bezugssystem mit der genannten mittleren Lebensdauer. In unserem Bezugssystem dagegen scheint über die Zeitdilatation die Zerfallszeit länger und somit erreichen Myonen die Erdoberfläche.

Eine weitere Errungenschaft von Albert Einstein war seine 1915 veröffentlichte *Allgemeine Relativitätstheorie* (ART). Die Gravitation wird in der ART durch die Geometrie der Raumzeit beschrieben. Die Einsteinschen Feldgleichungen verbinden den Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  mit dem Einsteintensor  $G^{\mu\nu}$  aus der Raumkrümmung berechnet wird. Die Beschreibung der Raumkrümmung erfolgt über die Riemannsche Geometrie. Aus dem Riemannschen Krümmungstensor ergeben sich der Ricci-Tensor  $\mathcal{R}^{\mu\nu}$  und der Krümmungsskalar  $\mathcal{R}$ . Dabei werden die Größen nicht mehr wie

### 3 Gravitation und Allgemeine Relativitätstheorie

bei Newton als 3-dimensionale Vektoren dargestellt, sondern sind Tensoren in der 4-dimensionalen Raumzeit.

$$G^{\mu\nu} = -8G\pi T^{\mu\nu}$$
$$G^{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen enthalten für jede Komponente eine Gleichung und somit 10 unabhängige Gleichungen<sup>3.1</sup>, die die Gravitation beschreiben. Die Riemannsche Geometrie ist dabei das Gerüst, in dem die ART formuliert ist.

Karl Schwarzschild fand hierfür 1916 die erste Lösung, die zu Singularitäten in der Raumzeit führt. Diese Objekte, aus denen nicht einmal Licht entweichen kann, sind heute als schwarze Löcher bekannt. Gut ein halbes Jahrhundert später sagte Stephen Hawking mit der Beschreibung der QFT in einer gekrümmten Raumzeit einen Effekt voraus, der zum Energieverlust von schwarzen Löchern und zur Emission von Teilchen führt. Eine experimentelle Bestätigung des Hawking-Effekts steht noch aus.

Die Allgemeine Relativitätstheorie wird in vielen Lehrbüchern behandelt, beispielsweise [Lan66, Mis73, Wei73, Sex83, Wal84, Fli95]. Dabei gehen manche Bücher mehr auf die Effekte der Gravitation, andere auf die Beschreibung durch die ART ein.

## 3.1 Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die ART benutzt viele Begriffe und Konventionen der Speziellen Relativitätstheorie und geht für den flachen, ungekrümmten Raum in diese über. Die ART basiert auf zwei Grundpostulaten, diese sind das Äquivalenzprinzip als Basis und die Riemannschen Geometrie als mathematisches Konzept. Die Bewegung im Raum beschreibt die Geodätengleichung und das Gravitationspotential wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen über die Energieverteilung festgelegt.

### 3.1.1 Spezielle Relativitätstheorie

Inertialsysteme bilden die Grundlage der SRT. Die Inertialsysteme stellen eine Klasse von sich gegeneinander bewegenden Bezugssystemen dar und lassen sich über die Poincarétransformationen, die sich aus den Raumzeit-Translationen und den Lorentztransformationen zusammensetzen, ineinander überführen.

Die Koordinaten werden als Lorentzvektoren  $x^\mu = (t, \vec{x})^T$  der 4-dimensionalen Raumzeit dargestellt. Eine Kurve  $s$  in diesem 4-dimensionalen Raum wird als *Weltlinie* bezeichnet und beschreibt den Weg eines Teilchens. Die quadratische Form des

---

<sup>3.1</sup> Wegen der Symmetrie in  $\mu \leftrightarrow \nu$  sind nur 10 der insgesamt 16 Gleichungen unabhängig voneinander (siehe Kap. 3.4).



### 3.1 Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Wegelements  $ds^2$  bleibt unter den Lorentztransformationen invariant und ist über die *Metrik* des Raumes und die Koordinaten definiert

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \end{aligned}$$

Die Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  nennt sich *Minkowskimetrik* und beschreibt den flachen Raum. Dabei ist die Wahl der Vorzeichen Konvention und wird in einigen Büchern als  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  gewählt. Relativistische Effekte wie die Zeitdilatation oder die Längenkontraktion im flachen Raum lassen sich über das Linienelement herleiten. Die Lorentztransformationen  $\Lambda^\mu_\nu$  bestehen aus den Lorentzboosts und den Rotationen. Diese stellen eine Gruppe dar und transformieren Lorentzvektoren zwischen Inertialsystemen

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu .$$

Zusammen mit den Translationen beschreiben sie die Gruppe der Poincarétransformationen

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu .$$

Mittels Koordinatentransformationen kann man die SRT auch in beschleunigten Bezugssystemen und somit krummlinigen Koordinatensystemen darstellen. Dabei ändert sich auch die Metrik und das Linienelement wird nicht mehr über die Minkowskimetrik, sondern über eine allgemeine Metrik  $g_{\mu\nu}$  zu den entsprechenden Koordinaten dargestellt

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta . \quad (3.1)$$

Die Umrechnung der Minkowskimetrik in die neue Metrik ergibt sich mit

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu} .$$

#### 3.1.2 Das Äquivalenzprinzip

Die ART baut neben der Beschreibung der SRT auf dem Äquivalenzprinzip auf. Dabei war Einsteins Idee, dass ein Schwerfeld nichts anderes als ein beschleunigtes Bezugssystem darstellt. Gravitations- und Trägheitskraft sind somit zwei Beschreibungen des selben Phänomens. Die Beschleunigung, die ein Körper erfährt, hängt nicht von der Masse, sondern von der Intensität des Gravitationsfeldes ab. Somit ist schwere Masse proportional zu träger Masse, was schon Newton aufgefallen ist. Mathematisch beschrieben wird das Gravitationsfeld somit wie ein beschleunigtes Bezugssystem und die Komponenten des metrischen Tensors stellen das Gravitationsfeld dar. Bei vorhandenem Gravitationsfeld kann die Metrik nicht durch eine globale Transformation in die Minkowskimetrik des flachen Raumes überführt werden. Dies ist eine Eigenschaft des gekrümmten Raumes, der in der ART durch die Riemannsche Geometrie beschrieben wird.

## 3.2 Riemannsche Geometrie

Bernhard Riemann entwickelte im 19. Jahrhundert eine Differentialgeometrie, die die Grundlage für Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie wurde.

Dabei existiert allgemein ein  $N$ -dimensionaler Raum, auch Riemannsche Mannigfaltigkeit genannt, der differenzierbar ist. Somit kann der Raum lokal linear genähert werden und es gibt ein Skalarprodukt.

### 3.2.1 Koordinaten und Koordinatentransformation

Die Koordinaten  $x^\alpha$  beschreiben den Riemannschen Raum. Über die Transformation der Koordinaten und ihre Rücktransformation

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, \dots, x^N) \quad x^\alpha = x^\alpha(x'^1, \dots, x'^N)$$

wird zwischen Bezugssystemen gewechselt. Die dazugehörigen Differentiale  $dx^\alpha$  transformieren sich

$$\begin{aligned} dx'^\alpha &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta = a^\alpha_\beta(x') dx^\beta \\ dx^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} dx'^\beta = \bar{a}^\alpha_\beta(x) dx'^\beta . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Das Produkt der partiellen Ableitungen  $a^\alpha_\beta$  und  $\bar{a}^\alpha_\beta$  ergibt das *Kronecker-Delta*

$$\delta^\alpha_\beta = a^\alpha_\gamma \bar{a}^\gamma_\beta = \bar{a}^\gamma_\beta a^\alpha_\gamma , \quad (3.3)$$

mit dem sich die Transformationen der Metriken einfach berechnen lässt

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \bar{a}^\gamma_\alpha(x') \bar{a}^\delta_\beta(x') g_{\gamma\delta} \\ g_{\gamma\delta} &= a^\alpha_\gamma(x) a^\beta_\delta(x) g'_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Tensoren und ihre Algebra

Neben den Koordinaten gibt es noch Tensoren  $T$  und dazugehörige Tensorfelder  $T(x)$ . Dabei ist ein Tensor ein Objekt mit einer beliebigen Anzahl von Indizes, wobei sich jede Komponente wie ein Differential (3.2) transformiert.

Obere Indizes werden *kontravariant* und untere Indizes *kovariant* genannt. Die Anzahl der Indizes gibt die Stufe eines Tensors an. Das Skalarfeld  $S(x)$  ist dabei ein Tensorfeld nullter Stufe und invariant unter der Koordinatentransformation

$$S'(x') = S(x) .$$

Für Vektorfelder  $A^\alpha(x)$ , die Tensoren erster Stufe darstellen, gilt die selbe Transformationsregel

$$A'^\alpha(x') = a^\alpha_\beta(x) A^\beta(x)$$

wie für Koordinaten (3.2) und ebenso für Tensoren höherer Stufe

$$T'^{\alpha\dots\beta}(x') = a^\alpha_\gamma(x) \dots a^\beta_\delta(x) T^{\gamma\dots\delta}(x) .$$

Betrachtet man das Skalarprodukt

$$A'_\alpha B'^\alpha = g'_{\gamma\alpha} A'^\gamma B'^\alpha = \bar{a}^\beta_\gamma \bar{a}^\delta_\alpha g_{\beta\delta} a^\gamma_\rho A^\rho a^\alpha_\phi B^\phi = g_{\rho\phi} A^\rho B^\phi = A_\alpha B^\alpha$$

oder die Verjüngung von Tensoren

$$T' = T'^\alpha_\alpha = \bar{a}^\beta_\alpha a^\alpha_\gamma T^\gamma_\beta = \delta^\beta_\gamma T^\gamma_\beta = T$$

stellt sich mit (3.3) und (3.4) die Invarianz dieser Formen unter der Koordinatentransformation heraus. Nun müssen die partiellen Ableitungen invariant beschrieben werden.

### 3.2.3 Kovariante Ableitungen und Christoffelsymbole

Als Ausgangspunkt für eine Ableitung betrachtet man den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} &= \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{A^\mu(x^\nu + \Delta x^\nu) - A^\mu(x^\nu)}{\Delta x^\nu} \\ \Rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{A^\mu(x^\nu + dx^\nu) - A^\mu(x^\nu)}{dx^\nu} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da die Koordinatentransformation ortsabhängig ist, wird im Allgemeinen  $A^\mu(x^\nu + \Delta x^\nu)$  anders transformiert als  $A^\mu(x^\nu)$ .

Das Ziel ist also eine Ableitung, die sich ebenso wie ein Tensor transformiert. Wie im Standardmodell nennt sich eine solche Ableitung *kovariante Ableitung* und hat auch die gleiche Bedeutung mit dem Unterschied, dass im SM Eichtransformationen durchgeführt werden, jedoch in der ART Koordinatentransformationen.

Dazu werden die Christoffelsymbole und ihre Transformation

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\ \Gamma'^\alpha_{\mu\nu} &= a^\alpha_\rho \bar{a}^\sigma_\mu \bar{a}^\tau_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\tau} + a^\alpha_\rho \frac{\partial \bar{a}^\rho_\mu}{\partial x^\nu} \end{aligned}$$

definiert. Die kovariante Ableitung setzt sich aus der partiellen Ableitung und den Christoffelsymbolen zusammen

$$\begin{aligned} D_\mu A^\nu &= \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} A^\rho \\ D_\mu A_\nu &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} A_\rho . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei wird zwischen kontra- und kovarianten Tensoren unterschieden. Wie einfach zu überprüfen ist, sind die kovarianten Ableitungen gegenüber der Koordinatentransformation invariant. Die kovariante Ableitung eines Tensors höherer Stufe ergibt sich

ebenso wie (3.6) für jede einzelne Komponente. Dazu können wir den Tensor als Produkt der einzelnen Komponenten darstellen  $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$  und leiten jede Komponente mit der Kettenregel ab. Somit ergibt sich aus (3.6) die Regel für Tensoren zweiter Stufe mit oberen oder unteren Indizes

$$\begin{aligned} D_\alpha T^{\mu\nu} &= (D_\alpha A^\mu) B^\nu + A^\mu (D_\alpha B^\nu) \\ &= (\partial_\alpha A^\mu) B^\nu + A^\mu \partial_\alpha B^\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} A^\rho B^\nu + A^\mu \Gamma^\nu_{\alpha\rho} B^\rho \\ &= \partial_\alpha T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\rho} T^{\mu\rho} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dies lässt sich auf höhere Stufen einfach verallgemeinern.

Die kovariante Ableitung erfüllt neben der geforderten Invarianz auch die üblichen Rechenregeln für Ableitungen wie Ketten- oder Produktregel. Für den Minkowski-Raum reduziert sich die kovariante Ableitung auf die partielle Ableitung, da die Christoffelsymbole verschwinden.

### 3.2.4 Parallelverschiebung

Das Ziel, mit dem die kovarianten Ableitungen eingeführt wurden, war die Invarianz der Ableitung unter Koordinatentransformation. Im Differenzenquotienten (3.5) befinden sich die Vektoren  $A^\mu(x^\nu)$  und  $A^\mu(x^\nu + \Delta x^\nu)$  nicht am selben Ort und transformieren sich daher im Allgemeinen unterschiedlich. Um die beiden Vektoren miteinander zu vergleichen, wird der Vektor  $A^\mu(x^\nu + \Delta x^\nu)$  nach  $x^\nu$  verschoben.

Für den flachen Raum darf sich dabei kein Beitrag zu dem Vektor ergeben. Ändern sich die Komponenten nicht, ist der verschobene Vektor parallel zu dem ursprünglichen Vektor und die Verschiebung ist geometrisch eine *Parallelverschiebung*. Die Änderung der Parallelverschiebung wird als  $\delta A^\mu$  bezeichnet. Somit können die beiden Vektoren an einem Punkt verglichen werden und es ergibt sich für die *kovariante Differenz*  $DA^\mu$  der beiden Vektoren nach der Parallelverschiebung von  $A^\mu(x^\nu + dx^\nu)$  nach  $x^\nu$

$$\begin{aligned} DA^\mu &= (A^\mu(x^\nu + dx^\nu))_{\rightarrow x^\nu} - A^\mu(x^\nu) \\ &= A^\mu(x^\nu + dx^\nu) - \delta A^\mu - A^\mu(x^\nu) \\ &= dA^\mu - \delta A^\mu . \end{aligned}$$

Die Parallelverschiebung  $\delta A^\mu$  soll nun proportional zu  $A^\mu$  und der verschobenen Strecke  $dx^\nu$  sein. Aus einem Ansatz

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta$$

mit den Christoffelsymbolen resultiert der Vektor, der die Differenzvektoren an einem Punkt darstellt.

Ein Beispiel zur Parallelverschiebung in Polar- und Kugelkoordinaten findet sich in [Fli95]. Dabei wird ersichtlich, dass ein Vektor im flachen Raum, auch wenn er in Polarkoordinaten dargestellt ist, wieder in sich selbst überführt werden kann. Dagegen entspricht bei Parallelverschiebung auf einer Kugeloberfläche der Ausgangsvektor nicht zwangsläufig mit dem verschobenen Vektor.

### 3.2.5 Die Raumkrümmung

Auf diese Weise versteht man, dass ein Maß für die Raumkrümmung benötigt wird. Neben dem Weg über die Parallelverschiebung kann man die Raumkrümmung auch über die Koordinatenabhängigkeit des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}(x)$  definieren.

#### Der metrische Tensor

Dabei hängen die Koeffizienten des metrischen Tensors sowohl von den Eigenschaften des Riemannschen Raumes als auch von der Wahl der Koordinaten ab. Der Raum gilt als flach, wenn der metrische Tensor durch eine globale Koordinatentransformation entweder euklidisch ( $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ) oder durch den Minkowskiraum ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) dargestellt werden kann. Anhand der Metrik erkennt man nicht direkt, ob es sich um eine flache oder gekrümmte Raumzeit handelt. Aus diesem Grund wird eine neue Größe, der *Krümmungstensor*, eingeführt.

#### Der Krümmungstensor

Der Krümmungstensor stellt ein Maß für die Krümmung des Raumes dar und beschreibt den Unterschied zweier verschiedener Wege. Dazu betrachtet man die Differenz der zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektors

$$D_\alpha D_\beta A_\mu - D_\beta D_\alpha A_\mu = \mathcal{R}^\nu_{\mu\alpha\beta} A_\nu ,$$

wobei sich die Reihenfolge der Ableitungen unterscheidet. Das Resultat soll in einem Vektor  $A^\nu$  linear sein. Der Koeffizient stellt dann den Krümmungstensor  $\mathcal{R}^\nu_{\mu\alpha\beta}$  dar. Da sich im flachen Raum die kovarianten Ableitungen auf die partiellen Ableitungen vereinfachen und die partiellen Ableitungen kommutieren, verschwindet der Krümmungstensor im flachen Raum. Mit den kovarianten Ableitungen für  $A^\mu$  (3.6) oder  $T^{\mu\nu}$  (3.7) ergibt sich die allgemeine Form des Krümmungstensors

$$\mathcal{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\rho_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\rho\delta} .$$

Eine Analyse des Krümmungstensors lässt erkennen, dass er antisymmetrisch in der Vertauschung der beiden ersten und der beiden letzten Indizes ist.

#### Ricci-Tensor, Ricciskalar und die Bianchi-Identität

Aus dem Krümmungstensor kann man zwei weitere Größen ableiten, die später zur Darstellung der ART durch die Einsteinschen Gleichungen verwendet werden. Der Ricci-Tensor

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\alpha_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\beta\mu\alpha\nu}$$

ergibt sich aus der Summation über zwei der vier Indizes des Krümmungstensors. Aus dem Ricci-Tensor erhält man über eine weitere Kontraktion den Krümmungs- oder Ricciskalar

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^\mu_{\mu} = g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} .$$

### 3 Gravitation und Allgemeine Relativitätstheorie

Ebenso kann man eine Eigenschaft des Krümmungstensors herleiten, die als *Bianchi-Identität*

$$0 = D_\rho \mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} + D_\mu \mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\rho} + D_\nu \mathcal{R}^\alpha_{\beta\rho\mu} \quad (3.8)$$

bekannt ist. Dabei verschwindet die Summe über die kovarianten Ableitungen. Über eine Kontraktion der Indizes  $\alpha$  und  $\mu$  und Multiplikation mit der Metrik  $g^{\beta\rho}$  ergibt sich die Bianchi-Identität in einer anderen Form

$$0 = D_\rho \left( \mathcal{R}^\rho_\nu - \frac{1}{2} g^\rho_\nu \mathcal{R} \right) , \quad (3.9)$$

in der die Divergenz des Ausdrucks verschwindet.

### 3.3 Bewegung im Raum und die Geodäten

Die Bewegung von Teilchen in einem Gravitationsfeld stellt immer den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  dar. Daraus folgt, dass die Variation  $\delta \int ds$  entlang des Weges verschwindet. Über die Parametrisierung  $\lambda$  des Wegelements

$$ds^2(\lambda) = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu(\lambda) dx^\nu(\lambda)$$

vereinfacht sich die Variation

$$\begin{aligned} \delta \int ds &= \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}} d\lambda \\ &= \delta \int \mathcal{L} d\lambda . \end{aligned}$$

Aus dieser Variation ergibt sich die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda} - \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} .$$

Dabei stellen die  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  die *Christoffelsymbole 1. Art* dar

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = g_{\rho\phi} \Gamma^\phi_{\mu\nu} = g_{\rho\phi} \frac{g^{\phi\kappa}}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) ,$$

aus denen über die Metrik die *Christoffelsymbole 2. Art* entstehen,  $\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = g^{\gamma\rho} \Gamma_{\rho\mu\nu}$ . Wählt man nun den Parameter  $\lambda = \tau$  so, dass die Ableitung des Lagrangians verschwindet, so ergibt sich die *geodätische Gleichung*

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} = -\Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} , \quad (3.10)$$

die die Bewegung von Teilchen in einem Gravitationsfeld beschreibt. Die Bahn, auf der sich das Teilchen bewegt, nennt sich *Geodäte*.

### 3.4 Einsteinsche Feldgleichungen

Nun fehlt noch die Beschreibung des Gravitationsfeldes. Über den divergenzfreien Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  und den Einsteintensor

$$G^{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} ,$$

der als einziges mögliches Konstrukt aus dem Krümmungstensor divergenzfrei hervorgeht (3.9), ergeben sich die allgemeinen *Einsteinschen Feldgleichungen*

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} . \quad (3.11)$$

Die Tensorgleichung soll dabei kovariant sein und den newtonschen Grenzfall, der das Sonnensystem gut beschreibt, beinhalten. Der Einsteintensor  $G^{\mu\nu}$  enthält die Krümmung des Raumes über die Kontraktion des Krümmungstensors und mit dem Krümmungsskalar eine Art Gravitationsenergie. Über die Bedingungen an  $G^{\mu\nu}$  ergibt sich der Faktor  $-1/2$  vor dem Krümmungsskalar. Die Konstante  $\kappa$  wird über den newtonschen Grenzfall hergeleitet

$$\kappa = -8\pi G .$$

Von diesen 16 Gleichungen sind wegen der Symmetrie des Riccitors und der Metrik nur 10 Gleichungen voneinander unabhängig. Diese 10 Gleichungen sind ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der Metrik  $g_{\mu\nu}$ . Über den Krümmungstensor sind die Gleichungen in der zweiten Ableitung der Metrik linear, dagegen in der ersten Ableitung nicht linear. Die Bianchi-Identität (3.8) ergibt weitere vier Relationen zwischen den Feldgleichungen. Diese vier Freiheitsgrade werden über die Wahl der Koordinaten festgelegt. Die Einsteinschen Feldgleichungen stellen also sechs unabhängige Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, deren Lösung schwierig zu finden ist.

Ein anderer Ansatz zur Herleitung der Feldgleichungen ergibt sich über das Variationsprinzip. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  setzt sich aus einem Materieanteil  $\mathcal{L}_{mat}$ , den man aus der SRT in beliebigen Koordinaten erhält, und einem Gravitationsanteil  $\mathcal{L}_{grav}$ , der proportional zum Krümmungsskalar sein soll, zusammen. Bei der Berechnung der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \sqrt{-g} d^4x (\mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{grav}) \\ \mathcal{L}_{mat} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - m^2 A^2) \\ \mathcal{L}_{grav} &= \frac{1}{2\kappa} \mathcal{R} \end{aligned}$$

muss darauf geachtet werden, dass über das kovariante Volumenelement  $\sqrt{-g}d^4x$  integriert wird, mit der Determinante der Metrik  $g = \det g_{\mu\nu}$ . Die Variation der Wirkung soll ebenso wie beim SM verschwinden. Dabei ist die Theorie nicht quantisiert wie das SM, sondern eine Beschreibung in dem klassischen Lagrangeformalismus.

Daneben gibt es Ansätze, die Einsteinschen Feldgleichungen zu verändern. Über einen Ansatz  $\Lambda g^{\mu\nu}$  im Einsteintensor wird mit der *kosmologischen Konstante*  $\Lambda$  versucht, ein sich ausdehnendes Universum zu beschreiben. Dabei ist die Länge  $1/\sqrt{\Lambda} > 10^5$  Lichtjahre so groß, dass sie erst messbare Auswirkungen auf galaktischen Distanzen hat.

Ein anderer Ansatz, der in dieser Arbeit bedeutender ist, ist die Erweiterung der Feldgleichungen auf höhere Dimensionen. In der *Kaluza-Klein-Theorie* wird so die klassische Elektrodynamik nach Maxwell in einer einzigen zusätzlichen Dimension ebenso wie die Gravitation als Geometrie des Raumes angesehen. Andere Modelle, die auf zusätzlichen Dimensionen aufbauen, werden neben der Kaluza-Klein-Theorie in Kapitel 5 erörtert.

#### 3.4.1 Schwarzschilds Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen

Die erste Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen fand Karl Schwarzschild schon 1916 [Sch16], obwohl Einstein der Überzeugung war, dass es lange dauern würde, bis eine Lösung für seine Feldgleichungen gefunden sei. Schwarzschild nimmt in seinem Modell eine statische und sphärische Symmetrie an

$$\begin{aligned} ds^2 &= A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &= A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\Omega, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $A(r)$  und  $B(r)$  der Metrik nur vom Radius abhängen können. Die Berechnung zeigt, dass die Koeffizienten

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2a}{r} \equiv f(r)$$

invers zueinander sind und von der Konstanten  $2a$  abhängen. Die Schwarzschild Raumzeit ist asymptotisch flach, da sie für große Entfernungen ( $r \rightarrow \infty$ ) in Minkowskimetrik des flachen Raumes übergeht.

Über den Grenzfall zur newtonschen Gravitation ( $g_{\mu\nu} = (1 + 2\Phi)\eta_{\mu\nu}$ ,  $\Phi$  beschreibt das Gravitationspotential) wird die Konstante zu  $a = GM$  und der Schwarzschildradius als

$$R_H = 2a = 2GM$$

definiert. An dieser Stelle hat die Metrik eine Singularität für  $r \neq 0$ .

Diese Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen mit dem Linienelement der Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega \quad (3.12)$$

weist nun einige Besonderheiten auf. Die Koeffizienten der Metrik werden bei  $r = 0$  und  $r = R_H$  singular und die Kugeloberfläche zu  $r = R_H$  wird als Ereignishorizont



bezeichnet. Zwar kann über Koordinatentransformationen diese Singularität aufgehoben werden, aber es gibt erstaunliche Effekte auf dem Horizont. Einer davon ist, dass Zeitspannen divergieren. Dies bedeutet, dass die Zeit immer „länger“ wird und ein auf den Horizont fallendes Objekt scheint, von außen betrachtet, diesen niemals zu erreichen. Das Licht wird immer schwächer, bis der Körper nicht mehr erkennbar ist. Das Objekt selbst passiert den Horizont, da diese Singularität ein Phänomen der Koordinatenwahl ist. Ein ausgedehntes Objekt erfährt allerdings Gezeitenkräfte, die es auseinander reißen würde. Wegen der Singularität dringen nicht einmal Photonen aus dem Inneren durch den Horizont nach außen. Da also dieses Objekt kein Licht nach außen abstrahlen kann, wie man es von einem Stern gewohnt ist, wird ein Stern mit einem kleineren Radius als dem Schwarzschildradius als *schwarzes Loch* bezeichnet.

Bei  $r = 0$  dagegen ist eine echte Singularität in der Raumzeit. Eine anschauliche Darstellung liegt in der Betrachtung der Raumkrümmung. Für  $r \rightarrow 0$  wird die Krümmung immer stärker und wird oft anschaulich durch einen Trichter, der aufbricht und keinen Mittelpunkt besitzt, dargestellt.

#### 3.4.2 Weitere Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen

Neben der Schwarzschildmetrik fanden sich mit der Zeit andere Lösungen zu den Einsteinschen Feldgleichungen. Vakuumlösungen, wie es die Schwarzschildmetrik außerhalb der Massenverteilung ist, liefern die Metrik für einen Raum ohne Energie. Diskussionen und Herleitungen dazu finden sich in [Mis73, Wal84].

