GPS kerfið, skekkjumögnun og aðferð minnstu fervika fyrir ólínuleg föll

Daníel Einar Hauksson
Gísli Björn Helgason
Sverrir Kristinsson

Kennari
Birgir Hrafnkelsson

Verkefni fyrir STÆ405G

Töluleg greining
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
Mars 2020

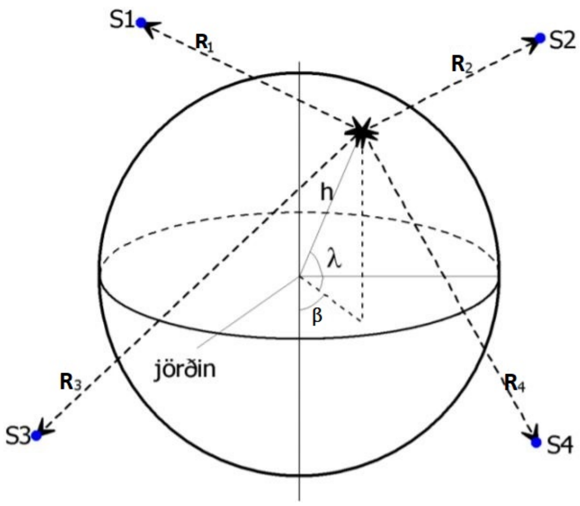
Efnisyfirlit

Myndaskrá

Töfluskrá

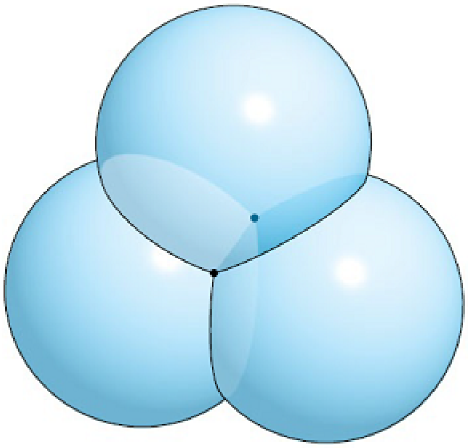
1. Inngangur

`GPS` (Global Positioning System) er staðsetningarkerfi byggt á 24 gervitunglum sem komið var upp af bandaríska hernum. Tunglin eru útbúin atómklukkum og eru á braut um jörðu í 20.200 km hæð. Á hverjum tíma og á hverjum stað á yfirborði jarðar eru fimm til átta gervitungl í beinni sjónlínu. Hver hnöttur sendir út vandlega samstillt merki frá fyrirfram ákvörðuðum staðsetningum í átt að GPS móttökurum/tækjum á yfirborðinu. GPS tækin nota þessi merki til að ákvarða nákvæma (x, y, z) staðsetningu sína.



Mynd 1.1: GPS staðsetning ákvörðuð með fjórum gervitunglum (Magnús Tumi Guðmundsson, 2020)

Á ákveðnu augnabliki berst GPS tæki merki frá i-ta gervitungli. Tækið ákvarðar `aðfærslutíma` merkisins t_i, sem er tímasmismunurinn á móttöku og útsendingu merkisins. Merkið berst á ljóshraða, $c \approx 299792.458\ km/s$, og má því ákvarða fjarlægðina milli hnattarins og tækisins með $R_i = ct_i$. Þetta staðsetur tækið á yfirborði kúluskeljar með miðju í staðsetningu hnattarins og radíus ct_i. Ef þrír hnettir standa til boða, þá eru þrjár kúluskeljar þekktar sem hafa tvo sameiginlega skurðpunkta. Annar skurðpunkturinn er staðsetning GPS tækisins. Hinn punkturinn er oftast langt frá yfirborði jarðar og má því auðveldlega horfa fram hjá honum. Fræðilega séð þarf því aðeins þrjá hnetti til að ákvarða staðsetningu GPS tækisins og felst úrvinnslan í að finna þessa sameiginlegu skurðpunkta.



Mynd 1.2: Þrjár kúluskeljar sem skerast í tveimur punktum (Sauer, 2014)

Í raun eru verulegir vankantar á þessari lausnaraðferð. Einn skekkjuvaldur er ákvörðun á aðfærslutíma merkjanna. Þrátt fyrir að útsendingar merkja frá gervihnöttum séu mjög nákvæmlega tímasettar, þá geta GPS tækin sjálf verið með frekar ónákvæmt tímaskyn. Ef lausnarjöfnunar þrjár eru leystar með ögn ónákvæmum aðfærslutímum getur staðsetningin verið röng upp á marga kílómetra. Hægt er að leiðrétta fyrir þessu með því að bæta við einum gervihnetti. Nú er d skilgreint sem tímamunur á milli samstilltu klukkunnar sem gervihnettirnir styðjast við og klukkunnar í GPS tækinu. Staðsetning gervihnattar i er (A_i, B_i, C_i). Þá uppfyllir sannur skurðpunktur (x, y, z) jöfnurnar

$$\begin{aligned}
r_1(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_1)^2+(y-B_1)^2+(z-C_1)^2} - c(t_1-d) = 0 \\
r_2(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_2)^2+(y-B_2)^2+(z-C_2)^2} - c(t_2-d) = 0 \\
r_3(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_3)^2+(y-B_3)^2+(z-C_3)^2} - c(t_3-d) = 0 \\
r_4(x,y,z,d) &= \sqrt{(x-A_4)^2+(y-B_4)^2+(z-C_4)^2} - c(t_4-d) = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

sem þarf að leysa m.t.t. óþekktu stærðanna x, y, z, d. Lausn á þessu hneppi gefur ekki aðeins staðsetningu GPS tækisins, heldur einnig réttan tíma út frá klukkum gervihnattanna þar sem d er þekkt. Þannig má koma í veg fyrir þá skekkju sem ónákvæma klukka GPS tækisins getur valdið.

