Mismunaaðferðir - Bútaaðferðir

Daníel Einar Hauksson
Sverrir Kristinsson

Kennari
Valentina Giangreco M Puletti

Verkefni fyrir STÆ401G

Stærðfræðigreining IV
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
Apríl 2020

Efnisyfirlit

Myndaskrá

Töfluskrá

1. Inngangur

Í þessari skýrslu verða lausnir tveggja hlutafleiðujafna nálgaðar með hjálp tölvuforrits. Í fyrri hluta skýrslunnar verður notuð `mismunaaðferð` til þess að leysa `varmaleiðnijöfnuna` eftir einvíðri stöng í tímarúmi með `Dirichlet`-skilyrðum. Í seinni hluta skýrslunnar verður `Helmholtz`-jafnan í tveimur rúmvíddum með blönduðum jaðarskilyrðum leyst með `bútaaðferð` í þríhyrningsneti. Bæði verkefnin verða leyst tölulega með forritum unnin í hugbúnaðinum `Matlab` og finna má kóðann í heild sinni í viðauka.

2. Hluti 1

2.1. Mismunaaðferð og varmaleiðnijafna

Lítum á eftirfarandi jaðargildisverkefni

$$\begin{cases} \partial_t u = \kappa \partial_x^2 u, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = \psi(t), u(L,t) = \phi(t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{2.1}$$

þar sem κ er jákvæður fasti og f, ψ og ϕ eru föll sem verða tilgreind síðar. Varmaleiðnijafnan (2.1) lýsir einvíðri stöng eftir x-ásnum þar sem upphafshitastig stangarinnar í punkti x er lýst með fallinu $f(x)$. Við tímann $t > 0$ er hitastig í endum stangarinnar $x = 0$ og $x = L$ sett sem $\psi(t)$ og $\phi(t)$. Og er varmaleiðni stangarinnar lýst með sambandinu $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$. Til að finna lausn á afleiðujöfnunni verður notuð mismunaaðferð. Til þess verður svæðinu skipt upp í net. Til að skipta upp x-ásnum verður valið N svo

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} = L$$

og h er skilgreint þannig að

$$h = \frac{L}{N}. \tag{2.2}$$

Gerum ráð fyrir að $T > 0$ og $0 \leq t \leq T$. Þá á sama hátt er valið M og tímaásnum skipt upp þannig

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{M+1} = T$$

og skilgreinum τ þannig að

$$\tau = \frac{T}{M}. \tag{2.3}$$

Þá gildir að

$$x_i = (i-1)h, \quad i = 1, ..., N+1, \qquad t_k = (k-1)\tau, \quad k = 1, ..., M+1. \tag{2.4}$$

Til þess að ákvarða númer punkts (x_i, y_k) er skilgreind vörpunin

$$s : (i, k, N) \to l = s(i, k, N) = i + (k-1)(N+1). \tag{2.5}$$

Fallgildi c_l er svo fundið þar sem lausnarvigurinn $\vec{c}$ uppfyllir $A\vec{c} = \vec{b}$. A og $\vec{b}$ eru reiknuð út frá nálgunum á (2.1) sem má finna í verkefnalýsingu. A er $P \times P$ fylki þar sem $P = (N+1)(M+1)$ og $\vec{c}$ og $\vec{b}$ eru vigrar í $\mathbb{R}^P$.

Forritið sem leysir þennan hluta verkefnisins samanstendur af einu aðalfalli og nokkrum hjálparföllum sem skilgreina mismunandi þætti verkefnisins. Neðst í aðalfallinu eru skipanir sem kalla á alla liðina, svo ein keyrsla á fallinu leysir þennan hluta. Fallið byrjar á að skilgreina `global` breyturnar `f, psi` og `phi` sem eru breytilegar milli liða. Því næst er skilgreint hjálparfallið `heatwave` sem tekur inn breyturnar `L, T, N, M` og `sigma` og nálgar lausn á (2.1). Til þess eru skilgreind hjálparföllin `s` og `fylkiA` sem `heatwave` kallar á. Fyrra fallið er skilgreint á sama hátt og vörpunin hér fyrir ofan en seinna fallið skilgreinir fylkið A sem þarf til þess að leysa jöfnuhneppið. Í fallinu er skilgreind hlaupabreyta r sem hækkar um einn í hvert skipti sem stungið er inn gildum í línu r í A. Fyrstu $N+1+2M$ línur A fá gildi sem tilheyra þeim punktum sem hafa þekkt fallskylirði. Fallið `s` er svo notað til þess að gefa hverjum punkti sinn eiginn dálk í A. Því er notuð `for`-lykkja sem stingur inn ás í viðeigandi gildi fyrir:

