Minimal Length ← GUP

Understand the Kempf2005-Plot

Ich “unterdrücke” (=weglassen) die Δ-Zeichen jetzt immer, weil sie bloß alles unübersichtlich machen.
Außerdem setze ich hquer = 1.

In[1]:=
```
Ungleichung = x p ≥ 1 / 2 (1 + β p ^ 2 + γ)
```

Out[1]= $p\,x \geq \frac{1}{2}\left(1 + p^2\,\beta + \gamma\right)$

Auflösen zu einer Funktion Δx(Δp)

Deutlich einfacher (auch mit der Hand auszurechnen) ist die Umstellung nach Δx. Was ich ja hier als x bezeichne:

In[2]:=
```
Reduce[{Ungleichung , x > 0, p > 0, β > 0, γ > 0}, x, Reals]
```

Out[2]= $p > 0\ \&\&\ \gamma > 0\ \&\&\ \beta > 0\ \&\&\ x \geq \frac{1 + p^2\,\beta + \gamma}{2\,p}$

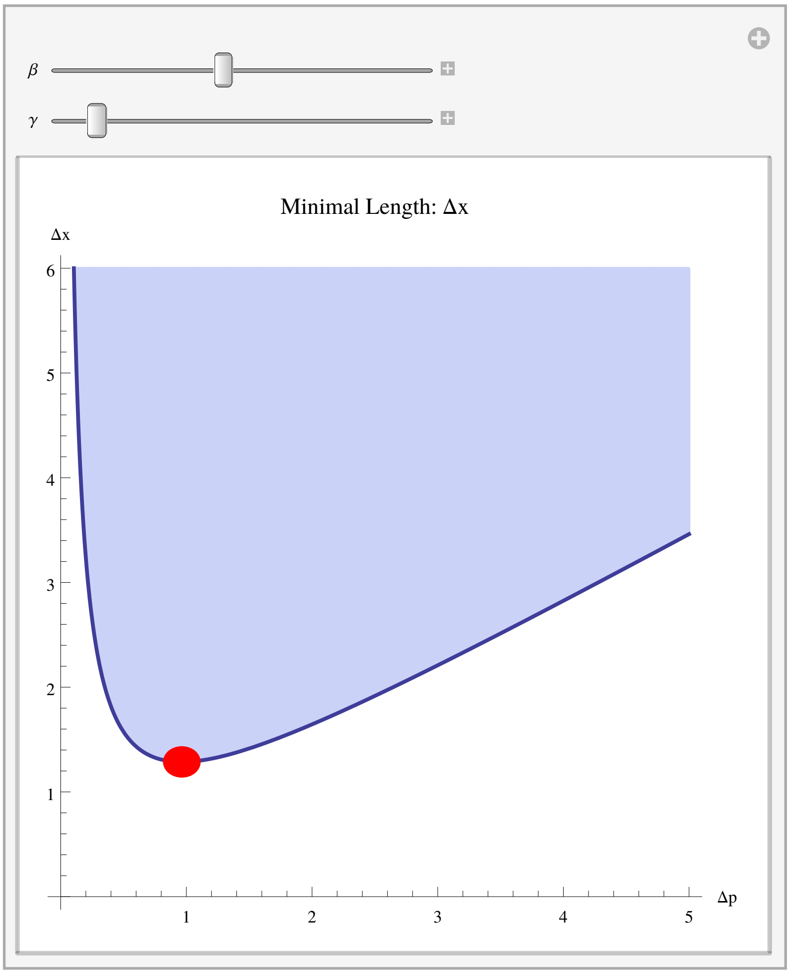
In[3]:= $\mathtt{xB[p\_,\ \beta\_,\ \gamma\_]} = \frac{1 + p^2\,\beta + \gamma}{2\,p}$

Out[3]= $\frac{1 + p^2\,\beta + \gamma}{2\,p}$

Den folgenden Plot kann man auch leicht mit der Hand machen: Linearen Anteil $\beta/2$ zeichnen und 1/p^2-Anteil draufaddieren.

