Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Vierter Korrespondenzbrief vom 29. April 2015

Iterierte Funktionensysteme

In diesem Brief geht es um Funktionen und deren wiederholtes Anwenden. In der Schule habt ihr vielleicht bereits Funktionen[1] kennengelernt, hier wollen wir zunächst etwas allgemeiner darüber sprechen. Danach schauen wir uns an, was man mit Funktionen so alles anstellen kann, insbesondere betrachten wir die sogenannte Fixpunktiteration.

1 Grundlagen

Bevor wir mit Funktionen spielen, wollen wir einige Grundlagen besprechen.

Definition 1. Eine *Funktion* f ist eine Abbildungsvorschrift von einer Menge A in eine Menge B, kurz $f : A \to B$, die jedem Element x aus A *genau ein* Element $f(x)$ aus B zuordnet. Man schreibt auch:

$$f : x \mapsto f(x).$$

A heißt *Definitionsbereich* und B *Bildbereich*.

Was bedeutet das jetzt? Schauen wir uns doch mal ein paar Beispiele an:

Beispiel 2.
a) Die Funktion f, die zu jeder gegebenen reellen Zahl Eins dazu addiert, ist gegeben durch $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1$.

b) Die Abbildung „Verdoppeln“ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann geschrieben werden als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g : x \mapsto 2x$$

oder kürzer als $g(x) = 2x$.

c) Das Runden einer reellen Zahl kann man als eine Funktion h auffassen, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$. So gilt zum Beispiel $h(0{,}321) = 0$, $h(0{,}5) = 1$ und $h(2) = 2$.

Solche Funktionen habt ihr vielleicht schon in der Schule gesehen. Aber Funktionen müssen nicht unbedingt auf Zahlen basieren! Nehmen wir doch mal die Mengen $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$ und $B = \{\clubsuit, \triangle\}$ und die Funktion $h : A \to B$ mit

$$h(x) = \begin{cases} \clubsuit & \text{für } x = \heartsuit, \\ \triangle & \text{für } x = \diamondsuit, \\ \clubsuit & \text{für } x = \spadesuit. \end{cases}$$

[1] Funktionen werden auch manchmal Abbildungen genannt.

Lustig, nicht? So kann man auch mit Symbolen statt Zahlen rechnen.

Auf jeder Menge A gibt es eine besondere Abbildung, und zwar die Identität id_A, die jedes Element auf sich selbst abbildet. Zum Beispiel gilt für $\mathrm{id}_\mathbb{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dass $\mathrm{id}_\mathbb{R}(3{,}7) = 3{,}7$ ist. Diese Abbildung hast du vielleicht in der Schule schon kennengelernt, mit dem Funktionsgraphen als „Winkelhalbierende“, $f(x) = x$. Wenn nicht, macht das aber auch nichts.

Die Identitätsabbildung darf man aber nicht verwechseln mit einer *konstanten Abbildung* $\mathrm{const}_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige gewählte (aber jetzt feste) reelle Zahl ist. Diese Funktion ist definiert mittels $\mathrm{const}_c(x) = c$, das heißt, sie ordnet *jeder* reellen Zahl die gleiche Zahl zu, nämlich c.

Man kann eine Funktion f natürlich dadurch definieren, dass man für jedes Element x das Bildelement $f(x)$ angibt, so wie ich das für h oben gemacht habe. Für sehr große Mengen[2] ist das natürlich unpraktisch. Einfacher ist es, wenn man eine „Formel“ angibt, welche den Funktionswert durch das Argument ausdrückt. Manchmal findet man aber keine einzelne Vorschrift, die für alle Elemente vom Definitionsbereich gilt. Betrachte als Beispiel die Betragsfunktion $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+$, die jeder reellen Zahl eine nichtnegative Zahl zuordnet: Jede Zahl x, die größer oder gleich Null ist, wird auf sich selbst abgebildet. Eine negative Zahl x wird auf $-x$ abgebildet. Man kann also kurz schreiben