$$A(r, s(i, 1, N)) = 1, \qquad i = 1, 2, ..., N+1$$

fyrir upphafsskylirðin, og

$$A(r, s(1, k, N)) = 1, \qquad A(r, s(N+1, k, N)) = 1, \qquad k = 2, ..., M+1,$$

fyrir jaðarskilirðin. Að lokum er notuð tvöföld `for`-lykkja til þess að fylla inn í A þau gildi sem fást úr jöfnu (17) í verkefnalýsingu fyrir innri punkta netsins

$$\begin{aligned} A(r, s(i, k, N)) &= 1, \qquad A(r, s(i+1, k-1, N)) = -\sigma, \\ A(r, s(i, k-1, N)) &= 2\sigma - 1, \qquad A(r, s(i-1, k-1, N)) = -\sigma \\ &\quad i = 2, 3, ..., N \qquad k = 2, 3, ..., M+1. \end{aligned}$$

Því næst býr `heatwave` til núllvigurinn $\vec{b}$ í $\mathbb{R}^P$ og stingur inn gildum `f, psi` og `phi` í sömu röð og A var búið til. Að lokum leysir `heatwave` jöfnuhneppið og endurraðar staki c_l í fylkið HW og skilar því. Liðirnir 3 eru allir mismunandi verkefni sem nýta sér þessi þrjú föll og vinna úr þeim gögnum sem fást.

2.2. Tölulegar lausnir og úrvinnsla

Fyrst var forritið prófað með keyrslu á fallinu `heatwave` fyrir föllin $f(x) = 100$ og $\psi(t) = \phi(t) = 0$ með inntakinu $L = 1, T = 1/100, N = 4, M = 5$ og $\sigma = 1/4$. Til þess var skilgreint hjálparfallið `lidur1` sem skilgreinir inntaks breyturnar, stillir `global` breyturnar og kallar á `heatwave` fallið. `Lidur1` skilar svo af sér fylkinu `HW` sem inniheldur nálguðu fallgildin. Hver lína fylkisins er hitastigið í völdum punktum á hverjum tíma fyrir sig. Lína 1 inniheldur gildin fyrir tímann t_1, lína 2 tímann t_2 o.s.frv.

```
HW =

  100.0000  100.0000  100.0000  100.0000  100.0000
         0  100.0000  100.0000  100.0000         0
         0   75.0000  100.0000   75.0000         0
         0   62.5000   87.5000   62.5000         0
         0   53.1250   75.0000   53.1250         0
         0   45.3125   64.0625   45.3125         0
```

Því næst er nálgaða lausnin borin saman við fágaðu lausnina

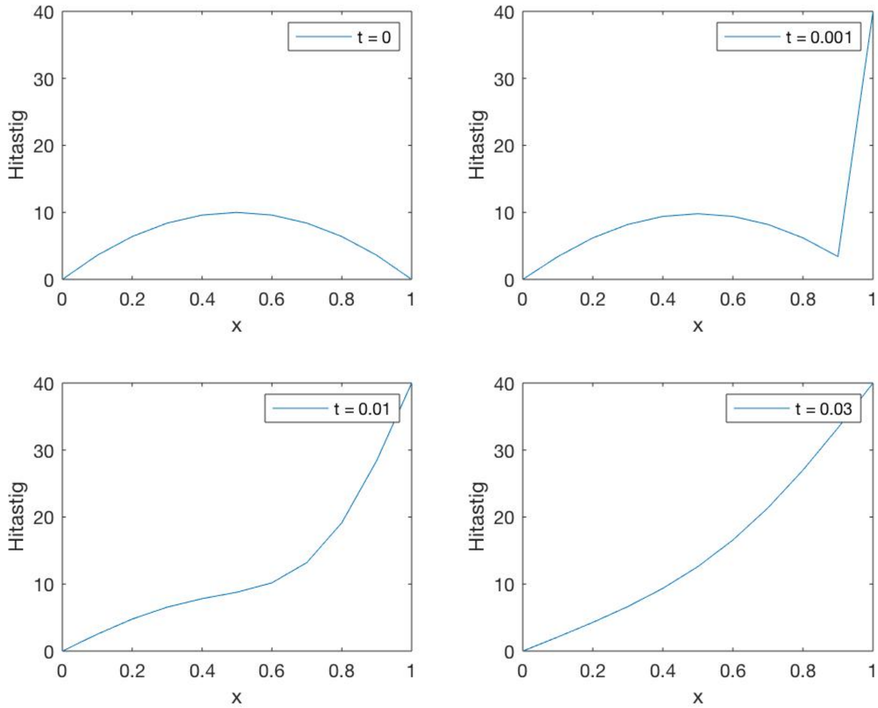
$$u_a(x,t) = \frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\kappa(2n+1)^2\omega^2 t}\sin\left((2n+1)\omega x\right), \quad \omega = \frac{\pi}{L}, \tag{2.6}$$

fyrir tilvikið $f(x) = x(L-x)$ og $\psi(t) = \phi(t) = 0$ með stýristærðirnar $L = 1, T = 1/100, N = 10, M = 100$ og $\sigma = 1/4$. Til þess er skilgreint hjálparfallið `lidur2`, fallið er byggt upp líkt og `lidur1` en býr svo til 3×5 fylkin `fagad` og `nalgad`. Síðan er notuð tvöföld `for`-lykkja til þess að stinga inn viðeigandi nálguðu gildum í `nalgad` og viðeigandi fáguðu gildum í `fagad`. Fáguðu gildin eru reiknuð með `for`-lykkju sem reiknar fyrstu 20 liði veldaraðafallsins.

