



# GPS kerfið, skekkjumögnun og aðferð minnstu fervika fyrir ólínuleg föll

Daníel Einar Hauksson  
Gísli Björn Helgason  
Sverrir Kristinsson

Kennari  
Birgir Hrafnkelsson

Verkefni fyrir STÆ405G

Töluleg greining  
Verkfræði- og náttúruvísindasvið  
Háskóli Íslands  
Mars 2020



# Efnisyfirlit

|  |            |
|--|------------|
| <b>Myndaskrá</b>   | <b>v</b>   |
| <b>Töfluskrá</b>   | <b>vii</b> |
| <b>1. Inngangur</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2. Tölulegar lausnir</b>  | <b>7</b>   |
| 2.1. Jöfnuhneppið leyst með aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir .  | 7          |
| 2.2. Jöfnuhneppið leyst með annars stigs margliðu í einni breytistærð . .                                      | 8          |
| 2.3. Jöfnuhneppið leyst með annars stigs margliðu í einni breytistærð<br>með aðstoð Symbolic Toolbox . . . . . | 10         |
| 2.4. Mögnun tímaskekkju . . . . .  | 12         |
| 2.5. Klösun gervihnatta . . . . .  | 14         |
| 2.6. Fjölgun gervihnatta . . . . .   | 16         |
| <b>3. Samantekt</b>  | <b>19</b>  |
| <b>Heimildir</b>   | <b>21</b>  |
| <b>A. Viðauki</b>  | <b>23</b>  |



# Myndaskrá

|  |   |
|--|---|
| 1.1. GPS staðsetning með fjórum tunglum . . . . .              | 1 |
| 1.2. Þrjár kúluskeljar sem skerast í tveimur punktum . . . . . | 2 |



# Töfluskrá

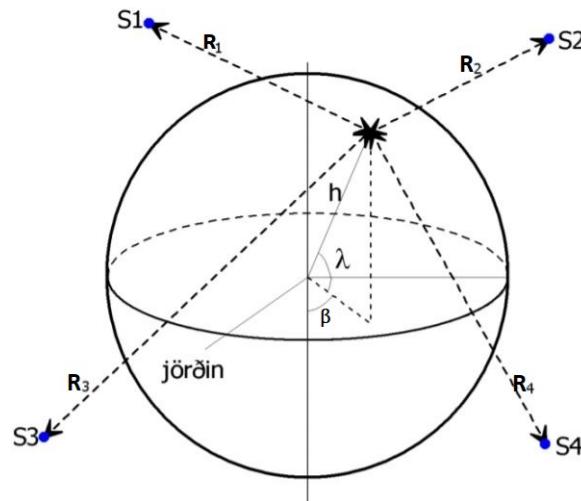
|   |    |
|---|----|
| 3.1. Tafla sem sýnir staðsetningarskekkju fyrir mismörg gervitungl og mismikinn þéttleika . . . . . | 19 |
|---|----|





# 1. Inngangur

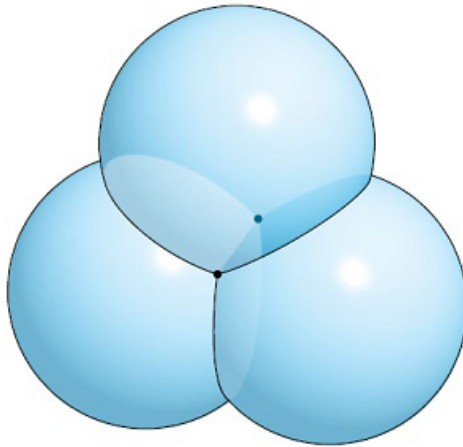
GPS (Global Positioning System) er staðsetningarkerfi byggt á 24 gervitunglum sem komið var upp af bandaríska hernum. Tunglin eru útbúin atómklukkum og eru á braut um jörðu í 20.200 km hæð. Á hverjum tíma og á hverjum stað á yfirborði jarðar eru fimm til átta gervitungl í beinni sjónlínu. Hver hnöttur sendir út vandlega samstillt merki frá fyrirfram ákvörðuðum staðsetningum í átt að GPS móttökum/tækjum á yfirborðinu. GPS tækin nota þessi merki til að ákvarða nákvæma  $(x, y, z)$  staðsetningu sína.



Mynd 1.1: GPS staðsetning ákvörðuð með fjórum gervitunglum (Magnús Tumi Guðmundsson, 2020)

Á ákveðnu augnabliki berst GPS tæki merki frá  $i$ -ta gervitungli. Tækið ákvarðar **aðfærslutíma** merkisins  $t_i$ , sem er tímasmismunurinn á móttöku og útsendingu merkisins. Merkið berst á ljóshraða,  $c \approx 299792.458 \text{ km/s}$ , og má því ákvarða fjarlægðina milli hnattarins og tækisins með  $R_i = ct_i$ . Þetta staðsetur tækið á yfirborði kúluskeljar með miðju í staðsetningu hnattarins og radíus  $ct_i$ . Ef þrír hnettir standa til boða, þá eru þrjár kúluskeljar þekktar sem hafa tvo sameiginlega skurðpunkta. Annar skurðpunkturinn er staðsetning GPS tækisins. Hinn punkturinn

er oftast langt frá yfirborði jarðar og má því auðveldlega horfa fram hjá honum. Fræðilega séð þarf því aðeins þrjár hnetti til að ákvarða staðsetningu GPS tækisins og felst úrvinnslan í að finna þessa sameiginlegu skurðpunkta.



