Euler-Bernoulli bjálkinn

Daníel Einar Hauksson
Gísli Björn Helgason
Sverrir Kristinsson

Kennari
Birgir Hrafnkelsson

Verkefni fyrir STÆ405G

Töluleg greining
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
Febrúar 2020

Efnisyfirlit

Myndaskrá

Töfluskrá

1. Inngangur

`Euler-Bernoulli` bjálkinn er grundvallarlíkan fyrir bjögun efnis undir álagi. Afleiðujöfnunni, sem líkanið lýsir, má breyta í hneppi af línulegum jöfnum með því að skipta lausnarsvæðinu upp í lítil bil. Því minni sem skipting er því stærra verður kerfið til að leysa. Í þessu verkefni er þetta einfalda líkan notað til að kanna hvaða áhrif stærð og óstöðuleiki kerfa hefur í vísindalegri forritun og er hugbúnaðurinn `matlab` notaður til þess. Kóðinn er byggður þannig upp að eitt `aðalfall` er keyrt sem inniheldur og kallar á `hjálparföll` sem leysa hvern lið fyrir sig.

2. Fræðilegur bakgrunnur

Lóðréttri tilfærslu bjálkans er lýst með fallinu $y(x)$, þar sem $0 \leq x \leq L$ er vegalengd eftir bjálka að lengd L. Tilfærslan $y(x)$ uppfyllir `Euler-Bernoulli` jöfnuna

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f(x) \tag{2.1}$$

þar sem E er `Youngstuðull` og I `flatartregðuvægi` og eru þessar stærðir teknar sem fastar eftir bjálkanum. Hægri hliðin $f(x)$ stendur fyrir þann álagskraft á lengdareiningu sem verkar á bjálkann.

Afleiðuna í jöfnu 2.1 má nálga á eftirfarandi hátt

$$\frac{d^4y}{dx^4} \approx \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4} \tag{2.2}$$

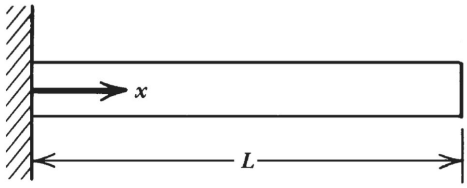
fyrir smáan aukningarstika h og er `nálgunarskekkjan` í réttu hlutfalli við h^2. Fyrir jákvæða heiltölu n er $h = L/n$. Notast er við jafna skiptingu $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = L$ þar sem $h = x_i - x_{i-1}$ er billengdin og n er bilfjöldinn. Með því að stinga jöfnu 2.2 inn í jöfnu 2.1 fæst línulegt hneppi fyrir tilfærsluna $y_i = y(x_i)$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI}f(x_i). \tag{2.3}$$

Til þess að leysa jöfnu 2.1 í öllum netpunktum þarf n jöfnur fyrir n óþekktar stærðir $y_1, ..., y_n$. Notast er við `stuðlafylki` A til að geyma upplýsingar um vinstri hlið jöfnu 2.3. Skoða þarf sérstaklega þá punkta sem eru við enda bjálkans til að taka mið af jaðarskilyrðum.

Stökkbretti er bjálki sem er klemmdur í annan endann á meðan hinn endinn er frjáls, svokallaður `óklemmdur bjálki` (sjá mynd 2.1). Jaðarskilyrðin fyrir fasta endann (vinstri) og frjálsa endann (hægri) eru

$$y(0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=L} = \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=L} = 0.$$



Mynd 2.1: Dæmi um bjálka sem er fastur í annan endann (Turcotte og Schubert, 2014)

Þar sem $y_0 = 0$ er óþarfi að taka tillit til $i = 0$ í lausnarhneppinu. Ekki er hægt að finna y_1 með jöfnu 2.3 þar sem það krefst gildisins y_{-1} sem er óskilgreint. Þess í stað er notuð önnur nálgun í punktinum x_1

$$\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=x_1} \approx \frac{16y(x_1) - 9y(x_1+h) + \frac{8}{3}y(x_1+2h) - \frac{1}{4}y(x_1+3h)}{h^4} \tag{2.4}$$

sem gildir þegar $y(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$. Með því að stinga nálgunarjöfnu 2.4 inn í jöfnu 2.2 fæst

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI}f(x_1). \tag{2.5}$$

og raða þessar upplýsingar sér í fyrstu línu stuðlafylkisins.