In[68]:=
```
Manipulate[
 Show @@ Reverse@{Plot[
     xB[p, β, γ],
     {p, 0, 5},
     PlotRange → {0, 6},
     ImageSize → Medium,
     PlotStyle → Thick
    ],
    RegionPlot[
     (* Es scheint ein komischer Bug in RegionPlot zu sein,
     dass Evaluate@Ungleichung
        hier nicht funktioniert *)
     p x ≥ 1 / 2 (1 + β p^2 + γ), {p, 0, 5}, {x, 0, 6},
     BoundaryStyle → None,
     (* Der Punkt oben wird irgendwie ueberzeichnet :-( *)
     Epilog → {Red, Disk[{MinimumP[β, γ], MinimumX[β, γ]}, 0.15]},
     Axes → True, Frame → None,
     AxesLabel → {"Δp", "Δx"},
     PlotLabel → "Minimal Length: Δx"
    ]
   },
 {{β, 0.84}, 0, 3},
 {{γ, 0.175}, 0, 3}]
```

Out[68]=



Auflösen zu einer Funktion Δp(Δx)

Diese Umformung kann man mit der Hand machen, wenn man die pq-Formel aus der 7. Klasse benutzt :-)

In[5]:=
```
Reduce[{Ungleichung , x > 0, p > 0, β > 0, γ > 0}, p, Reals]
```

Out[5]=
$$x > 0 \,\&\&\, \gamma > 0 \,\&\& \left(\left(0 < \beta < \frac{x^2}{1+\gamma} \,\&\&\, \frac{x}{\beta} - \sqrt{\frac{x^2-\beta-\beta\gamma}{\beta^2}} \leq p \leq \frac{x}{\beta} + \sqrt{\frac{x^2-\beta-\beta\gamma}{\beta^2}}\right) \,||\, \left(\beta == \frac{x^2}{1+\gamma} \,\&\&\, p == \frac{x}{\beta} - \sqrt{\frac{x^2-\beta-\beta\gamma}{\beta^2}}\right)\right)$$

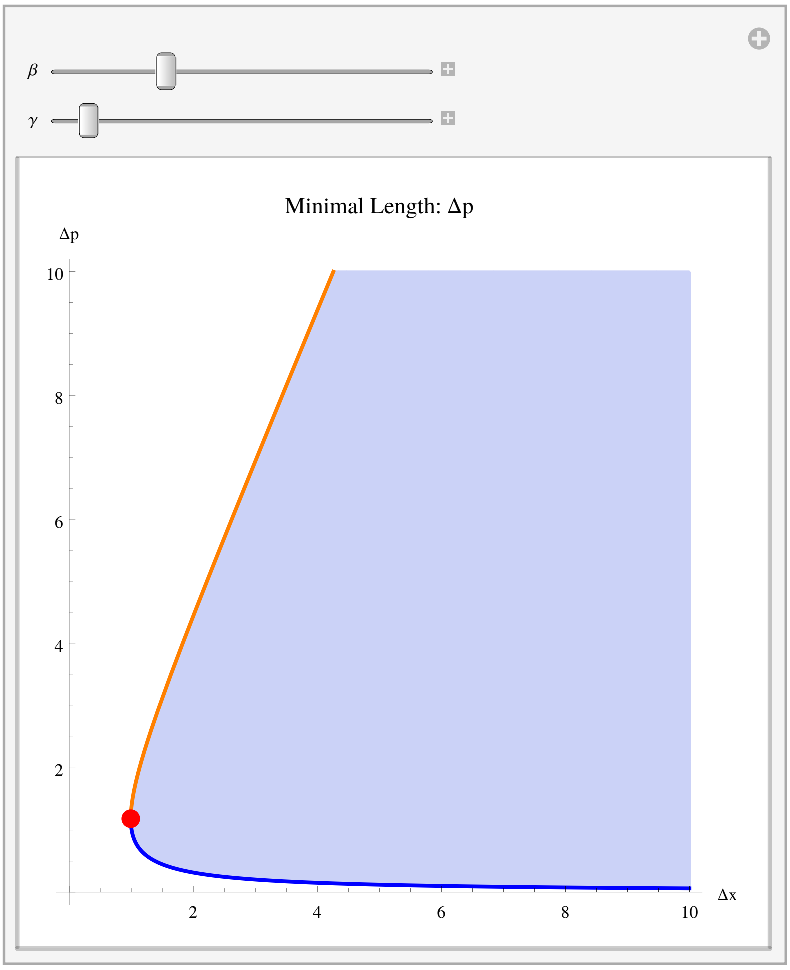
In[6]:=
```
(* sign: Entweder ein Minus (-1) oder Plus (+1). Standard ist +1 *)
```
$$\text{pB[x\_, β\_, γ\_, sign\_: +1]} = \frac{x}{\beta} + \text{sign}\sqrt{\frac{x^2-\beta-\beta\gamma}{\beta^2}}$$