Mynd 1.2: Þrjár kúluskeljar sem skerast í tveimur punktum (Sauer, 2014)

Í raun eru verulegir vankantar á þessari lausnaraðferð. Einn skekkjuvaldur er ákvörðun á aðfærslutíma merkjanna. Þrátt fyrir að útsendingar merkja frá gervihnöttum séu mjög nákvæmlega tímasettar, þá geta GPS tækin sjálf verið með frekar ónákvæmt tímaskyn. Ef lausnarjöfnunar þrjár eru leystar með ögn ónákvæmum aðfærslutímum getur staðsetningin verið röng upp á marga kílómetra. Hægt er að leiðrétta fyrir þessu með því að bæta við einum gervihnetti. Nú er  $d$  skilgreint sem tímamunur á milli samstilltu klukkunnar sem gervihnettirnir styðjast við og klukkunnar í GPS tækinu. Staðsetning gervihnattar  $i$  er  $(A_i, B_i, C_i)$ . Þá uppfyllir sannur skurðpunktur  $(x, y, z)$  jöfnurnar

$$\begin{aligned} r_1(x, y, z, d) &= \sqrt{(x - A_1)^2 + (y - B_1)^2 + (z - C_1)^2} - c(t_1 - d) = 0 \\ r_2(x, y, z, d) &= \sqrt{(x - A_2)^2 + (y - B_2)^2 + (z - C_2)^2} - c(t_2 - d) = 0 \\ r_3(x, y, z, d) &= \sqrt{(x - A_3)^2 + (y - B_3)^2 + (z - C_3)^2} - c(t_3 - d) = 0 \\ r_4(x, y, z, d) &= \sqrt{(x - A_4)^2 + (y - B_4)^2 + (z - C_4)^2} - c(t_4 - d) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

sem þarf að leysa m.t.t. óþekktu stærðanna  $x, y, z, d$ . Lausn á þessu hneppi gefur ekki aðeins staðsetningu GPS tækisins, heldur einnig réttan tíma út frá klukkum gervihnattanna þar sem  $d$  er þekkt. Þannig má koma í veg fyrir þá skekkju sem ónákvæma klukka GPS tækisins getur valdið.

Fjórar kúluskeljar þurfa rúmfræðilega ekki að hafa sameiginlegan skurðpunkt, en þær gera það ef radíusinn er aukinn eða minnkaður um rétta sameiginlega stærð. Með einfaldri algebru fæst eftirfarandi hneppi út frá (1.1):

$$\begin{aligned} [c(t_1 - d)]^2 &= (x - A_1)^2 + (y - B_1)^2 + (z - C_1)^2 \\ [c(t_2 - d)]^2 &= (x - A_2)^2 + (y - B_2)^2 + (z - C_2)^2 \\ [c(t_3 - d)]^2 &= (x - A_3)^2 + (y - B_3)^2 + (z - C_3)^2 \\ [c(t_4 - d)]^2 &= (x - A_4)^2 + (y - B_4)^2 + (z - C_4)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Með því að draga seinustu þrjár jöfnur (1.2) frá fyrstu jöfnu (1.2) fást eftirfarandi línulegar jöfnur:

$$\begin{aligned} c^2(t_1^2 - t_2^2) + 2c^2d(t_2 - t_1) &= 2x(A_2 - A_1) + 2y(B_2 - B_1) + 2z(C_2 - C_1) \\ &\quad + A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2 + C_1^2 - C_2^2 \\ c^2(t_1^2 - t_3^2) + 2c^2d(t_3 - t_1) &= 2x(A_3 - A_1) + 2y(B_3 - B_1) + 2z(C_3 - C_1) \\ &\quad + A_1^2 - A_3^2 + B_1^2 - B_3^2 + C_1^2 - C_3^2 \\ c^2(t_1^2 - t_4^2) + 2c^2d(t_4 - t_1) &= 2x(A_4 - A_1) + 2y(B_4 - B_1) + 2z(C_4 - C_1) \\ &\quad + A_1^2 - A_4^2 + B_1^2 - B_4^2 + C_1^2 - C_4^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Á vigurformi má skrifa jöfnur (1.3) sem

$$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z + d\vec{u}_d + \vec{w} = \vec{0} \quad (1.4)$$

þar sem

$$\begin{aligned} \vec{u}_x &= 2 \begin{bmatrix} A_2 - A_1 \\ A_3 - A_1 \\ A_4 - A_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_y = 2 \begin{bmatrix} B_2 - B_1 \\ B_3 - B_1 \\ B_4 - B_1 \end{bmatrix}, \\ \vec{u}_z &= 2 \begin{bmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_d = 2c^2 \begin{bmatrix} t_1 - t_2 \\ t_1 - t_3 \\ t_1 - t_4 \end{bmatrix}, \\ \vec{w} &= \begin{bmatrix} A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2 + C_1^2 - C_2^2 + c^2(t_2^2 - t_1^2) \\ A_1^2 - A_3^2 + B_1^2 - B_3^2 + C_1^2 - C_3^2 + c^2(t_3^2 - t_1^2) \\ A_1^2 - A_4^2 + B_1^2 - B_4^2 + C_1^2 - C_4^2 + c^2(t_4^2 - t_1^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Jafna (1.4) gefur

$$0 = \det[\vec{u}_y \mid \vec{u}_z \mid x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z + d\vec{u}_d + \vec{w}] \quad (1.6)$$

og með því að nýta sér það að seinasti dálkur ákveðunnar er línuleg samantekt af  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{u}_d$  og  $\vec{w}$  og það að fylki sem hefur tvo eins dálka hefur ákveðu 0 fæst

$$0 = x \det[\vec{u}_y \mid \vec{u}_z \mid \vec{u}_x] + d \det[\vec{u}_y \mid \vec{u}_z \mid \vec{u}_d] + \det[\vec{u}_y \mid \vec{u}_z \mid \vec{w}] \quad (1.7)$$

sem gefur  $x$  sem fall af  $d$ . Eins er hægt að finna  $y$  og  $z$  sem fall af  $d$  og með því að stinga inn í fyrstu jöfnu (1.2) og einfalda fæst annars stigs margliðujafnan

$$a_2 d^2 + a_1 d + a_0 = 0 \quad (1.8)$$

þar sem

$$\begin{aligned} a_2 &= \left( \frac{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_d]}{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x]} \right)^2 + \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_d]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_y]} \right)^2 + \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_d]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z]} \right)^2 - c^2, \\ a_1 &= 2 \left( \frac{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_d] \det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{w}]}{(\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x])^2} \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_d] \det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{w}]}{(\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_y])^2} \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_d] \det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{w}]}{(\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z])^2} \right) \\ &\quad + 2A_1 \left( \frac{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_d]}{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x]} \right) \\ &\quad + 2B_1 \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_d]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_y]} \right) \\ &\quad + 2C_1 \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_d]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z]} \right) \\ &\quad + 2c^2 t_1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \left( \frac{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{w}]}{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x]} \right)^2 + \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{w}]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_y]} \right)^2 + \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{w}]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z]} \right)^2 \\ &\quad + 2A_1 \left( \frac{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{w}]}{\det[\vec{u}_y | \vec{u}_z | \vec{u}_x]} \right) + 2B_1 \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{w}]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_z | \vec{u}_y]} \right) \\ &\quad + 2C_1 \left( \frac{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{w}]}{\det[\vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z]} \right) + (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - c^2 t_1^2. \end{aligned}$$

Með þessum upplýsingum er hægt að finna tvær lausnir á  $d$  með því að finna rætur margliðunnar í jöfnu (1.8). Síðan verður að ákveða út frá samhengi hvor lausnin hentar. Staðsetningin  $(x, y, z)$  fæst svo með því að nota jöfnu (1.7) og sambærilegar jöfnur.