Tafla 2.1: Samanburður á nálgaðri og fágaðri lausn

t \ x	$x = .2$	$x = .4$	$x = .6$	$x = .8$	$x = 1$
$t = \tau$	$c_l = 0.1550$ $u_a(x,t) = 0.1558$	$c_l = 0.2350$ $u_a(x,t) = 0.2344$	$c_l = 0.2350$ $u_a(x,t) = 0.2344$	$c_l = 0.1550$ $u_a(x,t) = 0.1558$	$c_l = 0$ $u_a(x,t) = 0$
$t = 2\tau$	$c_l = 0.1500$ $u_a(x,t) = 0.1517$	$c_l = 0.2300$ $u_a(x,t) = 0.2289$	$c_l = 0.2300$ $u_a(x,t) = 0.2289$	$c_l = 0.1500$ $u_a(x,t) = 0.1517$	$c_l = 0$ $u_a(x,t) = 0$
$t = 5\tau$	$c_l = 0.1368$ $u_a(x,t) = 0.1400$	$c_l = 0.2150$ $u_a(x,t) = 0.2131$	$c_l = 0.2150$ $u_a(x,t) = 0.2131$	$c_l = 0.1368$ $u_a(x,t) = 0.1400$	$c_l = 0$ $u_a(x,t) = 0$

Að lokum eru teiknuð upp gröf fyrir hitastigsdreifingu eftir stönginni við mismunandi tíma fyrir föllin $f(x) = 40x(L-x), \psi(t) = 0$ og $\phi(t) = 40$ með stýristærðirnar $L = 1, T = 1/10, N = 10, M = 100$ og $\sigma = 1/4$. Til þess er hjálparfallið `lidur3` skilgreint. Það vinnur á sama hátt og föllin hér að ofan og býr svo til gröf fyrir hitastigsdrefinguna á tímunum $t = 0, t = 0.001, t = 0.01$ og $t = 0.03$.



Mynd 2.1: Hitastigsdreifing eftir stöng fyrir mismunandi gildi á t

3. Hluti 2

3.1. Bútaaðferð og Helmholtz-jafna

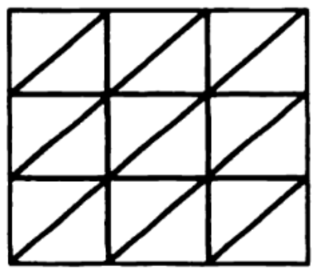
Viðfangsefni síðara verkefnisins er eftirfarandi jaðargildisverkefni

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0, & (x,y) \in D, \\ u(x,0) = w(x),\ u(x,L_2) = v(x), & 0 \leq x \leq L_1, \\ \partial_x u(0,y) = \partial_x u(L_1,y) = 0, & 0 < y < L_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

þar sem Δ er `Laplace`-virkinn og λ^2 er jákvæður fasti. D er opna mengið skilgreint með

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L_1, 0 < y < L_2\} \tag{3.2}$$

og föllin w og v eru tilgreind síðar. Hlutafleiðujafnan í jöfnu (3.1) kallast Helmholtz-jafnan og verður bútaaðferð notuð til finna nálgunargildi á lausninni u í nokkrum punktum. Í bútaaðferðinni verða rétthyrndir þríhyrningar með jafnlangar skammhliðar h notaðir til að búta niður rétthyrninginn D, eins og mynd (3.1) sýnir.



Mynd 3.1: Svæðið D bútað niður í rétthyrnda þríhyrninga

Skiptingarnar á x-ás og y-ás verða

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} = L_1, \quad 0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_{M+1} = L_2$$

og h er skilgreint þannig að

$$h = \frac{L_1}{N} = \frac{L_2}{M}. \tag{3.3}$$

Þá gildir að

$$x_i = (i-1)h, \quad i = 1, ..., N+1, \qquad y_k = (k-1)h, \quad k = 1, ..., M+1. \tag{3.4}$$

Eins og áður verða nálgunargildin fyrir $u(x_i, y_k)$ fundin með því að leysa jöfnuhneppið $A\vec{c} = \vec{b}$ þar sem A er $P \times P$ fylki og $\vec{c}$ og $\vec{b}$ eru vigrar í $\mathbb{R}^P$, $P = (N+1)(M+1)$. Stök lausnarvigursins $\vec{c}$ eru nálgunargildin c_l og er vörpunin (2.5) notuð til að tengja l saman við i og k. Fylkið A og vigurinn $\vec{b}$ eru búin til samkvæmt bútaaðferðinni sem er sýnd í kafla 6.5. í Edbook (Stærðfræðigreining IV).