Fyrir x_{n-1} og x_n eru notaðar eftirfarandi nálganir

$$\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=x_{n-1}} \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4} \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=x_n} \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4} \tag{2.7}$$

sem eru gildar þegar $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_n} = \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_n} = 0$.

Nú eru komnar n jöfnur fyrir n óþekktar stærðir í tilfelli stökkbrettisins. Með smá umritun má setja jöfnu 2.1 fram á fylkjaformið $A\vec{y} = \frac{h^4}{EI}\vec{f}$. Nálgunargildin

$y_1, ..., y_n$ eru fundin með því að leysa þetta hneppi.

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ & & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{h^4}{EI} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ f(x_{n-1} \\ f(x_n) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Stuðlafylkið er `strjált fylki` þar sem stök fjarri hornalínu eru núll. Um stök þess gildir að $a_{ij} = 0$ nema ef $|i - j| \leq 3$.

Nú er hægt að líta á einfalt líkan af óklemmdum bjálka. Skoðað er gegnheilt stökkbretti úr eðal furu. Lát brettið vera að lengd $L = 2\ [m]$, með vídd $w = 30\ [cm]$ og þykkt $d = 3\ [cm]$. Eðlismassi furunnar er u.þ.b. $\rho \approx 480\ [kg/m^3]$ og þyngd brettisins á lengdareiningu er því $f(x) = f = -480wdg$. Youngstuðull hennar er $E = 1.3 * 10^{10}\ [Pa]$ og flatartregðuvægi um massamiðju brettisins er $I = wd^3/12$.

3. Tölulegar lausnir

Við lausn verkefnisins er notast við hugbúnaðinn `Matlab`. Kóðinn er byggður þannig upp að eitt aðalfall skilgreinir og kallar á hjálparföll sem leysa hvern lið fyrir sig. Til að leysa verkefnið þarf því aðeins eina keyrslu. Aðalfallið hefur ekkert inntak, en það skilgreinir ýmsar stýristærðir líkansins.

```
function adalfall
w = 0.3;
d = 0.03;
g = 9.8;
L = 2;
alag = -480 * w * d * g;
I =  w * d^3 / 12;
E = 1.3 * 10^10;
p = 100;
```

3.1. Tilfærsla brettis fyrir n=10

Skilgreint er hjálparfallið `fylki` sem tekur inn heiltöluna n og skilar út fylkinu A. Skipunin `A = sparse(n,n)` býr til strjált $n \times n$ núllfylki. Stuðlar jöfnu 2.5 eru harðkóðaðir í fyrstu línu fylksins. Síðan er stuðlum vinstri hliðar jöfnu 2.3 raðað í fylkið með `for`-lykkju. Þegar hún hefur lokið sinni keyrslu eru stuðlum komið fyrir í seinustu tvær línur fylkisins í samræmi við jöfnur 2.6 og 2.7.

```
function A = fylki(n)
    A = sparse(n,n);
    A(1,1) = 16; A(1,2) = -9; A(1,3) = 8/3; A(1,4) = -1/4;
    for i = 2:n-2
        if i - 2 > 0
            A(i,i-2) = 1;
        end
        A(i,i-1) = -4; A(i,i) = 6; A(i,i+1) = -4;
        A(i,i+2) = 1;
    end
    A(n-1,n-3) = 16/17; A(n-1,n-2) = -60/17;
    A(n-1,n-1) = 72/17; A(n-1,n) = -28/17;
    A(n, n-3) = -12/17; A(n, n-2) = 96/17;
    A(n, n-1) = -156/17; A(n, n) = 72/17;
end
```