Annar skekkjuvaldur við ákvörðun á GPS staðsetningu kemur til sögu þegar gervi-hnettirnir eru nálægt hvor öðrum. Þá verður lausn á jöfnu (1.1) illa skilyrt. Einnig felst skekkja í þeirri staðreynd að útbreiðsluhraði GPS merkjanna er ekki nákvæmlega  $c$ . Rafrúflanir í jónahvolfinu hafa dálítill áhrif á útbreiðsluhraða bylgjunnar. Einnig verða truflanir í veðrahvolfinu því loftraki hefur áhrif á bylgjuhraðann. Síðan veldur endurkast frá fjöllum truflunum því merkin fara eftir mismunandi brautum (e. multipath errors).

Hér eftir er stuðst við þrívítt hnitakerfi sem á upphafspunkt í miðju jarðar (radíus jarðar er  $\approx 6370 \text{ km}$ ) (sjá mynd 1.1) með jákvæða  $z$ -stefnu í norður.



## 2. Tölulegar lausnir

Við lausn verkefnisins er notast við hugbúnaðinn `Matlab`. Kóðinn er byggður þannig upp að eitt aðalfall, sem hefur ekkert inntak, skilgreinir og kallar á hjálparföll sem leysa hvern lið fyrir sig. Til að leysa verkefnið þarf því aðeins eina keyrslu.

### 2.1. Jöfnuhneppið leyst með aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir

Skilgreint er hjálparfallið `GPS_Newton` sem tekur inn vigrana  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ ,  $\vec{t}$  og  $\vec{I}$  og skilar vigrinum  $\vec{v}$ .  $\vec{A}$  geymir  $x$ -hnit fjögurra gervitungla,  $\vec{B}$  geymir  $y$ -hnitin og  $\vec{C}$   $z$ -hnitin.  $\vec{t}$  geymir mældu aðfærslutímana og  $\vec{I}$  er upphafsgisk  $(x_0, y_0, z_0, d_0)$  á staðsetningu GPS tækisins og tímamuninum. Svarið  $\vec{v}$  er svo  $(x, y, z, d)$ ; staðsetning og tímamunur. Fallið býr til vigurinn  $\vec{F}(\vec{v}) = (r_1, r_2, r_3, r_4) = \vec{0}$  samkvæmt jöfnunum (1.1). Jacobi-fylkið  $D\vec{F}(\vec{v})$  er reiknað og síðan er ítrað samkvæmt aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir þar til  $\vec{F}(\vec{v})$  kemst mjög nálægt  $\vec{0}$ .

```
1 function v = GPS_Newton(A,B,C,t,I)
2     v = I;
3     c = 299792.458;
4     DF = zeros(4);
5     tol = 1e-10;
6     while 1
7         S = sqrt((v(1)-A).^2+(v(2)-B).^2+(v(3)-C).^2);
8         F = S - c*(t-v(4));
9         if norm(F) < tol
10             break
11         end
12         DF(:,1) = (v(1)-A)./S;
13         DF(:,2) = (v(2)-B)./S;
14         DF(:,3) = (v(3)-C)./S;
```

```

15         DF(:,4) = c*ones(4,1);
16         s = DF\(-F);
17         v = v + s;
18     end
19 end

```

Til þess að finna staðsetningu GPS tækis á jörðinni út frá gefnum staðsetningum fjögurra gervitungla ( $km$ ) og mældum aðfærslutímum ( $sek$ ) er skilgreint hjálparfallið `lidur1`. Það býr til viðeigandi vigra út frá upplýsingunum ásamt því að búa til góðan upphafsvigur, og kallar á `GPS_Newton` með vigrana sem inntak. Það skilar svo vigrinum  $\vec{v} = (x, y, z, d)$  sem er staðsetning GPS tækisins ( $km$ ) og tímamismunur ( $sec$ ) á klukku GPS tækisins og klukku gervitunglanna.

```

1 function v = lidur1
2     A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
3     B = [7540, 2750, 14630, 610]';
4     C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
5     t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
6     I = [0, 0, 6370, 0]';
7     v = GPS_Newton(A,B,C,t,I);
8 end

```

Skipunin `v1=lidur1` gefur svarið við fyrsta liðnum.

```

v1 =

    1.0e+03 *

   -0.041772709570896
   -0.016789194106544
    6.370059559223332
   -0.000003201565830

```

## 2.2. Jöfnuhneppið leyst með annars stigs margliðu í einni breytistærð

Skilgreint er hjálparfallið `GPS_quadratic` sem tekur inn vigrana  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  og  $\vec{t}$  og skilar vigrinum  $\vec{v}$ . Vigrarnir eru þeir sömu og í fyrri lið. Fallið byrjar á að búa