##### Reissner-Nordstrøm-Metrik

Die Reissner-Nordstrøm-Metrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega \quad (3.13)$$

löst die Feldgleichungen für elektrisch geladene und nicht-rotierende schwarze Löcher. Die Raumzeit der Reissner-Nordstrøm-Metrik ist asymptotisch flach und die Massenverteilung hat eine sphärische Symmetrie. Das schwarze Loch trägt die Ladung  $Q$ .

##### Kerrmetrik

Die Kerrmetrik

$$\begin{aligned} ds^2 = & dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2GMr}{\rho^2} (dt^2 + a \sin^2 \theta d\phi^2) \\ & - \rho^2 \left( d\theta^2 + \frac{dr^2}{r^2 - 2GMr + a^2} \right) \\ \rho^2 = & r^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3 Gravitation und Allgemeine Relativitätstheorie

beschreibt die Vakuumlösung für ungeladene, rotierende schwarze Löcher. Dabei erhält das schwarze Loch einen Drehimpuls  $a = J/M$  und somit erhält der metrische Tensor Einträge, die nicht, wie bei der Schwarzschildmetrik, ausschließlich auf der Diagonalen liegen. Auch diese Raumzeit ist asymptotisch flach.

#### Kerr-Newman-Metrik

Eine Lösung für sowohl rotierende als auch geladene schwarze Löcher liefert die Kerr-Newman-Metrik

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 \\
 & + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\
 \Delta = & r^2 - 2GMr + a^2 + Q^2 \\
 \rho^2 = & r^2 + a^2 \cos^2 \theta .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Auch in diesem Fall ist der Raum asymptotisch flach und das schwarze Loch ist axialsymmetrisch. Eine Kugelsymmetrie ist hier nicht möglich, da der Drehimpuls eine Richtung auszeichnet.

Tabelle 3.1: Unterschiedliche Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für statische/rotierende und ungeladene/geladene schwarze Löcher

Metriken	statisch ( $J = 0$ )	rotierend
ungeladen ( $Q = 0$ )	SCHWARZSCHILD	KERR
geladen	REISSNER- NORDSTRØM	KERR-NEWMAN

#### Birkhoff-Theorem

Das Birkhoff-Theorem besagt, dass jede sphärisch-symmetrische Vakuumlösung der Feldgleichungen statisch ist und asymptotisch für große Abstände zu der Schwarzschildlösung führt.

Alle drei gezeigten Metrik liefern tatsächlich für keinen Drehimpuls und keine Ladung die Schwarzschildmetrik, auch wenn sie keine sphärisch-symmetrischen Vakuumlösungen darstellen.

Daneben existieren weitere Metriken, die beispielsweise die Expansion des Universums berücksichtigen. Alle bisher erwähnten Metriken waren Lösungen für den 4-dimensionalen Raum. In Kapitel 5.4 wird auf höherdimensionale Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen eingegangen.

## 4 Quantenfeldtheorie und Allgemeine Relativitätstheorie

Mit der Allgemeinen Relativitätstheorie und dem Standardmodell als Quantenfeldtheorie lässt sich nun die gesamte Welt in den jeweiligen Bereichen beschreiben. Die Grenzen beider Theorien stellt die *Planckskala* dar.

### 4.1 Planckskala

Nach der Quantenmechanik besitzt eine Masse  $m$  eine Comptonwellenlänge  $\lambda_{CP} = h/(mc)$ . Sobald die Wellenlänge im Bereich des Schwarzschildradius  $R_H = 2Gm$  der Masse liegt ( $\lambda_{CP} \approx R_H$ ), sind die Quantenmechanik und die ART nicht mehr vereinbar. Jede solche Masse würde zu einem schwarzen Loch zusammenfallen. Ab dieser kritischen Masse werden quantengravitative Effekte, die bisher nicht bekannt und somit nicht berechenbar sind, eine übergeordnete Rolle spielen. Die kritische Masse wird Planckmasse  $M_{Pl}$  genannt, die dazugehörige Comptonwellenlänge oder der Schwarzschildradius als Plancklänge  $l_{Pl}$  bezeichnet. Ferner gibt es noch die Planckzeit  $t_{Pl}$ , die das Licht braucht, um eine Plancklänge zurückzulegen. Zusammen werden diese drei Größen, die Max Planck schon 1899 erstmals als fundamentales Einheitensystem vorschlug [Pla99], als *Planckskala*

$$\begin{aligned} l_{Pl} &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1,61 \cdot 10^{-33} \text{ cm} \\ t_{Pl} &= \frac{l_{Pl}}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \approx 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s} \\ M_{Pl} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,17 \cdot 10^{-5} \text{ g} = 1,221 \cdot 10^{28} \frac{\text{eV}}{c^2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

bezeichnet. Die Kopplung der Gravitation wird oft auch mittels der Planckmasse beschrieben. Dabei ist die newtonsche Gravitationskonstante proportional zum Quadrat der inversen Planckmasse

$$G_N \propto \frac{1}{M_{Pl}^2} .$$

### 4.2 Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit

Sowohl die ART als auch das SM als QFT spiegeln ihre Bereiche sehr gut wieder. Als ersten Schritt zu einer gemeinsamen Beschreibung kann man die Quantenfeldtheorie

in gekrümmter Raumzeit darstellen. Da die Gravitation gegenüber dem SM sehr schwach ist, wird die Raumzeit als flach angenähert und als Hintergrund für das SM betrachtet. An Stellen mit sehr starker Gravitation kann die Raumzeit nicht mehr als flach angenommen werden und man muss das SM in einer gekrümmten Metrik beschreiben. Eine solche Betrachtung führt zum 1974 entdeckten *Hawking-Effekt* [Haw74] und baut auf dem allgemeineren *Unruh-Effekt* [Unr76, Unr84] auf. Allgemeine Einführungen und Herleitungen finden sich in [Wal84, Wal94, Mü01].

#### 4.2.1 Klein-Gordon-Feld in flacher Raumzeit

Dazu betrachtet man zunächst den einfachen, bosonischen Fall eines reellen Klein-Gordon-Feldes  $\phi(x)$  in flacher Raumzeit (siehe auch [Sak95]). Für fermionische Felder  $\psi(x)$  ist die Herleitung komplexer und wird allgemein in [Wal94] beschrieben. Aus dem Lagrangian des Klein-Gordon-Feldes (siehe Kap. 2.2.1)

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

ergibt sich die Klein-Gordon-Gleichung

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi$$

Ein Satz von Lösungen dieser Gleichung stellen die Moden

$$u_k \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

mit  $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$  und  $k = |\vec{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$  dar.

Das Skalarfeld  $\phi$  wird kanonisch quantisiert, sodass es die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] &= [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = 0 \\ [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (4.2)$$

erfüllt. Dabei ist  $\pi = \partial_t \phi$  der zu  $\phi$  konjugierte Impulsoperator. Mit dem neu definierten Skalarprodukt

$$(u_1, u_2) \equiv i \int_{\Sigma_t} d^3x (u_1^* \partial_t u_2 - (\partial_t u_1^*) u_2) \quad (4.3)$$

auf einer raumartigen Gleichzeitigkeitshyperebene  $\Sigma_t$  kann man die Moden  $u_k$  so wählen, dass sie orthogonal zueinander sind

$$(u_k, u_{k'}) = \delta(k, k') .$$

In diesen Moden wird das Feld  $\phi$  mit den Kletter- bzw. Leiteroperatoren  $a_k^+$  und  $a_k$  entwickelt

$$\phi(x) = \int d\mu(k) (a_k u_k(x) + a_k^+ u_k^*(x)) . \quad (4.4)$$

Die Kletteroperatoren erfüllen die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}] &= [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \\ [a_k, a_{k'}^+] &= i\delta_{k,k'} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Erzeuger  $a_k^+$  und Vernichter  $a_k$  wirken auf einen Zustand im Raum. Als Basis wird das Vakuum  $|0\rangle$  verwendet, wobei für alle  $k$  gilt  $a_k|0\rangle = 0$ .

### 4.2.2 Klein-Gordon-Feld in allgemeiner Raumzeit

Ähnlich wie im flachen Raum existiert eine Klein-Gordon-Gleichung

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi + m^2 \phi$$

und ein dazugehöriger Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2)$$

in allgemeiner Raumzeit. Diese beschreiben eine minimale Wechselwirkung, bei der Kopplungsterme wie  $1/6 R \phi$  vernachlässigt werden.

In einer allgemeinen Raumzeit wird der Raum als global hyperbolische Mannigfaltigkeit mit einer allgemeinen, raumartigen Hyperfläche  $\Sigma$  betrachtet, ebenso wie im flachen Raum. Die Zeitkoordinate wird so gewählt, dass die Hyperfläche zu jedem Zeitpunkt eine *Cauchyfläche*  $\Sigma_t$  ist. Die Cauchyfläche zeichnet sich dadurch aus, dass jede kausale Kurve diese Fläche schneidet. Eine solche Aufspaltung in Zeit und Raum wird später für die Quantisierung benötigt. Die Metrik setzt sich so aus zukunftsorientierten Normalenvektoren  $n_\mu$  der Cauchyfläche und der räumlichen Metrik  $h_{\mu\nu}$  zusammen

$$g_{\mu\nu} = n_\mu n_\nu - h_{\mu\nu} .$$

Über ein Vektorfeld

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu ,$$

das die Zeitentwicklung der Cauchyflächen beschreibt, lässt sich die Metrik in der Form des invarianten Wegelements

$$ds^2 = (N dt)^2 - h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt)$$

schreiben. Die Zeitentwicklung besteht aus den Normalenvektoren  $n^\mu$ , einer *lapse*-Funktion  $N(t, \vec{x})$ , die ein Maß für die Zeitschritte ist, und einem Verschiebe- oder *shift*-Vektor  $N^\mu$  zusammen. Die Metrik  $h_{ij}$  beschreibt dabei die räumlichen Komponenten auf der dreidimensionalen Cauchyfläche  $\Sigma_t$ .

#### 4 Quantenfeldtheorie und Allgemeine Relativitätstheorie

In dieser Beschreibung erhält der zur Feldvariablen  $\phi$  konjugierte Impuls  $\pi$  die Form

$$\pi = \sqrt{\hbar} (n^\mu \nabla_\mu \phi) \ .$$

Ebenso wie in (4.3) kann man auf der Cauchyfläche ein Skalarprodukt für Lösungen  $u_k$  der Klein-Gordon-Gleichung definieren

$$(u_1, u_2) \equiv i \int_\Sigma d^3x (u_1^* \pi_2 - \pi_1^* u_2) \ , \quad (4.6)$$

das unabhängig von der Wahl der Hyperfläche  $\Sigma$  ist. Die Moden  $u_k$  werden so gewählt, dass sie einen vollständigen Satz von Lösungen bilden und orthonormal sind. In dieser Basis können der Impuls und das Feld analog zum flachen Raum quantisiert und entwickelt werden. Es ergeben sich die Felder

$$\begin{aligned} \phi &= \int d\mu(k) (a_k u_k + a_k^+ u_k^*) \\ \pi &= \int d\mu(k) (a_k \pi_k + a_k^+ \pi_k^*) \end{aligned}$$

und die Kletteroperatoren  $a_k$  und  $a_k^+$  in dieser Basis mit den Kommutatorrelationen (4.5). Die Kletteroperatoren bilden zusammen mit dem Vakuumzustand  $|0\rangle_u$  einen Fock-Raum. Die Elemente  $(|0\rangle_u, a_k^+ |0\rangle_u, \dots)$  stellen die Basis des Hilbertraums dar. Dabei soll das Vakuum in dem positiv definiten Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  des Hilbertraums normiert sein

$${}_u \langle 0 | 0 \rangle_u = 1 \ .$$

### 4.3 Bogoljubov-Koeffizienten

Für die bisherige Betrachtung wurde eine bestimmte raumartige Hyperfläche  $\Sigma$  gewählt. Da aber aus der ART folgt, dass jede raumartige Hyperfläche gleichberechtigt ist, kann man diese Betrachtung auf einer anderen raumartigen Hyperfläche  $\Sigma'$  mit dem Satz von Lösungen  $v_p$  machen. Dazu wird wieder das Feld  $\phi$  entwickelt

$$\phi = \int d\mu(p) (b_p v_p + b_p^+ v_p^*) \quad (4.7)$$

und das Vakuum definiert

$$b_p |0\rangle_v = 0 \ .$$

Die Basis des Hilbertraums bilden die neuen Fock-Zustände  $|\cdot\rangle_v$  mit den Kletteroperatoren  $b_p^+$  und  $b_p$ . Da das Skalarprodukt unabhängig von der Wahl der Basis ist

und beide Basen einen vollständigen Satz von Lösungen bilden, lässt sich eine Basis in der anderen entwickeln

$$\begin{aligned} v_p &= \int d\mu(k) (\alpha(p, k) u_k + \beta(p, k) u_k^*) \\ u_k &= \int d\mu(p) (\alpha^*(p, k) v_p - \beta(p, k) v_p^*) . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $\alpha(p, k)$  und  $\beta(p, k)$  beschreiben die *Bogoljubov-Transformation* und werden *Bogoljubov-Koeffizienten* genannt. Für die Koeffizienten gelten die Bedingungen

$$\alpha\alpha^\dagger - \beta\beta^\dagger = 1 , \quad \alpha\beta^T - \beta\alpha^T = 0 .$$

Aus den Transformationen erhält man die Umrechnung der Kletteroperatoren zwischen beiden Basen

$$\begin{pmatrix} b \\ b^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} .$$

Mit dieser Transformation kann man nun den Erwartungswert für das Vakuum in unterschiedlichen Basen berechnen. Dazu wendet man den Teilchenzahloperator  $b^+b$  der Basis  $v_p$  auf das Vakuum in der Basis von  $u_k$  an

$${}_u\langle 0|b^+b|0\rangle_u = \int d\mu(k) |\beta(p, k)|^2 .$$

Erstaunlich ist, dass der Erwartungswert nicht verschwindet, und so scheint das Vakuum einer Basis in einer anderen Basis mit Teilchen „angefüllt“ zu sein und in einer anderen nicht. Dies wird als Unruh-Effekt bezeichnet.

## 4.4 Der Unruh-Effekt

Für einen beschleunigten Beobachter lässt sich der Erwartungswert des flachen Raumes berechnen [Unr76, Unr84]. Ein skalares Feld  $\phi$  in flacher Raumzeit lässt sich wie in (4.4) in seine Moden mit den Kletteroperatoren aufspalten. Die Lösungen in einer Zeit- und einer Raum-Dimension nehmen dann die Gestalt

$$u_k(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \exp(ikx - i\omega t) \quad (4.8)$$

an, dabei gilt  $\omega = |k|$ .

Ein Beobachter, der mittels *Rindler-Koordinaten*  $(\rho, \tau)$

$$x = \rho \cosh(a\tau) \quad t = \rho \sinh(a\tau)$$

und der Beschleunigung  $a$  beschrieben wird, spürt die Metrik

$$ds^2 = (a\rho)^2 d\tau^2 - d\rho^2 .$$

#### 4 Quantenfeldtheorie und Allgemeine Relativitätstheorie

In dem Bereich mit positiver Eigenzeit  $\tau > 0$  wird der Raum zu einer Cauchyfläche und man kann die Klein-Gordon-Gleichung in Rindler-Koordinaten ( $\square_R \phi = 0$ ) aufstellen. Mit einer Skalierung der Koordinate  $\rho = \exp(\xi a)$  erhält die Metrik eine ähnliche Form wie die Minkowskimetrik

$$ds^2 = a^2 \exp(2\xi a) (d\tau^2 - d\xi^2) .$$

Da die Klein-Gordon-Gleichung invariant unter Koordinatenskalierung ist, stellt sie sich als

$$a^2 \exp(2\xi a) \square_{\tilde{R}} \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \phi = 0$$

dar. Ihre Lösungen

$$\begin{aligned} v_P &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \exp(ip\xi - i\Omega\tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \rho^{ip/a} \exp(-i\Omega\tau) \end{aligned}$$

haben eine ähnliche Form wie (4.8) mit den Frequenzen  $\Omega = |p|$ . Über die Zerlegung des Feldes  $\phi$  in Erzeuger und Vernichter (4.7) lassen sich die Bogoljubov-Koeffizienten zwischen dem flachen Raum und dem beschleunigten Rindler-Beobachter über das Skalarprodukt (4.6) berechnen

$$\begin{aligned} \beta(p, k) &= -(u_k^*, v_p) \\ &= -i \int d\rho (u_k \pi_p - \pi_k v_p) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\rho \left( \frac{1}{a\rho} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} \right) e^{ik\rho} \rho^{i\frac{p}{a}} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \Gamma\left(\frac{ip}{a}\right) \omega^{-i\frac{a}{p}} e^{-\frac{p\pi}{2a}} . \end{aligned}$$

$\pi_{p,k}$  sind die schon bekannten konjugierten Impulse der entsprechenden Koordinaten. Daraus folgt das Quadrat der Bogoljubov-Koeffizienten

$$|\beta(p, k)|^2 = \frac{|p|}{2\pi|k|a^2} \frac{1}{e^{\frac{2\pi p}{a}} - 1} ,$$

aus dem der Vakuumerwartungswert des Minkowskivakuums  $|0\rangle_M$  in den Koordinaten des beschleunigten Beobachters berechnet wird

$${}_M\langle 0|b_p^+ b_p|0\rangle_M = \int dk |\beta(p, k)|^2 \propto \frac{\Omega}{e^{\frac{2\pi p}{a}} - 1} .$$

Der Vakuumerwartungswert hat die Form einer Planck-Verteilung mit einer Temperatur von  $T = \frac{a}{2\pi}$ . Somit erscheint dem beschleunigten Beobachter das Vakuum als



ein thermisches Wärmebad. Dieses Wärmebad entspricht aber nicht einem Wärmebad der klassischen Thermodynamik.

Der beschleunigte Beobachter würde in dem Vakuum mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein Teilchen detektieren. Im inertialen Bezugssystem beobachtet man, dass der Detektor des beschleunigten Beobachters in einen angeregten Zustand übergeht und ein Teilchen emittiert. Der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors bleibt für beide Beobachter dabei gleich.

## 4.5 Der Hawking-Effekt

Über das Äquivalenzprinzip der ART lässt sich ein ähnlicher Effekt durch ein Gravitationsfeld beschreiben. Das Gravitationsfeld bewirkt eine Beschleunigung und somit ein thermisches Wärmebad. Steven Hawking fand diesen Effekt einige Jahre vor Unruh bei der Untersuchung des Kollapses eines sphärisch-symmetrischen Sterns hin zu einem schwarzen Loch [Haw74].

Die Schwarzschildmetrik (3.12, S.26) kann man über eine neue Koordinate  $\rho$  mit der Eigenschaft

$$\frac{\rho^2}{8GM} = r - 2GM$$

ändern. Die neue Darstellung der Metrik

$$ds^2 = \kappa^2 \rho^2 dt^2 - d\rho^2 - \frac{1}{4\kappa^2} d\Omega^2 \quad (4.9)$$

hat eine vergleichbare Form wie die Rindler-Metrik. Anstelle der Beschleunigung  $a$  steht nun die Oberflächengravitation  $\kappa$ . Unter Ausnutzung der sphärischen Symmetrie lässt sich das Feld  $\phi(x)$  in einen Radial- und einen Winkelanteil separieren

$$\phi(x) = \frac{f(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Mit einer neuen Koordinate

$$r_* = r + 2GM \cdot \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|$$

stellt sich die Klein-Gordon-Gleichung mit dem Potential  $V(r_*)$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r_*^2} + V(r_*) f$$

$$V(r_*) = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} + m^2 \right]$$

dar. Für ein masseloses Feld verschwindet das Potential im Unendlichen und am Horizont, sodass eine freie Wellengleichung vorliegt. Zur besseren Darstellung wird

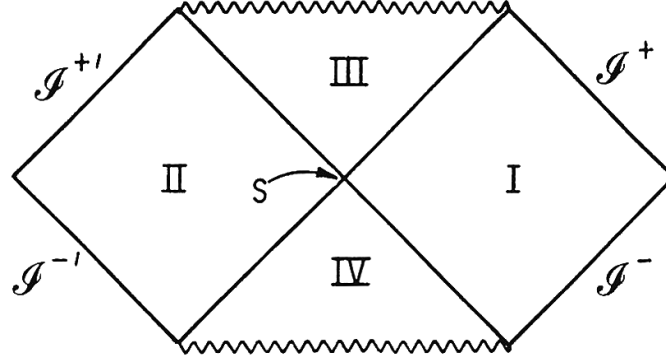


Abbildung 4.1: **Penrose-Diagramm**

Über eine konforme Koordinatentransformation lässt sich die Schwarzschildmetrik in Kruskal-Koordinaten darstellen [Wal94].

das Feld in einem Penrose-Diagramm (Abb. 4.1) und erweiterten Schwarzschildkoordinaten dargestellt [Mis73, Wal84, Wal94].

Im Bereich des Universums muss jede Welle, die das Klein-Gordon-Feld beschreibt, entweder aus dem weißen Loch oder dem Bereich  $\mathcal{I}^-$  gekommen sein und wird letztendlich im schwarzen Loch oder dem Bereich  $\mathcal{I}^+$  verschwinden. Durch eine dieser Randbedingungen lässt sich die Lösung der Wellengleichung bestimmen. Am Horizont selbst kann die Lösung durch ein- und auslaufende ebene Wellen

$$f_\omega = ae^{-i\omega u} + be^{i\omega v} = f_\omega^{(\text{out})} + f_\omega^{(\text{in})}$$

mit den Koordinaten  $u = t - r_*$  und  $v = t + r_*$  beschrieben werden.

In dessen Nähe geht  $u \rightarrow \infty$ , sodass die auslaufende Welle sehr stark oszilliert. Im Fall von hohen Frequenzen kann man wie bei Licht zur Strahloptik übergehen und die Welle als Strahl beschreiben.

Hawking betrachtete einen nach  $\mathcal{I}^+$  auslaufenden Strahl  $\gamma$  bei einem kollabierenden Stern [Haw74]. Auf  $\mathcal{I}^+$  besitzt der Strahl positive Eigenfrequenzen. Verfolgt man den Strahl zurück, so ändert sich die Frequenz und auf  $\mathcal{I}^-$  setzt sich der Strahl aus positiven und negativen Eigenfrequenzen zusammen. Die Bogoljubov-Koeffizienten der flachen Raumzeit bei  $\mathcal{I}^-$  und der Metrik (4.9) bei  $\mathcal{I}^+$  sind über die Bogoljubov-Koeffizienten verbunden

$$\beta_{\omega\omega'} = -e^{-\pi\omega/\kappa} \alpha_{\omega\omega'}$$

$$|\beta|^2 = \frac{1}{\exp(\frac{2\pi\omega}{\kappa}) - 1}.$$

Mittels der Integration über  $d\omega$  erhält man die Anzahl emittierter Teilchen in einem Frequenzbereich. Die Temperatur dieser Planck-Verteilung wird *Hawking-Temperatur*

$$\begin{aligned} T_{Hwk} &= \frac{\kappa}{2\pi} \\ T_{Hwk,Schw} &= \frac{1}{8\pi GM} \end{aligned} \tag{4.10}$$

genannt und wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine große Rolle spielen. Im Fall eines Schwarzschildschen schwarzen Loches ist  $\kappa = (4GM)^{-1}$ . Die Temperatur hängt dabei vom Kehrwert der Masse des schwarzen Loches ab. In Kapitel 7 wird genauer auf die Abstrahlung und die Teilchenproduktion eingegangen. Für weitere Informationen eignet sich [Wal94].



## 5 Theorien mit Extradimensionen

Neben den drei räumlichen und der zeitlichen Dimension gibt es Modelle mit weiteren räumlichen Dimensionen<sup>5.1</sup>. Eine der ersten Theorien mit Extradimensionen fanden Kaluza und Klein. Sie vereinen die klassische Elektrodynamik und die Gravitation nach Einstein in ihrem Modell. Mittels einer 5-dimensionalen Raumzeit lässt sich die Elektrodynamik in Form der Geometrie beschreiben. Da diese Art der Beschreibung wesentliche Schwächen aufweist und wurde für lange Zeit nicht ernsthaft verfolgt.

Das große Potential einer solchen Kaluza-Klein-Theorie nutzten erste Green und Schwarz zur Beschreibung der supersymmetrischen Stringtheorie mit universellen Extradimensionen und später Arkani-Hamed, Dimopoulos und Dvali mit großen Extradimensionen. Das ADD-Modell baut auf  $d$  großen Extradimensionen auf und verringert das Hierarchieproblem zwischen der elektroschwachen Skala und der Planckmasse. Dadurch wird eine Vereinheitlichung zwischen dem SM und der ART wahrscheinlicher.

Kurze Zeit später entstand von Randall und Sundrum ein Modell, das nur mit einer einzigen Extradimension auskommt. Das RS-Modell bettet in die 5-dimensionale Raumzeit zwei Untermannigfaltigkeiten ein, sodass die Koordinaten nicht unabhängig sind. Auf diese Weise wird das Hierarchieproblem über einen *Warp-Faktor* gelöst.

Die gesamte  $d + 4$ -dimensionale Raumzeit wird als *Bulk* bezeichnet und der 4-dimensionale Unterraum mit seiner zeitlichen und seinen drei räumlichen Dimensionen wird *Brane* genannt.

### 5.1 Kaluza-Klein Theorie

1921 machte Theodor Kaluza den Ansatz [Kal21], mittels der 5-dimensionalen Metrik

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & \alpha A_\mu \\ \alpha A_\nu & 2\phi \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Gravitation und Elektrodynamik zu beschreiben. Die Indizes  $I$  und  $J = 0 \dots 4$  beschreiben dabei alle fünf Dimensionen und  $\mu$  und  $\nu = 0 \dots 3$  sind wie bisher die Indizes der 4-dimensionalen Raumzeit und  $g_{\mu\nu}$  die dazugehörige Metrik.

Da aber bei Experimenten keine fünfte Dimension beobachtet wird, fügte Kaluza

---

<sup>5.1</sup>Modelle mit zeitlichen Extradimensionen haben den Nachteil, dass eine zugehörige konjugierte Energie Effekte hervorrufen würde, die nicht beobachtet werden.

die Bedingung ein, dass die Ableitungen nach dieser Komponente verschwinden ( $\partial_5 g_{IJ} = 0$ ). Diese Bedingung, auch „cylinder condition“ genannt, ist unnatürlich, da sich die Frage stellt, wieso die Physik nicht von dieser gleichberechtigten Koordinate abhängen soll. Außerdem liefert das skalare Feld  $\phi(x)$ , „Dilatonfeld“ genannt, Beiträge zur Bewegung in führender Ordnung, die nicht beobachtet werden.