Forritið sem leysir þennan hluta verkefnisins samanstendur af einu aðalfalli og nokkrum hjálparföllum sem skilgreina mismunandi þætti verkefnisins. Neðst í aðalfallinu eru skipanir sem kalla á alla liðina, svo ein keyrsla á fallinu leysir þennan hluta. Fallið byrjar á að skilgreina `global` breyturnar `w` og `v` sem eru breytilegar milli liða. Því næst er skilgreint hjálparfallið `helmholtzeq` sem tekur inn breyturnar `L1, L2, h` og `lambda` og nálgar lausn á (3.1). Til þess eru skilgreind hjálparföllin `s` og `fylkiA` sem `helmholtzeq` kallar á. Fyrra fallið er skilgreint á sama hátt og í hluta 1 en seinna fallið skilgreinir fylkið A sem þarf til þess að leysa jöfnuhneppið.

Í fallinu `fylkiA` er skilgreind hlaupabreyta r sem hækkar um einn í hvert skipti sem stungið er inn gildum í línu r í A. Fyrstu $2N+2$ línur A fá gildi sem tilheyra þeim punktum sem hafa þekkt jaðarskylirði. Fallið `s` er svo notað til þess að gefa hverjum punkti sinn eiginn dálk í A. Því er notuð `for`-lykkja sem stingur inn ás í viðeigandi gildi:

$$A(r, s(j, 1, N)) = 1, \qquad A(r, s(j, M+1, N)) = 1, \qquad j = 1, 2, ..., N+1.$$

Síðan eru sýnidæmi 6.5.4 og 6.5.6. á Edbook (Stærðfræðigreining IV) notuð til að til að finna hin stökin í fylkinu. Í sýnidæmunum eru breyturnar q og f notaðar en í okkar verkefni gildir $q = -\lambda^2$ og $f = 0$. Jafnframt gildir í okkar verkefni að flatarmál þríhyrninganna er $h^2/2$ en ekki $hk/2$. Svo er bútunin aðeins öðruvísi; skástrikin liggja / en ekki \.
Jaðarpunktur sem hefur ekki gefið gildi tengist fjórum öðrum punktum í bútaaðferðinni. Þessir jaðarpunktar eru $2M-2$ talsins ($M-1$ á hvorum enda) og

eru eftirfarandi gildi sett í línu r til að tengja jaðarpunkt saman við hina fjóra punktana "í kring".

$$\begin{aligned}
A(r, s(1, k, N)) &= \frac{2h^2}{h^2} + \frac{h^2}{18}(3q) = 2 - \frac{h^2\lambda^2}{6}, \\
A(r, s(1, k+1, N)) = A(r, s(1, k-1, N)) &= -\frac{1}{2} - \frac{h^2\lambda^2}{18} \\
A(r, s(2, k, N)) &= -\frac{h}{h} + \frac{h^2}{18}(2q) = -1 - \frac{h^2\lambda^2}{9} \\
A(r, s(2, k+1, N)) &= \frac{h^2}{18}(2q) = -\frac{h^2\lambda^2}{9} \\
k &= 2, 3, ..., M
\end{aligned}$$

Jöfnurnar að ofan gilda á jaðrinum ($x = 0, 0 < y < L_2$) en jöfnurnar fyrir jaðarinn ($x = L_1, 0 < y < L_2$) eru sambærilegar.
Innri punktur tengist sex öðrum punktum í bútaaðferðinni. Þessir innri punktar eru $(M-1)(N-1)$ og eru eftirfarandi gildi sett í línu r til að tengja innri punkt saman við hina sex punktana "í kring".

$$\begin{aligned}
A(r, s(j, k, N)) &= \frac{4h^2}{h^2} + \frac{h^2}{18}(6q) = 4 - \frac{h^2\lambda^2}{3} \\
A(r, s(j+1, k, N)) = A(r, s(j-1, k, N)) &= -\frac{h}{h} + \frac{h^2}{18}(2q) = -1 - \frac{h^2\lambda^2}{9} \\
A(r, s(j, k+1, N)) = A(r, s(j, k-1, N)) &= -\frac{h}{h} + \frac{h^2}{18}(2q) = -1 - \frac{h^2\lambda^2}{9} \\
A(r, s(j+1, k+1, N)) = A(r, s(j-1, k-1, N)) &= \frac{h^2}{18}(2q) = -\frac{h^2\lambda^2}{9} \\
j = 2, 3, ..., N \qquad k &= 2, 3, ..., M
\end{aligned}$$

Því næst býr `helmholtzeq` til núllvigurinn $\vec{b}$ í $\mathbb{R}^P$ og stingur inn gildum `w` og `v` í sömu röð og A var búið til. Að lokum leysir `helmholtzeq` jöfnuhneppið og endurraðar staki c_l í fylkið HZ og skilar því. Liðirnir 4 eru svo allir mismunandi verkefni sem nýta sér þessi þrjú föll og vinna úr þeim gögnum sem fást.