til vigrana  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{u}_d$  og  $\vec{w}$  samkvæmt jöfnum (1.5). Síðan býr það til  $3 \times 3$  fylkið  $D$  sem geymir allar ákveðurnar sem reikna þarf fyrir jöfnur (1.9). Fylkið  $E$  og vigurinn  $F$  eru notuð til að einfalda og stytta skriftir. Síðan eru stuðlarnir  $a_2$ ,  $a_1$  og  $a_0$  fundnir samkvæmt jöfnum (1.9). Lausnir á  $d$  fást með því að finna rætur margliðunnar í (1.8). Hér er minni lausnin valin því hún hentar betur. Að lokum er  $(x, y, z)$  fengið með jöfnu (1.7).

```

1 function v = GPS_quadratic(A,B,C,t)
2     c = 299792.458;
3     ux = 2*(A(2:4)-A(1));
4     uy = 2*(B(2:4)-B(1));
5     uz = 2*(C(2:4)-C(1));
6     ud = 2*c^2*(t(1)-t(2:4));
7     w = A(1)^2-A(2:4).^2 + B(1)^2-B(2:4).^2 ...
8         + C(1)^2-C(2:4).^2 + c^2*(t(2:4).^2-t(1)^2);
9     D = zeros(3);
10    D(1,1) = det([uy uz ud]);
11    D(1,2) = det([uy uz w]);
12    D(1,3) = det([uy uz ux]);
13    D(2,1) = det([ux uz ud]);
14    D(2,2) = det([ux uz w]);
15    D(2,3) = det([ux uz uy]);
16    D(3,1) = det([ux uy ud]);
17    D(3,2) = det([ux uy w]);
18    D(3,3) = det([ux uy uz]);
19    E = zeros(3,2);
20    E(:,1) = D(:,1) ./ D(:,3);
21    E(:,2) = D(:,2) ./ D(:,3);
22    F = [A(1), B(1), C(1)]';
23    a2 = E(:,1)'*E(:,1) - c^2;
24    a1 = 2*E(:,1)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,1) + 2*c^2*t(1);
25    a0 = E(:,2)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,2) + F'*F - c^2*t(1)^2;
26    d = min(roots([a2 a1 a0]));
27    v = zeros(4,1);
28    v(1:3) = -d*E(:,1)-E(:,2);
29    v(4) = d;
30 end

```

Til þess að leysa sama dæmi og fyrsti liður gerir, en nú með því að finna rætur annars stigs margliðu í einni breytistærð, er skilgreint hjálparfallið `lidur2`. Það er alveg eins og `lidur1` fyrir utan það að það er enginn upphafsvigur. Fallið kallar á `GPS_quadratic` og skilar vigrinum  $\vec{v} = (x, y, z, d)$  sem stendur fyrir það sama og í fyrsta liðnum.

```

1 function v = lidur2
2     A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
3     B = [7540, 2750, 14630, 610]';
4     C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
5     t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
6     v = GPS_quadratic(A,B,C,t);
7 end

```

Með skipuninni `v2=lidur2` fæst eftirfarandi lausnarvigur.

```

v2 =

    1.0e+03 *

   -0.041772709570827
   -0.016789194106526
    6.370059559223341
   -0.000003201565830

```

## 2.3. Jöfnuhneppið leyst með annars stigs margliðu í einni breytistærð með aðstoð Symbolic Toolbox

Líkt og í liðnum á undan eru vigrarnir  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  og  $\vec{t}$  notaðir til þess að búa til vigrana  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{u}_d$  og  $\vec{w}$  samkvæmt jöfnum (1.5). Því næst er notað Symbolic Toolbox til þess að reikna út breyturarnar  $x$ ,  $y$  og  $z$  sem fall af  $d$  út frá jöfnu (1.6). Þeim samböndum er svo stungið inn í jöfnur (1.2) til að fá annars stigs margliðu með óþekktu stærðinni  $d$ . Neikvæða gildi  $d$  er svo notað til þess að reikna út staðsetninguna út frá samböndum stærðanna og þeim gildum komið fyrir í vigrinum  $\vec{v}$  líkt og áður.

```

1 function v = lidur3
2     A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
3     B = [7540, 2750, 14630, 610]';
4     C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
5     t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
6     c = 299792.458;
7
8     w = zeros(3,1);
9     w(1,1) = (A(1,1)^2-A(2,1)^2 + B(1,1)^2-B(2,1)^2 + ...
10         C(1,1)^2-C(2,1)^2 + c^2*(t(2,1)^2-t(1,1)^2))/2;
11     w(2,1) = (A(1,1)^2-A(3,1)^2 + B(1,1)^2-B(3,1)^2 + ...
12         C(1,1)^2-C(3,1)^2 + c^2*(t(3,1)^2-t(1,1)^2))/2;
13     w(3,1) = (A(1,1)^2-A(4,1)^2 + B(1,1)^2-B(4,1)^2 + ...
14         C(1,1)^2-C(4,1)^2 + c^2*(t(4,1)^2-t(1,1)^2))/2;
15
16     ux = [(A(2,1)-A(1,1)), (A(3,1)-A(1,1)), (A(4,1)-A(1,1))];
17     uy = [(B(2,1)-B(1,1)), (B(3,1)-B(1,1)), (B(4,1)-B(1,1))];
18     uz = [(C(2,1)-C(1,1)), (C(3,1)-C(1,1)), (C(4,1)-C(1,1))];
19     ud = [c^2*(t(1,1)-t(2,1)), c^2*(t(1,1)-t(3,1)), ...
20         c^2*(t(1,1)-t(4,1))];
21
22     syms x y z d
23
24     Ax = [uy,uz,x.*ux + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t x
25     Ay = [ux,uz,y.*uy + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t y
26     Az = [ux,uy,z.*uz + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t z
27
28     rx = solve(det(Ax)==0,x); %fundið x sem fall af d
29     ry = solve(det(Ay)==0,y); %fundið y sem fall af d
30     rz = solve(det(Az)==0,z); %fundið z sem fall af d
31
32     %jöfnur 4.38 sem fall af d
33     j1 = (rx-A(1,1))^2 + (ry-B(1,1))^2 + (rz-C(1,1))^2 ...
34         - (c*(t(1,1)-d))^2;
35     j2 = (rx-A(2,1))^2 + (ry-B(2,1))^2 + (rz-C(2,1))^2 ...
36         - (c*(t(2,1)-d))^2;
37     j3 = (rx-A(3,1))^2 + (ry-B(3,1))^2 + (rz-C(3,1))^2 ...
38         - (c*(t(3,1)-d))^2;
39     j4 = (rx-A(4,1))^2 + (ry-B(4,1))^2 + (rz-C(4,1))^2 ...
40         - (c*(t(4,1)-d))^2;
41
42     d1 = roots(sym2poly(j1));
43     d2 = roots(sym2poly(j2));
44     d3 = roots(sym2poly(j3));
45     d4 = roots(sym2poly(j4));
46
47     d = d1(d1<0); %veljum neikvæðu lausnina
48     rx = matlabFunction(rx); ry = matlabFunction(ry);

```

```

49     rz = matlabFunction(rz);
50     %fundið x,y og z Át frá d
51     x = rx(d);
52     y = ry(d);
53     z = rz(d);
54     v = [x,y,z,d]';
55
56 end