Diesen Ansatz von Kaluza verbesserte Oskar Klein 1926 [Kle26] zu der Metrik

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa^2 \phi A_\mu \\ \kappa^2 \phi A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

mit dem Linienelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 (\kappa A_\nu dx^\nu + dx^5)^2$$

und der Konstanten  $\kappa = 16\pi G$ . Im Gegensatz zu Kaluza führte Klein keine „cylinder condition“ ein, sondern kompaktifizierte die Extradimension. Die Koordinate  $x^5$  entspricht dabei einem Kreis mit dem Radius  $R$ , sodass man nach einer Strecke in dieser Koordinatenrichtung von  $2\pi R$  wieder am selben Punkt angekommen ist

$$f(x^5) = f(x^5 + 2\pi R) \quad \forall f. \quad (5.3)$$

Die Metrik und Felder, die von allen Koordinaten  $x^A = (x^\alpha, x^5)^T$  abhängen, können in verschiedenen Moden  $n$  der fünften Koordinate angeregt werden

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x^A) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\mu\nu}(x^\alpha) e^{in \frac{x^5}{R}} \\ A_\mu(x^A) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\mu(x^\alpha) e^{in \frac{x^5}{R}} \\ \phi(x^A) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi(x^\alpha) e^{in \frac{x^5}{R}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Anstelle von Kaluzas „cylinder condition“ forderte Klein nun, dass nur die nullte Mode vorliegt und somit die „cylinder condition“ automatisch erfüllt ist. Diese Einschränkung ist auf den ersten Blick ebenso unnatürlich wie die „cylinder condition“, ist aber über die hohen Anregungsenergien für die fünfte Komponente verständlich, wie später noch gezeigt wird.

### 5.1.1 Bewegung in der Kaluza-Klein-Theorie

Mithilfe der Metrik lässt sich nun die Geodätengleichung (3.10, S. 24) in fünf Dimensionen aufstellen. Mit dem Feldstärketensor des elektromagnetischen Feldes  $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\gamma\mu} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( A_\varrho \frac{dx^\varrho}{d\tau} + \frac{dx^5}{d\tau} \right) F^\nu_\varphi \frac{dx^\varphi}{d\tau}. \quad (5.5)$$

Die kovarianten Ableitungen im Feldstärketensor vereinfachen sich wegen der Symmetrie der Christoffelsymbole zu partiellen Ableitungen. Damit (5.5) die Bewegungsgleichung der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes darstellt, fordert man die Identität

$$\frac{q}{m} = A_e \frac{dx^e}{d\tau} + \frac{dx^5}{d\tau} .$$

Dieser Impuls stellt sich gerade als Ladung  $q$  heraus. Als Begründung für die kompaktifizierte Extradimension erklärt Klein, dass eine Ladung  $q$  gerade quantisiert ist und ein Impuls mit periodischen Randbedingungen wie (5.3) eine Quantisierung darstellt. Ein solcher Impuls hat die Form  $p = 2\pi n/L$  mit der Periodenlänge  $L$ . Mit allen Konstanten und dem Faktor  $8\pi G$  aus dem newtonschen Grenzfall der ART ergibt sich mit einer Periodenlänge  $L = 2\pi R$  der Impuls  $p^5$

$$p^5 = q = \frac{ec^2}{8\pi G} = \frac{n}{R} .$$

Für die erste Anregung  $n = 1$  folgt, dass der Radius in der Größenordnung der Plancklänge  $R \approx l_{Pl}$  liegt. Zur Anregung benötigt man eine Energie in der Größenordnung der Planckmasse  $1/R \approx M_{Pl}$ , die fern des heutzutage Erreichbaren liegt.

### 5.1.2 Effekte der Kaluza-Klein-Theorie

Die Metrik der Kaluza-Klein-Theorie ist in ihrer Form allerdings nicht invariant unter allgemeiner Koordinatentransformation. Die Extradimension mit ihren periodischen Randbedingungen verhindert dieses Transformationsverhalten. Eine andere Transformation, bei der sich der 4-dimensionale Raum allgemein transformiert und für die Extradimension die Transformation

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu \\ x^5 &\rightarrow \tilde{x}^5 = x^5 + f(x^\mu) \end{aligned} \tag{5.6}$$

gilt, führt zum Eichverhalten des elektromagnetischen Potentials

$$A^\nu \rightarrow \tilde{A}^\nu = A^\nu - \partial^\nu f(x^\mu) .$$

### Feldgleichungen der Kaluza-Klein-Theorie

Über die Einsteinschen Feldgleichungen lässt sich der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

$$T_{\mu\nu}^{ED} = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

und die Bewegungsgleichungen im 4-dimensionalen Raum

$$\begin{aligned} \nabla^\mu F_{\mu\nu} &= -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu} \\ {}^{(4)}\square \phi &= \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.7}$$

mit dem 4-dimensionalen d'Alembert-Operator  ${}^{(4)}\square$  aufstellen [Sew08]. Klein setzte das Dilatonfeld auf den Wert  $\phi = 1$ , sodass die Einsteinschen Feldgleichungen die Form

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{ED}$$

haben und die Bewegungsgleichung als  $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$  dargestellt werden.

Ein konstantes Dilatonfeld fordert über (5.7) die unnatürliche Nebenbedingung  $F^2 = 0$ . Daher wird das Dilatonfeld in neueren Interpretationen als ein allgemeines Hintergrundfeld beibehalten, das wegen der hohen Anregungsenergien noch nicht beobachtet wird.

### Kaluza-Klein-Anregungen

Die kompaktifizierte Extradimension liefert einen weiteren, bemerkenswerten Effekt. So ergibt sich als Beispiel aus der Klein-Gordon-Gleichung für ein skalares, masseloses Feld  $\Phi$

$$\begin{aligned} {}^{(5)}\square\Phi &= \left({}^{(4)}\square - \partial_5^2\right)\Phi = 0 \\ \left({}^{(4)}\square + \frac{n^2}{R^2}\right)\Phi &= 0 \end{aligned}$$

ein Term  $|n|/R$ , der den Eindruck einer Masse erweckt.

Diese Formel kann man einfach auf einen Fall mit mehreren kompaktifizierten Extradimensionen erweitern. Mit der Annahme, dass alle  $d$  Extradimensionen den gleichen Radius  $R$  besitzen, ergibt sich mit dem Wellenzahlvektor  $\vec{n} = (n_1 \dots n_d)^T$  die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left({}^{(4)}\square + \frac{1}{R^2} \sum_{i=5}^{d+4} n_i^2\right)\Phi = 0 .$$

Die Anzahl der möglichen Zustände  $N(E)$  hängt von der zur Verfügung stehenden Energie  $E$  ab. Für alle möglichen Zustände gilt

$$\sum_{i=5}^{d+4} n_i^2 < E^2 R^2 .$$

Diese Gleichung stellt für den Wellenzahlvektor  $\vec{n}$  eine Kugelgleichung dar. In der kontinuierlichen Näherung liegen alle möglichen Zustände innerhalb einer  $d$ -dimensionalen Kugel mit dem Volumen  $V_d$ . Die Anzahl der möglichen Zustände ist dann

$$\begin{aligned} N(E) &= V_d = V_d^{\text{Kugel}} (ER)^d \\ V_d^{\text{Kugel}} &= \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \end{aligned}$$

mit dem  $d$ -dimensionalen Volumen einer Einheitskugel  $V_d^{\text{Kugel}}$ . Da sich solche Anregungen wie Massen darstellen und auftürmen, werden sie oft auch als *Kaluza-Klein-Türme* bezeichnet.



### Probleme der Kaluza-Klein-Theorie

Den Durchbruch der Kaluza-Klein-Theorie verhindern wesentliche Schwierigkeiten bei der Quantisierung und der Renormierbarkeit. Zusätzlich muss eine Erklärung für das Dilatonfeld gefunden werden, das bisher noch nicht beobachtet wurde. Außerdem ist die Theorie in ihrer Form frei von jeglicher fermionischer Masse, sodass noch Quellterme in die Feldgleichung eingebaut werden müssten. Trotz des Potentials der Kaluza-Klein-Theorie gelang dieser Theorie nicht der Durchbruch.

## 5.2 ADD-Modell

Aufbauend auf der Idee der Kaluza-Klein-Theorie nutzten Michael B. Green und John H. Schwarz kompaktifizierte Extradimensionen für eine konsistente Beschreibung der supersymmetrischen Stringtheorie [Gre81]. In diesen universellen Extradimensionen können die Teilchen des SMs frei propagieren. Die Anregungsenergien für die universellen Extradimensionen müssen im TeV-Bereich liegen, da bisher keine Kaluza-Klein-Anregungen von Elementarteilchen beobachtet wurden. Diese universellen Extradimensionen sind der Idee der Extradimension von Kaluza und Klein sehr ähnlich, da es sich in beiden Theorien um kleine Extradimensionen handelt. Ein weiteres Modell mit mehreren Extradimensionen entwickelten Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos und Gia Dvali Ende der 90er Jahre um das Hierarchieproblem zu lösen. Das ADD-Modell [Ant98, Ark98, Ark99] besteht aus  $d + 4$  Dimensionen, den vier üblichen Dimensionen der Raumzeit und  $d$  räumlichen Extradimensionen, die kompaktifiziert sind. Zur einfacheren Beschreibung erhalten alle Extradimensionen denselben Radius  $R$ , der im allgemeineren Fall variieren kann. Als neue Skala wird die *fundamentale Masse*  $M_f$  eingeführt, die im höherdimensionalen Raum die Planckmasse  $M_{Pl}$  ablöst.

### 5.2.1 Die fundamentale Masse

Auf dem ursprünglichen Weg wird die fundamentale Masse über das Gaußsche Gesetz hergeleitet. Dazu wird das höherdimensionale, nicht-relativistische Gravitationspotential

$$V_{r \ll R}(r) \sim \frac{M}{M_f^{d+2}} \frac{1}{r^{d+1}} \quad (5.8)$$

für eine Masse  $M$  und einen kleinen Abstand ( $r \ll R$ ) aufgestellt. Für große Abstände ( $r \gg R$ ) geht das Potential in das 4-dimensionale  $1/r$ -Potential

$$V_{r \gg R}(r) \sim \frac{M}{M_f^{d+2} R^d} \frac{1}{r} \quad (5.9)$$

über und die Ausbreitung in den Extradimensionen wird vernachlässigbar. Durch den Vergleich dieses Grenzfalles zum 4-dimensionalen Potential mit der Planckmasse ergibt sich die Relation

$$M_{Pl}^2 \simeq V_d M_f^{d+2} \quad (5.10)$$

mit dem  $d$ -dimensionalen Volumen  $V_d$  der Extradimensionen. Dabei hängt es an der Definition der fundamentalen Masse, ob (5.10) gleich ist oder sich um einen Faktor unterscheidet. Berechnungen über die Einstein-Hilbert-Wirkung im höherdimensionalen Raum und über die gravitative Anregung von Kaluza-Klein-Türmen ergeben das gleiche Ergebnis.

Mit dieser Relation lassen sich erste Abschätzungen für die Größe der Extradimensionen machen. Für den Fall  $d = 1$  und einer fundamentalen Masse, die im Bereich der Massen des SMs liegt ( $M_f \approx 1 \text{ TeV}$ ), ergibt sich eine Extradimension mit dem Radius  $R \approx 10^{13} \text{ cm}$ . Eine solche Größe entspricht in etwa dem Abstand Erde-Sonne und wäre somit schon entdeckt worden.

Zwei Extradimensionen dagegen  $d = 2$ ,  $M_f \approx 1 \text{ TeV}$  reduzieren die Größe der Extradimensionen auf  $R \approx 10^{-2} \text{ cm}$  und liegen unterhalb des Messbaren. Experimente in Seattle [Ade02] haben 2002 das Gravitationsgesetz am bisher besten überprüft und einen maximalen Radius für Extradimensionen von 0,2 cm ermittelt. Mit mehr Extradimensionen  $d > 2$ ,  $M_f \approx 1 \text{ TeV}$  sind die Radien nochmals kleiner. Somit müssen bei einer fundamentalen Masse  $M_f \approx 1 \text{ TeV}$  mindestens zwei Extradimensionen existieren. Im Vergleich zu den Extradimensionen der Kaluza-Klein-Theorie, wo die Extradimensionen in der Größenordnung der Plancklänge liegen, sind diese neuen Extradimensionen groß und werden als große Extradimensionen<sup>5.2</sup> bezeichnet. Die Raumzeit wird als  $R^4 \times M_d$  ( $d \geq 2$ ) beschrieben.  $M_d$  stellt eine kompaktifizierte,  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit dar. Für den Fall  $d = 2$  kann man sich  $M_{d=2}$  als einen Torus vorstellen, der an jedem Punkt der 4-dimensionalen Raumzeit zusätzlich vorhanden ist.

### 5.2.2 Felder im ADD-Modell

Die fermionischen Felder des Standardmodells sind im ADD-Modell an den 4-dimensionalen Unterraum genannt, gebunden. Die Ausdehnung des Unterraumes entspricht der Reichweite der elektroschwachen Wechselwirkung. Die Felder sind auf der Brane nicht angeregt (Nullmoden). Berechnungen dazu findet man in [Rub83a, Rub83b].

Die Eichfelder des SMs liegen in einer eingeschränkten Phase im Bulk und in einer gebrochenen Phase auf der Brane vor, wie Arkani-Hamed, Dimopoulos und Dvali in [Ark98] verallgemeinern. Ein begrenzendes Potential hindert die Wechselwirkungen des SMs daran, in den Extradimensionen zu propagieren.

Im ursprünglichen ADD-Modell [Ark98] können die Felder des SMs für hohe Energien ( $E \geq E_{esc}$ ) in kontinuierliche Moden übergehen und die Brane in die Extradimensionen verlassen. Anders als bei der Kaluza-Klein-Theorie und den universellen

---

<sup>5.2</sup>engl. *large extra dimension*; LXD

Extradimensionen kann der Impuls in Richtung der Extradimension nicht als zusätzliche Masse interpretiert werden. Da die Wellenlänge der Felder klein gegenüber der Größe der Extradimensionen ist, verschwinden die Teilchenfelder einfach von der Brane in den Bulk. Allerdings können keine Ladungen in die Extradimensionen entweichen, weil diese an die Brane gebunden sind.

In neueren Interpretationen hat sich gezeigt, dass alle Felder des SMs an die Brane gebunden sind und nur die Gravitation in den Extradimensionen propagieren kann. Ausführliche Diskussionen über die Beschreibung der Gravitonen, deren Kaluza-Klein-Anregungen und ihre Wirkung auf das Standardmodell sind in [Giu99, Sat06] zu finden.

### 5.2.3 Effekte und Nachweise des ADD-Modells

Das ADD-Modell sagt Effekte voraus, von denen einige in zukünftigen Experimenten beobachtbar sein könnten. Dabei spielt immer die Wahl der fundamentalen Masse und des Radius der Extradimensionen eine Rolle. Vier mögliche Hinweise auf die Existenz von Extradimensionen in der Form des ADD-Modells werden im Folgenden erklärt.

#### Klassisches Gravitationsgesetz auf kleinen Skalen

Die Gravitation ist bis in den mm-Bereich gemessen und hat das klassische  $1/r$ -Potential (5.9) bis zu dieser Größe bestätigt. Für Abstände, die kleiner sind als der Radius der Extradimensionen, geht das Potential in ein  $1/r^{d+1}$ -Potential (5.8) über. In zukünftigen Gravitationsexperimenten lassen sich LXDs über eine neue Potenzabhängigkeit der Gravitation nachweisen.

#### Virtuelle Gravitonen in Beschleunigern

Neben den direkten Auswirkungen des Gravitationspotentials spielen LXDs bei hochenergetischen Wechselwirkungen des SMs eine Rolle. Wirkungsquerschnitte können über einen Austausch von virtuellen Gravitonen erhöht werden, ähnlich der QED. Berechnungen zu diesem Thema finden sich beispielsweise im Wirkungsquerschnitt  $\sigma(pp \rightarrow ZZ)$  [Kob07].

#### Produktion realer Gravitonen

Anstelle von virtuellen Gravitonaustausch kann auch die reale Produktion von Gravitonen eine Rolle spielen. Fehlende Energie am LHC kann ein Hinweis sein, dass Gravitonen erzeugt wurden und diese Energie in den Bulk abführen. Die Folge wäre neben der fehlenden Energie ein scharfes *Cutoff*-Spektrum bei der Masse des Gravitons.

Auf astrophysikalischer Ebene können Gravitonen ähnlich zu Neutrinos Energie von Körpern wegführen und beispielsweise den Kühlungsprozess von Supernovae beschleunigen. Anhand der Supernova 1987A wurde die fundamentale Masse für zwei

Extradimensionen  $d = 2$  auf  $M_f \geq 10 - 100$  TeV bestimmt. Für mehr Extradimensionen  $d > 2$  liegt praktisch keine Einschränkung in der fundamentalen Masse vor. Berechnungen dazu finden sich in [Ark99, Koc08b].

### Schwarze Löcher an Beschleunigern

Ein anderer Effekt ist die Erzeugung von schwarzen Löchern. Am LHC können in Teilchenstößen schwarze Löcher erzeugt werden, die instantan wieder zerfallen. Berechnungen hierzu sind Ziel dieser Arbeit und so wird auf die Grundlagen zu schwarzen Löchern in großen Extradimensionen (Kap. 5.4), deren mögliche Erzeugung (Kap. 6) und Zerstrahlung (Kap. 7) noch eingegangen.

## 5.3 Randall-Sundrum-Modelle

Einen anderen Ansatz zur Lösung des Hierarchieproblems machten Lisa Randall und Raman Sundrum 1999 [Ran99a, Ran99b]. Sie erklären mit einer einzigen Extradimension die Schwäche der Gravitation. In ihrem ersten Modell (Randall-Sundrum-Modell Typ 1, RS-Typ 1) ist die Extradimension noch kompaktifiziert, während sie in einer Weiterentwicklung (Randall-Sundrum-Modell Typ 2, RS-Typ 2) nicht kompaktifiziert sein muss.

### 5.3.1 Randall-Sundrum-Modell Typ 1

Im RS-Typ 1 [Ran99a] existiert eine Extradimension mit der Koordinate  $\phi$  und dem Kompaktifizierungsradius  $R$ . Die Koordinate  $\phi$  liegt im Bereich  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  und der Punkt  $(x, \pi)$  wird mit  $(x, -\pi)$  identifiziert. In dem Bulk sind nun zwei Branen eingebettet. Bei  $\phi = \pi$  liegt die 4-dimensionale Welt auf der sichtbaren Brane. Dagegen existiert bei  $\phi = 0$  die versteckte Brane. Da die Materie und die Wechselwirkungen des SMs auf die Branen gebunden sind, können beide nur über die Bulk-Metrik und somit die Gravitation wechselwirken. Für die Metrik auf den Branen gilt

$$g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu) \equiv g_{IJ}^{(5)}(x^\mu, \phi = \pi) , \quad g_{\mu\nu}^{hid}(x^\mu) \equiv g_{IJ}^{(5)}(x^\mu, \phi = 0) . \quad (5.11)$$

Die Wirkung für diesen Aufbau

$$\begin{aligned} S &= S_{grav} + S_{vis} + S_{hid} \\ S_{grav} &= \int dx^4 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g^{(5)}} (-\Lambda + 2M_f^3 R) \\ S_{vis} &= \int dx^4 \sqrt{-g^{vis}} (\mathcal{L}_{vis} + V_{vis}) \\ S_{hid} &= \int dx^4 \sqrt{-g^{hid}} (\mathcal{L}_{hid} + V_{hid}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

setzt sich aus den Wirkungen auf den Branen und der Gravitation zusammen. Dabei sind  $V_{vis}$  und  $V_{hid}$  die Vakuumenergien auf den Branen und  $\Lambda$  die Energiedichte im Bulk.

### 5.3.2 Der Warp-Faktor und physikalische Auswirkungen

Die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die sich aus der Wirkung (5.12) herleiten lassen, erfolgt über das Linienelement der Metrik

$$ds^2 = e^{-2kR\phi} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 d\phi^2 ,$$

das sich aus einem 4-dimensionalen Poincaréinvarianten Teil in  $x^\mu$ -Richtung und einem Anteil entlang der zusätzlichen Koordinate  $\phi$  zusammensetzt. Dabei ist  $e^{-2kR\phi}$  als *Warp-Faktor* bekannt und  $k$  beschreibt eine Skala in der Größe der Planckskala. Neben dem Radius der Extradimension  $R$  hängt die Metrik von dem zusätzlichen Parameter  $k$  ab. Der Warp-Faktor beschreibt, wie sich die Metrik zwischen den Branen und die Branen zueinander verhalten.

Über die Einsteinschen Feldgleichungen lässt sich die fundamentale Masse  $M_f$  aus der Planckmasse

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_f^3}{k} \left[ 1 - e^{-2kR\pi} \right] \quad (5.13)$$

herleiten. Die neue gravitative Kopplung hat direkte Auswirkungen auf physikalische Massen. Eine Masse  $m$  eines Feldes hängt mit einer Masse  $m_0$  auf der unsichtbaren Brane direkt zusammen

$$m = e^{-kR\pi} m_0 \quad (5.14)$$

und ist gegenüber  $m_0$  exponentiell gedämpft. Mit der Reskalierung der Felder ergibt sich mit dem Faktor  $e^{kR\pi}$  eine Lösung des Hierarchieproblems. Der exponentielle Faktor  $e^{kR\pi}$  erklärt die Hierarchie zwischen den natürlichen Parametern. Schon für eine Masse der Größenordnung TeV und einen Faktor  $kR \approx 12$  liegt die resultierende Masse  $m \approx 10^{19}$  GeV  $\approx M_{Pl}$  im Bereich der Planckmasse.

### 5.3.3 Randall-Sundrum-Modell Typ 2

Im RS-Typ 2 [Ran99b] liegt nun die klassische 4-dimensionale Welt auf der unsichtbaren Brane bei  $\phi = 0$ . Die zweite Brane wird ins Unendliche verschoben ( $R \rightarrow \infty$ ), sodass die Extradimension unendlich groß wird. Die Planckmasse (5.13) in diesem Szenario ist wohldefiniert

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_f^3}{k} .$$

Die Interpretation des RS-Typ 2 unterscheidet sich nicht wesentlich von dem RS-Typ 1. Anstelle der Winkelkoordinate wird die Extradimension über eine räumliche Koordinate  $y$  beschrieben.

Für Auswirkungen, Korrekturen zum newtonschen Potential und weitere Diskussionen auf dem Gebiet der Randall-Sundrum-Modelle sei auf die Literatur verwiesen [Ran99a, Ran99b, Gar00, Gid00].

## 5.4 Schwarze Löcher in Extradimensionen

Im Folgenden wird das ADD-Modell mit mehreren Extradimensionen ( $d \geq 2$ ) verwendet. Der Fall  $d = 1$  wurde, wie bereits erwähnt, durch bisherige Beobachtungen ausgeschlossen.

### 5.4.1 Statische schwarze Löcher

Aufbauend auf den Erfolgen von Frank R. Tangherlini [Tan63], beschrieben Robert C. Myers und Malcolm J. Perry 1986 schwarze Löcher in höheren Dimensionen [Mye86] für verschiedenen Fällen. Die Art der Extradimensionen wurde nicht weiter spezifiziert. Im statischen Fall kann die Schwarzschildmetrik (siehe Kap. 3.4.1) auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden. Mit dem Ansatz des Linienelements

$$ds^2 = \alpha(r, t)dt^2 - \beta(r, t)dr^2 - r^2 d\Omega_{d+2}^2$$

folgt über die statische Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen

$$\alpha(r) = \frac{1}{\beta(r)} = 1 - \frac{C}{r^{d+1}} \equiv f(r) . \quad (5.15)$$

Es gilt noch die Integrationskonstante  $C$  zu ermitteln und zu interpretieren. Für  $C < 0$  existiert nur eine nackte Singularität bei  $r = 0$  und kein Ereignishorizont. Solche nackten Singularitäten werden von bisherigen Vermutungen einer *kosmischen Zensur*<sup>5.3</sup> ausgeschlossen. Dagegen entsteht für  $C > 0$  ein Ereignishorizont um die Singularität mit dem Radius  $R_H = C^{1/(d+1)}$ . Über die Entwicklung der Metrik  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  lässt sich die Masse des schwarzen Loches und somit der Ereignishorizont

$$\begin{aligned} M &= \frac{C(d+2)A_{d+2}}{16\pi G} \\ R_H^{d+1} &= \frac{16\pi GM}{(d+2)A_{d+2}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

ermitteln.  $A_{d+2}$  beschreibt die Oberfläche der Einheitssphäre in  $d+2$  Dimensionen

$$A_{d+2} = \frac{2\pi^{\frac{d+2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} . \quad (5.17)$$

---

<sup>5.3</sup>engl. *cosmic censorship conjecture*; Roger Penrose geht auf dieses Thema [Pen99] weitgehend ein.

Auf einem ähnlichen Weg lässt sich über die Einstein-Maxwell-Gleichungen die höherdimensionale Reissner-Nordström-Lösung finden. Mit dem elektromagnetischen Potential  $A = h(r)dt$  und der statischen, radialsymmetrischen Lösung

$$h(r) = \pm \left( \frac{1}{8\pi G} \frac{d+2}{d+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{D}{r^{d+1}}$$

folgt für die Metrikkoeffizienten

$$f(r) = 1 - \frac{C}{r^{d+1}} + \frac{D^2}{r^{2(d+1)}} .$$

Neben der ersten Integrationskonstante  $C$  gibt es in diesem Fall eine weitere Konstante  $D$ . Die Ladung  $Q$  ergibt sich aus der Lösung einer elektrischen Punktladung

$$Q = \pm \left( \frac{(d+2)(d+1)}{8\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} D .$$

Für den Ereignishorizont muss man nun verschiedene Fälle betrachten. Für  $D^2 > \frac{C^2}{4}$  entsteht wieder eine nackte Singularität und im anderen Fall  $D^2 < \frac{C^2}{4}$  ergeben sich zwei Ereignishorizonte bei

$$R_{\pm}^{d+1} = \frac{1}{2}C \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 - D^2} .$$

#### 5.4.2 Rotierende schwarze Löcher

Für rotierende schwarze Löcher entspricht die Metrik in höheren Dimensionen der allgemeineren Kerrmetrik (3.14, S. 27). Das Linienelement

$$\begin{aligned} ds^2 = & dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - \Delta (dt + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ & - \Psi dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_d^2 \\ \rho^2 = & r^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\Delta = \frac{\mu}{r^{d-1}\rho^2} \quad \Psi = \frac{r^{d-1}\rho^2}{r^{d-1}(r^2 + a^2) - \mu}$$

gibt mit  $\mu = 2GM r^d$  ein allgemein rotierendes schwarzes Loch in Extradimensionen wieder. Für den Grenzfall  $a \rightarrow 0$  erhält man wieder die höherdimensionale Schwarzschildlösung.

Für große Abstände kann man die Masse  $M$  des schwarzen Loches

$$M = \frac{(d+2)A_{d+2}}{16\pi G} \mu$$

und mit geeigneter Wahl der Koordinaten der Drehimpuls

$$J^{yx} = \frac{A_{d+2}}{8\pi G} \mu a = \frac{2}{d+2} M a$$

darstellen. Die Lösung der Kerrmetrik und die Angabe von Singularitäten und Ereignishorizonten ist kompliziert, daher wird auf die Literatur verwiesen [Mye86].