3.2. Tölulegar lausnir og úrvinnsla

Á sambærilegan hátt og í kaflanum á undan var forritið prófað með keyrslu á fallinu `helmholtzeq` fyrir föllin $w(x) = 1$ og $v(x) = 0$ með stýristærðirnar $L_1 = L_2 = 1, h = 1/4$ og $\lambda = 1/100$. Aftur er skilgreint hjálparfallið `lidur1` sem skilgreinir föllin og stýristærðirnar og kallar á `helmholtzeq`. Úttak fallsins er fylkið `HZ` sem inni heldur nálguðu gildi lausnarinnar, þar sem x-ásinn vex til vinstri og y-ásinn vex niður.

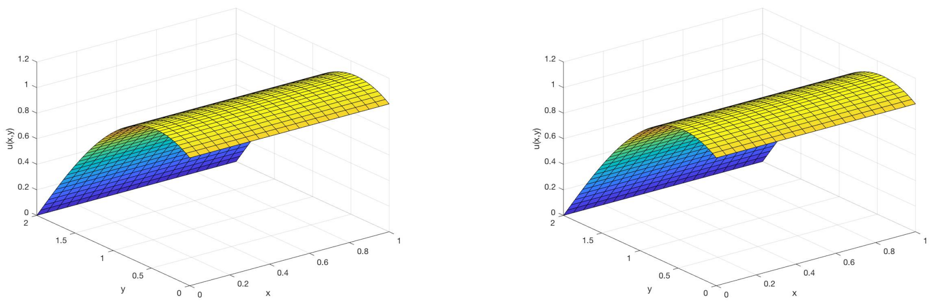
```
HZ =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
    0.7500    0.7500    0.7500    0.7500    0.7500
    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000
    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500
         0         0         0         0         0
```

Nú er forritið prófað á móti fágaðu lausninni

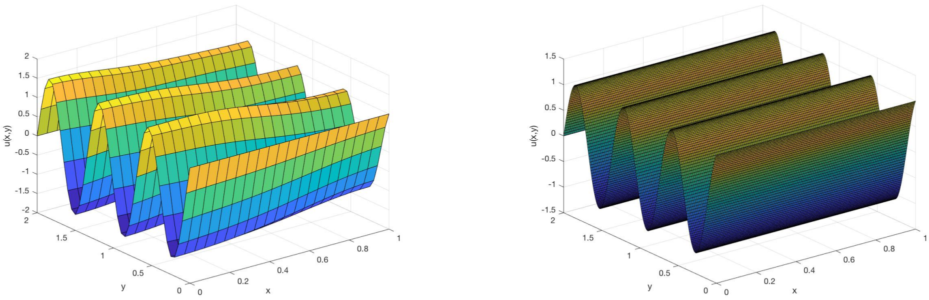
$$u_e(x, y) = \frac{\sin(\lambda(L_2 - y))}{\sin(\lambda L_2)}. \tag{3.5}$$

Fyrir föllin $w(x) = 1$ og $v(x) = 0$ með stýristærðirnar $L_1 = 1, L_2 = 2, h = 1/20$ og $\lambda = 1$ og $\lambda = 10$.



((a)) Nálguð lausn ((b)) Fáguð lausn

Mynd 3.2: Samanburður nálgaðar og fágaðar lausnar, $\lambda = 1$



((a)) Nálguð lausn ((b)) Fáguð lausn

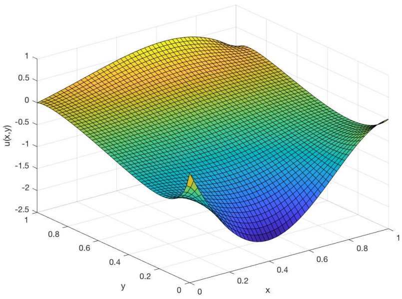
Mynd 3.3: Samanburður nálgaðar og fágaðar lausnar, $\lambda = 10$

Eins og sjá má á myndum 3.2 og 3.3 eru föllin sínus bylgja háð y. Þegar $\lambda = 1$ nær fallið ekki að klára heila lotu á menginu en fyrir $\lambda = 10$ má sjá sígilda sínus bylgju.
Því næst var forritið látið teikna upp nálgaðar lausnir fyrir föllin