$$b(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Solche Fallunterscheidungen liest man übrigens wie folgt: Wenn das Argument x größer oder gleich Null ist, so nimmt b den Wert an, welcher in der Zeile für diesen Fall steht, hier also die obere Zeile, wo $b(x) = x$ notiert ist. Falls aber $x < 0$ gilt, so sind wir auf der unteren Zeile, wo $b(x) = -x$ steht. Für den Betrag einer Zahl x schreibt man üblicherweise die Abkürzung $|x|$, also gilt $b(x) = |x|$. Man bekommt also beispielsweise $b(3{,}7) = |3{,}7| = 3{,}7, b(-5) = 5$ und $b(100 - 3) = 97$ heraus.

Als weiteres Beispiel können wir eine Funktion r definieren, die jeder natürlichen Zahl ihren Rest bei der Division durch 2 zuordnet: $r : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ mit

$$r(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 2 \mid a, \\ 1 & \text{wenn } 2 \nmid a. \end{cases}$$

Hier bedeutet $2 \mid a$, dass 2 ein Teiler von a ist, also a gerade ist, und $2 \nmid a$ genau das Gegenteil.

Aufgabe 1. *Werten wir das doch mal aus! – eine Miniaufgabe*

Hier kannst du mal ein paar Funktionen auswerten: Bestimme $r(3), r(5), h(\heartsuit), b(-5)$! Wenn du schon Funktionen kennst, verrrate mir doch deine momentane Lieblingsfunktion!

Wir sagen, dass es sich in den Fällen von b und r um *abschnittsweise definierte Funktionen* handelt. Abschnittsweise deshalb, weil man verschiedene Fälle haben kann. Bei $f(x) = 2x$ muss man dagegen nicht darauf achten, was man einsetzt – es gibt keine Fälle zu beachten.

[2]Insbesondere gilt dies für unendliche Mengen wie die üblichen Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Da wir uns jetzt ein paar Beispiele von Funktionen angesehen haben, können wir ein wenig mutiger werden und versuchen, Funktionen zu erforschen. Dazu werde ich euch jetzt zwei Begriffe zeigen, vor denen meine Studentinnen und Studenten manchmal am Anfang Angst haben. Dabei ist das alles gar nicht schlimm. Hier kommen sie: *injektiv* und *surjektiv*! Was heißt das jetzt genau?

Gucken wir uns mal die Funktion $z : A \to B$ an, wobei $A = \{\text{Julia}, \text{Sandra}, \text{Martin}\}$, $B = \{\text{Bonbon}, \text{kein Bonbon}\}$ mit

$$z(x) = \begin{cases} \text{Bonbon} & \text{für } x = \text{Julia}, \\ \text{kein Bonbon} & \text{für } x = \text{Sandra}, \\ \text{Bonbon} & \text{für } x = \text{Martin}. \end{cases}$$

Eine Funktion heißt surjektiv, wenn ihr ganzer Bildbereich „getroffen“ wird. Die Funktion z ist surjektiv, da man sowohl *Bonbon*, als auch *kein Bonbon* als Wert bekommt. Wenn man z ändert zu $z(x) = \text{kein Bonbon}$ für alle x aus A, ist sie nicht mehr surjektiv, da der Wert *Bonbon* mit keinem der Werte aus A getroffen wird. (Ziemlich traurig, dieser Fall, da jetzt keines der Kinder mehr Bonbons erhält… Der fröhlichere Fall $z(x) = \text{Bonbon}$ für alle x aus A ist aber auch nicht surjektiv).

Die Funktion z wie zu Beginn beschrieben ist aber nicht injektiv. Injektiv bedeutet, dass zu jedem Fall im Bild, also zu Bonbon und nicht Bonbon nur ein einziges Kind (oder gar keines) existiert, welches diesen Fall auslöst. Das stimmt aber nicht. Sowohl Julia und Martin lösen beide das Bonbon aus.

Aufgabe 2. *Injektiv?*

Kann man z irgendwie so verändern, dass es injektiv wird? Warum nicht?