### 5.4.3 Lösung im ADD-Modell

Aufbauend auf dem ADD-Modell und mit den Vorarbeiten von Myers und Perry konstruierten erst Savas Dimopoulos und Greg L. Landsberg [Dim01] und anschließend Steven B. Giddings und Scott D. Thomas [Gid02] ein realistisches Szenario, in dem schwarze Löcher an Beschleunigern entstehen können. Dazu wird die newtonsche Gravitationskonstante  $G_N$  durch die höherdimensionale Gravitationskonstante  $G_{d+4}$  ersetzt und die fundamentale Planckmasse<sup>5.4</sup>

$$G_N = \frac{G_{d+4}}{V_d}$$

$$M_f^{d+2} = \frac{(2\pi)^d}{\pi G_{d+4}}$$

definiert. Da das schwarze Loch auf der Brane liegt und somit nicht in den Extradimensionen propagieren darf, muss der Drehimpuls ebenso im 3-dimensionalen Raum liegen. Für diesen Fall vereinfachen sich die Formeln für den Ereignishorizont der Kerrlösung und Giddings und Thomas berechneten den Ereignishorizont

$$R_H^{d-1} \left( R_H^2 + \frac{(d+2)^2 J^2}{4M^2} \right) = \frac{16\pi G_{d+4} M}{(d+2) A_{d+2}}. \quad (5.19)$$

Verschwindet der Drehimpuls ( $J \rightarrow 0$ ), so erscheint die höherdimensionale Schwarzschildlösung

$$R_H^{d+1} = \frac{16(2\pi)^d}{(d+2)A_{d+2}} \frac{1}{M_f^{d+1}} \frac{M}{M_f}. \quad (5.20)$$

### Erste Abschätzungen für den Ereignishorizont

Mit diesem Ergebnis für den Ereignishorizont lassen sich nun erste Abschätzungen für schwarze Löcher machen (siehe Tab. 5.1). Für den einfachsten Fall eines statischen, ungeladenen schwarzen Loches gilt (5.20). Mit einer minimalen Masse für ein

<sup>5.4</sup>Es existieren unterschiedliche Definitionen der fundamentalen Masse. Drei der Definitionen werden im Anhang von [Gid02] erläutert und dargestellt.



#### 5.4 Schwarze Löcher in Extradimensionen

schwarzes Loch von der fundamentalen Masse  $M_f \approx 1$  TeV liegt der Ereignishorizont für zwei Extradimensionen in einem Bereich von  $R_H \approx 10^{-4}$  fm. Diese Größenbereiche werden sich in Zukunft an Beschleunigern auflösen lassen, was im folgenden Kapitel diskutiert wird.

Tabelle 5.1: Unterschiedliche Radien für minimale schwarze Löcher ( $M \approx M_f$ ) bei einer fundamentalen Masse  $M_f \approx 1$  TeV

$d$	2	3	4	5	6
$R_{H,d}$ [ $10^{-4}$ fm]	2,52	3,32	4,04	4,70	5,32



# **Teil II**

## **Resultate**



## 6 Semiklassische Produktion schwarzer Löcher

Mit den Grundlagen über große Extradimensionen lassen sich Abschätzungen für Teilchenkollisionen an Beschleunigern, speziell dem *Large Hadron Collider* LHC/CERN, machen. Mit  $d$  Extradimensionen und einer geringen fundamentalen Masse können im ADD-Modell schwarze Löcher erzeugen.

### 6.1 Grundlagen der Teilchenkollisionen

Bei Hadron-Hadron-Kollisionen mit Energien im TeV-Bereich sind die Teilchenstöße hoch inelastisch. Durch den hohen Impulsübertrag agieren nicht mehr die großen Hadronen, sondern die punktförmigen Partonen, also Quarks und Gluonen, als die relevanten Freiheitsgrade.

Das Partonmodell von Feynman und Bjorken [Fey69, Bjo69] beschreibt das Stoßverhalten („*scattering*“) von Hadronen sehr gut. Ein Parton  $i$  trägt dabei einen Teil des Viererimpulses des Hadrons  $A$  ( $x_i P^{A,\mu} = x_i (E^A, \vec{p}^A)^T$ ). Die Summe aller Impulse eines Teilchens ist natürlich festgelegt, d. h.  $\sum_i x_i = 1$ .

Die Impulsverteilung der Partonen innerhalb der Hadronen wird von den Verteilungsfunktionen<sup>6.1</sup>, die unter anderem vom CTEQ<sup>6.2</sup> [Pum02] veröffentlicht werden, geliefert.

#### 6.1.1 Mandelstamvariablen

In der Hochenergiephysik verwendet man zur Beschreibung der Kinetik von Teilchenstößen oft die Mandelstamvariablen. Für zwei Stoßpartner  $A$  und  $B$ , die in zwei andere Teilchen  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  übergehen ( $A + B \rightarrow \hat{A} + \hat{B}$ ), sind die Parameter als die Vierer-Quadrate

$$\begin{aligned} s &\equiv (P^A + P^B)^2 = (P^{\hat{A}} + P^{\hat{B}})^2 \\ t &\equiv (P^A - P^{\hat{A}})^2 = (P^B - P^{\hat{B}})^2 \\ u &\equiv (P^A - P^{\hat{B}})^2 = (P^B - P^{\hat{A}})^2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

---

<sup>6.1</sup>engl. *parton distribution functions*; PDF

<sup>6.2</sup>*coordinated theoretical-experimental project on QCD*

definiert. Die Variable  $s$  entspricht im Schwerpunktsystem<sup>6.3</sup> dem Quadrat der Energie. Mit  $\sqrt{s}$  wird oft die maximale Energie von Teilchenstößen angegeben. So ist am LHC  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Die Variablen  $t$  und  $u$  geben den Impulsübertrag der Stoßpartner an. Die Summe der drei Variablen  $s$ ,  $t$  und  $u$  ist gleich der Summe der Quadrate der Massen  $m_i^2$ ,

$$s + t + u = \sum_i m_i^2 .$$

Für den Stoß zweier Partonen ( $i$ , Teilchen  $A$  und  $j$ , Teilchen  $B$ ) stellt  $\tilde{s}$  die Schwerpunktsenergie dar. Dazu vernachlässigt man die Massen der Quarks ( $m_u \cong m_d = 5$  MeV und  $m_s = 150$  MeV) und Gluonen ( $m_G = 0$  MeV) gegenüber der kinetischen Energie ( $E \approx 10$  TeV). Die Schwerpunktsenergie  $\tilde{s}$  entspricht

$$\tilde{s} = x_i x_j s . \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Stoßparameter $b$

Bei Teilchen-Teilchen-Kollisionen bewegen sich die Partonen entlang einer Achse in entgegengesetzter Richtung, meistens wird dafür die  $z$ -Achse gewählt. Transversalimpulse der Partonen können wegen der hohen Energien vernachlässigt werden. Der Stoßparameter  $b$  gibt an, wie weit die Partonen voneinander entfernt sind. Für zentrale Stöße ist  $b = 0$ , und bei großen Abständen ist die Reichweite der Wechselwirkungen zu gering, sodass es zu keinem Stoßprozess kommt.

### 6.1.3 Stringfragmentation und das Lund-Modell

Nach der Wechselwirkung der Stoßpartner folgen weitere Prozesse, bis die entstandenen Teilchen detektiert werden. Die resultierenden Teilchen sind meist nicht stabil und zerfallen in weitere Teilchen. Im *Lund-Modell* wird die chromodynamische Entwicklung der Teilchen behandelt. Als Beispiel erzeugen zwei gebundene Quarks, die sich auseinander bewegen, ein immer größer werdendes Potential. Sobald die darin gespeicherte Energie groß genug ist, wird ein neues Teilchen/Antiteilchen-Paar erzeugt. Da dieser Prozess oft passiert, reihen sich die entstehenden Pionen auf einem Band auf, woher der Name *Stringfragmentation* kommt.

Ein vergleichbarer Prozess findet bei der Zerstrahlung schwarzer Löcher statt. Wegen der hohen Energien erzeugen die Teilchen der Hawkingstrahlung weitere Teilchenpaare aus dem Vakuum. Durch Kombinationen der Teilchen entstehen Mesonen und Baryonen, die auch in andere Hadronen, Photonen und Leptonenpaare zerfallen können. Das Resultat im Detektor sind viele verschiedene Teilchen mit insgesamt erhaltenen Quantenzahlen.

### 6.1.4 Jet-Produktion

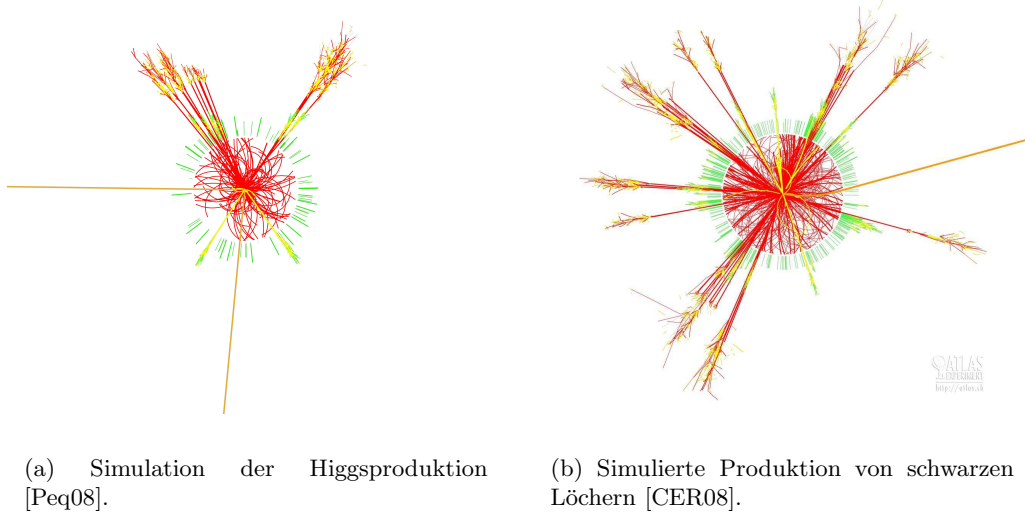
Ein Effekt der Stringfragmentation sind sogenannte *Jets*. Aufgrund der Impulserhaltung ergeben sich verschiedene Vorzugsrichtungen für die entstehenden Teilchen.

---

<sup>6.3</sup>engl. *center of mass system*; CMS

Diese kegelförmigen Regionen enthalten überdurchschnittlich viele Teilchen. In Abbildung 6.1 sind zwei verschiedene für den LHC simuliert Events zu sehen.

Abbildung 6.1: Jet-Produktion am LHC. Die Simulation eines einzelnen Events am ATLAS-Detektor zeigt qualitativ die unterschiedliche Anzahl von Jets bei Prozessen des SMs und bei der Produktion schwarzer Löcher.



Bei einem schwarzes Loch (Abb. 6.1(b)) werden dabei wesentlich mehr Jets erwartet als für Events, in denen die Wechselwirkung des SMs eine übergeordnete Rolle spielt (wie bei der Higgsproduktion, Abb. 6.1(a)). Da ein statisches schwarzes Loch keine Vorzugsrichtung aufweisen kann, sollte die Strahlung isotrop in den gesamten Raum abgegeben werden. Auf die Zerstrahlung von schwarzen Löchern und unterschiedliche Zerfallsphasen wird in Kapitel 7.1 noch eingegangen. Bei Prozessen des SMs dagegen existiert durch den Vertex eine Vorzugsrichtung, wie sie in Abbildung 6.1(a) zu erkennen sind. Beobachtungen einer erhöhten Jet-Produktion sind also ein Anzeichen für die Produktion von schwarzen Löchern.

### 6.1.5 Observablen

Nach der Stringfragmentation ergeben sich aus den Daten im Detektor verschiedene Beobachtungsgrößen. Die Teilchen werden anhand unterschiedlicher Merkmale kategorisiert. Die *Multiplizität*, die in dieser Arbeit am meisten verwendete Observable, ist die Anzahl der Teilchen pro Event. Dabei kann man zwischen der gesamten Multiplizität als auch den Multiplizitäten für einzelne Teilchen wie Pionen oder Photonen unterscheiden.

Eine andere beobachtbare Größe sind die Spektren des *Transversalimpulses*  $p_T$ . Dabei wird meist nicht der Transversalimpuls an sich geplottet, sondern eine halb-logarithmische Darstellung von  $1/p_T \, dN(p_T)/dp_T$  gewählt. Bei thermischen Spek-

tren lässt sich so direkt über die lineare Steigung die inverse Temperatur ablesen. Die *Rapidity*  $y$  ist ein anderes Maß für die Geschwindigkeit. Über die Definition

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1} \beta_z \\ &\equiv \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} \end{aligned}$$

gibt die Rapidity in der Teilchenphysik den Anteil der Energie in longitudinaler Richtung wieder. Für hohe Energien der Teilchen ( $E \gg m$ ) geht die Rapidity in die *Pseudorapidity*  $\eta$  über,

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} , \quad (6.3)$$

die im direkten Zusammenhang mit dem Winkel  $\vartheta$  zwischen Teilchenrichtung und Strahlrichtung steht. Für den Strahl, in dem die gesamte Energie entlang der  $z$ -Achse verläuft, divergiert die Pseudorapidity, wogegen Teilchen mit hoher transversaler Energie keine Rapidity und Pseudorapidity haben.

Diese vier Observablen sind als Beispiele gewählt. Daneben gibt es viele weitere Möglichkeiten, unterschiedliche Größen wie Winkelverteilungen ( $dN/d\phi$ ) gegeneinander darzustellen.

### 6.1.6 Monte-Carlo-Simulationen

Modelle zur Kern- und Teilchenphysik finden oft über numerische Rechnungen statt. Dazu werden viele *Events* in einem Simulationsprogramm erzeugt. Der Fehler der Simulation geht statistisch mit  $1/\sqrt{n}$ , sodass bei vielen Events die Fehler klein gegenüber einer analytischen Lösung werden, wobei eine exakte analytische Lösung bei vielen Problemen der Kernphysik nicht möglich ist.

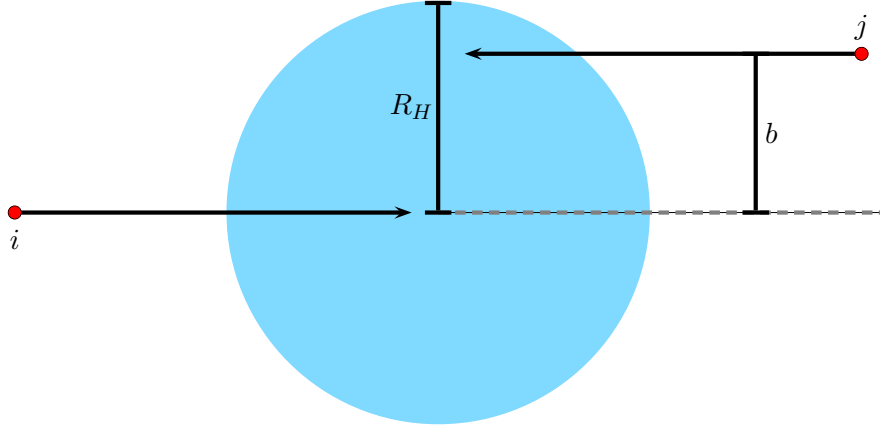
Die Berechnungen finden dabei über einen Zufallsgenerator statt und werden in Anlehnung an das Glücksspiel in Monaco als *Monte-Carlo-Simulation* bezeichnet. Es gibt viele Eventgeneratoren, die mittels der Zufallsmethode Teilchenkollisionen simulieren.

## 6.2 Modell zur Produktion schwarzer Löcher

Die Idee bei der Produktion von schwarzen Löchern ist, dass zwei Partonen  $i$  und  $j$ , die sich näher als der Ereignishorizontes beider Massen ( $b < R_H(\sqrt{s})$ ) kommen, zu einem schwarzen Loch kollabieren (Abb. 6.2). Dabei bestimmt (5.16, S. 48) den Ereignishorizont mit den Parametern der fundamentalen Masse  $M_f$ , der Anzahl der Extradimensionen  $d$  und der gemeinsamen Masse der Partonen  $M = \sqrt{s}$ . Bei diesem Prozess erzeugt jedes Partonenpaar, das diese Bedingung erfüllt, ein schwarzes Loch und stellt somit ein Ende der hochenergetischen Teilchenphysik dar. Zur konsistenten Berechnung werden die Partonen als gravitative Welle beschrieben. Daher handelt es sich um einen halb- oder *semiklassischen Prozess*. Erste Berechnungen finden sich in [Dim01, Gid02].



Abbildung 6.2: Zwei Partonen  $i$  und  $j$  erzeugen ein schwarzes Loch. Der Stoßparameter ist kleiner als der Ereignishorizont ( $b < R_H$ ) ihrer Energie  $\sqrt{s}$ .



### 6.2.1 Wirkungsquerschnitte und Produktionsrate am LHC

Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein schwarzes Loch erzeugt wird, betrachtet man verschiedene Wirkungsquerschnitte.

#### Geometrischer Wirkungsquerschnitt

Der geometrische Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{ij \rightarrow BH}$  ist für zwei Partonen die Kreisfläche mit dem Radius

$$\sigma_{ij \rightarrow BH}(M) \approx \pi R_H^2 \Theta(\sqrt{s} - M_f) . \quad (6.4)$$

In diesem Bereich kommen sich die Teilchen nah genug, um zu einem schwarzen Loch zu kollabieren. Die  $\Theta$ -Funktion regelt, dass nur dann schwarze Löcher erzeugt werden, wenn die Energie beider Partonen größer als eine minimale Masse ist, die als die fundamentale Masse angenommen wird.

Dabei werden die Partonen als klassische Punktteilchen betrachtet. Auf einem genaueren Weg berechneten Eardley und Giddings [Ear02] den Wirkungsquerschnitt. Sie stellten die Partonen als Schockwellen der Aichelberg-Sexl-Lösung in der höherdimensionalen Schwarzschildmetrik dar. Über die Transformation in das Laborsystem wurde gezeigt, dass die Wellen vor der Kollision nicht kausal wechselwirken und somit die Lösung als Summe der einzelnen Lösungen dargestellt werden kann. Es entsteht bei der Kollision instantan eine Region mit der abgeschlossenen Oberfläche  $\mathcal{S}$  und dem Radius  $\rho_c$ ,

$$\rho_c = \left( \frac{8\pi G\mu}{A_{d+1}} \right)^{\frac{1}{d+1}} \sim R_H . \quad (6.5)$$

Dabei hat jedes Parton eine Energie  $\mu = \sqrt{s}/2$  und  $A_{d+1}$  beschreibt wieder die Oberfläche der Einheitskugel. Die entstehende Oberfläche hat die Eigenschaft, dass nur Wellen hineinlaufen und keine Auslaufenden vorhanden sind. Sie ist ein Indiz für ein schwarzes Loch und stellt den künftigen Horizont dar. Über die Schnittfläche der Region mit der Brane lässt sich wieder der Wirkungsquerschnitt (6.4) für die Produktion von schwarzen Löchern herleiten. Bei diesen Berechnungen wird der Raum nahe dem sich bildenden Horizont als flach angenommen, was für kleine schwarze Löcher ( $M_{BH} \approx M_f$ ) noch gelten mag.

Für größere schwarze Löcher ( $M_{BH} \gg M_f$ ) ist die Annahme eines näherungsweise flachen Raumes nicht mehr möglich. In [Vol02] zeigte Mikhail B. Voloshin, dass massive schwarze Löcher durch die Gibbons-Hawking-Wirkung [Gib77] exponentiell unterdrückt werden. Später schwächte Thomas G. Rizzo diese Aussage ab [Riz02], sodass trotz einer Unterdrückung nach Voloshin massive schwarze Löcher am LHC produziert werden können.

Die Berechnungen zeigen, dass mit der Betrachtung der Partonen als klassische Punktteilchen die Krümmung des Raumes und Quantenfluktuationen nahe des Horizonts groß werden. Nimmt man die Partonen dagegen als quantisierte Wellenpakete an [Gid04], so ergeben sich kontrollierbare Größen. Das Ergebnis des geometrischen Wirkungsquerschnittes (6.4) bleibt dabei unverändert.

Mit einem minimalen Ereignishorizont  $R_H \approx 10^{-4}$  fm, der mittels (5.16, S. 48) abgeschätzt wurde, ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt  $\sigma \approx 400$  pb. Wirkungsquerschnitte dieser Größe liegen im Auflösungsbereich des LHCs.

### Differentieller Wirkungsquerschnitt

Eine andere Größe ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{dM} = \sum_{ij} \int_0^1 dx \int_0^1 dy f_i(x, \tilde{s}) f_j(y, \tilde{s}) \delta(\sqrt{\tilde{s}} - M) \sigma(\sqrt{\tilde{s}}, d)$$

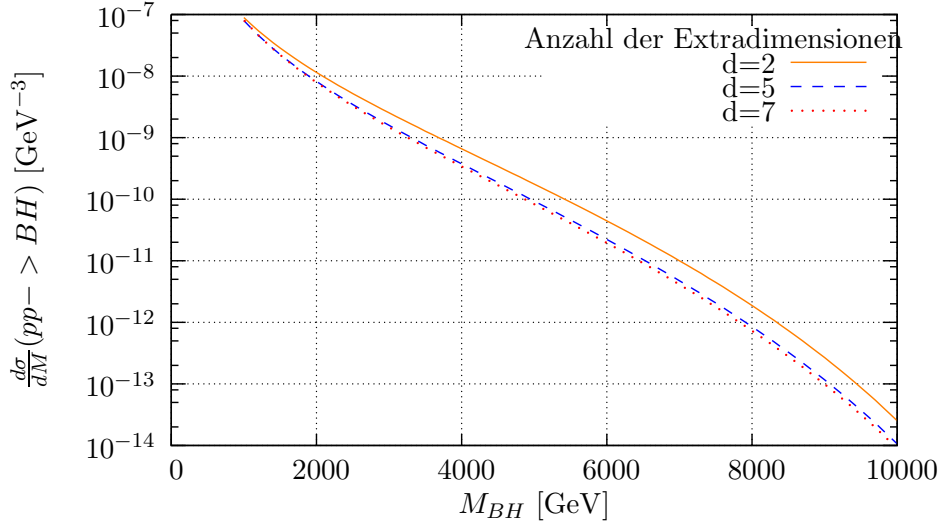
für Proton-Proton-Kollisionen. Er gibt an, wie viele schwarze Löcher mit der Masse  $M$  entstehen. Dabei wird über alle möglichen Stoßkombinationen innerhalb der Protonen summiert und über die Verteilungsfunktionen der Partonen integriert. Für eine Teilchenkollision mit einer Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s} = 14$  TeV ist der differentielle Wirkungsquerschnitt zur Produktion schwarzer Löcher in Abbildung 6.3 dargestellt.

Durch Umschreiben und Ausführen der  $\delta$ -Distribution vereinfacht sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{dM} = \sum_{ij} \int_0^1 dx f_i(x, \tilde{s}) f_j\left(\frac{\tau}{x}, \tilde{s}\right) \frac{2\sqrt{\tilde{s}}}{xs} \sigma(\sqrt{\tilde{s}}, d) . \quad (6.6)$$

Details zu den Berechnungen von Wirkungsquerschnitten finden sich in [Hal84].

Abbildung 6.3: Differentieller Wirkungsquerschnitt zur Produktion schwarzer Löcher gegenüber der Masse  $M_{BH}$  bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Für die Wirkungsquerschnitte wird davon ausgegangen, dass alle schwarzen Löcher oberhalb einer minimalen Masse  $M_{BH,min} = M_f = 1$  TeV erzeugt werden.



### Totaler Wirkungsquerschnitt und Produktionsraten

Den totalen Wirkungsquerschnitt (Abb. 6.4(a)) erhält man über die Integration des differentiellen Wirkungsquerschnittes (6.6). Aus dem totalen Wirkungsquerschnitt lässt sich die Produktionsrate für den LHC berechnen. Mit einer erwarteten Luminosität  $L = 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  und einer Schwerpunktsenergie der Protonen  $\sqrt{s} = 14$  TeV ergibt sich die Produktionsrate

$$\frac{N_{BH}}{\text{Jahr}} = L \cdot \sigma(pp \rightarrow BH) \quad (6.7)$$

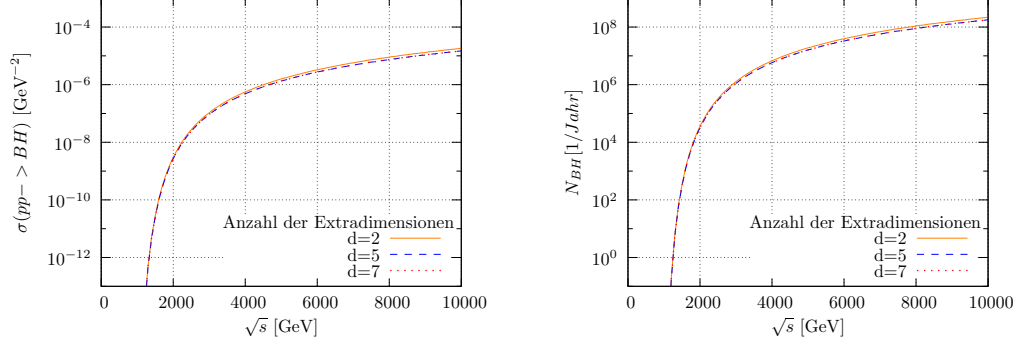
von mehr als  $10^9$  schwarzen Löchern pro Jahr, wobei die fundamentale Masse zu  $M_f \approx 1$  TeV gewählt wurde [Koc07b]. In Abbildung 6.4 sind die Produktionsraten und der totale Wirkungsquerschnitt für die Produktion schwarzer Löcher gezeigt.

## 6.3 Simulation schwarzer Löcher

Mit diesen Wirkungsquerschnitten und Produktionsraten lässt sich die Produktion schwarzer Löcher für den LHC simulieren. Ein Eventgenerator für die Erzeugung von schwarzen Löchern ist CHARYBDIS<sup>6.4</sup> [Har03]. CHARYBDIS baut optional auf

<sup>6.4</sup>Charybdis war in der griechischen Mythologie ein Meeresungeheuer, das dreimal täglich das Meerwasser in sich einsog. Dabei gab es für Schiffe in diesem Sog kein Entkommen mehr.

Abbildung 6.4: Totaler Wirkungsquerschnitt und Produktionsrate für die Produktion schwarzer Löcher am LHC gegenüber der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  dargestellt (siehe [Koc07b]).



(a) Totaler Wirkungsquerschnitt. Alle Partonen mit einer Energie  $E \geq M_f = 1 \text{ TeV}$  erzeugen ein schwarzes Loch.

(b) Produktionsrate für schwarze Löcher am LHC. Berechnet wurden die Raten über den totalen Wirkungsquerschnitt (Abb. 6.4(a)) und (6.7) mit einer Luminosität  $L = 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

dem Eventgenerator HERWIG<sup>6.5</sup> [Cor01] oder PYTHIA [Sjo01] (ebenfalls nach der griechischen Mythologie benannt) auf. In dieser Arbeit wird CHARYBDIS auf der Basis von PYTHIA verwendet.

Andere Eventgeneratoren zur Erzeugung von schwarzen Löchern sind beispielsweise GROKE [Ahn06], CATFISH [Cav07] oder BLACKMAX [Dai08].