Til þess að finna tölulega lausn á tilfærslu brettisins er skilgreint hjálparfallið `lidur1`. Inntak fallsins er heiltalan n og úttak þess eru lausnarvigurinn $\vec{y}$ og staðsetningarvigurinn $\vec{x}$. Fallið fær stuðlafylkið A með því að kalla á `fylki` með n. Skipunin (x = linspace(h,L,n) býr til vigur af n jafndreifðum tölum með billengd h á bilinu $[h, L]$. Síðan er lausnarvigurinn $\vec{y}$ fenginn með `Matlab` $\backslash$ skipuninni. Að lokum er bætt við 0 staki í byrjun $\vec{x}$ og $\vec{y}$. Vigrarnir eru þá $n+1$ víðir.

```
function [x, y] = lidur1(n)
    A = fylki(n);
    h = L/n;
    x = linspace(h,L,n)';
    y = A \ (((alag*h^4)/(E*I)).*ones(n,1));
    x = [0; x];
    y = [0; y];
end
```

Til að finna $\vec{x}$ og $\vec{y}$ fyrir $n = 10$ er kallað á fallið með `[x, y]=lidur1(10)`. Tilfærsla brettisins (færð yfir í sentimera) er

$$\vec{y} = [0, -0.02, -0.07, -0.14, -0.23, -0.34, -0.46, -0.58, -0.71, -0.84, -0.96].$$

3.2. Frávik frá fágaðri lausn

Fáguð lausn á jöfnu 2.1 fyrir fasta álagið f er

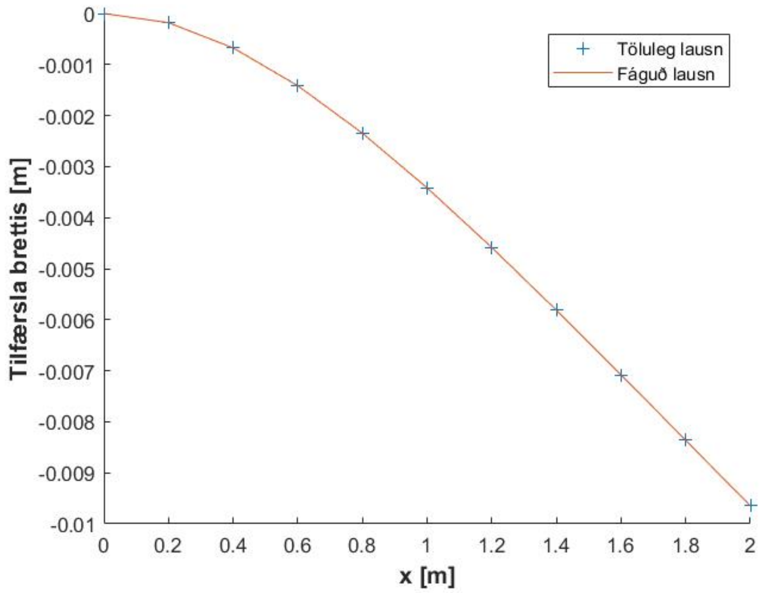
$$y(x) = \frac{f}{24EI} x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2). \tag{3.1}$$

Til að bera þessa lausn saman við tölulega lausn er hjálparfallið `lidur2`, sem tekur inn heiltölu n og rökbreytu b, skilgreint. Fallið skilar fráviki tölulegu lausnarinnar frá þeirri fáguðu í endapunktinum $x = L$. Það kallar á `lidur1` með n og fær vigrana $\vec{x}$ og $\vec{y}$. Fágaða lausnin `y1` er skilgreind með því að nota `@(x)` rithátt. Frávikið (skekkjan) er svo reiknuð með því að finna algildið af mismun lausnanna í $x = L$. Ef rökbreytan er `true` eru lausnirnar teiknaðar á graf í öllum reiknuðum punktum, frá $x = 0$ til $x = L$.

```
function skekkja = lidur2(n,b)
    [x, y] = lidur1(n);
    f = @(x) (alag/(24*E*I)).*x.^2.*(x.^2-4*L.*x+6*L^2);
    y1 = f(x);
    if b
        figure(1);
        scatter(x,y,'+'); hold on;
        plot(x,y1);
        legend('Töluleg lausn','Fáguð lausn');
        xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Tilfærsla brettis ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        hold off;
    end
    skekkja = abs(y(n+1) - y1(n+1));
end
```

Graf er teiknað með $n = 10$ með skipuninni `Skekkja2=lidur2(10,true)` og skekkjan í $x = L$ fæst sem svar.

```
Skekkja2 =

   1.8735e-16
```