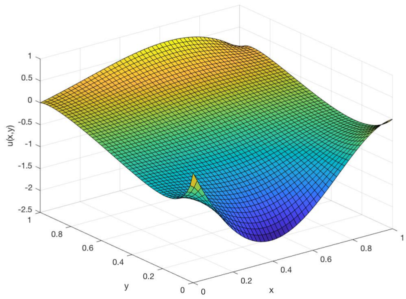
$$w(x) = -\frac{u_0 x}{L_1}(\frac{x}{L_1} - 1)^2(1 + \frac{x}{L_1})$$

$$v(x) = \frac{u_1 x}{L_1}(1 - \frac{x}{L_1})(1 + \frac{x}{L_1})^2.$$

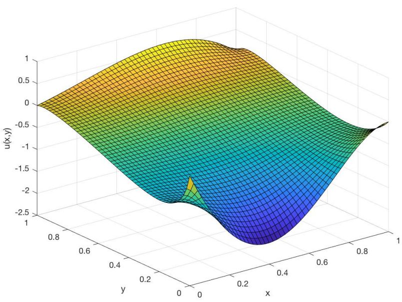
Og stýristærðirnar $L_1 = L_2 = 1, u_0 = 10, u_1 = 1, h = \frac{1}{50}$ fyrir $\lambda = \frac{1}{100}, \lambda = \frac{1}{10}, \lambda = 1$ og $\lambda = 30$. Til að leysa það er skilgreint hjálparfallið `lidur3`. Það er byggt upp líkt og áður og notar svo `for`-lykkju til þess að teikna upp nálgun á lausninni fyrir viðeigandi gildi á λ.



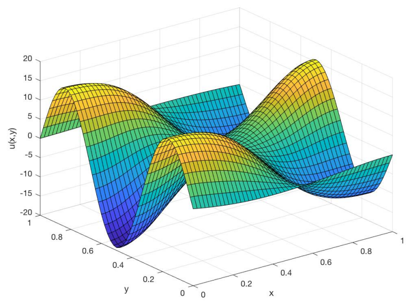
((a)) $\lambda = \frac{1}{100}$



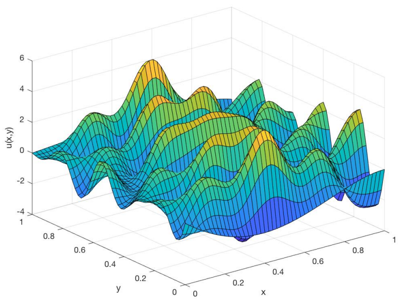
((b)) $\lambda = \frac{1}{10}$



((c)) $\lambda = 1$



((d)) $\lambda = 10$



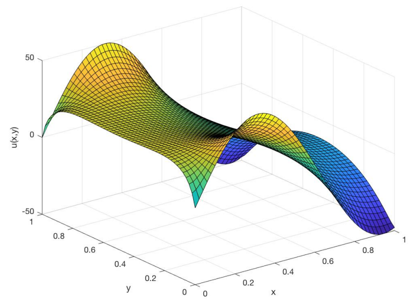
((e)) $\lambda = 30$

Mynd 3.4: Nálgaðar lausnir fyrir mismunandi gilidi á λ

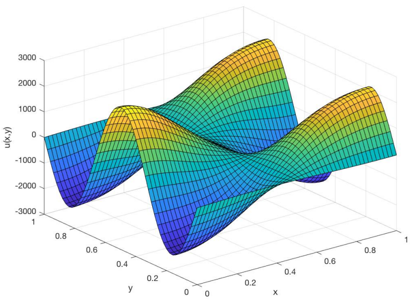
Að lokum völdu höfundar sér föll til þess að prófa forritið gegn. Stýristærðum var haldið eins og í liðnum hér fyrir ofan nema gildin á λ voru $\lambda = 1, \lambda = 10, \lambda = 100$ og $\lambda = 1000$. Valin voru föllin

$$w_o(x) = v_o(x) = 50 \sin(5x).$$

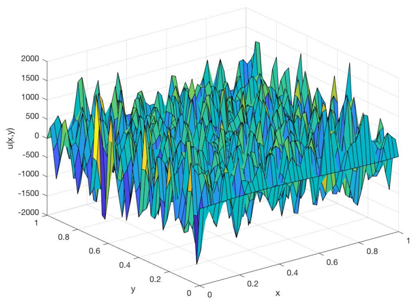
Til þess að leysa verkefnið var hjálparfallið `lidur4` skilgreint. Það er byggt upp alveg eins og `lidur3` nema með viðeigandi föll og stýristærðir.