### 6.3.1 Erhaltene Größen

Bei der Simulation werden verschiedene Größen als Erhaltungsgrößen betrachtet. Nach dem *no-hair*-Theorem<sup>6.6</sup> [Mis73] wird ein schwarzes Loch vollständig durch eine Masse, einen Drehimpuls und eine elektrische Ladung beschrieben. Es kann keine anderen Quantenzahlen besitzen. Die Beschreibung solch allgemeiner schwarzen Löcher erfolgt über die Kerr-Newman-Metrik (siehe Tab. 3.1, S. 28), die in den Grenzfällen ( $Q \rightarrow 0$  und  $J \rightarrow 0$ ) in die Schwarzschildmetrik übergeht. Alle anderen Erhaltungsgrößen gehen bei der Absorption durch ein schwarzes Loch verloren.

In dieser Arbeit gelten für den Prozess ( $ij \rightarrow BH$ ) ein paar Größen des Stoßes als Erhaltungsgrößen, die im Zusammenhang mit der Zerstrahlung des schwarzen Loches diskutiert werden (siehe Kap. 7.2.3).

<sup>6.5</sup> *hadron emission reactions with interfering gluons*

<sup>6.6</sup> John A. Wheeler prägte das *no-hair*-Theorem mit dem Satz „A black hole has no *hair*“.

## 7 Strahlung schwarzer Löcher

Bei thermodynamischer Betrachtung, die in Kapitel 4 für vier Dimensionen hergeleitet wurde, emittieren schwarze Löcher die Strahlung eines schwarzen Körpers. Im höherdimensionalen Fall ergibt sich ein leicht verändertes Abstrahlverhalten gegenüber dem 4-dimensionalen Hawkingeffekt.

Bei kleinen schwarzen Löchern, die Ladung und Drehimpuls tragen, wird allgemein angenommen, dass der Zerfall in verschiedenen Phasen stattfindet [Koc05].

### 7.1 Zerfallsphasen

Das schwarze Loch verliert am Anfang in der BALDING-PHASE<sup>7.1</sup> seine „Haare“. Dabei entledigt sich das schwarze Loch seiner Multipolmomente und seiner Ladung und avanciert in einen Zustand ohne „Haare“. Mittels Gravitationsstrahlung kann das schwarze Loch mögliche Multipolmomente verlieren.

Danach geht das schwarze Loch in eine SPIN-DOWN-PHASE über, in der es seinen verbleibenden Drehimpuls abstrahlt. Der Drehimpuls wird reduziert, bis das schwarze Loch in einen statischen Zustand gelangt.

Die Strahlung ist in diesen beiden Phasen nicht exakt die thermische Strahlung eines schwarzen Körpers, da über den Drehimpuls und die Ladung bestimmte Richtungen und Teilchenarten bevorzugt sind. Das Spektrum verändert sich zu dem Spektrum eines grauen Körpers. Die Graukörperfaktoren  $\gamma_{i,E,l,m,\lambda}$  modifizieren die Abstrahlung der Teilchenart  $i$ , der Energie  $E$ , der Drehimpulse  $l$  und  $m$  und der Polarisation  $\lambda$  zu einem realistischeren Modell.

Der nicht-rotierende Rest des schwarzen Loches verliert über die eigentliche Hawkingstrahlung seine Masse (SCHWARZSCHILD-PHASE) bis es in den Bereich der fundamentalen Masse kommt. Ab hier müssen quantengravitative Effekte berücksichtigt werden. Die Spin-down- und die Schwarzschild-Phase werden oft auch zusammen in einer EVAPORATION-PHASE beschrieben.

Schlussendlich entscheidet sich das Schicksal des schwarzen Loches in der PLANCK-PHASE.

Die SCHWARZSCHILD-PHASE dominiert den Abstrahlprozess bei schwarzen Löchern, die durch Teilchenkollisionen entstehen. Die BALDING- und SPIN-DOWN-PHASEN bilden nur einen kleinen Anteil. Mittels einer Verallgemeinerung der 4-dimensionalen Hawkingstrahlung und den Graukörperfaktoren lassen sich die Spektren der Teilchenproduktion ermitteln.

---

<sup>7.1</sup>engl. *to go bald*, eine Glatze bekommen

## 7.2 Endzeitszenarien

Das Ende eines schwarzen Loches und somit das Verhalten der PLANCK-PHASE kann derzeit nicht vorausgesagt werden. Ein Problem liegt in dem Abstrahlverhalten der Schwarzschild-Phase ( $T_{Hwk} \propto 1/M^{1/(d+1)}$ ). Am Lebensende ( $M \rightarrow 0$ ) divergiert die Temperatur ( $T_{Hwk} \rightarrow \infty$ ), wie später gezeigt wird (7.4, S. 67). Sobald die mittlere Energie der Teilchen die Masse des schwarzen Loches übersteigt, kann die thermodynamische Beschreibung der Hawkingstrahlung nicht mehr stimmen. Daraus resultiert die Frage, wohin die Abstrahlung führt und wie der endgültige Zustand sein wird. Alle Ideen dazu sind mehr oder weniger begründete Vermutungen.

Zudem muss man davon ausgehen, dass Effekte der Quantengravitation auf den Zerfall von schwarzen Löchern im Bereich der fundamentalen Masse Auswirkungen haben. Eine fundierte Quantentheorie der Gravitation existiert derzeit nicht. Ansätze mittels der Schleifenquantengravitation<sup>7.2</sup> [Rov04] oder der Stringtheorie [Duf96] führen bisher auf keine verlässlichen Vorhersagen.

### 7.2.1 Final Decay

Eine Möglichkeit ist ein *Final Decay*, bei dem das schwarze Loch endgültig explodiert. Dabei emittiert es  $n$  Teilchen, die seine restliche Masse forttragen. Mögliche Ladung und Drehimpuls, die nicht vorher durch die anderen Phasen abgestrahlt werden konnten, gehen in den Final Decay ein.

Außerdem bleiben sowohl die Energie als auch der Impuls erhalten. Daher müssen mindestens zwei Teilchen emittiert werden, um die gesamte Energie aufzunehmen. Für diesen speziellen Fall tragen zwei Teilchen eine Energie im Bereich der halben fundamentalen Masse und sind wegen der Impulserhaltung entgegengesetzt gerichtet. Für mehrere Teilchen im Final Decay verteilt sich die Energie und das Abstrahlverhalten wird isotroper.

In CHARYBDIS ist standardmäßig der Final Decay für schwarze Löcher vorgesehen, wobei die Anzahl der Teilchen ( $n = 2 \dots 5$ ) gewählt werden kann.

Es gibt aber auch mehrere Argumente, die gegen einen Final Decay sprechen, wie ein möglicher Informationsverlust. Die thermische Strahlung eines schwarzen Loches ist unabhängig von der einfallenden Masse und kann nur die Information enthalten, die auch außerhalb des Horizonts vorhanden ist. Nach der statistischen Physik geht keine Information verloren, und die Information der einfallenden Materie muss erhalten bleiben.

Als Auswege bleiben entweder, große Teile der statistischen Physik zu erneuern oder die Strahlung der schwarzen Löcher so zu modifizieren, dass die Hawking-Strahlung nicht thermisch ist, sondern Informationen enthält [Haw05]. Eine weitere Alternative zum Final Decay ist ein stabiler Rest in dem die Zerstrahlung endet. Ein solches *Remnant* kann neben der Masse noch Drehimpuls und elektrische Ladung tragen.

---

<sup>7.2</sup>engl. *loop-quantum-gravity*

### 7.2.2 Remnants

Das schwarze Loch strahlt seine Energie ab, bis es bei der kritischen Remnantmasse  $M_R$  seine Zerstrahlung beendet und verbleibt als stabiles Remnant. Dieses Remnant hat dabei die restliche Information gespeichert, sodass diese nicht verloren geht. Daneben gibt es noch weitere Gründe, die für Remnants sprechen.

Die Unschärferelation der Quantenmechanik widerspricht dem vollständigen Verdampfen von schwarzen Löchern. Sobald die Energie eines schwarzen Loches die Planckmasse erreicht, wird die Wellenlänge des schwarzen Loches größer als sein Ereignishorizont. Ein stabiler Rest mit größerer Masse als der Planckmasse verhindert eine Verletzung der Unschärferelation. 1966 schlug Markov ein stabiles Teilchen (*Maximon*) vor, das als Elementarteilchen existiert und das Problem löst [Mar81].

Ein anderer Grund für Remnants ergibt sich aus der thermischen Strahlung. Hawking betrachtete nur gravitative Terme in linearer Ordnung. Über Korrekturterme höherer Ordnung, die von der Krümmung des Raumes abhängen, kann ein schwarzes Loch seinen Strahlungsprozess einstellen, da die Temperatur auf null absinkt [Bar92]. Diesen 4-dimensionalen Fall kann man wieder auf Extradimensionen erweitern und erhält so einen Hinweis auf Remnants.

Ein Remnant verbleibt als stabiler Rest des Strahlungsprozesses. Daher kann es nicht abgetragene Ladung und Drehimpuls vom Ausgangsobjekt besitzen. Das Remnant wechselwirkt gravitativ über seine Masse und mit einer elektrischen Ladung auch über die elektromagnetische Wechselwirkung. Sobald das Remnant eine Ladung hat, dominiert die elektromagnetische Wechselwirkung gegenüber der Gravitation. Ungeladene Remnants sind nur über fehlende Energie und fehlenden Impuls bei Teilchenkollisionen beobachtbar. Dabei ist eine fehlende Energie oder ein fehlender Impuls nicht eindeutig auf Remnants zurückzuführen, da viele Prozesse fehlende Energie und Impuls, der in die Extradimensionen abgegeben wird, vorhersagen.

### 7.2.3 Simulationsprogramm CHARYBDIS

Alle Berechnungen in dieser Arbeit zu schwarzen Löchern wurden mit dem Simulationsprogramm CHARYBDIS v1<sup>7.3</sup> [Har03] durchgeführt. Die Funktionsweise eines Eventgenerators und die Erzeugung schwarzer Löcher sind in Kapitel 6.3 beschrieben.

Im Zerstrahlungsprozess von CHARYBDIS ist nur die Schwarzschild-Phase und die Planck-Phase implementiert. Da es große Schwierigkeiten in der Modellierung einer Balding-Phase gibt, wurde auf diese verzichtet. Ebenso hat sich gezeigt, dass eine Spin-down-Phase sehr kurz gegenüber der Schwarzschild-Phase ist und daher wurde auch auf diese Phase verzichtet.

Als Erhaltungsgrößen verwendet CHARYBDIS die elektrische Ladung, den Impuls und die Energie. Die elektrische Ladung kann nicht in den Bulk entweichen, da die Wechselwirkungen des SMs auf die Brane beschränkt sind. Ebenso ist der Impuls

<sup>7.3</sup>Mittlerweile existiert eine zweite Version, CHARYBDIS v2 [Fro09], die viele neue Features enthält.

an die Brane gebunden, da er durch Materie, die auf der Brane lebt, erzeugt wird. Da CHARYBDIS beim Abstrahlprozess nur Materie des SMs und Gravitonen auf der Brane erzeugt, wird die Energie sogar auf der Brane als erhalten angenommen. Zusätzlich wird die Baryonenzahl erhalten, da bei Prozessen des SMs diese Größe nur in seltenen Fällen verletzt<sup>7.4</sup> wird.

Neben dem standardmäßigen Final Decay von CHARYBDIS wurde das Programm so erweitert, dass ein Remnant anstelle eines Final Decays als Endzustand eintritt [Koc05, Koc07b]. Aufbauend auf dieser Version von CHARYBDIS wurden weitere Implementierungen eingeführt und das Spektrum der thermischen Strahlung modifiziert.

## 7.3 Strahlungsprozess

Ein schwarzes Loch strahlt in der Schwarzschild-Phase nach einem thermischen Spektrum, wie es der Hawkingeffekt besagt. In Extradimensionen ändert sich die Hawkingtemperatur um einen Faktor, der von der Anzahl der zusätzlichen Dimensionen abhängt. Über die Thermodynamik besteht eine Verbindung zwischen der Entropie eines schwarzen Loches und der Hawkingtemperatur, die zur einfacheren Beschreibung des Strahlungsverhaltens führt.

### 7.3.1 Höherdimensionale Hawkingtemperatur

Die thermische Strahlung wird über die Temperatur beschrieben und hängt nicht von der kollabierenden Materie ab, sodass keine Information aus dem schwarzen Loch entfliehen kann. Für den 4-dimensionalen Fall wurde die Hawkingstrahlung über den Unruh-Effekt und die Bogoljubov-Koeffizienten hergeleitet (siehe Kapitel 4). Die resultierende Temperatur der Strahlung (siehe 4.10, S. 37)

$$T_{Hwk} = \frac{\kappa}{2\pi}$$

ist über die Oberflächengravitation  $\kappa$  definiert. Für den höherdimensionalen Fall berechnet sich die Oberflächengravitation<sup>7.5</sup> aus der Bedingung

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial_r f(r) \Big|_{r=R_H} \quad (7.1)$$

mit dem höherdimensionalen Koeffizienten

$$f(r) = 1 - \frac{C}{r^{d+1}} = 1 - \left( \frac{R_H}{r} \right)^{d+1}.$$

<sup>7.4</sup>Eine Verletzung der Baryonen- und Leptonenzahl tritt im SM zum Beispiel beim Sphaleron-Prozess auf [Rin90, Tro04].

<sup>7.5</sup>Die Oberflächengravitation  $\kappa$  ist ursprünglich über die *Killingvektoren* definiert. Herleitungen finden sich z. B. in [Wal84].



Mit dem Ereignishorizont (5.19) von schwarzen Löchern im ADD-Modell ergibt sich die Hawkingtemperatur für rotierende schwarze Löcher

$$T_{Hwk} = \frac{(d+1) + (d-1)a_*^2}{4\pi R_H(1+a_*)^2}, \quad (7.2)$$

mit der Koordinate  $a_* = (d+2)J/(2MR_H)$  [Gid02]. Im Fall ohne Drehimpuls vereinfacht sich die Hawkingtemperatur und ist proportional zum inversen Radius und steht damit in direktem Zusammenhang zur Masse

$$T_{Hwk,J=0} = \frac{d+1}{4\pi R_H} \quad (7.3)$$

$$= \frac{d+1}{4\pi} M_f \left( \frac{(d+2)A_{d+2}}{16(2\pi)^d} \frac{M_f}{M} \right)^{\frac{1}{d+1}}. \quad (7.4)$$

### 7.3.2 Entropiebetrachtung der Abstrahlung

Jacob Bekenstein beschrieb schon 1972, und damit vor Hawking's Entdeckung, den Zusammenhang von schwarzen Löchern und Entropie [Bek72, Bek73]. Die Maxwell-Relationen der Thermodynamik verbinden die Entropie eines schwarzen Loches mit einer Temperatur.

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$$

stellt die Temperatur  $T = T_{Hwk}$  in direkten Zusammenhang zur Entropie des Ereignishorizonts. Die Energie des statischen, ungeladenen schwarzen Loches entspricht seiner Masse  $E = M$ . Durch Integration der Masse ergibt sich somit die Entropie

$$dS = \frac{1}{T} dM \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} S(M) &= \frac{4\pi}{d+2} \left( \frac{16(2\pi)^d}{(d+2)A_{d+2}} \frac{M^{d+2}}{M_f^{d+2}} \right)^{\frac{1}{d+1}} \\ &= \frac{\pi A_{d+2}}{4(2\pi)^d} M_f^{d+2} \left[ \frac{1}{M_f} \left( \frac{16(2\pi)^d}{(d+2)A_{d+2}} \frac{M}{M_f} \right)^{1/(d+1)} \right]^{d+2} \\ &= \frac{\pi A_{d+2}}{4(2\pi)^d} (M_f R_H)^{d+2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

und ist proportional zur Oberfläche des Ereignishorizontes, ebenso wie die Bekenstein-Hawking-Entropie in der 4-dimensionalen Raumzeit.

### 7.3.3 Teilchenerzeugung

Die Teilchenproduktion am Horizont erfolgt nach einem thermischen Spektrum. Über das *groß-kanonische* Ensemble der Thermodynamik findet man die spektrale Teilchendichte eines schwarzen Körpers nach dem Planckschen Strahlungsgesetz

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\omega/T_{Hwk}} + s}. \quad (7.7)$$

Tabelle 7.1: Verschiedene Statistiken für Fermionen, Bosonen und klassische Teilchen in der Thermodynamik

Teilchen	Statistik	$s$
Fermionen	FERMI-DIRAC	+1
Bosonen	BOSE-EINSTEIN	-1
klassische Teilchen	BOLTZMANN	0

Für unterschiedliche Teilchengattungen gelten verschiedene Statistiken (siehe Tab. 7.1), die durch die Konstante  $s$  im Mehrteilchenspektrum berücksichtigt werden.

Dabei geht man von einem Gleichgewichtszustand zwischen dem schwarzen Körper und der Umgebung aus. Das Strahlungsgesetz schließt nicht den Fall aus, dass die Energie des emittierten Teilchens größer als die Masse des schwarzen Loches ist ( $\omega > M$ ), was aus Energieerhaltungsgründen nicht sein kann. Außerdem wird der Energieverlust durch die Abstrahlung nicht berücksichtigt, sodass ein anderes Ensemble zur Beschreibung der Abstrahlung gewählt werden muss.

Das *mikro-kanonische* Ensemble berücksichtigt den Energieverlust durch die Emission und beinhaltet die Bedingung, dass maximal soviel Energie abgestrahlt werden kann, wie das schwarze Loch selbst besitzt ( $\omega \leq M$ ). Die Teilchendichte für ein einziges Teilchen

$$n(\omega) = \frac{\exp[S(M - \omega)]}{\exp[S(M)]} \quad (7.8)$$

stellt sich so mittels der Entropie dar. Die Näherung

$$S(M) - S(M - \omega) \approx \frac{\partial S}{\partial M} \omega = \frac{\omega}{T} \quad (7.9)$$

ergibt wieder die Maxwellrelation mit der Masse als der Energie des schwarzen Loches  $E = M$ . Bei dieser Näherung wird davon ausgegangen, dass die Energie der emittierten Teilchen klein gegenüber der Masse eines schwarzen Loches ist.

Aus der Einteilchendichte (7.8) lässt sich nun mittels der verschiedenen Statistiken die allgemeine Teilchendichte

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp[S(M) - S(M - \omega)] + s} \quad (7.10)$$

aufstellen. Dabei gelten wieder die Statistiken aus (Tab. 7.1). Mit der Näherung (7.9) erhält man aus dem mikro-kanonischen Ensemble die groß-kanonischen Teilchendichten (7.7).

## 7.4 Modifizierte Entropie

Die Einführung von Remnants verändert auch das Strahlungsverhalten. Die schwarzen Löcher strahlen Teilchen ab, bis sie ihre endgültige Masse, die Remnantmasse  $M_R$ , erreichen. Die Temperatur des schwarzen Loches verschwindet und steigt nicht stetig an, wie das bisherige Modell vorhersagt. Die Beschreibung erfolgt wieder über eine modifizierte Entropie  $S(M)$ , die für große Massen  $M \gg M_R$  in die Standardentropie (7.6) übergeht. So wird die Entropie Korrekturen der Form  $M_R/M$  enthalten. Die Erweiterung in Potenzen des Korrekturfaktors führt zur modifizierten Entropie

$$S(M) = \mathcal{A}_{d+3}^{\text{BH}} M_f^{d+2} \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{M_R}{M} \right) + a_2 \left( \frac{M_R}{M} \right)^2 + \dots \right] \quad (7.11)$$

mit der Oberfläche des schwarzen Loches

$$\mathcal{A}_{d+3}^{\text{BH}} = A_{d+3} R_H^{d+2} .$$

Die Koeffizienten  $a_i$  beschreiben dabei das Abklingverhalten, sobald das schwarze Loch in die Nähe der fundamentalen Masse kommt und werden von dem jeweiligen Modell vorgegeben. Die Standardentropie ist durch den Koeffizientensatz

$$a_0 = \frac{\pi}{4(2\pi)^d} \frac{A_{d+2}}{A_{d+3}} \quad \text{mit} \quad a_{i>0} = 0$$

gegeben. Die modifizierte Entropie beeinflusst das Strahlungsverhalten und die spektrale Teilchendichte. Verschiedene Szenarien dieses Entropieverhaltens wurde in [Koc05, Koc07b] hergeleitet und in CHARYBDIS simuliert. Dabei unterscheidet sich die Entropie faktoriell von [Koc05, Koc07b], da eine andere Definition des Ereignishorizonts gewählt wurde.

### 7.4.1 Glattes Entropiespektrum

Als Fortsetzung der modifizierten Entropie kann man ein Entropieverhalten generieren, das von einem Remnant als Endzustand ausgeht. Dazu betrachtet man ein Remnant der Masse  $M_R$  und verlangt ein glattes Abstrahlverhalten für die spektrale Teilchendichte  $n(\omega)$ . Die Abstrahlung über die Standardentropie wird bei einer Masse von  $\omega = (M - M_R)$  abgebrochen. Für ein glattes Abstrahlverhalten muss die spektrale Teilchendichte verschwinden

$$\lim_{\omega \rightarrow M - M_R} n(\omega, M) = 0 \quad (7.12)$$

und für große Frequenzen muss die Energieabstrahlung eine endliche Steigung haben und stetig sein

$$\lim_{\omega \rightarrow M - M_R} \partial_\omega (n(\omega, M) \omega^3) = \text{finit} . \quad (7.13)$$

## 7 Strahlung schwarzer Löcher

Die spektrale Teilchendichte entspricht wieder dem mikro-kanonischen Ensemble (7.10). Daraus lässt sich nun eine Entropie des schwarzen Loches aufstellen.

Aus der ersten Bedingung (7.12) folgt, dass die Entropiedifferenz für große Frequenzen divergieren muss ( $\lim_{\omega \rightarrow M-M_R} [S(M) - S(M-\omega)] \rightarrow \infty$ ). Die Entropie soll wie im klassischen Fall für  $M > M_R$  immer positiv sein, was zu dem Ansatz

$$S(M) = k + S_1(M) \quad (7.14)$$

führt. Die Konstante  $k$  ist dabei ein infinitesimaler Anteil und die Funktion  $S_1(M)$  beschreibt den endlichen Teil der Entropie.

Für ein Remnant verschwindet die Entropie  $S(M_R) = 0$  und für große Massen  $M \gg M_R$  bei kleinen Abstrahlenergien liefert die Entropie die klassische höherdimensionale Hawkingtemperatur

$$\left. \frac{\partial S(M)}{\partial M} \right|_{M \gg M_R} = \frac{1}{T_{Hwk}} \propto \frac{1}{M_f} \left( \frac{M}{M_f} \right)^{\frac{1}{d+1}}.$$

Die Funktion  $S_1(M)$  (7.14) spaltet sich wieder in zwei Teile auf

$$S(M) = k + S_1(M) = k + \frac{d+1}{d+2} \left( \frac{M-M_R}{M_f} \right)^{\frac{d+2}{d+1}} + S_2(M).$$

Der erste Teil erinnert an die klassische Entropie (7.6) mit einer um die Remnantmasse korrigierten Gesamtmasse. Der zweite Teil stellt das Verhalten  $S(M_R) = 0$  über die Bedingung

$$k + S_2(M_R) = 0$$

sicher. Um direkte Unendlichkeiten zu verhindern, wählt man  $k = -\hat{a}_0 \ln(\epsilon)$  und  $S_2(M) = \hat{a}_0 \ln(M - M_R + \epsilon)$  mit einem kleinen Parameter  $\epsilon$  und einer Konstanten  $\hat{a}_0$ . Die gesamte Entropie des glatten Spektrums schreibt sich somit als

$$S(M) = -\hat{a}_0 \ln(\epsilon) + \frac{d+1}{d+2} \left( \frac{M-M_R}{M_f} \right)^{\frac{d+2}{d+1}} + \hat{a}_0 \ln(M - M_R + \epsilon). \quad (7.15)$$

Mit der zweiten Bedingung (7.13) für ein glattes Spektrum und dieser Entropie lässt sich eine Forderung an den Faktor  $\hat{a}_0$  stellen. Damit die Dichte  $n(\omega)\omega^3$  für große Frequenzen eine endliche Ableitung besitzt, muss der Faktor  $\hat{a}_0 \geq 1$  sein. Im Grenzfall  $\omega \rightarrow (M - M_R)$  und  $\epsilon \rightarrow 0$  verschwindet damit die Ableitung  $\partial_\omega(n(\omega)\omega^3) = 0$ . Auf einem ähnlichen Weg wie in (7.11) kann man zusätzlich Korrekturen der Entropie höherer Ordnung betrachten. Dabei müssen beide Bedingungen (7.12) und (7.13) weiter berücksichtigt werden. Die Korrekturen haben die Form

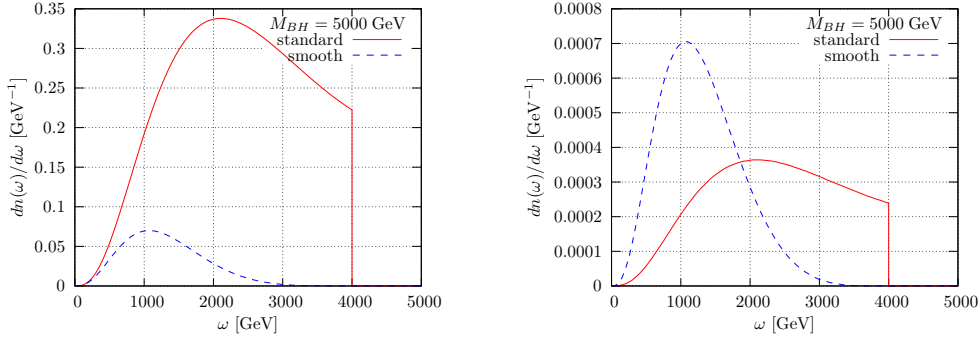
$$\frac{a_i}{i+1} \left[ \left( \frac{M_f}{\epsilon} \right)^i - \left( \frac{M_f}{M - M_R + \epsilon} \right)^i \right] \quad (7.16)$$

mit  $i > 0$ . Zusammengefasst ergibt sich die Entropie mit den führenden Termen ( $\hat{a}_0$ ) und den Korrekturen ( $a_i$ ) zu

$$S(M) = \frac{d+1}{d+2} \left( \frac{M - M_R}{M_f} \right)^{\frac{d+2}{d+1}} + \frac{1}{M_f} \int_{\epsilon}^{M - M_R + \epsilon} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left( \frac{M_f}{x} \right)^{i+1} dx. \quad (7.17)$$

Der Vergleich der Standardentropie mit dem glatten Spektrum ist für ein schwarzes Loch mit  $M_{BH} = 5$  TeV in Abbildung 7.1 dargestellt. Das glatte Spektrum verschwindet für große Frequenzen, wohingegen das Standardspektrum einen endlichen Wert für  $\omega = (M - M_R)$  hat. Das glatte Spektrum bevorzugt tendenziell niedrigere Energien  $\omega$  im Vergleich zum Standardspektrum.

Abbildung 7.1: Spektrale Teilchendichten für ein schwarzes LÖcher der Masse  $M_{BH} = 5$  TeV. Die Teilchendichten wurden mit der Standardentropie und der modifizierten Entropie berechnet.



(a) Spektrale Teilchendichte nach (7.6) und (7.15).