Out[6]=
$$\frac{x}{\beta} + \text{sign}\sqrt{\frac{x^2-\beta-\beta\gamma}{\beta^2}}$$

Den folgenden Plot hat Herr Kempf in sein wohlbekanntes Paper aus 2005 reingepackt. Er entsteht durch Achsenspiegelung (p=x) von obigem Graphen. Eigentlich war das hier eine aufwendige Methode, die Umkehrfunktion zu bestimmen.
Eigentlich gibt es einiges zu sagen: Weil es keine eindeutige Umkehrfunktion gibt, ist das entweder eine Relation oder obige Funktion pB einmal mit sign=+1 und sign=-1 geplottet.
Ich hab außerdem den extremen Δx-Wert als roten Strich kenntlich gemacht. Der schattierte Bereich ist wieder der physikalisch erlaubte.

In[66]:=
```
(* (+1) ist Orange, (-1) ist Minus. *)
Manipulate[
 Show@@Reverse@{Plot[
     Evaluate[pB[x, β, γ, #] & /@ {+1, -1}],
     {x, 0, 10},
     PlotRange → {0, 10},
     ImageSize → Medium,
     PlotStyle → (Directive[#, Thick] & /@ {Orange, Blue})
    ],
    RegionPlot[
     (* Es scheint ein komischer Bug in RegionPlot zu sein,
     dass Evaluate@Ungleichung
        hier nicht funktioniert *)
     p x ≥ 1 / 2 (1 + β p^2 + γ), {x, 0, 10}, {p, 0, 10},
     BoundaryStyle → None,
     (* Der Punkt oben wird irgendwie ueberzeichnet :-( *)
     Epilog → {Red, Disk[{MinimumX[β, γ], MinimumP[β, γ]}, 0.15]},
     Axes → True, Frame → None,
     AxesLabel → {"Δx", "Δp"}, (* WERDEN VERGESSEN *)
     PlotLabel → "Minimal Length: Δp"
    ]
   },
  {{β, 0.84}, 0, 3},
 {{γ, 0.175}, 0, 3}]
```

Out[66]=



Das kleinstmögliche Δx und Δp finden

Minimum durch Ableiten finden:

In[8]:=
```
xB[p, β, γ]
DxB[p_, β_, γ_] = D[xB[p, β, γ], p]
(* Solve ginge auch, gibt aber nicht die ganzen Bedingungen aus! *)
Reduce[DxB[p, β, γ] == 0, p]
```

Out[8]= $\frac{1 + p^2 \beta + \gamma}{2 p}$

Out[9]= $\beta - \frac{1 + p^2 \beta + \gamma}{2 p^2}$

Out[10]= $(\gamma == -1 \,\&\&\, \beta == 0 \,\&\&\, p \neq 0) \,||\, \left(\beta \neq 0 \,\&\&\, \left(p == -\frac{\sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\beta}} \,||\, p == \frac{\sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\beta}}\right) \&\&\, p \neq 0\right)$

Dies sind nun die minimal möglichen Werte für Δp und Δx, die aus der veränderten GUP herauskommen:

In[16]:=
```
MinimumP[β_, γ_] = Sqrt[1 + γ]/Sqrt[β]
MinimumX[β_, γ_] = xB[MinimumP[β, γ], β, γ]
```

Out[16]= $\frac{\sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\beta}}$

Out[17]= $\frac{\sqrt{\beta}\,(2 + 2\gamma)}{2\sqrt{1+\gamma}}$

Diese Koordinate (Δx_{min}, Δp_{min}) sind als rote Punkte in die obigen Graphen eingezeichnet (ggf. muss das Notebook mehrmals evaluiert werden, falls nicht angezeigt).