```

Skipunin  $v3 = \text{lidur3}$  skilar lausnarvigrinum.

```

v3 =

    1.0e+03 *

   -0.041772709570836
   -0.016789194106526
    6.370059559223343
   -0.000003201565830

```

## 2.4. Mögnun tímaskekkju

Skilgreindir eru vigrarnir  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  og  $\vec{C}$  sem innihalda staðsetningar þeirra fjögurra gervihnatta sem notaðir eru og er hvert stak vigranna ákvarðað út frá pólhnitum.

$$\begin{aligned}
 A_i &= \rho \cos(\phi_i) \cos(\theta_i) \\
 B_i &= \rho \cos(\phi_i) \sin(\theta_i) \\
 C_i &= \rho \sin(\phi_i)
 \end{aligned}$$

Þar sem  $\rho = 26570 \text{ km}$  og  $\phi$  og  $\theta$  ótiltekin horn sem uppfylla skorðurnar  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  og  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , sem tryggir að gervihnettirnir séu staðsettir á norðurhveli jarðar. Skilgreind er staðsetningin sem skekkjan er reiknuð út frá,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 6370$  og  $d = 0.0001$ . Út frá fyrrnefndum gildum er svo reiknuð fjarlægð hvers gervihnattar frá staðsetningunni,  $R_i = \sqrt{(A_i - x)^2 + (B_i - y)^2 + (C_i - z)^2}$  og mældur aðfærslutími  $t_i = d + R_i/c$ . Í raun eru klukkur gervihnatta nákvæmar upp á  $\Delta t = 10^{-8} \text{ sek}$ . Klukka hvers tungls getur annaðhvort verið of sein eða of fljót um  $\Delta t$ . Ekki er lítið á þau tilvik þegar allir gervihnettirnir hafa sömu skekkju svo í heildina eru 14 mögulegar útfærslur á tímaskekkju kerfisins.

Búið er til hjálparfallið `lidur4` sem skilgreinir þau horn sem notuð eru og skekkju-samsetningar kerfisins. Fallið kallar á hjálparfallið `GPS_Newton` með inntakinu  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ ,  $\vec{td}$  og  $\vec{I}$  þar sem  $\vec{I}$  er ótiltekið upphafsgisk og  $\vec{td}$  er aðfærslutíminn með skekkju,  $td_i = t_i \pm \Delta t$ . Vigurinn  $\vec{v}$  sem fæst með hjálparfallinu er svo borinn saman við réttu staðsetninguna. Að lokum er reiknuð skekkjumögnun (e. error magnification factor) þar sem gert er ráð fyrir að inntaksskekkjan (e. backward error) sé tímaskekkjan, í metrum,  $c\Delta t$  og úttaksskekkjan (e. forward error) sé stærsta stak skekkjuvigursins í metrum

$$\text{skekkjumögnun} \equiv \frac{\|\Delta x, \Delta y, \Delta z\|_{\infty}}{c \|\Delta t_1, \dots, \Delta t_4\|_{\infty}}.$$

Ferlið er ítrað fyrir hverja skekkjusamsetningu og skekkjumögnunin ásamt staðsetningaskekkju reiknuð. Út frá skekkjumögnuninni er hægt að áætla ástandstölu verkefnisins. Ástandstala fylkis er skilgreind sem hæsta möguleg skekkjumögnun fylkisins og því er áætlað að ástandstala verkefnisins sé hæsta skekkjumögnun sem fæst.

```

1 function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = lidur4
2     hro = 26570;
3     delt = 10^-8;
4     magnification_error = 0;
5     skekkja = zeros(4,1);
6     theta = [0 2 4 6];
7     phi = [0.2 0.6 1 1.4];
8     einnminus = unique(perms([-1 1 1 1]), 'rows');
9     tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]), 'rows');
10    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]), 'rows');
11    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];
12    for n = 1:14
13        A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
14        R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
15        x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
16        for i = 1:4
17            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
18            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
19            C(i) = hro * sin(phi(i));
20            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
21            t(i) = d + R(i)/c;
22            td(i) = t(i) + deltan(n,i)*delt;
23        end
24
25        I = [0,0,6500,0.2]'; %upphafsgisk
26
27        x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);
28

```

```

29     del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
30     magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification error
31     if magn > magnification_error
32         magnification_error = magn;
33         skekkja = del;
34         delta_samsetning = deltan(n,:);
35     end
36 end
37 skekkja = sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
38 %hámarksskekkja í metrum
39 end

```

Skipunin [cond4,skekkja4,delta\_samsetning4] = lidur4 skilar eftirfarandi lausnarvigri:

```

cond4 =

    3.109583198382170

skekkja4 =

    10.530228588033173

delta_samsetning4 =

    -1    -1    -1     1

```

## 2.5. Klösun gervihnatta

Hér er liður 2.4 endurtekinn með fjóra gervihnatti sem eru í lítilli fjarlægð frá hvor öðrum. Það er gert með því að velja  $\phi_i$  innan við 5% frá hvert öðru og  $\theta_i$  innan við 5% frá hvert öðru. Tímaskekkja er meðhöndluð líkt og í fyrri lið. Fallið lidur5 leysir þetta verkefni og skilar út hæstu mögnunar- og staðsetningarskekkju og tilsvareandi samsetningu á tímaskekkju.

```

1 function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = lidur5
2     hro = 26570;
3     A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
4     R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
5     x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
6     delt = 10^-8;
7     magnification_error = 0;
8     skekkja = zeros(4,1);
9     phi = [1 1.03 1.01 1.02];
10    theta = [2.5 2.55 2.4 2.3];
11    einnminus = unique(perms([-1 1 1 1]),'rows');
12    tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]),'rows');
13    thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]),'rows');
14    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];
15
16    for n = 1:14
17        for i = 1:4
18            A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
19            B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
20            C(i) = hro * sin(phi(i));
21            R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
22            t(i) = d + R(i)/c;
23            td(i) = t(i) + deltan(n,i)*delt;
24        end
25
26        I = [100,1000,1000,0.2]'; %upphafsgisk
27        x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);
28
29        del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
30        magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification error
31        if magn>magnification_error
32            magnification_error = magn;
33            skekkja = del;
34            delta_samsetning = deltan(n,:);
35        end
36    end
37    skekkja = sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
38    %hámarksskekkja í metrum
39 end