(b) Normierte spektrale Teilchendichte mit  $\int d\omega n(\omega) = 1$ .

### 7.4.2 Glattes Energiespektrum in CHUBHS

Die glatte spektrale Teilchendichte wurde in CHARYBDIS implementiert, sodass sich die Energie der abgestrahlten Teilchen ändert. Dazu wurde die SUBROUTINE CHUBHS, die die Energie der emittierten Teilchen generiert, verändert. Als Parameter in CHARYBDIS wurde für diese Simulation eine fundamentale Masse von  $M_f = 1$  TeV und eine Remnantmasse der gleichen Größe ( $M_R = 1$  TeV) verwendet. Variationen dieser Größen liefern qualitativ dasselbe Ergebnis, wie in [Koc05] gezeigt wurde.

Die spektrale Energiedichte der glatten Entropie (7.15) wird zunächst mit der Spektraldichte der Standardentropie (7.6) für ein schwarzes Loch mit einer Masse von  $M = 5$  TeV und  $d = 2$  Extradimensionen verglichen. Die maximale Energie

$$E_{max} = \frac{M_{BH}^2 + m^2 - M_R^2}{2M_{BH}} \quad (7.18)$$

## 7 Strahlung schwarzer Löcher

der emittierten Teilchen ergibt sich über die Erhaltung des Viererimpulses

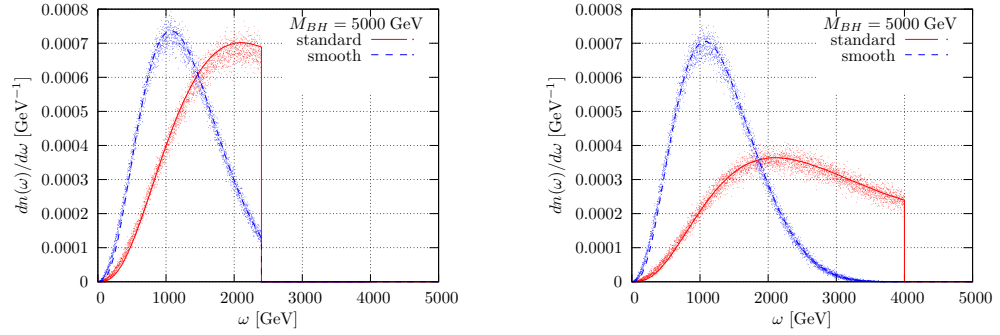
$$BH \rightarrow Rem + \omega$$

$$P_{Rem}^\mu{}^2 = (P_{BH}^\mu - P_\omega^\mu)^2$$

$$M_R^2 = M_{BH}^2 + m_\omega^2 - 2M_{BH}E_\omega$$

im Ruhesystem des anfänglichen schwarzen Loches. Die maximale Energie eines masselosen Teilchens ( $m = 0$ ), das ein schwarzes Loch der Masse  $M_{BH} = 5$  TeV abstrahlen kann, liegt somit bei  $E_{max} = 2,4$  TeV ( $M_R = 1$  TeV). Abbildung 7.2 zeigt zwei spektrale Teilchendichten, die jeweils mit der Standardentropie (7.6) und der modifizierten Entropie (7.15) berechnet wurden.

Abbildung 7.2: Spektrale Teilchendichten für ein schwarzes Loch der Masse  $M_{BH} = 5$  TeV aus CHARYBDIS. Beide unterschiedlichen Dichten wurden für  $10^6$  Events mit CHUBHS simuliert und über ihre Energie aufgetragen. Die unterschiedlichen Maximalwerte hängen dabei von der Normierung ab. Die Punkte zeigen die simulierten Daten und die Linien die berechneten Spektren.



(a) Die maximale Energie der emittierten Teilchen berechnet sich nach (7.18).

(b) Die maximale Energie für emittierte Teilchen liefert  $E_{max} = M_{BH} - M_R$ .

Die Simulationen unterscheiden sich durch die maximale Energie, mit der Teilchen emittiert werden können. In Abbildung 7.2(a) brechen die Spektren bei der maximalen Energie, die über (7.18) gegeben ist, ab. Die Linien zeigen die berechneten Spektren unter der Normierung mit der maximalen Energie (7.18). Das modifizierte Spektrum wird nicht ganz glatt, sondern hat immer noch eine Sprungstelle  $n(E_{max}) \neq 0$ . Im Vergleich zum Spektrum der Standardentropie ist der Sprung jedoch deutlich reduziert, was dem modifizierten Spektrum eine höhere physikalische Glaubwürdigkeit gibt.

Dagegen ist in Abbildung 7.2(b) die maximale Energie über  $E_{max} = (M_{BH} - M_R)$  gegeben. Die beiden simulierten Spektren sind identisch zu den berechneten Spektren (Abb. 7.1(b)). Das Verhalten der modifizierten Entropie entspricht den Erwartungen und verschwindet für  $\omega \rightarrow (M_{BH} - M_R)$ .

## 7.5 Auswertung mittels CHARYBDIS

Zum Vergleich der unterschiedlichen Zerfallsarten und der Spektren wurden die Multiplizitäten und  $p_T$ -Spektren nach der Stringfragmentation von PYTHIA für die Fälle

- Final Decay mit  $N = 2$  Teilchen
- Remnant mit scharfem Abbruchkriterium
- Remnant mit glattem Entropiespektrum

simuliert. Die Anzahl der Extradimensionen wurde dabei auf  $d = 2$  festgelegt. Für mehr Extradimensionen ( $2 < d \leq 7$ ), die mittels CHARYBDIS simuliert werden können, entsteht keine qualitative Veränderung der Resultate.

Die fundamentale Masse  $M_f$  und die Remnantmasse wurde auf  $M_f = M_R = 1$  TeV festgelegt. Die Parameter der glatten Entropie wurden als  $\epsilon = 0,0001$  und die Konstante  $\hat{a}_0 = 4$  gewählt.

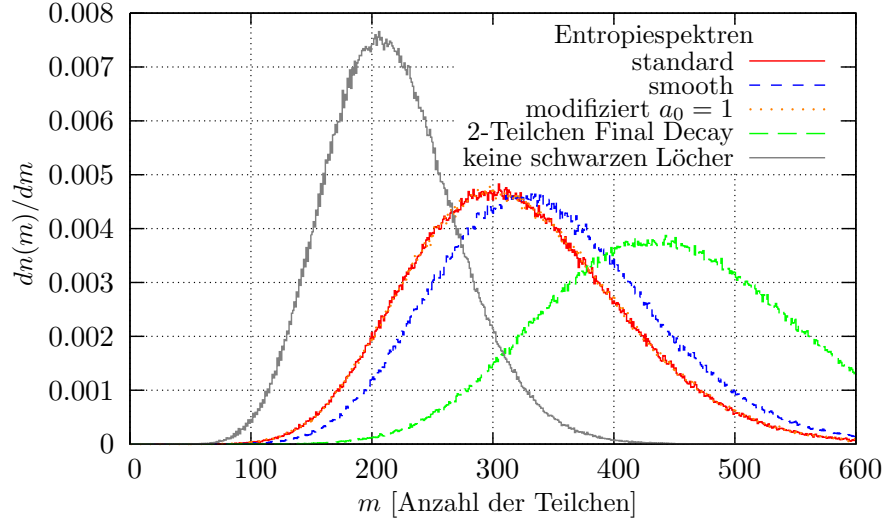
Abbildung 7.3(a) zeigt die Multiplizitäten aller Teilchen. Ebenso lassen sich beispielsweise die Multiplizitäten der Photonen (Abb. 7.3(b)) oder anderer Teilchen wie Pionen und Leptonen darstellen.

Die Multiplizitäten aller Teilchen (Abb. 7.3(a)) zeigen für die Prozesse des SMs ein Maximum bei ca. 200 Teilchen. Für schwarze Löcher liegt das Maximum der Multiplizitäten höher. Dabei ergibt der Final Decay die höchste Anzahl von ca. 420 Teilchen pro Event. Im Fall von Remnants liegt die Anzahl der Teilchen zwischen dem SM und dem Final Decay. Das glatte Spektrum (ca. 320 Teilchen) unterscheidet sich von dem Spektrum der Standardentropie (ca. 300 Teilchen) nur geringfügig. Mit dem Koeffizient von  $a_0 = 1$  entspricht die modifizierte Entropie (7.11) gerade der Standardentropie und unterscheidet sich von dieser nicht. Das Verhältnis zwischen den unterschiedlichen Entropiespektren für Remnants (300 Teilchen (Standardentropie) zu 320 Teilchen (glatte Entropie)) entspricht der Erwartung aus der spektralen Teilchendichte (Abb. 7.2(a)). Da das schwarze Loch mehr Teilchen abstrahlt, ist auch eine insgesamt erhöhte Multiplizität zu erwarten.

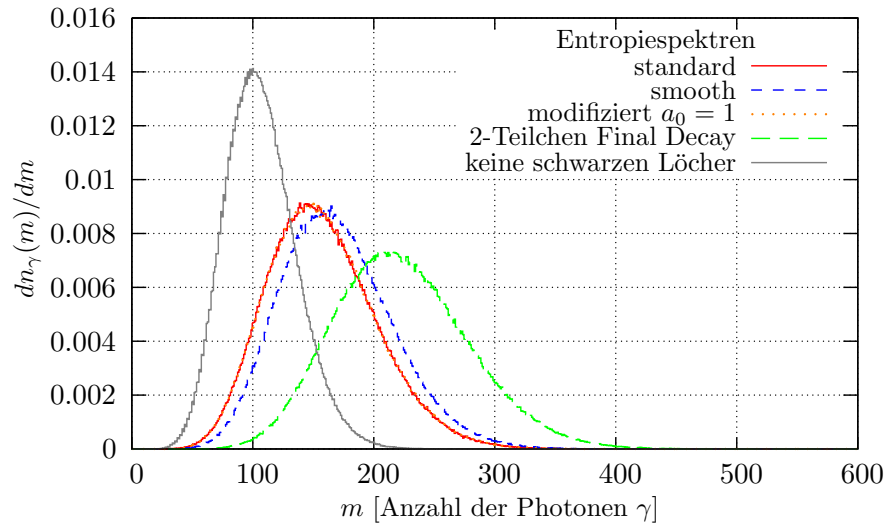
Die erhöhte Anzahl der Teilchen im Fall des Final Decay gegenüber den Multiplizitäten mit Remnants resultiert vermutlich aus der höheren zur Verfügung stehenden Energie. Die Remnantmasse wird beim Final Decay mit zur Teilchenproduktion verwendet, wodurch mehr Teilchen produziert werden können.

Vergleicht man die Multiplizitäten aller Teilchen mit den  $\gamma$ -Multiplizitäten, so findet man ein vergleichbares Bild. Der Unterschied liegt in der Anzahl der Photonen, da die Photonen zur Multiplizität aller Teilchen beitragen. Mit ca. 100 Teilchen bei Ereignissen des SMs und ca. 210 Teilchen beim Final Decay entsprechen die  $\gamma$ -Multiplizitäten der Hälfte der Multiplizitäten aller Teilchen.

Abbildung 7.3: Multiplizitäten von verschiedenen Zerfallsarten schwarzer Löcher ( $M_{BH} = 1 \dots 14$  TeV) bei der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Zum Vergleich wurden die Multiplizitäten von SM-Ereignissen dargestellt. Die Standardentropie entspricht dem modifizierten Spektrum mit  $a_0 = 1$ .



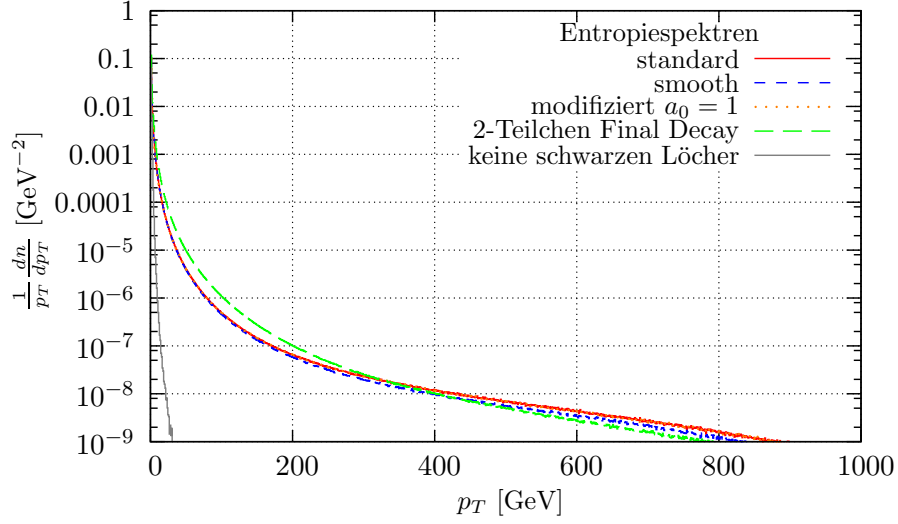
(a) Multiplizität aller Teilchen pro Event.



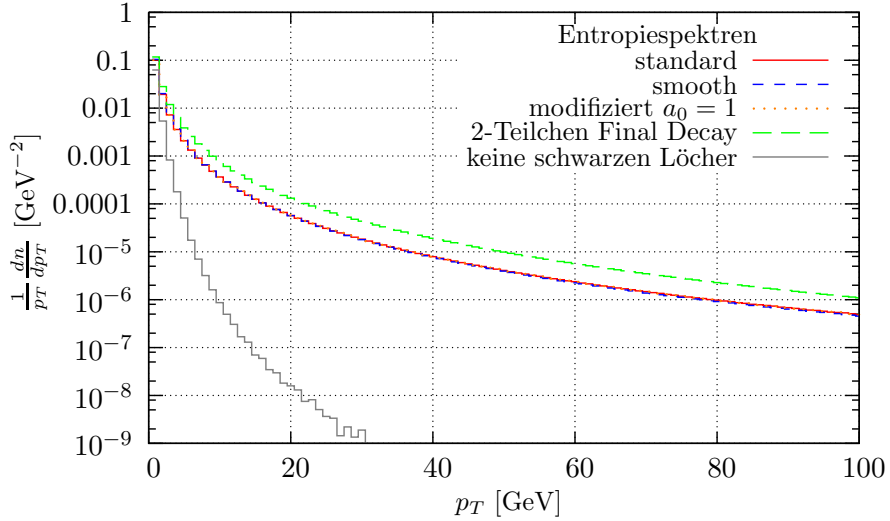
(b) Multiplizität der Photonen  $\gamma$  pro Event.



Abbildung 7.4: Spektren der Transversalimpulse von verschiedenen Zerfallsarten für schwarze Löcher zwischen 1 und 14 TeV bei der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Zum Vergleich wurden die  $1/p_T \, dn/dp_T$ -Spektren von SM-Ereignissen dargestellt. Die Standardentropie entspricht dem modifizierten Spektrum mit  $a_0 = 1$ .



(a)  $1/p_T \, dn/dp_T$ -Spektren in einem Bereich  $p_T \leq 1000$  GeV.



(b) Ausschnitt aus Abbildung 7.4(a) in einem Bereich  $p_T \leq 100$  GeV.

## 7 Strahlung schwarzer Löcher

Die Transversalimpulsspektren (Abb. 7.4) differenzieren nicht so stark zwischen den unterschiedlichen Endstadien der schwarzen Löcher. Bei semi-logarithmisch aufgetragenen  $1/p_T \, dn/dp_T$ -Spektren ergeben thermische Spektren eine Gerade

$$\frac{1}{p_T} \frac{dn}{dp_T} \propto e^{-E/T_{Hwk}} .$$

Die Steigung  $m$  der Geraden stellt die inverse Temperatur dar. Dabei wird der Transversalimpuls  $p_T$  anstelle der Energie  $E$  verwendet, um Effekte in Strahlrichtung zu unterbinden.

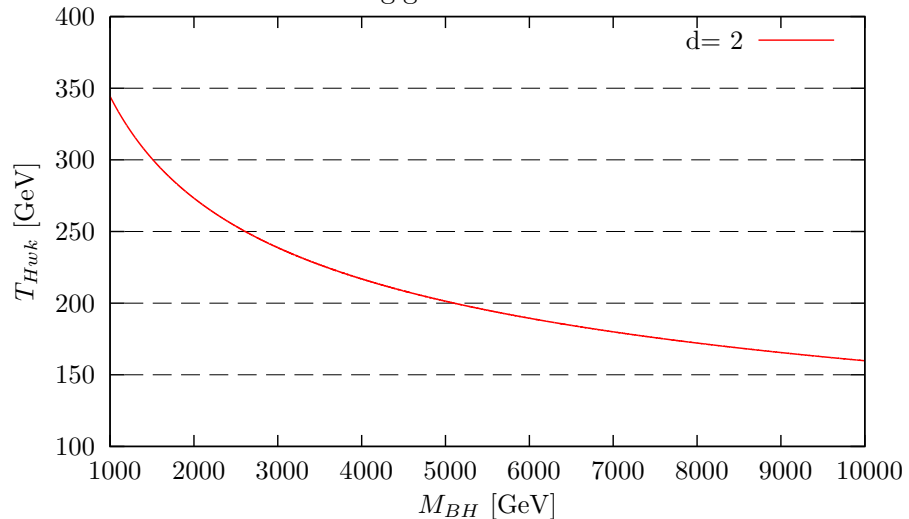
Die beobachteten Temperaturen lassen sich nicht direkt mit den klassisch berechneten Temperaturen (Abb. 7.5) vergleichen. Da schwarze Löcher in einem Bereich  $M_{BH} = 1 \dots 14$  TeV erzeugt werden, stellen die  $p_T$ -Spektren eine Mittelung über diese schwarzen Löcher dar. Zusätzlich sind in der Produktion massereiche schwarze Löcher unterdrückt [Vol02] die Temperatur variiert bei jedem Ereignis, da die Temperatur durch den Masseverlust der Abstrahlung steigt.

Für hohe Transversalimpulse ( $p_T \approx 700$  GeV) lässt sich dennoch eine recht konstante Temperatur ( $T_{Hwk} \approx 200$  GeV) ermitteln. Für geringere Transversalimpulse steigen diese ständig an. Zwar verschwindet die Temperatur ( $T_{Hwk, M_{BH} \rightarrow M_{Rem}} \rightarrow 0$ ) für Remnants, dieser Effekt wird allerdings nicht in den Transversalimpulsen sichtbar.

Im Vergleich mit den Prozessen des SMs sind die Temperaturen von schwarzen Löchern stark erhöht. In dem Ausschnitt 7.4(b) ist zu erkennen, dass die Transversalimpulse von SM-Ereignissen geringer als beim SM sind.

Über unerwartet hohe Multiplizitäten und Temperaturen lässt sich also auf die Produktion von schwarzen Löchern am LHC schließen. Die Endstadien zu ermitteln ist wesentlich schwieriger. Über den Transversalimpuls ist es nicht möglich, zwischen

Abbildung 7.5: Höherdimensionale klassische Hawking-Temperatur für  $d = 2$  Extradimensionen in Abhängigkeit von der Masse eines schwarzen Loches.



der Remnantproduktion und dem Final Decay zu unterscheiden. Hinweise auf den Final Decay liefern stark erhöhte Multiplizitäten, wohingegen Remnants die Multiplizitäten nicht so stark erhöhen.

Für einen Vergleich mit Daten vom LHC ist es sicher sinnvoll, weitere Observablen zu ermitteln. Auch die Anpassung der Parameter, wie die Anzahl der Extradimensionen und der fundamentalen Masse sowie der Remnantmasse, muss vorgenommen werden. Die Bestätigung von schwarzen Löchern am LHC wird von den Strukturen, die gefunden werden oder ausbleiben, abhängen. Erst danach wird die Frage des Zerfalls zu Remnants oder einem Final Decay interessant.



## **Teil III**

# **Ein neuer Ansatz**



## 8 Renormierungsgruppe und schwarze Löcher

Die Einführung von Remnants beruhte bisher auf Vermutungen. Es erscheint sinnvoll, das Ende eines schwarzen Loches in einem stabilen Rest anzunehmen. Die Einführung einer scheinbar beliebigen Remnantmasse  $M_R$  war willkürlich und hat sich nur an der fundamentalen Masse orientiert.

Eine neue Formulierung mittels der Renormierungsgruppe verwendeten Alfio Bonanno und Martin Reuter 2000 [Bon00] zur Beschreibung eines Schwarzschild schwarzen Loches. Die Kopplung der Gravitation  $G(k)$  ist wie bei der Quantenelektrodynamik nicht mehr konstant, sondern hängt von einer Masseskala  $k$  ab. Bonanno und Reuter identifizieren diese Skala mit dem Abstand  $d$  in der Schwarzschildmetrik, der als einzige Größe nicht dimensionslos ist. Daraus resultiert direkt die Existenz einer kritischen Masse  $M_{cr}$ , unterhalb derer sich kein Horizont bilden kann.

Eine solche Identifizierung wird im Folgenden für die auf Extradimensionen verallgemeinerte laufende Kopplung hergeleitet und angewendet. Ein Resultat sind Remnantmassen, die von der fundamentalen Masse und anderen Parametern abhängen.

### 8.1 Renormierung und Renormierungsgruppe

In Quantenfeldtheorien treten Terme auf, die sich bei einer Integration als divergent erweisen. Eine Klasse dieser divergenten Terme sind Schleifen in Feynman-Graphen. Ein Beispiel für solche Schleifen ist die Wechselwirkung eines Elektrons mit virtuellen Photonen. Die entstehenden Unendlichkeiten sind unphysikalisch und werden nicht beobachtet. Aus diesem Grund wurde die Methode der *Renormierung* entwickelt, um sich dieser Divergenzen zu entledigen [Ryd96, Pes93].

Die klassische Art, diese Unendlichkeiten aus Quantenfeldtheorien zu entfernen, ist die *störungstheoretische Renormierung*. Eine Funktion  $F(x)$ , die eine zu beobachtende Größe beschreiben soll, wird theoretisch nach der Kopplung entwickelt, weist aber Unendlichkeiten auf. In der störungstheoretischen Renormierung wird nun für jede Ordnung der Kopplung die Unendlichkeit nacheinander entfernt. Dazu wird diese Funktion mit einer physikalischen Observablen, die in einem Energiebereich  $k$  gemessen wurde, verglichen. Über eine andere Parametrisierung der Funktion, die sich *Regularisierung* nennt, verändert man die ursprüngliche Funktion so, dass man sie berechnen kann. Ein neuer Parameter  $\Lambda$  (*Regulator*) stellt bei der Integration eine der beiden Grenze dar und stellt somit sicher, dass die Funktion endlich bleibt.

Dieser obere Abschnitt wird UV<sup>8.1</sup>-Cutoff genannt, im Gegensatz dazu gibt es auch einen IR<sup>8.1</sup>-Cutoff, der eine untere Grenze darstellt. Über einen Vergleich mit der physikalischen Größe und der Bildung des Grenzwertes  $\Lambda \rightarrow \infty$  oder  $r \rightarrow 0$  erhält man eine physikalische Funktion, die beobachtet werden kann. Die Unendlichkeiten werden in das Verhältnis zwischen der physikalischen Kopplung und der unphysikalischen Kopplung in der ursprünglichen Funktion abgeschoben für  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Dieser Prozess wird für jede höhere Ordnung nacheinander durchgeführt, bis das Ergebnis den Anforderungen genügt. Dazu muss die Kopplung klein sein, um rasch ein gutes Ergebnis zu erhalten. Ein Beispiel für störungstheoretische Renormierung tritt bei Unendlichkeiten auf, die man durch Schleifen in Feynman-Graphen erklärt. Dabei werden die Terme, die Unendlichkeiten bilden, aus dem Modell herausgenommen und eine physikalische Theorie entsteht.

Die Wahl der Parameter in dem Renormierungsprozess ist nicht vorgeschrieben und verschiedene Sets von Parameter liefern das selbe Ergebnis. Bei einer gruppentheoretischen Betrachtung stellt man fest, dass alle Parametrisierungen einer Theorie eine äquivalente Klasse von Parametrisierungen bilden. Dabei hängt es nicht davon ab, welches Element der Klasse gewählt wird. Diese Klasse bildet eine Gruppe, die *Renormierungsgruppe*.

Eine Beschreibung der physikalischen Kopplung kann dabei in Abhängigkeit des Energiebereichs, der Skala  $k$ , ermittelt werden. Die Kopplung ist somit nicht länger konstant, sondern hängt von dem Skalenbereich ab. Somit wird aus einer Kopplungskonstanten eine laufende Kopplung.

Das SM als Quantenfeldtheorie lässt sich über die Renormierung gut erklären. Eine Einführung in die Renormierung und die Renormierungsgruppe findet sich in [Del04]. Standardwerke der QFT [Ryd96, Pes93] gehen auch auf diese Methoden ein.

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist jedoch nicht renormierbar, da die Kopplung der Gravitation im Gegensatz zum SM nicht dimensionslos ist. Die Entwicklung nach der Gravitationskonstanten und somit eine störungstheoretische Betrachtung ist nicht ohne Weiteres möglich. Andere Ansätze, das Renormierungsproblem der Gravitation zu lösen, sind neben der Stringtheorie und der Schleifenquantengravitation eine gruppentheoretische Betrachtung der ART. Dazu wird die Gravitation als eine effektive Theorie angenommen, die in einem Bereich  $k$  beobachtet wird. Die Kopplung hängt nun von der Skala  $k$  ab und gibt für  $k = 0$  die klassische newtonsche Konstante wieder. Die effektive Wirkung der Theorie ist so konstruiert, dass sie alle Schleifen-Korrekturen der Größenordnung  $k$  enthält und somit in diesem Bereich renormierbar ist.

## 8.2 Laufende Kopplung und die Schwarzschildmetrik

Über den Formalismus mit effektiver und durchschnittlicher Wirkung und einer Gruppengleichung der Renormierungsgruppe fanden Bonanno und Reuter eine lau-

---

<sup>8.1</sup>UV = ultra-violett, IR = infra-rot



## 8.2 Laufende Kopplung und die Schwarzschildmetrik

fende Kopplung der Gravitation [Bon00, Bon06]. Die Gravitationskonstante  $G$  wird zu

$$G \rightarrow G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^2} \quad (8.1)$$

und hängt von der Energieskala  $k$  ab. Der Parameter  $\omega$  ergibt sich aus der Lösung der Gruppengleichung, wird aber zunächst als freier Parameter beibehalten mit der Größenordnung 1.  $G_0 = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  ist die newtonsche Konstante, und für kleine Skalen ( $k \rightarrow 0$ ) geht die laufende Kopplung  $G(k)$  in die bekannte newtonsche Konstante  $G_0$  über.

In dem Metrikoeffizienten der Schwarzschildmetrik

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$$

wird die bisherige Konstante  $G_0$  durch die laufende Kopplung  $G(k)$  ersetzt, sodass er sich zu

$$f(r, k) = 1 - \frac{2G_0 M}{(1 + \omega G_0 k^2)r}$$

umformt. Die Koeffizienten hängen somit neben der Radialkoordinate zusätzlich von der Skala ab.