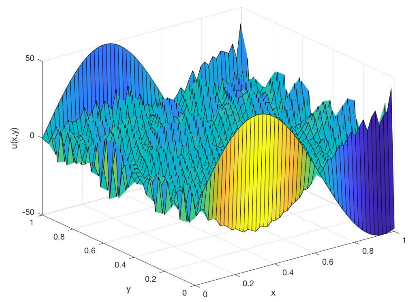
((a)) $\lambda = 1$



((b)) $\lambda = 10$



((c)) $\lambda = 100$



((d)) $\lambda = 1000$

Mynd 3.5: Nálgaðar lausnir fyrir mismunandi gilidi á λ fyrir jaðargildisföllin w_o og v_o

A. Viðauki

Forrit fyrri hluta

```
function hluti1
global f phi psi
    function HW = heatwave(L,T,N,M,sigma)
        h = L/N; tau = T/M;
        A = fylkiA(L,T,N,M,sigma);
        b = zeros((N+1)*(M+1),1);
        l = 1;
        for i = 1:N+1
            x = (i-1)*h;
            b(i) = f(x);
            l =  l + 1;
        end
        for k = 2:M+1
            b(l) = psi;
            l = l + 1;
            b(l) = phi;
            l = l + 1;
        end
        c = A\b;
        HW = zeros(M+1,N+1);
        r = 1;
        for k = 1:M+1
            for i = 1:N+1
                HW(k,i) = c(r);
                r = 1+r;
            end
        end
    end

    function A = fylkiA(L,T,N,M,sigma)
        P = (N+1)*(M+1);
        A = sparse(P,P);
```

```
        r = 1; %hlaupabreyta
        for i = 1:N+1
            A(r,s(i,1,N)) = 1;
            r = r + 1;
        end
        for k = 2:M+1
            A(r,s(1,k,N)) = 1;
            r = r + 1;
            A(r,s(N+1,k,N)) = 1;
            r = r + 1;
        end

        for i = 2:N
            for k = 2:M+1
                A(r,s(i,k,N)) = 1;
                A(r,s(i+1,k-1,N)) = -1*sigma;
                A(r,s(i,k-1,N)) = 2*sigma - 1;
                A(r,s(i-1,k-1,N)) = -1*sigma;
                r = r + 1;
            end
        end
    end

    function l = s(i,k,N)
        l = i + (k-1)*(N+1);
    end

    function HW = lidur1
        f = @(x) 100; phi = 0; psi = 0;
        HW = heatwave(1,1/100,4,5,1/4);
    end

    function lidur2
        N = 10; M = 100; L = 1; T = 1/100; sigma = 1/4;
        w = pi/L; h = L/N; tau = T/M; kappa = (sigma*(h^2))/tau;
        f = @(x) x*(L-x); psi = 0; phi = 0;
        HW2 = heatwave(L,T,N,M,sigma);
        fagad = zeros(3,5);
        nalgad = zeros(3,5);
        x = [0.2,0.4,0.6,0.8,1];
        t = [T/M, 2*T/M, 5*T/M];
        stak = [2,3,6];
        for i = 1:3
            for j = 1:5
                nalgad(i,j) = HW2(stak(i),2*j+1);
                u = 0;
                for r = 0:20
                    u = u + (1/((2*r+1)^3))* ...
                        exp(-kappa*(2*r+1)*w^2*t(i))* ...
```

```
                        sin((2*r+1)*w*x(j));
                end
                u = ((8*L^2)/(pi^3))*u;
                fagad(i,j) = u;
            end
        end
        nalgad
        fagad
    end
    function lidur3
        N = 10; M = 100; L = 1; T = 1/10; sigma = 1/4;
        f = @(x) 40*x*(L-x); psi = 0; phi = 40;
        HW3 = heatwave(L,T,N,M,sigma);
        t = [1, 2, 11, 31];
        titill = ["t = 0","t = 0.001","t = 0.01","t = 0.03"];
        x = linspace(0,L,N+1);
        hold on
        figure(1)
        for i = 1:4
            subplot(2,2,i)
            plot(x,HW3(t(i),:));
            legend(titill(i));
            xlabel('x')
            ylabel('Hitastig')
            xlim([0 L])
            ylim([0 40])
        end
        hold off
    end

HW = lidur1
lidur2
lidur3
end
```