Fjórar kúluskeljar þurfa rúmfræðilega ekki að hafa sameiginlegan skurðpunkt, en þær gera það ef radíusinn er aukinn eða minnkaður um rétta sameiginlega stærð. Með einfaldri algebru fæst eftirfarandi hneppi út frá (1.1):

$$\begin{aligned}
[c(t_1-d)]^2 &= (x-A_1)^2+(y-B_1)^2+(z-C_1)^2\\
[c(t_2-d)]^2 &= (x-A_2)^2+(y-B_2)^2+(z-C_2)^2\\
[c(t_3-d)]^2 &= (x-A_3)^2+(y-B_3)^2+(z-C_3)^2\\
[c(t_4-d)]^2 &= (x-A_4)^2+(y-B_4)^2+(z-C_4)^2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Með því að draga seinustu þrjár jöfnur (1.2) frá fyrstu jöfnu (1.2) fást eftirfarandi línulegar jöfnur:

$$\begin{aligned}
c^2(t_1^2-t_2^2)+2c^2d(t_2-t_1) &= 2x(A_2-A_1)+2y(B_2-B_1)+2z(C_2-C_1)\\
&\quad + A_1^2-A_2^2+B_1^2-B_2^2+C_1^2-C_2^2\\
c^2(t_1^2-t_3^2)+2c^2d(t_3-t_1) &= 2x(A_3-A_1)+2y(B_3-B_1)+2z(C_3-C_1)\\
&\quad + A_1^2-A_3^2+B_1^2-B_3^2+C_1^2-C_3^2\\
c^2(t_1^2-t_4^2)+2c^2d(t_4-t_1) &= 2x(A_4-A_1)+2y(B_4-B_1)+2z(C_4-C_1)\\
&\quad + A_1^2-A_4^2+B_1^2-B_4^2+C_1^2-C_4^2
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Á vigurformi má skrifa jöfnur (1.3) sem

$$x\vec{u}_x+y\vec{u}_y+z\vec{u}_z+d\vec{u}_d+\vec{w}=\vec{0} \tag{1.4}$$

þar sem

$$\begin{aligned}
\vec{u}_x = 2\begin{bmatrix}A_2-A_1\\A_3-A_1\\A_4-A_1\end{bmatrix},\ \vec{u}_y = 2\begin{bmatrix}B_2-B_1\\B_3-B_1\\B_4-B_1\end{bmatrix},\\
\vec{u}_z = 2\begin{bmatrix}C_2-C_1\\C_3-C_1\\C_4-C_1\end{bmatrix},\ \vec{u}_d = 2c^2\begin{bmatrix}t_1-t_2\\t_1-t_3\\t_1-t_4\end{bmatrix},\\
\vec{w} = \begin{bmatrix}A_1^2-A_2^2+B_1^2-B_2^2+C_1^2-C_2^2+c^2(t_2^2-t_1^2)\\A_1^2-A_3^2+B_1^2-B_3^2+C_1^2-C_3^2+c^2(t_3^2-t_1^2)\\A_1^2-A_4^2+B_1^2-B_4^2+C_1^2-C_4^2+c^2(t_4^2-t_1^2)\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Jafna (1.4) gefur

$$0=\det[\,\vec{u}_y\,|\,\vec{u}_z\,|\,x\vec{u}_x+y\vec{u}_y+z\vec{u}_z+d\vec{u}_d+\vec{w}\,] \tag{1.6}$$

og með því að nýta sér það að seinasti dálkur ákveðunnar er línuleg samantekt af $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$, $\vec{u}_d$ og $\vec{w}$ og það að fylki sem hefur tvo eins dálka hefur ákveðu 0 fæst

$$0=x\det[\,\vec{u}_y\,|\,\vec{u}_z\,|\,\vec{u}_x\,]+d\det[\,\vec{u}_y\,|\,\vec{u}_z\,|\,\vec{u}_d\,]+\det[\,\vec{u}_y\,|\,\vec{u}_z\,|\,\vec{w}\,] \tag{1.7}$$

sem gefur x sem fall af d. Eins er hægt að finna y og z sem fall af d og með því að stinga inn í fyrstu jöfnu (1.2) og einfalda fæst annars stigs margliðujafnan

$$a_2 d^2 + a_1 d + a_0 = 0 \tag{1.8}$$

þar sem

$$a_2 = \left(\frac{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_d\,]}{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_x\,]} \right)^2 + \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_d\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_y\,]} \right)^2 + \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_d\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z\,]} \right)^2 - c^2,$$

$$\begin{aligned} a_1 = 2 &\left(\frac{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_d\,]\ \det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{w}\,]}{(\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_x\,])^2} \right) \\ +2 &\left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_d\,]\ \det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{w}\,]}{(\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_y\,])^2} \right) \\ +2 &\left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_d\,]\ \det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{w}\,]}{(\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z\,])^2} \right) \\ &+2A_1 \left(\frac{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_d\,]}{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_x\,]} \right) \\ &+2B_1 \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_d\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_y\,]} \right) \\ &+2C_1 \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_d\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z\,]} \right) \\ &+2c^2 t_1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} a_0 = &\left(\frac{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{w}\,]}{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_x\,]} \right)^2 + \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{w}\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_y\,]} \right)^2 + \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{w}\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z\,]} \right)^2 \\ &+2A_1 \left(\frac{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{w}\,]}{\det[\,\vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_x\,]} \right) + 2B_1 \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{w}\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_z \,|\, \vec{u}_y\,]} \right) \\ &+2C_1 \left(\frac{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{w}\,]}{\det[\,\vec{u}_x \,|\, \vec{u}_y \,|\, \vec{u}_z\,]} \right) + \left(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \right) - c^2 t_1^2. \end{aligned}$$

Með þessum upplýsingum er hægt að finna tvær lausnir á d með því að finna rætur margliðunnar í jöfnu (1.8). Síðan verður að ákveða út frá samhengi hvor lausnin hentar. Staðsetningin (x, y, z) fæst svo með því að nota jöfnu (1.7) og sambærilegar jöfnur.