Gucken wir uns noch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an. Hier wirst du gleich feststellen, dass es ganz wichtig ist, welche Mengen A und B man bei so einer Funktion hinschreibt. Ist f denn surjektiv? Dazu müssen wir uns anschauen ob ganz $\mathbb{R}$ „getroffen“ wird. Das ist aber leider nicht der Fall, weil man zum Beispiel -4 nie als Ergebnis von f herausbekommen wird, egal was man einsetzt[3]. Injektiv ist sie auch nicht, denn 3 und -3 führen beide zum gleichen Wert $f(-3) = 9 = f(3)$.

Wenn man die Funktion ein bisschen anders definiert, klappt es aber. Wir streichen einfach die negativen Zahlen weg und arbeiten mit $\mathbb{R}_0^+$ statt $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist sowohl injektiv als auch surjektiv. Dabei sind in $\mathbb{R}_0^+$ alle positiven reellen Zahlen enthalten, sowie die 0. Das mathematisch sauber zu beweisen ist übrigens nicht schwer, nur etwas technisch und es erfordert etwas höhreres Schulwissen, das können wir also getrost meinen Studentinnen und Studenten überlassen.

Abbildung 1 auf der Rückseite zeigt noch mehr Beispiele. Was die jeweilige Funktion mit den Elementen der Menge macht, habe ich mit den Pfeilen dargestellt. Die Funktion links oben ist surjektiv, denn alle Werte aus B werden getroffen. Injektiv ist sie nicht, denn $f(1) = f(7)$. Die Funktion rechts oben ist injektiv, denn kein Wert in B wird von mehr als einem Element in A „getroffen“, aber da 5 nicht getroffen wird, ist sie nicht surjektiv.

[3] Auch $f(-2)$ ist $+4$, nicht -4!

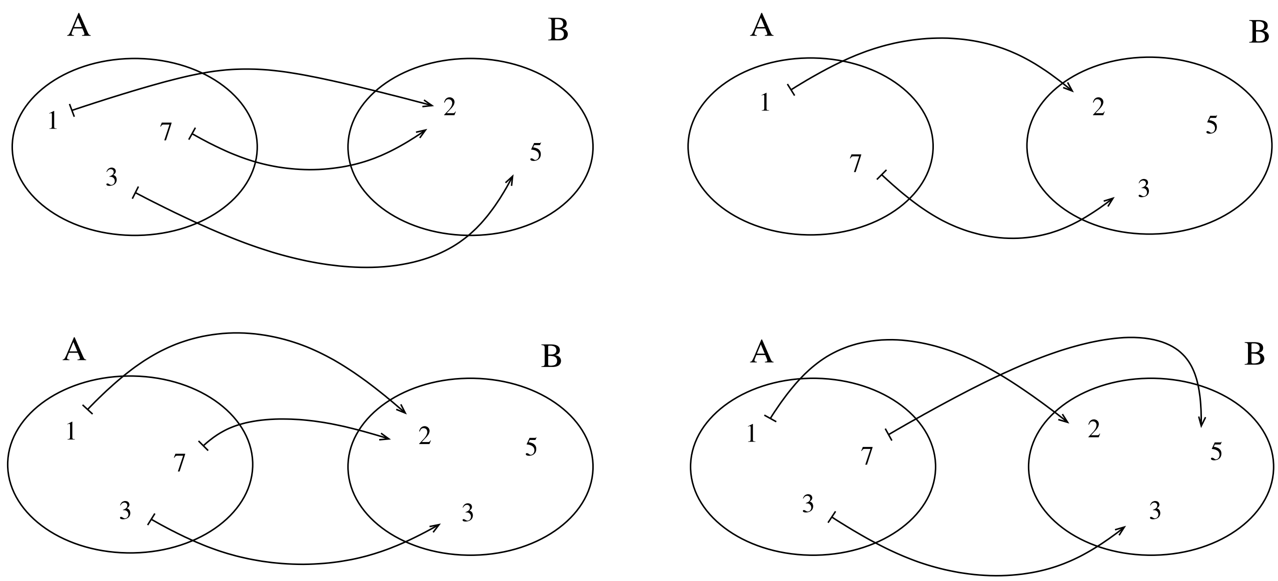

Abbildung 1: Vier verschiedene Abbildungen zwischen unterschiedlichen Mengen.