Forrit seinni hluta

```
function hluti2
global w v
    function  HZ = helmholtzeq(L1,L2,h,lambda)
        N = L1/h; M = L2/h;
        A = fylkiA(L1,L2,h,lambda);
        b = zeros((N+1)*(M+1),1);
        l = 1;

        for i = 1:N+1
            x = h*(i-1);
            b(l) = w(x);
            l = l + 1;
            b(l) = v(x);
            l = l + 1;
        end

        c = A\b;
        HZ = zeros(M+1,N+1);
        l = 1;

        for k = 1:M+1
            for i = 1:N+1
                HZ(k,i) = c(l);
                l = 1+l;
            end
        end

    end

    function A = fylkiA(L1, L2, h, lambda)
        N = L1/h; M = L2/h;
        P = (N+1)*(M+1);
        A = sparse(P,P);
        r = 1;

        for j = 1:N+1
            A(r,s(j,1,N)) = 1;
            r = r + 1;
            A(r,s(j,M+1,N)) = 1;
            r = r + 1;
        end

        for k = 2:M
```

```
            A(r,s(1,k,N)) = 2 - (h^2*lambda^2)/6;
            A(r,s(1,k+1,N)) = -1/2 -(h^2*lambda^2)/18;
            A(r,s(1,k-1,N)) = -1/2 -(h^2*lambda^2)/18;
            A(r,s(2,k,N)) = -1 -(h^2*lambda^2)/9;
            A(r,s(2,k+1,N)) = -(h^2*lambda^2)/9;
            r = r+1;
            A(r,s(N+1,k,N)) = 2 -(h^2*lambda^2)/6;
            A(r,s(N+1,k+1,N)) = -1/2 -(h^2*lambda^2)/18;
            A(r,s(N+1,k-1,N)) = -1/2 -(h^2*lambda^2)/18;
            A(r,s(N,k,N)) = -1 -(h^2*lambda^2)/9;
            A(r,s(N,k-1,N)) = -(h^2*lambda^2)/9;
            r = r + 1;
        end

        for k = 2:M
            for j = 2:N
                A(r,s(j,k,N)) = 4 - (h^2*lambda^2)/3;
                A(r,s(j+1,k,N)) = -1 - (h^2*lambda^2)/9;
                A(r,s(j-1,k,N)) = -1 - (h^2*lambda^2)/9;
                A(r,s(j,k+1,N)) = -1 - (h^2*lambda^2)/9;
                A(r,s(j,k-1,N)) = -1 - (h^2*lambda^2)/9;
                A(r,s(j+1,k+1,N)) = - (h^2*lambda^2)/9;
                A(r,s(j-1,k-1,N)) = - (h^2*lambda^2)/9;
                r = r + 1;
            end
        end
    end

    function l = s(i,k,N)
        l = i + (k-1)*(N+1);
    end

    function HZ = lidur1
        lambda = 1/100; L1 = 1; L2 = 1; h = 1/4;
        w = @(x) 1;
        v = @(x) 0;
        HZ = helmholtzeq(L1,L2,h,lambda);
    end
    function lidur2
        L1 = 1; L2 = 2; h = 1/20;
        w = @(x) 1;
        v = @(x) 0;
        x = 0:h:L1;
        y = 0:h:L2;
        lambda = [1, 10];
        for i = 1:2
            figure(2*(i-1)+1)
            [X,Y] = meshgrid(x,y);
            z = helmholtzeq(L1,L2,h,lambda(i));
```

```
            surf(X,Y,z);
            xlabel('x')
            ylabel('y')
            zlabel('u(x,y)')
            ex = 0:h/lambda(i):L1;
            yp = 0:h/lambda(i):L2;
            [EX,YP] = meshgrid(ex,yp);
            ZE = sin(lambda(i)*(L2-YP))/sin(lambda(i)*L2);
            figure(2*i)
            surf(EX,YP,ZE)
            xlabel('x')
            ylabel('y')
            zlabel('u(x,y)')
        end
    end

    function lidur3
        L1 = 1; L2 = 1; u0 = 10; u1 = 1; h = 1/50;
        w = @(x) -(u0*x/L1)*((x/L1-1)^2)*(1+x/L1);
        v = @(x) (u1*x/L1)*(1-x/L1)*((1+x/L1)^2);
        x = 0:h:L1;
        y = 0:h:L2;
        lambda = [1/100,1/10,1,10,30];
        [X,Y] = meshgrid(x,y);
        for i = 1:5
            figure(i+4)
            Z = helmholtzeq(L1,L2,h,lambda(i));
            surf(X,Y,Z)
            xlabel('x')
            ylabel('y')
            zlabel('u(x,y)')
        end
    end

    function lidur4
        %til gamans
        L1 = 1; L2 = 1; h = 1/50;
        w = @(x) 50*sin(5*x);
        v = @(x) 50*sin(5*x);
        lambda = [1, 10, 100, 1000];
        x = 0:h:L1;
        y = 0:h:L2;
        [X,Y] = meshgrid(x,y);
        for i = 1:4
            figure(i+9)
            Z = helmholtzeq(L1,L2,h,lambda(i));
            surf(X,Y,Z)
            xlabel('x')
            ylabel('y')
```

```
            zlabel('u(x,y)')
        end
    end

HZ = lidur1
lidur2
lidur3
lidur4
end
```

Undirskriftir

Með undirskriftum okkar staðfestum við að forritin og skýrslan séu okkar eigin verk.

`Daníel Einar Hauksson xxx`	`Sverrir Kristinsson xxx`
Daníel Einar Hauksson	Sverrir Kristinsson