### 8.2.1 Identifikation mit dem Abstand

In der Schwarzschildmetrik stellt der Abstand vom Ursprung  $d$  die einzige dimensionsbehaftete Größe dar. Der entscheidende Schritt ist nun, die Masseskala mit dieser Größe der Metrik zu identifizieren. Da die Dimension eines Abstandes eine inverse Energie ist, ist die Masseskala somit proportional zum inversen Abstand  $d$ . Aufgrund des statischen Verhaltens und der sphärischen Symmetrie der Schwarzschildmetrik kann der Abstand nur von der Radialkomponente abhängen. Die Identifikation

$$k(r) = \frac{\xi}{d(r)} \quad (8.2)$$

erfolgt mit einer Konstanten  $\xi$  der Größenordnung 1. Als Bedingung an die Abstandsfunktion fordert man, dass der Abstand sich für große Entfernungen wie der flache Raum verhält und daher, dass der Abstand mit  $r$  skaliert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d(r)}{r} = 1. \quad (8.3)$$

Die Berechnung des Abstandes in der Schwarzschildmetrik erfolgt über die Integration des invarianten Wegelements  $ds_{class}^2$  mit konstanter Kopplung ( $G(k) = G_0$ ). Der Abstand wird entlang der Radialkomponente parametrisiert

$$d(r) \equiv \int \sqrt{|ds_{class}^2|} = \int_0^r dr' |f_{class}(r')|^{-1/2}.$$

## 8 Renormierungsgruppe und schwarze Löcher

Das Ergebnis der Integration sind zwei Funktionen innerhalb und außerhalb des Ereignishorizonts ( $R_H = 2G_0M$ )

$$\begin{aligned} d_{r < R_H}(r) &= 2G_0M \arctan \sqrt{\frac{r}{2G_0M - r}} - \sqrt{r(2G_0M - r)} \\ d_{r > R_H}(r) &= 2G_0M \ln \left( \sqrt{\frac{r}{2G_0M}} + \sqrt{\frac{r}{2G_0M} - 1} \right) \\ &\quad + \pi G_0M + \sqrt{r(r - 2G_0M)} . \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung des Grenzfalles  $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} d(r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2G_0M}} r^{3/2} + \mathcal{O}(r^{5/2})$$

zeigt sich ein anderer Zusammenhang ( $d \propto r^{3/2}$ ) zwischen der Radialkomponente und dem Abstand als für große Abstände (8.3).

Anstelle der richtigen Abstandsfunktion verwendet man eine wesentlich einfachere interpolierte Abstandsfunktion, die jedoch das richtige Grenzwertverhalten aufweist

$$d(r) = \left( \frac{r^3}{r + \gamma G_0M} \right)^{1/2} \quad (8.4)$$

zwischen den Grenzwerten  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ . Mit dieser Abstandsfunktion (8.4) kann man die Skala in der Schwarzschildmetrik darstellen und in diese die laufende Kopplung der Gravitation (8.1)

$$G(r) = \frac{G_0 r^3}{r^3 + \tilde{\omega}[r + \gamma G_0M]} \quad (8.5)$$

einsetzen. Die Kopplung ergibt sich dann als Funktion des Radius mit der Konstanten  $\gamma = 9/2$ , die über den Vergleich der analytischen Lösung mit der interpolierten Funktion gefunden wird. Der Parameter  $\tilde{\omega} = \omega \xi^2$  wird als freier Parameter beibehalten.

Als ersten Ansatz entwickelten Bonanno und Reuter das Gravitationspotential und verglichen es mit den Korrekturen der Quantengravitation (*one-loop expansions*) von John F. Donoghue [Don94]. Die Terme erster Ordnung haben dieselbe Gestalt und man kann den Faktor  $\tilde{\omega} = 118/(15\pi)$  extrahiert. In neueren Berechnungen der Ein-Schleifen-Korrekturen findet sich ein negativer Wert  $\tilde{\omega} = -41/(10\pi)$  [Bje03], der allerdings im Folgenden Verworfen wird. Die Bedingungen an  $\tilde{\omega}$  sind allgemeiner und ein negativer Wert für  $\tilde{\omega}$  entspricht nicht den bisherigen Annahmen ( $\omega > 0$  und  $\xi > 0$ ). Die Ein-Schleifen-Korrekturen dienen somit nicht zum Finden des Parameters, liefern aber einen ersten Hinweis auf  $\tilde{\omega}$ .

### 8.2.2 Neue Schwarzschildmetrik

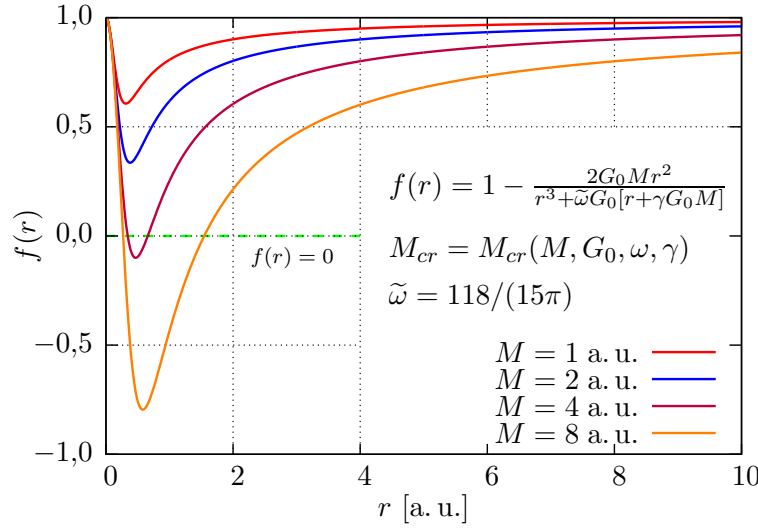
Die resultierende Metrik hat die klassische sphärisch symmetrische Form

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2d\Omega^2$$

$$f(r) = 1 - \frac{2G_0Mr^2}{r^3 + \tilde{\omega}G_0[r + \tilde{\gamma}G_0M]} .$$

Aus der newtonschen Gravitationskonstante wird die laufende Kopplung  $G \rightarrow G(r)$ , die über die Abstandsfunktion hergeleitet wurde.

Abbildung 8.1: Qualitative Darstellung der Metrikkoeffizienten mit laufender Kopplung. Ab  $M_{cr} = 3,5$  a. u. hat die Funktion mindestens eine Nullstelle und damit einen Ereignishorizont.



Für verschiedene Massen ist die Koeffizientenfunktion in Abbildung 8.1 qualitativ dargestellt. Für große Massen hat die Funktion zwei Nullstellen und damit einen inneren und einen äußeren Horizont. Sobald eine kritische Masse erreicht wird, koinzidieren die beiden Horizonte an einem kritischen Horizont, und für geringere Massen liegt kein Ereignishorizont vor. Die kritische Masse wird mit der minimalen Masse für schwarze Löcher identifiziert.

Diese Klasse von schwarzen Löcher haben ähnliche Eigenschaften wie geladene schwarze Löcher der Reissner-Nordström-Metrik mit den Koeffizienten

$$f_{RN}(r) = 1 - \frac{2G_0M}{r} + \frac{G_0Q^2}{4\pi\epsilon_0r^2} \quad (8.6)$$

$$= 1 - \frac{R_S}{r} + \frac{R_Q^2}{r^2} .$$

Auch hier treten ein innerer und ein äußerer Horizont auf und es liegen nur schwarze Löcher vor, wenn  $R_S \geq 2R_Q$  ist. Die Horizonte  $R_{\pm}$  berechnen sich aus den Nullstellen des Metrikkoeffizienten

$$R_{\pm} = \frac{R_s \pm \sqrt{R_s^2 - 4R_Q^2}}{2} .$$

Extremal geladene schwarze Löcher entsprechen so den kritischen schwarzen Löcher in modifizierter Raumzeit. Ein Unterschied liegt in dem Verhalten für  $r \rightarrow 0$ . Während die geladenen schwarzen Löcher der Reissner-Nordström-Metrik bei  $r = 0$  eine Singularität aufweisen, liefert der neue Metrikkoeffizient für  $r = 0$  einen endlichen Wert. Bei Untersuchungen der Raumkrümmung bei  $r = 0$  fanden Bonanno und Reuter dennoch eine Singularität im Krümmungstensor, wie in [Bon00] erklärt wurde.

Die schwarzen Löcher mit laufender Kopplung und ihre Eigenschaften wurde in [Bon00, Bon06] diskutiert. Neben den Horizonten wurde die Thermodynamik und die Abstrahlcharakteristik analysiert. Die schwarzen Löcher beenden bei der kritischen Masse ihren Abstrahlprozess und verbleiben als stabiler Rest.

### 8.3 Höherdimensionale Erweiterung

Um Remnants am LHC zu finden, muss zunächst die laufende Kopplung der Renormierungsgruppe für Extradimensionen gefunden werden. Zur Berechnung der Kopplung im ADD-Modell wird die gravitative Kopplung über die fundamentale Masse  $M_f$  dargestellt

$$G = \frac{1}{M_{Pl}^2} \propto \frac{1}{M_f^{d+2}} .$$

Die Umrechnung zwischen der Planckmasse  $M_{Pl}$  und der fundamentalen Masse für  $d$  Extradimension gibt die Relation (5.10, S. 44)

$$M_{Pl}^2 = V_d M_f^{d+2} ,$$

mit dem  $d$ -dimensionalen Volumen  $V_d$  der Extradimensionen. Aus der fundamentalen Masse als Kopplungskonstante wird eine laufende Kopplung

$$M_f^{d+2} \rightarrow \tilde{M}_f^{d+2}(k) ,$$

die wieder von einer Masseskala  $k$  abhängen.

### 8.3.1 Laufende Kopplung $\tilde{M}_f^{d+2}(k)$

Die laufende Kopplung leiteten JoAnne L. Hewett und Thomas G. Rizzo 2007 her, um den Einfluss auf die Signale an Beschleunigern zu ermitteln [Hew07]. Über die effektive Wirkung mit dem Verfahren der Renormierungsgruppe erhält man die Form

$$\tilde{M}_f^{d+2}(k) = M_f^{d+2} \left[ 1 + \left( \frac{k}{tM_f} \right)^{d+2} \right] \quad (8.7)$$

der gravitativen Kopplung. Auf ihrem weiteren Weg identifizieren sie die Masseskala mit der Schwerpunktsenergie der Beschleuniger ( $k = \sqrt{s}$ ) und berechnen in Abhängigkeit des Parameters  $t$  verschiedene Produktionsraten des SMs.

Die Produktionsrate schwarzer Löcher hat Benjamin Koch 2008 mit der laufenden Kopplung (8.7) untersucht [Koc08a]. Dabei verwendet er ebenso wie Hewett und Rizzo die Schwerpunktsenergie als Skala. Eine Unterdrückung von schwarzen Löchern mit großen Massen ist die Folge, da die gravitative Kopplung mit steigender Schwerpunktsenergie abnimmt.

Auf diesem Weg entstehen Probleme bei der thermodynamischen Betrachtung in der Hawkingtemperatur. Da bei schwarzen Löchern mit einer hohen Masse die Gravitation schwächer wird, wird ebenso die Oberflächengravitation schwächer. Daraus resultiert eine steigende Hawkingtemperatur für große schwarze Löcher. Im Grenzfall zur klassischen Welt entspricht dieses Verhalten nicht den bisherigen Betrachtungen. Schwarze Löcher mit einer hohen Masse haben eine geringere Hawkingtemperatur. Daher wird im Folgenden ein anderer Ansatz betrachtet. Ebenso wie bei Bonanno und Reuter wird die Masseskala mit dem Abstand identifiziert. Über die Grenzfälle und die Abstandsfunktion entsteht ein neues Bild der Gravitation.

### 8.3.2 Identifikation mit dem Abstand

Die Identifikation erfolgt analog zum 4-dimensionalen Fall (8.2). Die Skala  $k$  hat die Dimension einer Energie und die einzige dimensionsbehaftete Größe der Geometrie ist der Abstand mit der Dimension einer inversen Energie. Somit wird die Skala wieder proportional zum inversen Abstand  $d$

$$k = \frac{\xi}{d} . \quad (8.8)$$

#### Berechnete Abstandsfunktion $d(r)$

Die Betrachtung von Abständen erfolgt über das invariante Linienelement der ART im höherdimensionalen Fall

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega_{d+2}^2 .$$

Bei der Betrachtung der statischen und sphärisch symmetrischen Lösung kann der Abstand nur von der Koordinate  $r$  abhängen und somit kann die Skala nur eine

Funktion der Radialkomponente der Metrik sein. Daher wird wie in (8.2) die Skala (8.8) zu

$$k(r) = \frac{\xi}{d(r)} . \quad (8.9)$$

Auf Gleichzeitigkeitsebenen muss die Metrik für  $r \rightarrow \infty$  in die Minkowskimetrik des flachen Raumes übergehen und der Abstand muss mit  $r$  skalieren. Daher verhält sich der Grenzfall für die Abstandsfunktion wie in (8.3)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d(r)}{r} = 1 .$$

Der Abstand eines Punktes  $P$  vom Ursprung auf dem Integrationsweg  $\mathcal{C}$  berechnet sich über

$$d(P) = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{|ds_{class}^2|}$$

mit einer konstanten Kopplung  $\widetilde{M}_f(k) = M_f$ . Der Betrag  $|\cdot|$  sorgt auch dann für einen positiven Abstand, wenn das Linienelement in der zeitartigen Region innerhalb des Horizontes negativ wird. In dieser Parametrisierung  $r'$  entlang der  $r$ -Koordinate

$$\begin{aligned} t(r') &= t_0 & r(r') &= r' \\ \theta(r') &= \theta_0 & \phi(r') &= \phi_0 \end{aligned}$$

stellt sich das Wegelement durch

$$ds_{class}^2 = \frac{1}{f_{class}(r')} dr'^2$$

dar und damit gilt für die Abstandsfunktion

$$d(r) = \int_0^{r(P)} \frac{1}{\sqrt{|f_{class}(r')|}} dr' .$$

Durch Einsetzen des Metrikoeffizienten  $f_{class}(r) = 1 - (R_H/r)^{d+1}$  im höherdimensionalen Fall lässt sich die Integration in zwei verschiedene Integrationen aufteilen

$$d_{r>R_H}(r) = \int dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{r'^{d+1} - R_H^{d+1}}} \quad (8.10)$$

$$d_{r<R_H}(r) = \int dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{R_H^{d+1} - r'^{d+1}}} . \quad (8.11)$$

Im höherdimensionalen Fall sind diese Integrale nicht mehr allgemein lösbar. Stattdessen wird eine Interpolation  $d'(r)$  zwischen den Grenzfällen  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  gefunden.

**Interpolierte Abstandsfunktion  $d'(r)$** 

Für  $r' \rightarrow 0$  in (8.11) wird der Nenner zu  $(R_H^{d+1} - r'^{d+1}) \rightarrow R_H^{d+1}$ . Nach Integration erhält man die Abstandsfunktion

$$d(r) = \int_0^r dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{R_H^{d+1} - r'^{d+1}}} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{r' \rightarrow 0}{=} \int_0^r dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{R_H^{d+1}}} \\ &= \frac{1}{R_H^{\frac{d+1}{2}}} \frac{2}{d+3} r^{\frac{d+3}{2}}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Im anderen Grenzfall  $r \rightarrow \infty$  (8.10) wird der Nenner zu  $(r'^{d+1} - R_H^{d+1}) \rightarrow r'^{d+1}$ . Das Integral von  $0 \dots r$  muss unterteilt werden in einen Bereich von  $0 \dots R_H$  und einen weiteren Bereich von  $R_H \dots r$ . Der erste Teil ergibt einen Summanden  $\tilde{\pi}$  aus dem Integral

$$\int_0^{R_H} dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{R_H^{d+1} - r'^{d+1}}} = \frac{\tilde{\pi}_d}{2} R_H$$

und hängt nicht von  $r$  ab. Im klassischen Fall  $d = 0$  ist gerade  $\tilde{\pi}_{d=0} = \pi$ . Dieser Faktor ist im weiteren Verlauf nicht wichtig, da anstelle der Funktion  $d(r)$  eine Interpolation verwendet wird. Der zweite Teil ergibt als obere Grenze die  $r$ -Abhängigkeit von  $d(r)$  und als untere Grenze einen konstanten Summanden  $\tilde{A}$ . Das Integral liefert also für  $r' \rightarrow \infty$  die Lösung

$$\begin{aligned} d(r) &= \int_{R_H}^r dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{r'^{d+1} - R_H^{d+1}}} \\ &\stackrel{r' \rightarrow \infty}{=} \int_{R_H}^r dr' \sqrt{\frac{r'^{d+1}}{r'^{d+1}}} \\ &= r - \tilde{A} \end{aligned}$$

und den richtigen Zusammenhang  $\lim_{r \rightarrow \infty} d(r)/r = 1$ .

Da keine analytische Lösung der Integrale zu finden ist, wird  $d(r)$  durch eine Funktion  $d'(r)$  interpoliert. Die Grenzfälle  $r \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  und  $d = 0$  müssen mit den bisherigen Ergebnissen übereinstimmen. Als Abstandsfunktion wird daher im Folgenden

$$d'(r) = \left( \frac{r^{d+3}}{r^{d+1} + \tilde{\gamma}_d R_H^{d+1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

verwendet. Der Faktor  $\tilde{\gamma}_d$  wird über den Grenzwert  $r \rightarrow 0$  berechnet. Für  $r \rightarrow 0$  wird der Nenner von (8.12) zu  $R_H^{(d+1)/2}$ . Das Ergebnis dieses Integrals (8.13) muss in der genäherten Funktion  $d'(r)$  den selben Grenzfall haben

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} d'(r) &= \left( \frac{r^{d+3}}{\tilde{\gamma}_d R_H^{d+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{R_H^{\frac{d+1}{2}}} \frac{2}{d+3} r^{\frac{d+3}{2}} \\ \Rightarrow \quad \tilde{\gamma}_d &= \frac{(d+3)^2}{4} . \end{aligned} \quad (8.14)$$

Der Vergleich liefert also den Faktor  $\tilde{\gamma}_d$  in Abhängigkeit von der Anzahl der Extra-dimensionen. Die Verbindung zwischen  $\gamma$  in [Bon00] zu  $\tilde{\gamma}_d$  ist

$$\tilde{\gamma}_{d=0} = \frac{\gamma}{2} = \frac{9}{4} .$$

Für die Masseskala folgt nach (8.9)

$$\begin{aligned} k(r) &= \frac{\xi}{d'(r)} \\ &= \xi \left( \frac{r^{d+1} + \tilde{\gamma}_d R_H^{d+1}}{r^{d+3}} \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (8.15)$$

## 8.4 Metrikkoeffizienten $f(r)$

In dem klassischen Ereignishorizont  $R_H$  wird die fundamentale Masse durch die laufende Kopplung (8.7) ersetzt. Anstelle der Masseskala wird die Identifikation (8.15)

Tabelle 8.1: Unterschiedliche Metrikkoeffizienten  $f(r)$  mit Extradimensionen und laufender Kopplung.

Schwarzschild	LXD
$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$	$f(r) = 1 - \frac{R_H^{d+1}}{r^{d+1}}$
Renorm	Renorm&LXD
$f(r) = 1 - \frac{2G(r)M}{r}$	$f(r) = 1 - \frac{R_H^{d+1}(r)}{r^{d+1}}$

mit der approximierten Abstandsfunktion verwendet. Die neue Integrationskonstante  $C = R_H^{d+1}$  (5.16, S. 48) wird somit zu

$$\begin{aligned} \tilde{R}_H^{d+1}(r) &= \frac{16(2\pi)^d}{(d+2)A_{d+2}} \left( \frac{1}{\tilde{M}_f} \right)^{d+1} \frac{M}{\tilde{M}_f} \\ &= \frac{16(2\pi)^d}{(d+2)A_{d+2}} \frac{M}{M_f^{d+2}} \left[ 1 + \frac{\tilde{t}}{M_f^{d+2}} \left( \frac{r^{d+1} + \tilde{\gamma}_d R_H^{d+1}}{r^{d+3}} \right)^{\frac{d+2}{2}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (8.16)$$



mit

$$\tilde{t} = (\xi/t)^{d+2} . \quad (8.17)$$

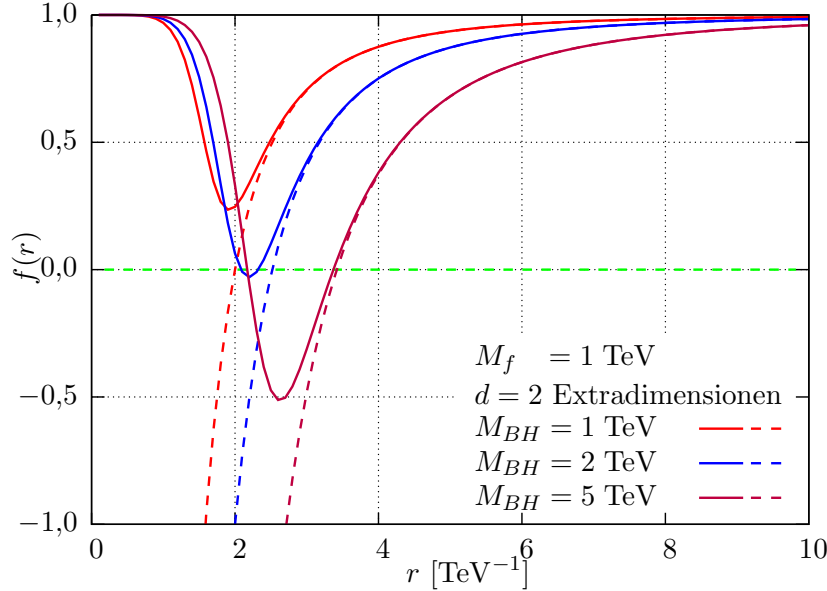
$\tilde{t}$  ist dabei ein freier Parameter. Für umfassende Untersuchungen muss  $\tilde{t}$  ebenso wie  $\tilde{\omega}$  in [Bon06] unspezifiziert gelassen werden.

Durch den Vergleich von  $\tilde{t}$  mit  $\tilde{\omega}$  kann man  $\tilde{t}$  festlegen. Über eine Neudefinition  $\tilde{\omega} = \omega \xi^{d+2}$ , die im Fall  $d = 0$  mit dem Wert von Bonanno und Reuter übereinstimmt, entsteht das Verhältnis

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{\omega}}{8\pi} .$$

Mit  $\tilde{\omega} = 118/(15\pi)$ , wie schon zuvor als erste Annahme benutzt, ergibt sich somit  $\tilde{t} \approx 0,1$ .

Abbildung 8.2: Metrikoeffizienten  $f(r)$  für unterschiedliche Massen  $M_{BH}$ . Mit  $d = 2$  Extradimensionen wurden die Parameter  $\tilde{\gamma}_2 = 25/4$  und  $\tilde{t} = 118/(120\pi^2)$  fixiert.



Mit dem Wissen um die Parameter  $\tilde{t}$  und  $\tilde{\gamma}_d$  lassen sich nun die Koeffizienten der Metrik betrachtet. In Abhängigkeit von der Masse und für  $d = 2$  Extradimensionen stellen sich die Metrikoeffizienten in Abbildung 8.2 dar.

Für  $M = 1 \text{ TeV}$  hat die Funktion keine Nullstellen und somit keine Singularität in der Metrik. Daraus resultierend liegt kein Ereignishorizont vor. Für  $M = 2 \text{ TeV}$  und  $M = 5 \text{ TeV}$  schneidet die Funktion zweimal die Null. Daraus entstehen zwei Ereignishorizonte, ein innerer und ein äußerer Ereignishorizont, wie schon bei Bonanno und Reuter und auch der Reissner-Nordström-Metrik. Wegen der Stetigkeit muss es eine Masse  $M_{cr}$  zwischen  $M_{BH} = 1 \text{ TeV}$  und  $M_{BH} = 2 \text{ TeV}$  geben, bei der

die Funktion  $f(r)$  nur eine Nullstelle besitzt. Diese Masse, an der beide Horizonte koinzidieren, ist im Fall von zwei Extradimensionen gerade  $M_{cr,d=2} = 1,867$  TeV.

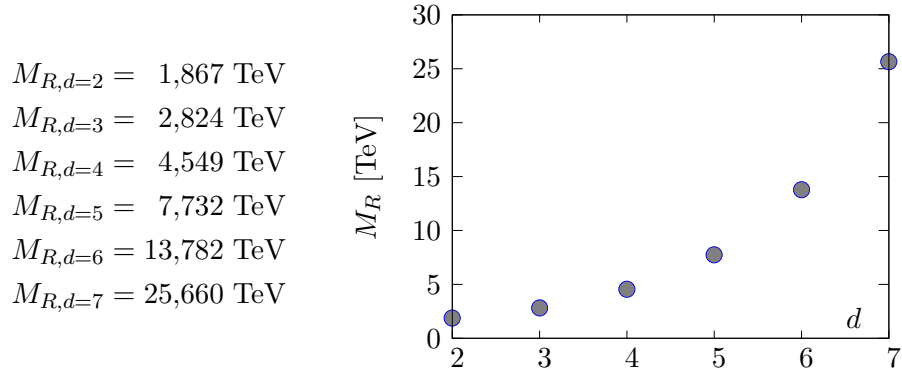
## 8.5 Remnants durch kritische Massen $M_{cr}$

Diese kritische Masse wird nun mit der Remnantmasse identifiziert

$$M_R = M_{cr} .$$

Mit dem Set von Parametern  $\tilde{\gamma}_d$  (8.14) und  $\tilde{t} \approx 0,1$  ergeben sich für unterschiedliche Anzahlen von Dimensionen die kritische Masse, wie in Abbildung 8.3 dargestellt.

Abbildung 8.3: Kritische Massen für unterschiedliche Anzahlen von Extradimensionen, Parameter:  $\tilde{t} = 0,1$  und  $\tilde{\gamma}_d = (d+3)^2/4$ .



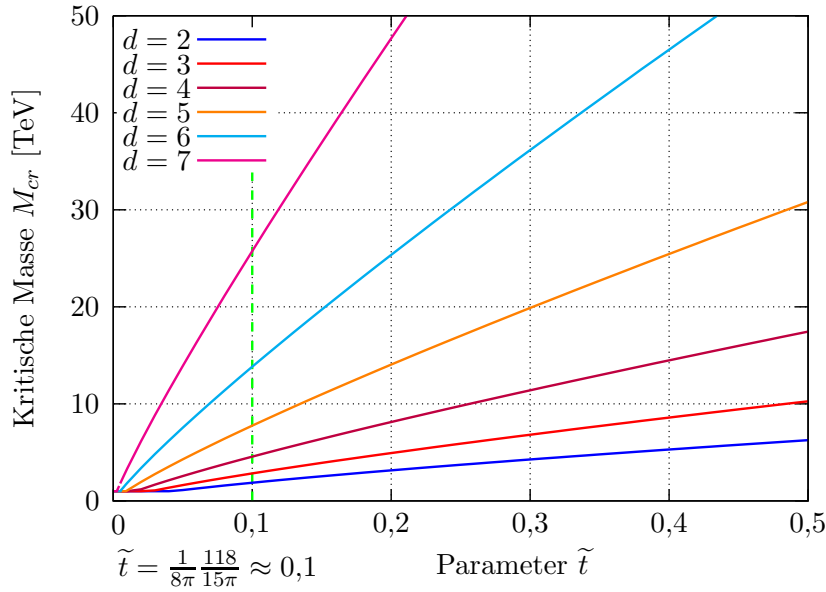
Diese Massen hängen stark von der Wahl der Parameter ab. Da  $\tilde{t}$  ein freier Parameter ist, stellt Abbildung 8.4 die Remnantmassen in Abhängigkeit von  $\tilde{t}$  dar. Für  $\tilde{t} \rightarrow 0$  sind in allen Dimensionen die Remnantmassen  $M_R = 1$  TeV. Steigt dagegen dieser Parameter, so steigen die Massen etwa linear an (siehe Abb. 8.4).