```

Með skipuninni [cond5, skekkja5, delta\_samsetning5] = lidur5 fæst lausnarvigurinn:

```
cond5 =

      8.360164790275777e+02

skekkja5 =

      3.069279400886975e+03

delta_samsetning5 =

      -1      1      1      -1
```

## 2.6. Fjölgun gervihnatta

Enn og aftur er liður 2.4 endurtekinn en í þetta sinn er gervihnöttum fjölgað um 4 svo þeir verða í heildina 8. Fallið `lidur6` er því svipað upp sett og `lidur4` nema staðsetningar 8 gervihnatta eru reiknaðar. Fjöldi gervihnattanna veldur því að erfitt er að finna lausn með aðferð Newtons fyrir margar breytistærðir. Þess í stað er notast við Gauss-Newton aðferð til þess að finna lausnina. Til þess er hjálparfallið `GPS_GaussNewton` skilgreint. Fallið tekur inn sömu breytistærðir og `GPS_Newton` og skilar einnig staðsetningunni og tímamuninum í vigrinum  $\vec{u} = (x, y, z, d)$ . Það býr til vigrinn  $\vec{r}(\vec{u}) = (r_1, \dots, r_8)$  samkvæmt jöfnum (1.1) sem ætti í raun að vera jafnt og 0. En vegna fjölda jafna miðað við fjölda óþekktra breytistærða er það oftast ekki hægt og því er markmiðið að lágmarka  $r_1^2 + \dots + r_8^2$ . Það er gert með aðferð Gauss-Newton. Jacobi-fylkið  $D\vec{r}(\vec{u})$  er reiknað og svo er ítrað þar til lítið sem ekkert bætist við  $\vec{u}$ .



```

1 function u = GPS_GaussNewton(A,B,C,t,I)
2     u = I;
3     c = 299792.458;
4     Dr = zeros(8,4);
5     tol = 1e-10;
6     while 1
7         S = sqrt((u(1)-A).^2+(u(2)-B).^2+(u(3)-C).^2);
8         r = S - c*(t-u(4));
9         Dr(:,1) = (u(1)-A)./S;
10        Dr(:,2) = (u(2)-B)./S;
11        Dr(:,3) = (u(3)-C)./S;
12        Dr(:,4) = c*ones(8,1);
13        v = (Dr'*Dr)\(-Dr'*r);
14        if norm(v,inf) < tol
15            break
16        end
17        u = u + v;
18    end
19 end

```

Á sama hátt og í lið 2.4 er ástandstala verkefnisins og hámarksskekkja fundin. Gæta þarf þess að upphafsvigurinn sé ekki langt frá yfirborði jarðar, því ekki er hægt að útiloka önnur lágmörk í fervikasummu Gauss-Newton aðferðarinnar.

```

1 function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = lidur6
2     hro = 26570;
3     delt = 10^-8;
4     magnification_error = 0;
5     skekkja = zeros(4,1);
6
7     einnminus = unique(perms([-1 1 1 1 1 1 1 1]), 'rows');
8     tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1 1 1 1 1]), 'rows');
9     thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1 1 1 1 1]), 'rows');
10    fjorirminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 1 1 1 1]), 'rows');
11    fimmmminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 1 1 1]), 'rows');
12    sexminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1]), 'rows');
13    sjominus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1]), 'rows');
14    deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus;fjorirminus; ...
15            fimmmminus;sexminus;sjominus];
16
17    phi = [0 1 2 3 4 5 6 2*pi];
18    theta = [pi/2 1.3 1 0.8 0.6 0.4 0.2 0];
19    for n = 1:254
20        A = zeros(8,1); B = zeros(8,1); C = zeros(8,1);
21        R = zeros(8,1); t = zeros(8,1); td = zeros(8,1);
22        x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;

```

```

23     for i = 1:8
24         A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
25         B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
26         C(i) = hro * sin(phi(i));
27         R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
28         t(i) = d + R(i)/c;
29         td(i) = t(i) + deltan(n,i)*delt;
30     end
31
32     I = [0,0,0,0]'; %upphafsgisk
33
34     x_svar = GPS_GaussNewton(A,B,C,td,I);
35
36     del = (x_svar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
37     magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification error
38     if magn > magnification_error
39         magnification_error = magn;
40         skekkja = del;
41         x_bar = x_svar;
42         delta_samsetning = deltan(n,:);
43     else
44         end
45     end
46     skekkja = sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
47     %hámarksskekkja í metrum
48 end

```

Með skipuninni [cond6,skekkja6,delta\_samsetning6] = lidur6 fæst lausnarvigurinn:

cond6 =

1.730269190724556

skekkja6 =

5.558763231381291

delta\_samsetning6 =

1      1      -1      -1      -1      1      -1      -1

### 3. Samantekt

Eftirfarandi tafla tekur saman þær staðsetningarskekkjur og ástandstölur sem fást við úrlausn verkefnisins.

Tafla 3.1: Tafla sem sýnir staðsetningarskekkju fyrir mismörg gervitungl og mismikinn þéttleika

|                                | Fjögur tungl | Fjögur tungl þétt saman | Átta tungl |
|--------------------------------|--------------|-------------------------|------------|
| Skekkja í staðsetningu [ $m$ ] | 10.530       | 3069.3                  | 5.5588     |
| Ástandstala                    | 3.1096       | 836.02                  | 1.7303     |

Hér sést að þegar tunglin eru þétt saman fæst mun meiri skekkja og umtalsvert hærri ástandstala (bæði um tveimur stærðargráðum stærri) en þegar tunglin eru dreifð. Því er ljóst að klösun gervitungla er töluverður skekkjuvaldur í ákvörðun á GPS staðsetningu.

Ef fjöldi tungla er aukinn úr fjórum í átta fæst um helmingi minni skekkja. Því fæst töluverður ávinningur að auka fjölda tungla og leysa verkefnið með aðferð Gauss-Newton.



# Heimildir

Sauer, T. (2014). *Numerical Analysis* (2. útgáfa). Pearson Education Limited: Essex.

Magnús Tumi Guðmundsson. (2020). *Þyngdarsvið, lögun jarðar, þyngdarmælingar og flóðkraftar*. Kennslufni í námskeiðinu Almenn jarðeðlisfræði.