Mynd 3.1: Tilfærsla brettis fyrir $n = 10$

3.3. Tilfærsla brettis fyrir stærri n

Til að endurtaka útreikningana fyrir mörg gildi á n er hjálparfallið `lidur3` skilgreint sem býr til 4×11 fylkið `Er`. Útreikningar eru gerðir fyrir $n = 10 \cdot 2^k$ fyrir $k \in [1, 11]$ þar sem k er heiltala. Fyrir öll k er skekkjan reiknuð í $x = L$ (frjálsum enda) með skipuninni `lidur2(n,false)`, ásamt því að **`ástandstala`** fylkisins A er metin með `condest(fylki(n))`. `Er` heldur utan um allar tölur og fallið skilar töflu sem sýnir k, n, skekkjuna og ástandstölu A.

```
function T = lidur3
    Er = zeros(4,11);
    for k = 1:11
        n = 10 * 2^k;
        Er(1,k) = k;
        Er(2,k) = n;
        Er(3,k) = lidur2(n,false);
        Er(4,k) = condest(fylki(n));
    end
    T = table(Er(1,:)',Er(2,:)',Er(3,:)',Er(4,:)'...
    ,'VariableNames',{'k','n','Skekkja','condA'});
end
```

Eftirfarandi tafla byggir á töflunni sem `Matlab` gefur.

Tafla 3.1: Tafla sem sýnir gildi á n, skekkju tölulegrar lausnar í frjálsum enda brettisins og ástandstölu A fyrir $k \in [1, 11]$ þegar brettið er undir föstu álagi

k	n	Skekkja [m]	cond(A)
1	20	1.3746e-14	5.303e+05
2	40	1.4717e-13	8.4493e+06
3	80	6.6568e-13	1.3482e+08
4	160	8.6012e-12	2.1539e+09
5	320	1.727e-10	3.4435e+10
6	640	8.311e-10	5.5073e+11
7	1280	2.2262e-08	8.8099e+12
8	2560	1.0378e-07	1.4094e+14
9	5120	1.6639e-06	2.2549e+15
10	10240	4.365e-05	3.6073e+16
11	20480	3.1819e-05	5.7702e+17

Taflan sýnir að skekkjan er minnst fyrir $n = 20$, og reyndar er skekkjan minni fyrir $n = 10$ sbr. fyrri lið. Skekkjan eykst þegar n stækkar og úrskýringuna fyrir því má lesa úr töflunni. Eftir því sem n stækkar þá eykst ástandstala A. Há ástandstala gefur til kynna að fylki er óstöðugt og líkur aukast á að skekkjan verði mikil. Fyrir einfalt álag virðast nálgunarjöfnunar ekki gefa góða raun þegar fjöldi netpunkta er aukinn.

3.4. Fáguð lausn fyrir sínuslaga álag

Sínuslaga álag er sett á brettið. Álagsliðurinn verður þá á forminu $f(x) = f + s(x)$ þar sem $s(x) = -pg\,sin(\frac{\pi}{L}x)$. Lausnin

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2-4Lx+6L^2)-\frac{pgL}{EI\pi}\left(\frac{L^3}{\pi^3}\,sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)-\frac{x^3}{6}+\frac{L}{2}x^2-\frac{L^2}{\pi^2}x\right) \quad (3.2)$$

uppfyllir jöfnu (2.1) og óklemmdu jaðarskilyrðin. Til að staðfesta það þarf að finna afleiður y. Fyrstu fjórar afleiðurnar eru:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f}{6EI}x(x^2-3Lx+3L^2)-\frac{pgL}{EI\pi}\left(\frac{L^2}{\pi^2}\,cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)-\frac{x^2}{2}+Lx-\frac{L^2}{\pi^2}\right) \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f}{2EI}(x^2 - 2Lx + L^2) - \frac{pgL}{EI\pi}\left(-\frac{L}{\pi}\,sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - x + L\right) \tag{3.4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{f}{EI}(x - L) - \frac{pgL}{EI\pi}\left(-\,cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) - 1\right) \tag{3.5}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{f}{EI} - \frac{pg}{EI}\,sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{3.6}$$