## 8.6 Zusammenfassung

Auf dem bisherigen Weg wurden die Remnantmassen  $M_R$  einfach postuliert. In der verbesserten Raumzeit mit laufender Kopplung ergeben sich automatisch Remnants. Dabei hängen die Remnants von einem freien Parameter ab und wachsen für große  $\tilde{t}$  etwa linear. Für  $\tilde{t} \rightarrow 0$  entsprechen die neuen kritischen Massen den bisher verwendeten Remnantmassen.

Dieses Gebiet liefert weiterhin viel interessante Themen, die es zu erforschen gibt. Neben dem Verhalten für  $r \rightarrow 0$  und der Thermodynamik dieser neuen Klasse von schwarzen Löchern können grundlegende Gebiete der ART betrachtet werden. Es muss der Ereignishorizont als Funktion der Massen  $R_H(M)$  gefunden werden und es

Abbildung 8.4: Remnantmassen für unterschiedliche Dimensionen in Abhängigkeit von  $\tilde{t}$ . Bei  $\tilde{t} = 0,1$  liegen die obigen Werte.



stellt sich die Frage nach der Temperatur und Entropie. Ein Vergleich der Abstrahlcharakteristik und der Entropie des glatten Spektrums aus Kapitel 7.4.1 ist sicher lohnenswert.

Eine der Hauptfrage stellt sich nach den Signaturen, die diese Klasse von schwarzen Löchern am LHC und anderen zukünftigen Beschleunigern liefern. Neben einem veränderten Verhalten des Ereignishorizontes und somit der Wirkungsquerschnitte stehen die Untersuchungen des Abstrahlverhaltens an. Die Fragen sind, wie sich die Spektren der Observablen verändern und in wie weit sie sich von den bisherigen Modellen mit schwarzen Löchern und ohne schwarze Löcher unterscheiden.



## 9 Zusammenfassung

Beide derzeitig fundamentalen Theorien, das *Standardmodell* (siehe Kap. 2) und die *Allgemeine Relativitätstheorie* (siehe Kap. 3), wurden in der vorliegenden Arbeit vorgestellt. Das Standardmodell als Quantenfeldtheorie ist bisher unvereinbar mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, die mit der Riemannschen Geometrie beschrieben wird. Um eine Kombination beider Theorien in einem einzigen Rahmenwerk zu ermöglichen, sollten ihre Kopplungen eine vergleichbare Größenordnung haben.

Mit einer Kopplung im GeV-Bereich liegt das Standardmodell weit unter der Kopplung der Gravitation, der Planckmasse  $M_{Pl} \approx 10^{19}$  GeV. Dieser Unterschied wird auch als Hierarchieproblem bezeichnet. Zur gemeinsamen Beschreibung ist es sinnvoll, entweder die Kopplung des SMs zu erhöhen oder die gravitative Kopplung in den GeV-Bereich zu vermindern.

Werden große Extradimensionen über das *ADD-Modell* (siehe Kap. 5) eingeführt, so propagiert nur die Gravitation in diesen zusätzlichen Richtungen. Die Materie und die Wechselwirkungen des SMs sind hingegen auf den gewöhnlichen 4-dimensionalen Unterraum beschränkt. Die Extradimensionen sind kompaktifiziert, so dass sie in der makroskopischen Welt nicht direkt wahrgenommen werden können. Die Größe der Extradimensionen wird dabei von der Beobachtbarkeit im Gravitationsgesetz beschränkt. Das  $1/r$ -Verhalten des Gravitationspotentials ist bis in den sub-Millimeterbereich getestet und stellt eine obere Grenze für den Radius der Extradimensionen dar. Sobald die Gravitation auch in den Extradimensionen wirkt, verändert sich das Gravitationspotential zu  $1/r^{d+1}$  und die Stärke der Gravitation verteilt sich auf alle Dimensionen. Die wirkliche Kopplung der Gravitation, die fundamentale Masse, kann im TeV-Bereich somit deutlich unterhalb der Planckmasse liegen. Die Kopplungen von SM und Gravitation unterscheiden sich dann nur um wenige Größenordnungen. Dies vereinfacht die Suche nach einer einheitlichen Theorie.

Im ADD-Modell ist es möglich, *schwarze Löcher an Beschleunigern* wie dem LHC zu erzeugen (siehe Kap. 6). Mit einer verallgemeinerten Beschreibung der Schwarzschildmetrik lassen sich für verschiedene Schwerpunktsenergien die Radien dieser schwarzen Löcher berechnen. Über eine semiklassische Betrachtung wird sich ein geometrischer Wirkungsquerschnitt aufstellen und mit den Partonverteilungsfunktionen differentielle Wirkungsquerschnitte und Produktionsraten von schwarzen Löchern berechnen. Dabei entstehen bei vorhandenen Extradimensionen bis zu  $10^9$  schwarze Löcher unterschiedlicher Masse pro Jahr.

Diese schwarzen Löcher zerfallen via einer für Extradimensionen modifizierten Hawkingstrahlung (siehe Kap. 4 und Kap. 7). Diese thermische Strahlung, die über

den Unruh-Effekt hergeleitet werden kann, ist nur durch ihre Temperatur charakterisiert. Da die Temperatur proportional zur inversen Masse  $T_{Hwk} \propto 1/M^{1/(d+1)}$  ist, divergiert diese für verschwindende Massen. Da ein solches Verhalten unphysikalisch ist, werden zwei unterschiedliche Lösungen favorisiert. Bei dem Final Decay zerplatzt das schwarze Loch ab einer kritischen Masse, die meist der fundamentalen Masse entspricht, in zwei oder mehr Teilchen. Im anderen Fall, der in dieser Arbeit präferiert wird, beendet das schwarze Loch sein Leben als ein kaltes stabiles *Remnant*. Dieser Rest behält die Energie der kritischen Masse und stoppt seine Teilchenemission, da seine Temperatur verschwindet ( $T = 0$ ). Die Emission der schwarzen Löcher kann dabei über ein modifiziertes, glattes Entropiespektrum besser wiedergegeben werden als mit der bisherigen Standardentropie (siehe Kap. 7.4).

In dieser Arbeit wurden verschiedene Spektren von Multiplizität und Transversalimpuls miteinander verglichen, um Signale für den LHC zu finden. Die Multiplizitätsspektren der Remnants liegen zwischen denen des Final Decays und den Spektren des Standardmodells. Die Transversalimpulse der schwarzen Löcher unterscheiden sich nur unbedeutend voneinander, liegen aber bei einer weit höheren Temperatur als die  $p_T$ -Spektren des Standardmodells (siehe Kap. 7.5).

Die Remnants werden in der Theorie postuliert, was nicht zufriedenstellend ist. Stattdessen wird eine Theorie benötigt, die Remnants von sich aus beinhaltet (siehe Kap. 8). Für den klassischen 4-dimensionalen Fall fanden Bonanno und Reuter mithilfe der Renormierungsgruppe eine Beschreibung der Gravitation, bei der eine kritische Masse existiert, unter der keine schwarzen Löcher existieren. Die Temperatur bei der kritische Masse selbst verschwindet ( $T(M_{cr}) = 0$ ). Die schwarzen Löcher mit einer kritischen Masse werden mit den bisher postulierten Remnants identifiziert. Mit einer Verallgemeinerung auf Extradimensionen wurde auf einem gleichartigen Weg kritische Massen für beliebige Extradimensionen berechnet. Diese Massen hängen von der Anzahl der Extradimensionen und einem weiteren Parameter  $\tilde{t}$  ab. Für  $\tilde{t} = 0$  entsprechen die Remnantmassen der fundamentalen Masse. Für größere  $\tilde{t}$  steigt die Remnantmasse etwa linear.

### Ausblick

Mit der neuen laufenden Kopplung der Gravitation und den resultierenden Remnants eröffnen sich weitere spannende Forschungsgebiete. Über den Radius des Ereignishorizonts können neue Wirkungsquerschnitte für den LHC berechnet werden. Auch muss die Produktion in Abhängigkeit des neuen Parameters  $\tilde{t}$  untersucht werden.

Neben der Produktion von schwarzen Löchern ändert sich auch deren Zerfall. Dazu muss das Abstrahlverhalten für diese neue Klasse von schwarzen Löchern und die daraus resultierenden Signale berechnet und mit den bisherigen Ergebnissen verglichen werden. Dies ermöglicht eine noch bessere Darstellung der Produktion von schwarzen Löchern und Remnants an künftigen Beschleunigern.

# Literaturverzeichnis

- [Ade02] ADELBERGER, E. G.: *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse square law*. 2002, [arXiv: hep-ex/0202008].
- [Ahn06] AHN, EUN-JOO und MARCO CAVAGLIA: *Simulations of black hole air showers in cosmic ray detectors*. Phys. Rev., D73:042002, 2006, [arXiv: hep-ph/0511159].
- [Ant98] ANTONIADIS, IGNATIOS, NIMA ARKANI-HAMED, SAVAS DIMOPOULOS und G. R. DVALI: *New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*. Phys. Lett., B436:257–263, 1998, [arXiv: hep-ph/9804398].
- [Ark98] ARKANI-HAMED, NIMA, SAVAS DIMOPOULOS und G. R. DVALI: *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*. Phys. Lett., B429:263–272, 1998, [arXiv: hep-ph/9803315].
- [Ark99] ARKANI-HAMED, NIMA, SAVAS DIMOPOULOS und G. R. DVALI: *Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity*. Phys. Rev., D59:086004, 1999, [arXiv: hep-ph/9807344].
- [Bar92] BARROW, JOHN D., EDMUND J. COPELAND und ANDREW R. LIDDLE: *The Cosmology of black hole relics*. Phys. Rev., D46:645–657, 1992.
- [Bar02] BARGER, VERNON D. ET AL.: *Neutrino oscillation parameters from MINOS, ICARUS and OPERA combined*. Phys. Rev., D65:053016, 2002, [arXiv: hep-ph/0110393].
- [Bek72] BEKENSTEIN, JACOB D.: *Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes*. Phys. Rev. D, 5(6):1239–1246, Mar 1972.
- [Bek73] BEKENSTEIN, JACOB D.: *Black Holes and Entropy*. Phys. Rev. D, 7(8):2333–2346, Apr 1973.
- [Bje03] BJERRUM-BOHR, N. E. J, JOHN F. DONOGHUE und BARRY R. HOLSTEIN: *Quantum gravitational corrections to the nonrelativistic scattering potential of two masses*. Phys. Rev., D67:084033, 2003, [arXiv: hep-th/0211072].
- [Bjo69] BJORKEN, J. D.: *Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum*. Phys. Rev., 179:1547–1553, 1969.

- [Bon00] BONANNO, ALFIO und MARTIN REUTER: *Renormalization group improved black hole spacetimes*. Phys. Rev., D62:043008, 2000, [arXiv: hep-th/0002196].
- [Bon06] BONANNO, A. und M. REUTER: *Spacetime structure of an evaporating black hole in quantum gravity*. Phys. Rev., D73:083005, 2006, [arXiv: hep-th/0602159].
- [Cav07] CAVAGLIA, M., R. GODANG, L. CREMALDI und D. SUMMERS: *Catfish: A Monte Carlo simulator for black holes at the LHC*. Comput. Phys. Commun., 177:506–517, 2007, [arXiv: hep-ph/0609001].
- [CER08] *A collection of ATLAS collision event in which a microscopic-black-hole was produced in the collision of two protons*. <http://cdsweb.cern.ch/record/1096078>, Mar 2008.
- [Cor01] CORCELLA, G. ET AL.: *HERWIG 6.5: an event generator for Hadron Emission Reactions With Interfering Gluons (including supersymmetric processes)*. JHEP, 01:010, 2001, [arXiv: hep-ph/0011363].
- [Dai08] DAI, DE-CHANG ET AL.: *BlackMax: A black-hole event generator with rotation, recoil, split branes and brane tension*. Phys. Rev., D77:076007, 2008, [arXiv: 0711.3012].
- [Del04] DELAMOTTE, BERTRAND: *A hint of renormalization*. Am. J. Phys., 72:170–184, 2004, [arXiv: hep-th/0212049].
- [Dim01] DIMOPOULOS, SAVAS und GREG L. LANDSBERG: *Black Holes at the LHC*. Phys. Rev. Lett., 87:161602, 2001, [arXiv: hep-ph/0106295].
- [Don94] DONOGHUE, JOHN F.: *Leading quantum correction to the Newtonian potential*. Phys. Rev. Lett., 72:2996–2999, 1994, [arXiv: gr-qc/9310024].
- [Duf96] DUFF, M. J.: *M theory (the theory formerly known as strings)*. Int. J. Mod. Phys., A11:5623–5642, 1996, [arXiv: hep-th/9608117].
- [Ear02] EARDLEY, DOUGLAS M. und STEVEN B. GIDDINGS: *Classical black hole production in high-energy collisions*. Phys. Rev., D66:044011, 2002, [arXiv: gr-qc/0201034].
- [Fey69] FEYNMAN, RICHARD P.: *Very high-energy collisions of hadrons*. Phys. Rev. Lett., 23:1415–1417, 1969.
- [Fli95] FLIESSBACH, T.: *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [Fro09] FROST, JAMES A. ET AL.: *Phenomenology of Production and Decay of Spinning Extra- Dimensional Black Holes at Hadron Colliders*. 2009, [arXiv: 0904.0979].



- [Fuk02] FUKUDA, S. ET AL.: *Determination of Solar Neutrino Oscillation Parameters using 1496 Days of Super-Kamiokande-I Data*. Phys. Lett., B539:179–187, 2002, [arXiv: hep-ex/0205075].
- [Gar00] GARRIGA, JAUME und TAKAHIRO TANAKA: *Gravity in the brane-world*. Phys. Rev. Lett., 84:2778–2781, 2000, [arXiv: hep-th/9911055].
- [Gib77] GIBBONS, G. W. und S. W. HAWKING: *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*. Phys. Rev., D15:2752–2756, 1977.
- [Gid00] GIDDINGS, STEVEN B., EMANUEL KATZ und LISA RANDALL: *Linearized gravity in brane backgrounds*. JHEP, 03:023, 2000, [arXiv: hep-th/0002091].
- [Gid02] GIDDINGS, STEVEN B. und SCOTT D. THOMAS: *High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics*. Phys. Rev., D65:056010, 2002, [arXiv: hep-ph/0106219].
- [Gid04] GIDDINGS, STEVEN B. und VYACHESLAV S. RYCHKOV: *Black holes from colliding wavepackets*. Phys. Rev., D70:104026, 2004, [arXiv: hep-th/0409131].
- [Giu99] GIUDICE, GIAN F., RICCARDO RATTAZZI und JAMES D. WELLS: *Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders*. Nucl. Phys., B544:3–38, 1999, [arXiv: hep-ph/9811291].
- [Gre81] GREEN, MICHAEL B. und JOHN H. SCHWARZ: *Supersymmetrical Dual String Theory*. Nucl. Phys., B181:502–530, 1981.
- [Gro99] GROSS, F.: *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Wiley-Interscience, 1999.
- [Hal84] HALZEN, F. und A.D. MARTIN: *Quarks and leptons*. Wiley New York, 1984.
- [Har03] HARRIS, C. M., P. RICHARDSON und B. R. WEBBER: *CHARYBDIS: A black hole event generator*. JHEP, 08:033, 2003, [arXiv: hep-ph/0307305].
- [Haw74] HAWKING, S. W.: *Black hole explosions*. Nature, 248:30–31, 1974.
- [Haw05] HAWKING, S. W.: *Information loss in black holes*. Phys. Rev. D, 72(8):084013, Oct 2005.
- [Hei09] HEINZ, ACHIM, STEFAN STRUBER, FRANCESCO GIACOSA und DIRK H. RISCHKE: *Role of the tetraquark in the chiral phase transition*. Phys. Rev., D79:037502, 2009, [arXiv: 0805.1134].
- [Hew07] HEWETT, JOANNE und THOMAS RIZZO: *Collider Signals of Gravitational Fixed Points*. JHEP, 12:009, 2007, [arXiv: 0707.3182].

- [Hos03] HOSSENFELDER, SABINE: *Schwarze Löcher in Extra-Dimensionen*. DISSERTATION, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2003.
- [Kal21] KALUZA, THEODOR: *Zum Unitätsproblem in der Physik*. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1921.
- [Kin04] KING, S. F.: *Neutrino mass models*. Rept. Prog. Phys., 67:107–158, 2004, [arXiv: hep-ph/0310204].
- [Kle26] KLEIN, OSKAR: *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 1926, [doi:10.1007/BF01397481].
- [Kle07] KLEMP, EBERHARD und ALEXANDER ZAITSEV: *Glueballs, Hybrids, Multiquarks. Experimental facts versus QCD inspired concepts*. Phys. Rept., 454:1–202, 2007, [arXiv: 0708.4016].
- [Kob07] KOBER, MARTIN, BENJAMIN KOCH und MARCUS BLEICHER: *First Order Calculation of the Inclusive Cross Section  $pp$  to  $ZZ$  by Graviton Exchange in Large Extra Dimensions*. Phys. Rev., D76:125001, 2007, [arXiv: 0708.2368].
- [Koc05] KOCH, BENJAMIN, MARCUS BLEICHER und SABINE HOSSENFELDER: *Black hole remnants at the LHC*. JHEP, 10:053, 2005, [arXiv: hep-ph/0507138].
- [Koc07a] KOCH, BENJAMIN: *Black hole production and graviton emission in models with large extra dimensions*. DISSERTATION, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2007.
- [Koc07b] KOCH, BENJAMIN, MARCUS BLEICHER und HORST STOECKER: *Black holes at LHC?* J. Phys., G34:S535–542, 2007, [arXiv: hep-ph/0702187].
- [Koc08a] KOCH, BENJAMIN: *Renormalization group and black hole production in large extra dimensions*. Phys. Lett., B663:334–337, 2008.
- [Koc08b] KOCH, BENJAMIN und M. BLEICHER: *Gravitational radiation from elastic particle scattering in models with extra dimensions*. JETP Lett., 87:75–80, 2008, [arXiv: hep-th/0512353].
- [Lan66] LANDAU, L.D. und EM LIFSHITZ: *Klassische Feldtheorie*. Berlin: Akademie-Verlag, 3. Auflage Auflage, 1966. Lehrbuch der theoretischen Physik.
- [Mar81] MARKOV, M. A. und PETER C. WEST (Herausgeber): *Quantum Gravity. Proceedings 2ND SEMINAR*, Moscow, USSR, October 1981. New York, USA: Plenum (1984) 548p.

- [Mes07] MESSCHENDORP, J. G.: *Hadron Physics with Anti-Protons: The PANDA Experiment at FAIR*. 2007, [arXiv: 0711.1598].
- [Mis73] MISNER, C.W., K.S. THORNE und J.A. WHEELER: *Gravitation*. WH Freeman and Company, 1973.
- [Mye86] MYERS, ROBERT C. und M. J. PERRY: *Black Holes in Higher Dimensional Space-Times*. Ann. Phys., 172:304, 1986.
- [Mü01] MÜLLER, THOMAS: *Gravitation und Quantentheorie*. DIPLOMARBEIT, Eberhard-Karls-Universität, Tübingen, 2001. Einige Aspekte der Unvereinbarkeit beider Theorien.
- [Nob54] The Nobel Foundation: *The Nobel Prize in Physics 1954*, 1954. [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1954/](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1954/).
- [Pen99] PENROSE, ROGER: *The question of cosmic censorship*. J. Astrophys. Astron., 20:233–248, 1999.
- [Peq08] PEQUENAO, J: *Simulated production of a Higgs event in ATLAS. This track is an example of simulated data modeled for the ATLAS detector on the Large Hadron Collider (LHC) at CERN, which will begin taking data in 2008*. ATLAS Collection, <http://cdsweb.cern.ch/record/1102948>, Jan 2008.
- [Pes93] PESKIN, M.E. und D.V. SCHROEDER: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Basic Books, 1993.
- [Pla99] PLANCK, MAX: *Über irreversible Strahlungsvorgänge*. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Band 5:479ff, 1899.
- [Pov04] POVH, B., K. RITH, C. SCHOLZ und F. ZETSCHKE: *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*. Springer, 2004.
- [Pum02] PUMPLIN, J. ET AL.: *New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis*. JHEP, 07:012, 2002, [arXiv: hep-ph/0201195].
- [Ran99a] RANDALL, LISA und RAMAN SUNDRUM: *A large mass hierarchy from a small extra dimension*. Phys. Rev. Lett., 83:3370–3373, 1999, [arXiv: hep-ph/9905221].
- [Ran99b] RANDALL, LISA und RAMAN SUNDRUM: *An alternative to compactification*. Phys. Rev. Lett., 83:4690–4693, 1999, [arXiv: hep-th/9906064].
- [Rin90] RINGWALD, A.: *High energy breakdown of perturbation theory in the electroweak instanton sector*. Nuclear Physics B, 330(1):1 – 18, 1990.

- [Riz02] RIZZO, THOMAS G.: *Black hole production at the LHC: Effects of Voloshin suppression*. JHEP, 02:011, 2002, [arXiv: hep-ph/0201228].
- [Rov04] ROVELLI, C.: *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [Rub83a] RUBAKOV, V. A. und M. E. SHAPOSHNIKOV: *Do We Live Inside a Domain Wall?* Phys. Lett., B125:136–138, 1983.
- [Rub83b] RUBAKOV, V. A. und M. E. SHAPOSHNIKOV: *Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem*. Phys. Lett., B125:139, 1983.
- [Ryd96] RYDER, L.H.: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [Sak95] SAKURAI, JJ, SF TUAN und E.D. COMMINS: *Modern Quantum Mechanics, Revised Edition*. American Journal of Physics, 63(1):93–95, 1995.
- [Sat06] SATHEESH KUMAR, V. H. und P. K. SURESH: *Gravity and large extra dimensions*. 2006, [arXiv: hep-th/0606194].
- [Sch16] SCHWARZSCHILD, KARL: *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1916:189–196, 1916.
- [Sew08] SEWARDS, TERENCE V.: *A sectorial approach to Kaluza-Klein theory*. 2008, [arXiv: 0809.1600].
- [Sex83] SEXL, R.U., H.K. URBANTKE und (MANNHEIM) BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT: *Gravitation und Kosmologie*. BI-Wiss.-Verl., 1983.
- [Sjo01] SJOSTRAND, TORBJORN, LEIF LONNBLAD und STEPHEN MRENNA: *PYTHIA 6.2: Physics and manual*. 2001, [arXiv: hep-ph/0108264].
- [Tan63] TANGHERLINI, F. R.: *Schwarzschild field in  $n$  dimensions and the dimensionality of space problem*. Nuovo Cim., 27:636–651, 1963.
- [Tro04] TRODDEN, MARK: *Baryogenesis and leptogenesis*. 2004, [arXiv: hep-ph/0411301].
- [Unr76] UNRUH, W. G.: *Notes on black hole evaporation*. Phys. Rev., D14:870, 1976.
- [Unr84] UNRUH, WILLIAM G. und ROBERT M. WALD: *What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle*. Phys. Rev., D29:1047–1056, 1984.
- [Vol02] VOLOSHIN, M. B.: *More remarks on suppression of large black hole production in particle collisions*. Phys. Lett., B524:376–382, 2002, [arXiv: hep-ph/0111099].

- [Wal84] WALD, R.M.: *General relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [Wal94] WALD, R.M.: *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. University of Chicago Press, 1994.
- [Wei73] WEINBERG, S. und RH DICKE: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. American Journal of Physics, 41:598, 1973.



# Danksagung

Nun ist es endlich geschafft und ich möchte mich an dieser Stelle bei Allen bedanken, die zur Verwirklichung dieser Arbeit beigetragen haben.

Aus universitärer Sicht gebührt neben den vielen Professoren und Tutoren ein besonderer Dank meiner Arbeitsgruppe mit JProf. Dr. Marcus Bleicher und Dr. Benjamin Koch. Marcus hat es mir ermöglicht, mich mit einen so spannenden, interessanten und fordernden Forschungsgebiet zu beschäftigen. Ben hat mir geholfen, mich in das Thema der großen Extradimensionen, der schwarzen Löcher und Remnants einzuarbeiten. Auf ihn geht die Idee der höherdimensionalen Erweiterung der Gravitation mit laufender Kopplung und den daraus resultierenden Remnants zurück. Dabei ist insbesondere die Zeit zu erwähnen, seit er an der Pontificia Universidad Católica in Santiago de Chile beschäftigt ist. Ab Juli 2008 hat er mich „über den großen Teich“ hinweg beraten und unterstützt.

Weiterhin sind Bjørn Bäuchle und Gunnar Gräf für viele interessante Diskussionen und Anregungen, meistens beim Mittagessen, zu würdigen. Sie haben dazu beigetragen, dass ich einfache, aber auch komplexe Aufgaben schnell verstanden und gelöst habe. Mein Dank gilt auch allen fleißigen Korrekturlesern, die viele meiner Fehler gefunden und auch den Text verständlicher gemacht haben. Erwähnt sei an dieser Stelle als besonders ausdauernde Korrekturleserin Eva Katharina Rafeld.

Außerdem ist das „Zeitloch“ Fachschaft mit all seinen Mitgliedern zu nennen. Hier gab es immer Abwechslung, wenn es mit der Arbeit nicht so klappen wollte und auch reichlich Kaffee, um mich wach zu halten. Danke für die schöne Zeit.

Weiterhin möchte ich meinen Eltern Helga und Klaus Burschil danken, die mich zusammen mit meiner Schwester Christin fürsorglich in Bad Homburg aufgezogen haben. Sie haben mich stets unterstützt und ermöglichten mir das Studium an der Universität Frankfurt. Dabei hat mein Vater mich immer angetrieben und mein Bestes gefordert. Trotz ihrer Krankheit hat mich meine Mutter bis zu ihrem Tod im Jahr 2005 und auch darüber hinaus unentwegt motiviert, immer positiv in die Zukunft zu blicken. Danke.

Außerdem danke ich meiner Tante, meinem Onkel und meiner Cousine aus Kalbach, die mir viel Rückhalt in schwieriger Zeit geboten haben.

Abschließend möchte ich ganz besonders meiner Oma danken, die mich immer mit ihrem leckeren Kuchen und viel vegetarischem Essen während der Diplomarbeitszeit bei Kräften gehalten hat.

## **Erklärung zur Diplomarbeit**

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und sämtliche Stellen, die benutzten Werken im Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, mit Quellen- bzw. Herkunftsangaben kenntlich gemacht habe.

Frankfurt am Main, den 21. Juli 2009

Thomas Burschil