# A. Viðauki

## Aðalfallið í heild sinni

---

```
1 function adalfall_verk2
2
3     function v = GPS_Newton(A,B,C,t,I)
4         v = I;
5         c = 299792.458;
6         DF = zeros(4);
7         tol = 1e-10;
8         while 1
9             S = sqrt((v(1)-A).^2+(v(2)-B).^2+(v(3)-C).^2);
10            F = S - c*(t-v(4));
11            if norm(F) < tol
12                break
13            end
14            DF(:,1) = (v(1)-A)./S;
15            DF(:,2) = (v(2)-B)./S;
16            DF(:,3) = (v(3)-C)./S;
17            DF(:,4) = c*ones(4,1);
18            s = DF\(-F);
19            v = v + s;
20        end
21    end
22
23    function v = lidurl
24        A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
25        B = [7540, 2750, 14630, 610]';
26        C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
27        t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
28        I = [0, 0, 6370, 0]';
29        v = GPS_Newton(A,B,C,t,I);
30    end
31
32    function v = GPS_quadratic(A,B,C,t)
```

```

33     c = 299792.458;
34     ux = 2*(A(2:4)-A(1));
35     uy = 2*(B(2:4)-B(1));
36     uz = 2*(C(2:4)-C(1));
37     ud = 2*c^2*(t(1)-t(2:4));
38     w = A(1)^2-A(2:4).^2 + B(1)^2-B(2:4).^2 ...
39         + C(1)^2-C(2:4).^2 + c^2*(t(2:4).^2-t(1)^2);
40     D = zeros(3);
41     D(1,1) = det([uy uz ud]);
42     D(1,2) = det([uy uz w]);
43     D(1,3) = det([uy uz ux]);
44     D(2,1) = det([ux uz ud]);
45     D(2,2) = det([ux uz w]);
46     D(2,3) = det([ux uz uy]);
47     D(3,1) = det([ux uy ud]);
48     D(3,2) = det([ux uy w]);
49     D(3,3) = det([ux uy uz]);
50     E = zeros(3,2);
51     E(:,1) = D(:,1) ./ D(:,3);
52     E(:,2) = D(:,2) ./ D(:,3);
53     F = [A(1), B(1), C(1)]';
54     a2 = E(:,1)'*E(:,1) - c^2;
55     a1 = 2*E(:,1)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,1) + 2*c^2*t(1);
56     a0 = E(:,2)'*E(:,2) + 2*F'*E(:,2) + F'*F - c^2*t(1)^2;
57     d = min(roots([a2 a1 a0]));
58     v = zeros(4,1);
59     v(1:3) = -d*E(:,1)-E(:,2);
60     v(4) = d;
61 end
62
63 function v = lidur2
64     A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
65     B = [7540, 2750, 14630, 610]';
66     C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
67     t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
68     v = GPS_quadratic(A,B,C,t);
69 end
70
71 function v = lidur3
72     A = [15600, 18760, 17610, 19170]';
73     B = [7540, 2750, 14630, 610]';
74     C = [20140, 18610, 13480, 18390]';
75     t = [0.07074, 0.07220, 0.07690, 0.07242]';
76     c = 299792.458;
77
78     w = zeros(3,1);
79     w(1,1) = (A(1,1)^2-A(2,1)^2 + B(1,1)^2-B(2,1)^2 + ...
80         C(1,1)^2-C(2,1)^2 + c^2*(t(2,1)^2-t(1,1)^2))/2;
81     w(2,1) = (A(1,1)^2-A(3,1)^2 + B(1,1)^2-B(3,1)^2 + ...

```



```

82         C(1,1)^2-C(3,1)^2 + c^2*(t(3,1)^2-t(1,1)^2))/2;
83     w(3,1) = (A(1,1)^2-A(4,1)^2 + B(1,1)^2-B(4,1)^2 + ...
84         C(1,1)^2-C(4,1)^2 + c^2*(t(4,1)^2-t(1,1)^2))/2;
85
86     ux = [(A(2,1)-A(1,1)), (A(3,1)-A(1,1)), (A(4,1)-A(1,1))];
87     uy = [(B(2,1)-B(1,1)), (B(3,1)-B(1,1)), (B(4,1)-B(1,1))];
88     uz = [(C(2,1)-C(1,1)), (C(3,1)-C(1,1)), (C(4,1)-C(1,1))];
89     ud = [c^2*(t(1,1)-t(2,1)), c^2*(t(1,1)-t(3,1)), ...
90         c^2*(t(1,1)-t(4,1))];
91
92     syms x y z d
93
94     Ax = [uy,uz,x.*ux + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t x
95     Ay = [ux,uz,y.*uy + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t y
96     Az = [ux,uy,z.*uz + d.*ud + w]; %ákveða m.t.t z
97
98     rx = solve(det(Ax)==0,x); %fundið x sem fall af d
99     ry = solve(det(Ay)==0,y); %fundið y sem fall af d
100    rz = solve(det(Az)==0,z); %fundið z sem fall af d
101
102    %jöfnur 4.38 sem fall af d
103    j1 = (rx-A(1,1))^2 + (ry-B(1,1))^2 + (rz-C(1,1))^2 ...
104        - (c*(t(1,1)-d))^2;
105    j2 = (rx-A(2,1))^2 + (ry-B(2,1))^2 + (rz-C(2,1))^2 ...
106        - (c*(t(2,1)-d))^2;
107    j3 = (rx-A(3,1))^2 + (ry-B(3,1))^2 + (rz-C(3,1))^2 ...
108        - (c*(t(3,1)-d))^2;
109    j4 = (rx-A(4,1))^2 + (ry-B(4,1))^2 + (rz-C(4,1))^2 ...
110        - (c*(t(4,1)-d))^2;
111
112    d1 = roots(sym2poly(j1));
113    d2 = roots(sym2poly(j2));
114    d3 = roots(sym2poly(j3));
115    d4 = roots(sym2poly(j4));
116
117    d = d1(d1<0); %veljum neikvæðu lausnina
118    rx = matlabFunction(rx); ry = matlabFunction(ry);
119    rz = matlabFunction(rz);
120    %fundið x,y og z Át frá d
121    x = rx(d);
122    y = ry(d);
123    z = rz(d);
124    v = [x,y,z,d]';
125
126    end
127
128    function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = ...
129        lidur4
130        hro = 26570;