Fjórða afleiðan er stungin inn í jöfnu (2.1) og þá fæst

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f - pg\,sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = f(x) \tag{3.7}$$

sem passar. Jaðarskilyrðin eru athuguð:

$$y(0) = 0 \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{pgL}{EI\pi}\left(\frac{L^2}{\pi^2} - \frac{L^2}{\pi^2}\right) = 0 \tag{3.9}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=L} = \frac{f}{2EI}(L^2 - 2L^2 + L^2) - \frac{pgL}{EI\pi}(-L + L) = 0 \tag{3.10}$$

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=L} = \frac{f}{EI}(L - L) - \frac{pgL}{EI\pi}(1 - 1) = 0 \tag{3.11}$$

Þá sést að öll skilyrði eru uppfyllt.

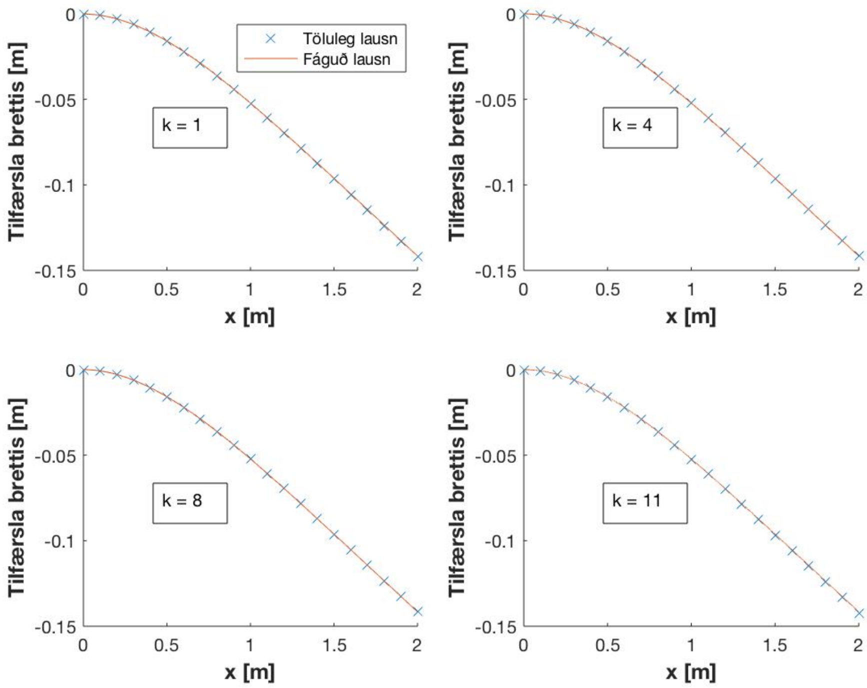
3.5. Tilfærsla brettis fyrir sínuslaga álag

Tilfærsla brettisins er reiknuð fyrir sínuslaga álag ($p = 100\ [kg/m]$) með hjálparfallinu `lidur5`, fyrir sömu gildi á n og k og í lið 3.3. Fallið hefur ekkert inntak en skilar út töflu sem inniheldur skekkju í frjálsa enda brettisins fyrir mismunandi gildi á k og n. Uppbygging fallsins, hvað varðar ákvörðun töflunnar, fylgir `lidur3` nema að ástandstala A er ekki höfð með þar sem hún helst óbreytt. Eftirfarandi tafla er byggð á úttaki fallsins sem fæst með skipuninni `T=lidur5`.

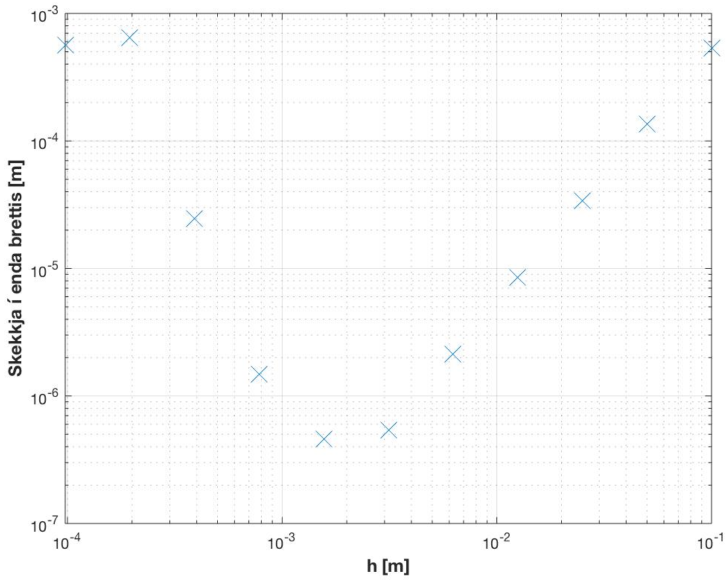
Tafla 3.2: Tafla sem sýnir gildi á n, skekkju tölulegrar lausnar í frjálsum enda brettisins og ástandstölu A fyrir $k \in [1, 11]$ þegar brettið er undir sínusálagi