Links unten ist ein Beispiel einer Funktion, die weder surjektiv noch injektiv ist. Wieder wird 5 nicht getroffen, und $f(1) = f(7)$. Rechts unten ist die Funktion dagegen sowohl surjektiv als auch injektiv.

Aufgabe 3. *Surjektiv und Injektiv*

Jetzt darfst du dir mal ein paar Funktionen angucken und die überlegen, ob sie surjektiv und injektiv sind. Hier sind meine Beispiele:

- Die Funktion $z : A \to B$, wobei $A = \{\text{Huhn}, \text{Kuh}, \text{Schaf}\}, B = \{\text{Ei}, \text{Milch}, \text{Wolle}\}$ mit
$$z(x) = \begin{cases} \text{Ei} & \text{für } x = \text{Huhn}, \\ \text{Milch} & \text{für } x = \text{Kuh}, \\ \text{Wolle} & \text{für } x = \text{Schaf}. \end{cases}$$
- Die Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $b(x) = |x|$.
- Die Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$r(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 2 \mid a, \\ 1 & \text{wenn } 2 \nmid a. \end{cases}$$

Wie kann man bei r den Wertebereiche ändern, um sie surjektiv zu machen? Ist deine Lieblingsfunktion surjektiv und injektiv? Wenn das zu schwierig ist, darfst du sie mir gerne verraten, dann kann ich dir die Antwort darauf geben.

Warum ist das Ganze so spannend? Wenn eine Funktion sowohl surjektiv, als auch injektiv ist, ist sie *umkehrbar*. Man kann ihre Anwednung sozusagen rückgängig machen. Das ist oft sehr praktisch, daher sind solche Funktionen sehr beliebt. Zuerst müssen wir uns dazu allerdings anschauen, wie man zwei Funktionen verknüpft.

Wenn wir zwei Abbildungen f und g haben, können wir beide unter bestimmten Voraussetzungen *miteinander verknüpfen* und so eine neue Funktion erhalten.

Definition 3. Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ zwei Abbildungen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ (ausgesprochen „g nach f“) eine Abbildung von A nach C, die definiert ist als

$$g \circ f : x \mapsto g\,(f(x))$$

oder anders geschrieben

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

das heißt, zuerst wendet man f an und danach g auf das Ergebnis von f.

Bemerkung 4. Beachte, dass die Reihenfolge der Schreibweise ziemlich komisch ist: $g \circ f$ bedeutet, dass f zuerst angewendet wird und nicht g. Das bedeutet, dass man praktisch von innen nach außen vorgeht. Das verknüpfte Abbildung nennt man auch manchmal die *Komposition*.

Beispiel 5. a) Seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto 2x$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g : x \mapsto x^2$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (2x)^2 = 4x^2. \end{aligned}$$

b) Seien jetzt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto x - 3$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g : x \mapsto x^2 + 1$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x-3)^2 + 1. \end{aligned}$$

Achtung: $g \circ f$ ist <u>nicht</u> $x \mapsto x - 3^2 + 1$. Man muss den Funktionsausdruck $x - 3$ nämlich wie eine Zahl in g einsetzen und dadurch wird der ganze Ausdruck quadriert.

Aufgabe 4. *Vertauschen von Kompositionen*

Im Allgemeinen, selbst wenn $f : A \mapsto A$ und $g : A \mapsto A$, haben wir

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

man kann also die Reihenfolge der Funktionen nicht generell vertauschen. Probiere doch mal zwei Funktionen f und g zu finden, so dass $f \circ g$ und $g \circ f$ einen Unterschied macht.

Tipp (falls du nicht weiter kommst): Wir haben uns oben ja schon ein paar Funktionen angeschaut, und aus der Schule kennst du vielleicht auch schon viele. Nimm dir einfach zwei her, und such dir einen beliebigen Wert x aus, zum Beispiel $x = 3$. Und jetzt guckst du, ob $f(g(3)) = g(f(3))$ gilt. Wenn nicht, hast du dein Gegenbeispiel gefunden, prima!