```

```

130     delt = 10^-8;
131     magnification_error = 0;
132     skekkja = zeros(4,1);
133     theta = [0 2 4 6];
134     phi = [0.2 0.6 1 1.4];
135     einnminus = unique(perms([-1 1 1 1]), 'rows');
136     tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]), 'rows');
137     thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]), 'rows');
138     deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];
139     for n = 1:14
140         A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
141         R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
142         x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
143         for i = 1:4
144             A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
145             B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
146             C(i) = hro * sin(phi(i));
147             R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
148             t(i) = d + R(i)/c;
149             td(i) = t(i) + deltan(n,i)*delt;
150         end
151
152         I = [0,0,6500,0.2]'; %upphafsgisk
153
154         x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);
155
156         del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
157         magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification ...
158         error
159         if magn > magnification_error
160             magnification_error = magn;
161             skekkja = del;
162             delta_samsetning = deltan(n,:);
163         end
164     end
165     skekkja = ...
166     sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
167     %hámarksskekkja í metrum
168 end
169
170 function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = ...
171     lidur5
172     hro = 26570;
173     A = zeros(4,1); B = zeros(4,1); C = zeros(4,1);
174     R = zeros(4,1); t = zeros(4,1); td = zeros(4,1);
175     x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
176     delt = 10^-8;
177     magnification_error = 0;
178     skekkja = zeros(4,1);

```

```

176 phi = [1 1.03 1.01 1.02];
177 theta = [2.5 2.55 2.4 2.3];
178 einnminus = unique(perms([-1 1 1 1]), 'rows');
179 tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1]), 'rows');
180 thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1]), 'rows');
181 deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus];
182
183 for n = 1:14
184     for i = 1:4
185         A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
186         B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
187         C(i) = hro * sin(phi(i));
188         R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
189         t(i) = d + R(i)/c;
190         td(i) = t(i) + deltan(n,i)*delt;
191     end
192
193     I = [100,1000,1000,0.2]'; %upphafsgisk
194     x_bar = GPS_Newton(A,B,C,td,I);
195
196     del = (x_bar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
197     magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification ...
198     error
199     if magn>magnification_error
200         magnification_error = magn;
201         skekkja = del;
202         delta_samsetning = deltan(n,:);
203     end
204     end
205     skekkja = ...
206     sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
207     %hámarksskekkja í metrum
208 end
209
210 function u = GPS_GaussNewton(A,B,C,t,I)
211     u = I;
212     c = 299792.458;
213     Dr = zeros(8,4);
214     tol = 1e-10;
215     while 1
216         S = sqrt((u(1)-A).^2+(u(2)-B).^2+(u(3)-C).^2);
217         r = S - c*(t-u(4));
218         Dr(:,1) = (u(1)-A)./S;
219         Dr(:,2) = (u(2)-B)./S;
220         Dr(:,3) = (u(3)-C)./S;
221         Dr(:,4) = c*ones(8,1);
222         v = (Dr'*Dr)\(-Dr'*r);
223         if norm(v,inf) < tol
224             break

```

```

223         end
224         u = u + v;
225     end
226 end
227
228 function [magnification_error,skekkja,delta_samsetning] = ...
    lidur6
229     hro = 26570;
230     delt = 10^-8;
231     magnification_error = 0;
232     skekkja = zeros(4,1);
233
234     einnminus = unique(perms([-1 1 1 1 1 1 1 1]), 'rows');
235     tveirminus = unique(perms([-1 -1 1 1 1 1 1 1]), 'rows');
236     thrirminus = unique(perms([-1 -1 -1 1 1 1 1 1]), 'rows');
237     fjorirminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 1 1 1 1]), 'rows');
238     fimminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 1 1 1]), 'rows');
239     sexminus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1]), 'rows');
240     sjominus = unique(perms([-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1]), 'rows');
241     deltan = [einnminus;tveirminus;thrirminus;fjorirminus; ...
242             fimminus;sexminus;sjominus];
243
244     phi = [0 1 2 3 4 5 6 2*pi];
245     theta = [pi/2 1.3 1 0.8 0.6 0.4 0.2 0];
246     for n = 1:254
247         A = zeros(8,1); B = zeros(8,1); C = zeros(8,1);
248         R = zeros(8,1); t = zeros(8,1); td = zeros(8,1);
249         x = 0; y = 0; z = 6370; d = 0.0001; c = 299792.458;
250         for i = 1:8
251             A(i) = hro * cos(phi(i)) * cos(theta(i));
252             B(i) = hro * cos(phi(i)) * sin(theta(i));
253             C(i) = hro * sin(phi(i));
254             R(i) = sqrt(A(i)^2 + B(i)^2 + (C(i)-z)^2);
255             t(i) = d + R(i)/c;
256             td(i) = t(i) + deltan(n,i)*delt;
257         end
258
259         I = [0,0,0,0]'; %upphafsgisk
260
261         x_svar = GPS_GaussNewton(A,B,C,td,I);
262
263         del = (x_svar - [x,y,z,d]')*10^3; %skekkjan í metrum
264         magn = norm(del,inf)/(c*10^3*delt); %magnification ...
265         error
266         if magn > magnification_error
267             magnification_error = magn;
268             skekkja = del;
269             x_bar = x_svar;
270             delta_samsetning = deltan(n,:);

```

```

270         else
271         end
272     end
273     skekkja = ...
274         sqrt(skekkja(1,1)^2+skekkja(2,1)^2+skekkja(3,1)^2);
275         %hámarksskekkja í metrum
276     end
277     v1 = lidur1
278     v2 = lidur2
279     v3 = lidur3
280     [cond4,skekkja4,delta_samsetning4] = lidur4
281     [cond5,skekkja5,delta_samsetning5] = lidur5
282     [cond6,skekkja6,delta_samsetning6] = lidur6
283
284 end

```



## Undirskrift

Með undirskrift okkar staðfestum við að forritin og skýrslan séu okkar eigin verk.

Daníel Einar Hauksson xxx

Gísli Björn Helgason xxx

---

Daníel Einar Hauksson

---

Gísli Björn Helgason

Sverrir Kristinsson xxx

---

Sverrir Kristinsson