Annar skekkjuvaldur við ákvörðun á GPS staðsetningu kemur til sögu þegar gervihnettirnir eru nálægt hvor öðrum. Þá verður lausn á jöfnu (1.1) illa skilyrt. Einnig felst skekkja í þeirri staðreynd að útbreiðsluhraði GPS merkjanna er ekki nákvæmlega c. Raftruflanir í jónahvolfinu hafa dálítil áhrif á útbreiðsluhraða bylgjunnar. Einnig verða truflanir í veðrahvolfinu því loftraki hefur áhrif á bylgjuhraðann. Síðan veldur endurkast frá fjöllum truflunum því merkin fara eftir mismunandi brautum (e. multipath errors).

Hér eftir er stuðst við þrívítt hnitakerfi sem á upphafspunkt í miðju jarðar (radíus jarðar er $\approx 6370\, km$) (sjá mynd 1.1) með jákvæða z-stefnu í norður.

2. Tölulegar lausnir

Við lausn verkefnisins er notast við hugbúnaðinn `Matlab`. Kóðinn er byggður þannig upp að eitt aðalfall, sem hefur ekkert inntak, skilgreinir og kallar á hjálparföll sem leysa hvern lið fyrir sig. Til að leysa verkefnið þarf því aðeins eina keyrslu.

2.1. Jöfnuhneppið leyst með aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir

Skilgreint er hjálparfallið `GPS_Newton` sem tekur inn vigrana $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{t}$ og $\vec{I}$ og skilar vigrinum $\vec{v}$. $\vec{A}$ geymir x-hnit fjögurra gervitungla, $\vec{B}$ geymir y-hnitin og $\vec{C}$ z-hnitin. $\vec{t}$ geymir mældu aðfærslutímana og $\vec{I}$ er upphafsgisk (x_0, y_0, z_0, d_0) á staðsetningu GPS tækisins og tímamuninum. Svarið $\vec{v}$ er svo (x, y, z, d); staðsetning og tímamunur. Fallið býr til vigurinn $\vec{F}(\vec{v}) = (r_1, r_2, r_3, r_4) = \vec{0}$ samkvæmt jöfnum (1.1). `Jacobi-fylkið` $D\vec{F}(\vec{v})$ er reiknað og síðan er ítrað samkvæmt aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir þar til $\vec{F}(\vec{v})$ kemst mjög nálægt $\vec{0}$.

```
function v = GPS_Newton(A,B,C,t,I)
    v = I;
    c = 299792.458;
    DF = zeros(4);
    tol = 1e-10;
    while 1
        S = sqrt((v(1)-A).^2+(v(2)-B).^2+(v(3)-C).^2);
        F = S - c*(t-v(4));
        if norm(F) < tol
            break
        end
        DF(:,1) = (v(1)-A)./S;
        DF(:,2) = (v(2)-B)./S;
        DF(:,3) = (v(3)-C)./S;
```

```
        DF(:,4) = c*ones(4,1);
        s = DF\(-F);
        v = v + s;
    end
end
```

Til þess að finna staðsetningu GPS tækis á jörðinni út frá gefnum staðsetningum fjögurra gervitungla (km) og mældum aðfærslutímum (sek) er skilgreint hjálparfallið `lidur1`. Það býr til viðeigandi vigra út frá upplýsingunum ásamt því að búa til góðan upphafsvigur, og kallar á `GPS_Newton` með vigrana sem inntak. Það skilar svo vigrinum $\vec{v} = (x, y, z, d)$ sem er staðsetning GPS tækisins (km) og tímamismunur (sec) á klukku GPS tækisins og klukku gervitunglanna.

```
function v = lidur1
    A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
    B = [7540, 2750, 14630, 610]';
    C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
    t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
    I = [0, 0, 6370, 0]';
    v = GPS_Newton(A,B,C,t,I);
end
```

Skipunin `v1=lidur1` gefur svarið við fyrsta liðnum.

```
v1 =

   1.0e+03 *

  -0.041772709570896
  -0.016789194106544
   6.370059559223332
  -0.000003201565830
```