Eine interessante Frage ist, ob man eine gegebene Abbildung “umkehren” kann, also rückgängig machen kann. Das hatten wir uns ja auf der vorigen Seite schon gefragt. Schauen wir uns doch mal die folgende Definition an:

Definition 6. Sei $f : A \longrightarrow B$. Eine Abbildung $f^{-1} : B \longrightarrow A$ heißt *Umkehrabbildung* von f, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \mathrm{id}_B \\ f^{-1} \circ f &= \mathrm{id}_A. \end{aligned}$$

Was soll das nun bedeuten? Wirf mal einen Blick auf den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1}. Das ist genau anders herum als bei f – logo – man will ja auch f sozusagen rückgängig machen. Der Rest der Definition ist ebenfalls einfach zu erklären: Die Gleichheit $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ bedeutet nämlich einfach, dass ich mir jeden Punkt x aus B hernehmen kann und dass dann immer gilt $f(f^{-1}(x)) = x$. Anders herum bedeutet $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, dass man immer $f^{-1}(f(y)) = y$ hat, egal welches y aus A man in diese Verkettung einsetzt. Genau so ein Verhalten will man haben, wenn man eine Umkehrabbildung sucht. Wenn du noch mal einen Blick auf Abbildung 1 wirfst, siehst du, dass man die Abbildung rechts unten umkehren kann. Bei der Umkehrabbildung muss man einfach nur die Pfeile anders herum einzeichnen und dann ist die obige Definition erfüllt.

Aufgabe 5. *Warum geht es bei den anderen nicht?*

Überlege dir doch mal, warum es bei den anderen drei Abbildungen nicht klappt!

2 Iterierte Funktionsysteme

Haben wir eine Funktion $f : A \longrightarrow A$ von einer Menge in sicher selber, können wir diese immer wieder mit sich selbst verknüpfen. Dies bezeichnen wir als iteriertes[4] Funktionsystem f auf A.

Beispiel 7. Wir haben die Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 2, \\ 4 & x = 1 \text{ oder } x = 3, \\ 3 & x = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Aufgabe 6. *Funktionsgraphen*

In der Schule lernt ihr das auch sehr intensiv kennen: Malt den *Funktionsgraphen* von f. Das heißt, ihr tragt in der horizontalen Richtung die x-Werte zum Beispiel von 0 bis 5[5] und in der vertikalen Richtung die zugehörigen Werte von $f(x)$ ab. Dies hilft um sich vorzustellen, was eine Funktion macht.

[4] Iterieren bedeutet einfach Wiederholen.

Da es sehr mühsam ist, mit $\circ$ die Verknüpfung zu schreiben, wenn man eine Funktion ganz oft mit sich selbst verknüpft, gibt es eine verkürzende Schreibweise.

Definition 8. Wir definieren

$$\begin{aligned} f^n &:= \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n Mal}}, \\ f^0 &:= \mathrm{id}_A. \end{aligned}$$

Was bedeutet diese Definition anders erklärt? f^0 bedeutet, dass wir die Funktion 0 Mal, also gar nicht, auf einen Wert x anwenden. Das ist das gleiche, wie die Identitätsfunktion auf x anzuwenden, denn – wir erinnern uns – die lässt den Wert ja unverändert. Und f^n? Das bedeutet einfach, dass man die Funktion n mal auf einen Wert anwendet. Also für $n = 4$ ist $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$. (Jetzt merkst du bestimmt, warum man lieber die kürzere Schreibweise nimmt.)

Beispiel 9. Nehmen wir doch die Funktion f aus Beispiel 7 her. Was ist dann $f^4(1)$? Da $f(1) = 4$, ist $f^2(1) = f(f(1)) = f(4) = 3$, also ist $f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f^2(1)) = f(3) = 4$. Und damit gilt dann $f^4(1) = f(f^3(1)) = f(4) = 3$.