2.2. Jöfnuhneppið leyst með annars stigs margliðu í einni breytistærð

Skilgreint er hjálparfallið `GPS_quadratic` sem tekur inn vigrana $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ og $\vec{t}$ og skilar vigrinum $\vec{v}$. Vigrarnir eru þeir sömu og í fyrri lið. Fallið byrjar á að búa til vigrana $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$, $\vec{u}_d$ og $\vec{w}$ samkvæmt jöfnum (1.5). Síðan býr það til 3×3 fylkið D sem geymir allar ákveðurnar sem reikna þarf fyrir jöfnur (1.9). Fylkið E og vigurinn F eru notuð til að einfalda og stytta skriftir. Síðan eru stuðlarnir a_2, a_1 og a_0 fundnir samkvæmt jöfnum (1.9). Lausnir á d fást með því að finna rætur margliðunnar í (1.8). Hér er minni lausnin valin því hún hentar betur. Að lokum er (x, y, z) fengið með jöfnu (1.7).

```
function v = GPS_quadratic(A,B,C,t)
    c = 299792.458;
    ux = 2*(A(2:4)-A(1));
    uy = 2*(B(2:4)-B(1));
    uz = 2*(C(2:4)-C(1));
    ud = 2*c^2*(t(1)-t(2:4));
    w = A(1)^2-A(2:4).^2 + B(1)^2-B(2:4).^2 ...
        + C(1)^2-C(2:4).^2 + c^2*(t(2:4).^2-t(1)^2);
    D = zeros(3);
    D(1,1) = det([uy uz ud]);
    D(1,2) = det([uy uz w]);
    D(1,3) = det([uy uz ux]);
    D(2,1) = det([ux uz ud]);
    D(2,2) = det([ux uz w]);
    D(2,3) = det([ux uz uy]);
    D(3,1) = det([ux uy ud]);
    D(3,2) = det([ux uy w]);
    D(3,3) = det([ux uy uz]);
    E = zeros(3,2);
    E(:,1) = D(:,1) ./ D(:,3);
    E(:,2) = D(:,2) ./ D(:,3);
    F = [A(1), B(1), C(1)]';
    a2 = E(:,1)'*E(:,1) - c^2;
    a1 = 2*E(:,1)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,1) + 2*c^2*t(1);
    a0 = E(:,2)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,2) + F'*F - c^2*t(1)^2;
    d = min(roots([a2 a1 a0]));
    v = zeros(4,1);
    v(1:3) = -d*E(:,1)-E(:,2);
    v(4) = d;
end
```

Til þess að leysa sama dæmi og fyrsti liður gerir, en nú með því að finna rætur annars stigs margliðu í einni breytistærð, er skilgreint hjálparfallið `lidur2`. Það er alveg eins og `lidur1` fyrir utan það að það er enginn upphafsvigur. Fallið kallar á `GPS_quadratic` og skilar vigrinum $\vec{v} = (x, y, z, d)$ sem stendur fyrir það sama og í fyrsta liðnum.

```
function v = lidur2
    A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
    B = [7540, 2750, 14630, 610]';
    C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
    t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
    v = GPS_quadratic(A,B,C,t);
end
```

Með skipuninni `v2=lidur2` fæst eftirfarandi lausnarvigur.

```
v2 =

   1.0e+03 *

  -0.041772709570827
  -0.016789194106526
   6.370059559223341
  -0.000003201565830
```

2.3. Jöfnuhneppið leyst með annars stigs margliðu í einni breytistærð með aðstoð Symbolic Toolbox

Líkt og í liðnum á undan eru vigrarnir $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ og $\vec{t}$ notaðir til þess að búa til vigrana $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$, $\vec{u}_d$ og $\vec{w}$ samkvæmt jöfnum (1.5). Því næst er notað `Symbolic Toolbox` til þess að reikna út breyturnar x, y og z sem fall af d út frá jöfnu (1.6). Þeim samböndum er svo stungið inn í jöfnur (1.2) til að fá annars stigs margliðu með óþekktu stærðinni d. Neikvæða gildi d er svo notað til þess að reikna út staðsetninguna út frá samböndum stærðanna og þeim gildum komið fyrir í vigrinum $\vec{v}$ líkt og áður.

```
function v = lidur3
    A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
    B = [7540, 2750, 14630, 610]';
    C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
    t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
    c = 299792.458;

    w = zeros(3,1);
    w(1,1) = (A(1,1)^2-A(2,1)^2 + B(1,1)^2-B(2,1)^2 + ...
        C(1,1)^2-C(2,1)^2 + c^2*(t(2,1)^2-t(1,1)^2))/2;
    w(2,1) = (A(1,1)^2-A(3,1)^2 + B(1,1)^2-B(3,1)^2 + ...
        C(1,1)^2-C(3,1)^2 + c^2*(t(3,1)^2-t(1,1)^2))/2;
    w(3,1) = (A(1,1)^2-A(4,1)^2 + B(1,1)^2-B(4,1)^2 + ...
        C(1,1)^2-C(4,1)^2 + c^2*(t(4,1)^2-t(1,1)^2))/2;

    ux = [(A(2,1)-A(1,1)),(A(3,1)-A(1,1)),(A(4,1)-A(1,1))]';
    uy = [(B(2,1)-B(1,1)),(B(3,1)-B(1,1)),(B(4,1)-B(1,1))]';
    uz = [(C(2,1)-C(1,1)),(C(3,1)-C(1,1)),(C(4,1)-C(1,1))]';
    ud = [c^2*(t(1,1)-t(2,1)),c^2*(t(1,1)-t(3,1)), ...
            c^2*(t(1,1)-t(4,1))]';

    syms x y z d

    Ax = [uy,uz,x.*ux + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t x
    Ay = [ux,uz,y.*uy + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t y
    Az = [ux,uy,z.*uz + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t z

    rx = solve(det(Ax)==0,x); %fundið x sem fall af d
    ry = solve(det(Ay)==0,y); %fundið y sem fall af d
    rz = solve(det(Az)==0,z); %fundið z sem fall af d

    %jöfnur 4.38 sem fall af d
    j1 = (rx-A(1,1))^2 + (ry-B(1,1))^2 + (rz-C(1,1))^2 ...
        - (c*(t(1,1)-d))^2;
    j2 = (rx-A(2,1))^2 + (ry-B(2,1))^2 + (rz-C(2,1))^2 ...
        - (c*(t(2,1)-d))^2;
    j3 = (rx-A(3,1))^2 + (ry-B(3,1))^2 + (rz-C(3,1))^2 ...
        - (c*(t(3,1)-d))^2;
    j4 = (rx-A(4,1))^2 + (ry-B(4,1))^2 + (rz-C(4,1))^2 ...
        - (c*(t(4,1)-d))^2;

    d1 = roots(sym2poly(j1));
    d2 = roots(sym2poly(j2));
    d3 = roots(sym2poly(j3));
    d4 = roots(sym2poly(j4));

    d = d1(d1<0); %veljum neikvæðu lausnina
    rx = matlabFunction(rx); ry = matlabFunction(ry);
```

```
    rz = matlabFunction(rz);
    %fundið x,y og z Ã°t frá d
    x = rx(d);
    y = ry(d);
    z = rz(d);
    v = [x,y,z,d]';

end
```

Skipunin `v3 = lidur3` skilar lausnarvigrinum.

```
v3 =

   1.0e+03 *

  -0.041772709570836
  -0.016789194106526
   6.370059559223343
  -0.000003201565830
```

2.4. Mögnun tímaskekkju

Skilgreindir eru vigrarnir $\vec{A}$, $\vec{B}$ og $\vec{C}$ sem innihalda staðsetningar þeirra fjögurra gervihnatta sem notaðir eru og er hvert stak vigranna ákvarðað út frá pólhnitum.

$$\begin{aligned}
A_i &= \rho\cos(\phi_i)\cos(\theta_i)\\
B_i &= \rho\cos(\phi_i)\sin(\theta_i)\\
C_i &= \rho\sin(\phi_i)
\end{aligned}$$

Þar sem $\rho = 26570\,km$ og ϕ og θ ótiltekin horn sem uppfylla skorðurnar $0 \leq \phi \leq \pi/2$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sem tryggir að gervihnettirnir séu staðsettir á norðurhveli jarðar. Skilgreind er staðsetningin sem skekkjan er reiknuð út frá, $x = 0$, $y = 0$, $z = 6370$ og $d = 0.0001$. Út frá fyrrnefndum gildum er svo reiknuð fjarlægð hvers gervihnattar frá staðsetningunni, $R_i = \sqrt{(A_i - x)^2 + (B_i - y)^2 + (C_i - z)^2}$ og mældur aðfærslutími $t_i = d + R_i/c$. Í raun eru klukkur gervihnatta nákvæmar upp á $\Delta t = 10^{-8}\,sek$. Klukka hvers tungls getur annaðhvort verið of sein eða of fljót um Δt. Ekki er litið á þau tilvik þegar allir gervihnettirnir hafa sömu skekkju svo í heildina eru 14 mögulegar útfærslur á tímaskekkju kerfisins.

Búið er til hjálparfallið `lidur4` sem skilgreinir þau horn sem notuð eru og skekkjusamsetningar kerfisins. Fallið kallar á hjálpafallið `GPS_Newton` með inntakinu $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{td}$ og $\vec{I}$ þar sem $\vec{I}$ er ótiltekið upphafsgisk og $\vec{td}$ er aðfærslutíminn með skekkju, $td_i = t_i \pm \Delta t$. Vigurinn $\vec{v}$ sem fæst með hjálparfallinu er svo borinn saman við réttu staðsetninguna. Að lokum er reiknuð **skekkjumögnun** (e. error magnification factor) þar sem gert er ráð fyrir að **inntaksskekkjan** (e. backward error) sé tímaskekkjan, í metrum, $c\Delta t$ og **úttaksskekkjan** (e. forward error) sé stærsta stak skekkjuvigursins í metrum

$$\text{skekkjumögnun} \equiv \frac{\|\Delta x, \Delta y, \Delta z\|_\infty}{c\,\|\Delta t_1, ..., \Delta t_4\|_\infty}.$$

Ferlið er ítrað fyrir hverja skekkjusamsetningu og skekkjumögnunin ásamt staðsetningaskekkju reiknuð. Út frá skekkjumögnuninni er hægt að áætla **ástandstölu** verkefnisins. Ástandstala fylkis er skilgreind sem hæsta möguleg skekkjumögnun fylkisins og því er áætlað að ástandstala verkefnisins sé hæsta skekkjumögnun sem fæst.

```
function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = lidur4
    hro = 26570;
    delt = 10^-8;
    magnification_error = 0;
    skekkja = zeros(4,1);
    theta = [0 2 4 6];
    phi = [0.2 0.6 1 1.4];
    einnminus  = unique(perms([-1 1 1 1]),'rows');
    tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]),'rows');
    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]),'rows');
    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];
    for n = 1:14
        A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
        R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
        x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
        for i = 1:4
            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
            C(i) = hro * sin(phi(i));
            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
            t(i) = d + R(i)/c;
            td(i) =  t(i) + deltan(n,i)*delt;
        end

        I = [0,0,6500,0.2]'; %upphafsgisk

        x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);

```

```
        del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
        magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification error
        if magn > magnification_error
            magnification_error = magn;
            skekkja = del;
            delta_samsetning = deltan(n,:);
        end
    end
    skekkja = sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
    %hámarksskekkja í metrum
end
```

Skipunin `[cond4,skekkja4,delta_samsetning4] = lidur4` skilar eftirfarandi lausnarvigri:

```
cond4 =

   3.109583198382170


skekkja4 =

  10.530228588033173


delta_samsetning4 =

    -1     -1     -1      1
```