Wozu wollen wir nun überhaupt solche iterierten Funktionen anschauen? Eine mögliche Interpretation ist die folgende: Stellt euch vor, eure Menge A beschreibt gewissen Zustände, in welchen sich ein physikalisches System befinden kann. Zum Beispiel könnte $A = \{\text{Kopf, Zahl}\}$ die Zustände einer Münze beschreiben. Dann könnte $f : A \longrightarrow A$ eine (festgelegte) Änderung dieses Zustands beschreiben und die Anwendung von f entspricht einem „Zeitschritt“ oder einer solchen Änderung. Beispielsweise würde

$$f(x) = \begin{cases} \text{Kopf} & \text{für } x = \text{Zahl}, \\ \text{Zahl} & \text{für } x = \text{Kopf}, \end{cases}$$

dem einmaligen Umdrehen der Münze entsprechen. Das heißt, f^n beschreibt das n-malige Umdrehen der Münze.

Bei einem iterierten Funktionensystem interessiert man sich vor allem, wie sich ein Punkt x verhält, wenn wir die Abbildung sehr oft anwenden. Dazu gibt es den Begriff des Orbits.

Definition 10. Sei x ein Punkt aus A. Der Orbit[6] von x unter A ist die Menge

$$\mathcal{O}^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

Der Orbit scheint also zunächst unendlich zu sein, denn es geht immer weiter...

Beispiel 11. Nehmen wir doch mal den Punkt 1 her. Mit dem System aus Beispiel 7 ist $\mathcal{O}^+(1) = \{1,4,3,4,3,\ldots\}$. Wie geht das denn weiter?

[6] Orbit heißt Laufbahn. Die Bezeichnung kommt daher, dass man sich vorstellt, dass x eine Position eines Punktes ist, der sich nach folgender Regel bewegt: Ist der Punkt zu einem Zeitschritt am Ort x, ist er im nächsten Zeitschritt am Ort $f(x)$.

Aufgabe 7. *Orbit einer Abbildung*

So, jetzt darfst du das mal versuchen!

a) Bestimme den Orbit von 2 unter f aus Beispiel 7.

b) Bestimme den Orbit von 3 unter f aus Beispiel 7.

Aufgabe 8. *Bestimmung des Orbits einer Abbildung mittels des Funktionsgraphen*

a) Stell dir vor, du hast eine beliebige Funktion f als Funktionsgraphen gegeben. Wie kannst du geometrisch ohne zu rechnen $f^n(x)$ für einen Punkt x bestimmen? Überlege dir dazu, mit welcher geometrischen Operation du von einem Wert $y = f(x)$ auf der y-Achse zu dem gleichen Wert auf der x-Achse kommst.

b) Wende das Verfahren auf den Graphen von $f(x) = x^2$ für ein x kleiner als 1 an und danach auf ein x größer als 1. Fertige die Zeichnungen sorgfältig an!

Das einfachste Verhalten ist natürlich, wenn der Orbit nur aus einem Punkt besteht. In diesem Fall hat der Punkt einen besonderen Namen.

Definition 12. Ein Punkt x^* heißt Fixpunkt, wenn gilt $f(x^*) = x^*$.

Fixpunkte sind bei Mathematikerinnen und Mathematikern sehr beliebt, weil sie einfach schön sind. Darum nennen Mathematiker sie auch fast immer x^*, weil Sternchen auch so schön sind.

Beispiel 13. Gucken wir uns doch mal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, mit $f(x) = x^2 + 3x$. Ein Fixpunkt ist Lösung der Gleichung $f(x) = x$, also $x^2 + 3x = x$. Und das kann man ziemlich leicht lösen, denn wir subtrahieren einfach x und bekommen $x^2 + 2x = 0$. Jetzt kann man ein x ausklammern und wir haben $x(x + 2) = 0$. Als Lösung kommt also $x^* = 0$ oder $x^* = -2$ infrage und das sind tatsächlich Fixpunkte.