2.5. Klösun gervihnatta

Hér er liður 2.4 endurtekinn með fjóra gervihnetti sem eru í lítilli fjarlægð frá hvor öðrum. Það er gert með því að velja ϕ_i innan við 5% frá hvert öðru og θ_i innan við 5% frá hvert öðru. Tímaskekkja er meðhöndluð líkt og í fyrri lið. Fallið `lidur5` leysir þetta verkefni og skilar út hæstu mögnunar- og staðsetningarskekkju og tilsvarandi samsetningu á tímaskekkju.

```
function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = lidur5
    hro = 26570;
    A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
    R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
    x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
    delt = 10^-8;
    magnification_error = 0;
    skekkja = zeros(4,1);
    phi = [1 1.03 1.01 1.02];
    theta = [2.5 2.55 2.4 2.3];
    einnminus  = unique(perms([-1 1 1 1]),'rows');
    tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]),'rows');
    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]),'rows');
    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];

    for n = 1:14
        for i = 1:4
            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
            C(i) = hro * sin(phi(i));
            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
            t(i) = d + R(i)/c;
            td(i) =  t(i) + deltan(n,i)*delt;
        end

        I = [100,1000,1000,0.2]'; %upphafsgisk
        x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);

        del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
        magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification error
        if magn>magnification_error
            magnification_error = magn;
            skekkja = del;
            delta_samsetning = deltan(n,:);
        end
    end
    skekkja = sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
    %hámarksskekkja í metrum
end
```

Með skipuninni `[cond5,skekkja5,delta_samsetning5] = lidur5` fæst lausnarvigurinn:

```
cond5 =

     8.360164790275777e+02


skekkja5 =

     3.069279400886975e+03


delta_samsetning5 =

    -1     1     1    -1
```

2.6. Fjölgun gervihnatta

Enn og aftur er liður 2.4 endurtekinn en í þetta sinn er gervihnöttum fjölgað um 4 svo þeir verða í heildina 8. Fallið `lidur6` er því svipað upp sett og `lidur4` nema staðsetningar 8 gervihnatta eru reiknaðar. Fjöldi gervihnattanna veldur því að erfitt er að finna lausn með aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir. Þess í stað er notast við Gauss-Newton aðferð til þess að finna lausnina. Til þess er hjálparfallið `GPS_GaussNewton` skilgreint. Fallið tekur inn sömu breytistærðir og `GPS_Newton` og skilar einnig staðsetningunni og tímamuninum í vigrinum $\vec{u} = (x, y, z, d)$. Það býr til vigurinn $\vec{r}(\vec{u}) = (r_1, \ldots, r_8)$ samkvæmt jöfnum (1.1) sem ætti í raun að vera jafnt og $\vec{0}$. En vegna fjölda jafna miðað við fjölda óþekktra breytistærða er það oftast ekki hægt og því er markmiðið að lágmarka $r_1^2 + \ldots + r_8^2$. Það er gert með aðferð Gauss-Newton. Jacobi-fylkið $D\vec{r}(\vec{u})$ er reiknað og svo er ítrað þar til lítið sem ekkert bætist við $\vec{u}$.

```
function u = GPS_GaussNewton(A,B,C,t,I)
        u = I;
        c = 299792.458;
        Dr = zeros(8,4);
        tol = 1e-10;
        while 1
            S = sqrt((u(1)-A).^2+(u(2)-B).^2+(u(3)-C).^2);
            r = S - c*(t-u(4));
            Dr(:,1) = (u(1)-A)./S;
            Dr(:,2) = (u(2)-B)./S;
            Dr(:,3) = (u(3)-C)./S;
            Dr(:,4) = c*ones(8,1);
            v = (Dr'*Dr)\(-Dr'*r);
            if norm(v,inf) < tol
                break
            end
            u = u + v;
        end
    end
```

Á sama hátt og í lið 2.4 er ástandstala verkefnisins og hámarksskekkja fundin. Gæta þarf þess að upphafsvigurinn sé ekki langt frá yfirborði jarðar, því ekki er hægt að útiloka önnur lágmörk í fervikasummu Gauss-Newton aðferðarinnar.

```
function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = lidur6
    hro = 26570;
    delt = 10^-8;
    magnification_error = 0;
    skekkja = zeros(4,1);

    einnminus  = unique(perms([-1 1 1 1 1 1 1 1]),'rows');
    tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1 1 1 1 1]),'rows');
    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1 1 1 1 1]),'rows');
    fjorirminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 1 1 1 1]),'rows');
    fimmminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 1 1 1]),'rows');
    sexminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1]),'rows');
    sjominus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1]),'rows');
    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus;fjorirminus; ...
        fimmminus;sexminus;sjominus];

    phi = [0 1 2 3 4 5 6 2*pi];
    theta = [pi/2 1.3 1 0.8 0.6 0.4 0.2 0];
    for n = 1:254
        A = zeros(8,1); B = zeros(8,1); C = zeros(8,1);
        R = zeros(8,1); t = zeros(8,1); td = zeros(8,1);
        x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
```

```
        for i = 1:8
            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
            C(i) = hro * sin(phi(i));
            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
            t(i) = d + R(i)/c;
            td(i) =  t(i) + deltan(n,i)*delt;
        end

        I = [0,0,0,0]'; %upphafsgisk

        x_svar = GPS_GaussNewton(A,B,C,td,I);

        del = (x_svar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
        magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification error
        if magn > magnification_error
            magnification_error = magn;
            skekkja = del;
            x_bar = x_svar;
            delta_samsetning = deltan(n,:);
        else
        end
    end
    skekkja = sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
    %hámarksskekkja í metrum
end
```

Með skipuninni `[cond6,skekkja6,delta_samsetning6] = lidur6` fæst lausnarvigurinn:

```
cond6 =

   1.730269190724556


skekkja6 =

   5.558763231381291


delta_samsetning6 =

     1     1    -1    -1    -1     1    -1    -1
```

3. Samantekt

Eftirfarandi tafla tekur saman þær staðsetningarskekkjur og ástandstölur sem fást við úrlausn verkefnisins.

Tafla 3.1: Tafla sem sýnir staðsetningarskekkju fyrir mismörg gervitungl og mismikinn þéttleika

	Fjögur tungl	Fjögur tungl þétt saman	Átta tungl
Skekkja í staðsetningu [m]	10.530	3069.3	5.5588
Ástandstala	3.1096	836.02	1.7303

Hér sést að þegar tunglin eru þétt saman fæst mun meiri skekkja og umtalsvert hærri ástandstala (bæði um tveimur stærðargráðum stærri) en þegar tunglin eru dreifð. Því er ljóst að klösun gervitungla er töluverður skekkjuvaldur í ákvörðun á GPS staðsetningu.

Ef fjöldi tungla er aukinn úr fjórum í átta fæst um helmingi minni skekkja. Því fæst töluverður ávinningur að auka fjölda tungla og leysa verkefnið með aðferð Gauss-Newton.

Heimildir

Sauer, T. (2014). *Numerical Analysis* (2. útgáfa). Pearson Education Limited: Essex.

Magnús Tumi Guðmundsson. (2020). *Þyngdarsvið, lögun jarðar, þyngdarmælingar og flóðkraftar.* Kennsluefni í námskeiðinu Almenn jarðeðlisfræði.

A. Viðauki

Aðalfallið í heild sinni

```
function adalfall_verk2

    function v = GPS_Newton(A,B,C,t,I)
        v = I;
        c = 299792.458;
        DF = zeros(4);
        tol = 1e-10;
        while 1
            S = sqrt((v(1)-A).^2+(v(2)-B).^2+(v(3)-C).^2);
            F = S - c*(t-v(4));
            if norm(F) < tol
                break
            end
            DF(:,1) = (v(1)-A)./S;
            DF(:,2) = (v(2)-B)./S;
            DF(:,3) = (v(3)-C)./S;
            DF(:,4) = c*ones(4,1);
            s = DF\(-F);
            v = v + s;
        end
    end

    function v = lidur1
        A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
        B = [7540, 2750, 14630, 610]';
        C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
        t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
        I = [0, 0, 6370, 0]';
        v = GPS_Newton(A,B,C,t,I);
    end

    function v = GPS_quadratic(A,B,C,t)
```

```
        c = 299792.458;
        ux = 2*(A(2:4)-A(1));
        uy = 2*(B(2:4)-B(1));
        uz = 2*(C(2:4)-C(1));
        ud = 2*c^2*(t(1)-t(2:4));
        w = A(1)^2-A(2:4).^2 + B(1)^2-B(2:4).^2 ...
            + C(1)^2-C(2:4).^2 + c^2*(t(2:4).^2-t(1)^2);
        D = zeros(3);
        D(1,1) = det([uy uz ud]);
        D(1,2) = det([uy uz w]);
        D(1,3) = det([uy uz ux]);
        D(2,1) = det([ux uz ud]);
        D(2,2) = det([ux uz w]);
        D(2,3) = det([ux uz uy]);
        D(3,1) = det([ux uy ud]);
        D(3,2) = det([ux uy w]);
        D(3,3) = det([ux uy uz]);
        E = zeros(3,2);
        E(:,1) = D(:,1) ./ D(:,3);
        E(:,2) = D(:,2) ./ D(:,3);
        F = [A(1), B(1), C(1)]';
        a2 = E(:,1)'*E(:,1) - c^2;
        a1 = 2*E(:,1)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,1) + 2*c^2*t(1);
        a0 = E(:,2)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,2) + F'*F - c^2*t(1)^2;
        d = min(roots([a2 a1 a0]));
        v = zeros(4,1);
        v(1:3) = -d*E(:,1)-E(:,2);
        v(4) = d;
    end

    function v = lidur2
        A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
        B = [7540, 2750, 14630, 610]';
        C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
        t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
        v = GPS_quadratic(A,B,C,t);
    end

    function v = lidur3
        A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
        B = [7540, 2750, 14630, 610]';
        C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
        t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
        c = 299792.458;

        w = zeros(3,1);
        w(1,1) = (A(1,1)^2-A(2,1)^2 + B(1,1)^2-B(2,1)^2 + ...
            C(1,1)^2-C(2,1)^2 + c^2*(t(2,1)^2-t(1,1)^2))/2;
        w(2,1) = (A(1,1)^2-A(3,1)^2 + B(1,1)^2-B(3,1)^2 + ...
```

```
            C(1,1)^2-C(3,1)^2 + c^2*(t(3,1)^2-t(1,1)^2))/2;
        w(3,1) = (A(1,1)^2-A(4,1)^2 + B(1,1)^2-B(4,1)^2 + ...
            C(1,1)^2-C(4,1)^2 + c^2*(t(4,1)^2-t(1,1)^2))/2;

        ux = [(A(2,1)-A(1,1)),(A(3,1)-A(1,1)),(A(4,1)-A(1,1))]';
        uy = [(B(2,1)-B(1,1)),(B(3,1)-B(1,1)),(B(4,1)-B(1,1))]';
        uz = [(C(2,1)-C(1,1)),(C(3,1)-C(1,1)),(C(4,1)-C(1,1))]';
        ud = [c^2*(t(1,1)-t(2,1)),c^2*(t(1,1)-t(3,1)), ...
                c^2*(t(1,1)-t(4,1))]';

        syms x y z d

        Ax = [uy,uz,x.*ux + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t x
        Ay = [ux,uz,y.*uy + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t y
        Az = [ux,uy,z.*uz + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t z

        rx = solve(det(Ax)==0,x); %fundið x sem fall af d
        ry = solve(det(Ay)==0,y); %fundið y sem fall af d
        rz = solve(det(Az)==0,z); %fundið z sem fall af d

        %jöfnur 4.38 sem fall af d
        j1 = (rx-A(1,1))^2 + (ry-B(1,1))^2 + (rz-C(1,1))^2 ...
            - (c*(t(1,1)-d))^2;
        j2 = (rx-A(2,1))^2 + (ry-B(2,1))^2 + (rz-C(2,1))^2 ...
            - (c*(t(2,1)-d))^2;
        j3 = (rx-A(3,1))^2 + (ry-B(3,1))^2 + (rz-C(3,1))^2 ...
            - (c*(t(3,1)-d))^2;
        j4 = (rx-A(4,1))^2 + (ry-B(4,1))^2 + (rz-C(4,1))^2 ...
            - (c*(t(4,1)-d))^2;

        d1 = roots(sym2poly(j1));
        d2 = roots(sym2poly(j2));
        d3 = roots(sym2poly(j3));
        d4 = roots(sym2poly(j4));

        d = d1(d1<0); %veljum neikvæðu lausnina
        rx = matlabFunction(rx); ry = matlabFunction(ry);
        rz = matlabFunction(rz);
        %fundið x,y og z Ã°t frá d
        x = rx(d);
        y = ry(d);
        z = rz(d);
        v = [x,y,z,d]';

    end

    function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = ...
        lidur4
        hro = 26570;
```

```
    delt = 10^-8;
    magnification_error = 0;
    skekkja = zeros(4,1);
    theta = [0 2 4 6];
    phi = [0.2 0.6 1 1.4];
    einnminus  = unique(perms([-1 1 1 1]),'rows');
    tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]),'rows');