Aufgabe 9. *Fixpunkte – sie sind einfach überall!*

Bestimme die Fixpunkte der Funktionen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, mit $f(x) = x^3 - 3x$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, mit $f(x) = -x^2 + x + 1$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, mit $f(x) = -x^2 + 1$.[7]

Ein Fixpunkt der letzten Funktion ist übrigens der goldene Schnitt! Wenn du den nicht kennst, ist das gar nicht schlimm, aber es ist schon erstaunlich, was sich so alles als Fixpunkt entpuppen kann, nicht wahr?

[7] Hier benötigt man die sogenannte „Mitternachtsformel". Die heißt so, weil es eine der wenigen Formeln in der Mathematik ist, die so oft benutzt wird, dass man sie auch mitten in der Nacht auswendig aufsagen können muss. Sie besagt, dass wenn $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $ax^2 + bx + c = 0$ ist, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig sind, dann gibt es zwei Möglichkeiten für x und zwar $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Manchmal lässt sich ein Fixpunkt nicht so einfach ausrechnen, weil es sehr komplizierte Funktionen gibt. Aber man kann ihn manchmal trotzdem mit dem Taschenrechner annähern, was ich dir jetzt zeigen werde. Wenn man eine Funktion f hat und man möchte das Fixpunktproblem $f(x) = x$ näherungsweise lösen, geht man wie folgt vor: Man nimmt einen beliebigen Wert x_0 als Startwert. Am besten ist es, wenn der Wert in der Nähe des vermuteten Fixpunktes liegt, aber das ist im Allgemeinen natürlich schwierig, weil man den Fixpunkt nicht kennt. Und jetzt wendet man einfach wiederholt f auf diesen Wert an. Schauen wir das Beispiel $f(x) = \frac{1}{2}x$ an. Als Startwert nehmen wir einfach mal $x_0 = 5$. Jetzt berechnen wir $x_1 = f(x_0) = \frac{5}{2}, x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = \frac{5}{4}, \ldots$. Auf dem Taschenrechner kann man mit der *ANS-Taste* ganz leicht viele Schritte machen. Du wirst sehen, dass der Wert sich immer mehr der 0 annähert und diese ist ein Fixpunkt von f.

Leider klappt dieses Verfahren nicht immer. Probier es mal mit verschiedenen Startwerten und $f(x) = x^3 - 3x$ aus!

Zum Abschluss noch ein Teaser.

Vielleicht hast du dich schon mal gefragt, wie man eigentlich ohne Probieren Lösungen von Gleichungen finden kann. Das ist meistens sehr schwer, tatsächlich kann man die meisten Gleichungen gar nicht durch Umstellen lösen. Stattdessen interessiert man sich oft für sogenannte *Näherungslösungen*, also Zahlen, die sehr nah an der tatsächlichen Lösung liegen. Für viele praktische Anwendungen reicht dies bereits. Ohne jetzt die Hintergründe einer solchen Methode, zum Beispiel dem sogenannten *Newton-Verfahren*, ansprechen zu wollen, zeige ich dir hier die Formel: Wenn man eine „normierte kubische Gleichung“ hat, zum Beispiel

$$x^3 - 2x - 9 = 0,$$

dann kann man die Funktion

$$x \mapsto x - \frac{x^3 - 2x - 9}{3x^2}$$

iterieren, um eine Lösung der Gleichung zu finden. Nimm also einen Taschenrechner, gib irgendeine Anfangszahl ein, und gib dann die folgende Formel ein:

$$\mathrm{ANS} - (\mathrm{ANS}^3 - 2 \cdot \mathrm{ANS} - 9) : (3 \cdot \mathrm{ANS}^2).$$

Drücke dann mehrmals ANS, was ca. 2,4 geben wird – eine Lösung dieser Gleichung.

Aufgabe 10. *Noch kompliziertere Gleichungen*

Versuche das Verfahren mal mit der Gleichung

$$x^4 + x^2 - 9 = 0.$$

Dabei musst du im Zähler den Term ersetzen und im Nenner $4x^3$ statt $3x^2$ schreiben. Was passiert, wenn du das Verfahren auf die Gleichung

$$x^4 + 1 = 0$$

anwendest?