    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]),'rows');
    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];
    for n = 1:14
        A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
        R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
        x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
        for i = 1:4
            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
            C(i) = hro * sin(phi(i));
            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
            t(i) = d + R(i)/c;
            td(i) =  t(i) + deltan(n,i)*delt;
        end

        I = [0,0,6500,0.2]'; %upphafsgisk

        x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);

        del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
        magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification ...
           error
        if magn > magnification_error
            magnification_error = magn;
            skekkja = del;
            delta_samsetning = deltan(n,:);
        end
    end
    skekkja = ...
       sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
    %hámarksskekkja í metrum
end

function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = ...
   lidur5
    hro = 26570;
    A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
    R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
    x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
    delt = 10^-8;
    magnification_error = 0;
    skekkja = zeros(4,1);
```

```
    phi = [1 1.03 1.01 1.02];
    theta = [2.5 2.55 2.4 2.3];
    einnminus  = unique(perms([-1 1 1 1]),'rows');
    tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]),'rows');
    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]),'rows');
    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];

    for n = 1:14
        for i = 1:4
            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
            C(i) = hro * sin(phi(i));
            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
            t(i) = d + R(i)/c;
            td(i) =  t(i) + deltan(n,i)*delt;
        end

        I = [100,1000,1000,0.2]'; %upphafsgisk
        x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);

        del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
        magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification ...
            error
        if magn>magnification_error
            magnification_error = magn;
            skekkja = del;
            delta_samsetning = deltan(n,:);
        end
    end
    skekkja = ...
       sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
    %hámarksskekkja í metrum
end

function u = GPS_GaussNewton(A,B,C,t,I)
    u = I;
    c = 299792.458;
    Dr = zeros(8,4);
    tol = 1e-10;
    while 1
        S = sqrt((u(1)-A).^2+(u(2)-B).^2+(u(3)-C).^2);
        r = S - c*(t-u(4));
        Dr(:,1) = (u(1)-A)./S;
        Dr(:,2) = (u(2)-B)./S;
        Dr(:,3) = (u(3)-C)./S;
        Dr(:,4) = c*ones(8,1);
        v = (Dr'*Dr)\(-Dr'*r);
        if norm(v,inf) < tol
            break
```

```
            end
            u = u + v;
        end
    end

    function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = ...
        lidur6
        hro = 26570;
        delt = 10^-8;
        magnification_error = 0;
        skekkja = zeros(4,1);

        einnminus  = unique(perms([-1 1 1 1 1 1 1 1]),'rows');
        tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1 1 1 1 1]),'rows');
        thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1 1 1 1 1]),'rows');
        fjorirminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 1 1 1 1]),'rows');
        fimmminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 1 1 1]),'rows');
        sexminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1]),'rows');
        sjominus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1]),'rows');
        deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus;fjorirminus; ...
            fimmminus;sexminus;sjominus];

        phi = [0 1 2 3 4 5 6 2*pi];
        theta = [pi/2 1.3 1 0.8 0.6 0.4 0.2 0];
        for n = 1:254
            A = zeros(8,1); B = zeros(8,1); C = zeros(8,1);
            R = zeros(8,1); t = zeros(8,1); td = zeros(8,1);
            x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
            for i = 1:8
                A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
                B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
                C(i) = hro * sin(phi(i));
                R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
                t(i) = d + R(i)/c;
                td(i) =  t(i) + deltan(n,i)*delt;
            end

            I = [0,0,0,0]'; %upphafsgisk

            x_svar = GPS_GaussNewton(A,B,C,td,I);

            del = (x_svar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
            magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification ...
                error
            if magn > magnification_error
                magnification_error = magn;
                skekkja = del;
                x_bar = x_svar;
                delta_samsetning = deltan(n,:);
```

```
                else
                end
            end
            skekkja = ...
                sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
            %hámarksskekkja í metrum
        end

v1 = lidur1
v2 = lidur2
v3 = lidur3
[cond4,skekkja4,delta_samsetning4] = lidur4
[cond5,skekkja5,delta_samsetning5] = lidur5
[cond6,skekkja6,delta_samsetning6] = lidur6

end
```

Undirskrift

Með undirskrift okkar staðfestum við að forritin og skýrslan séu okkar eigin verk.

Daníel Einar Hauksson xxx	Gísli Björn Helgason xxx
Daníel Einar Hauksson	Gísli Björn Helgason

Sverrir Kristinsson xxx
Sverrir Kristinsson