k	n	Skekkja [m]
1	20	0.00053715
2	40	0.00013533
3	80	3.3896e-05
4	160	8.4782e-06
5	320	2.1172e-06
6	640	5.4238e-07
7	1280	4.5866e-07
8	2560	1.4866e-06
9	5120	2.4692e-05
10	10240	0.00064929
11	20480	0.00056391

Tafla 3.2 sýnir að skekkjan byrjar á að minnka er n stækkar og er hún í lágmarki fyrir $k = 6$ og $k = 7$. Hún tekur síðan að vaxa og við $k = 10$ er skekkjan orðin meiri en við byrjunargildið $k = 1$. Skekkjan er af sömu stærðargráðu fyrir $k = 6$ og $k = 7$, en ljóst er að minni tíma tekur að reikna þegar $k = 6$. Það er því valið sem hentugasta gildið á k fyrir sínusálag.
Ástandstalan er sú sama og í töflu 2.1 þar sem stuðlafylkið A hefur ekki breyst milli liða.
Meiginhluti fallsins fer þó í grafík. Það teiknar mynd af fágaðri og tölulegri lausn af tilfærslu brettisins fyrir fjóra mismunandi fjölda netpunkta (sjá mynd 3.2). Auk þess teiknar það skekkjuna í endapunkti brettisins á móti billengd h á *log-log* skala.



Mynd 3.2: Tilfærsla brettis við sínusálag fyrir mismunandi k



Mynd 3.3: Skekkja í frjálsum enda brettis sem fall af billengd

Af mynd 3.2 má sjá að fyrir "stór" h er línulegt samband milli skekkju í enda brettis og billengdar h á *log-log* skala. Þetta gefur til kynna að skekkjan er línulega háð h^a þar sem a er jákvæð rauntala. Ef lógritmi er tekinn af báðum stærðum og þær teiknaðar gegn hvor annari fæst hallatalan 2 sem þýðir að skekkjan er línulega háð h^2. Þetta er í samræmi við nálgunarskekkju þeirra nálgunarjafna sem stuðst er við í útleiðslu líkansins. Þegar $h \approx 8 \cdot 10^{-2}$ verður sambandið óreglulegt og skekkjan tekur að aukast. Hér fer ástandstala A að hafa áhrif, því hún stækkar eftir því sem fjöldi netpunkta eykst. Þannig magnast upp skekkja sem vinnur gegn nákvæmninni sem fæst við aukningu netpunktanna (minnkandi h) og verður hún að lokum ráðandi þáttur í skekkjunni.

```
function T = lidur5
    f = @(x) (alag/(24*E*I)).*x.^2.*(x.^2-4*L.*x+6*L^2) - ...
        (p*g*L)/(E*I*pi)*((L/pi)^3.*sin((pi/L).*x)-(x.^3)./6 ...
        + (L/2).*x.^2-(L/pi)^2.*x);
    j = 1;
    Yp = zeros(11,1); Ex = zeros(11,1); Er = zeros(3,11);
    for k = 1:11
        n = 10 * 2^k;
        h = L/n;
        x = linspace(h,L,n)';
        v = (alag.*ones(n,1) - p * g .* ...
            sin((pi/L).*x))*(h^4/(E*I));
        y = fylki(n) \ v;
        x = [0 ; x];
        y = [0 ; y];
        y1 = f(x);
        Yp(k) = abs(y(n+1)-y1(n+1));
        Ex(k) = h;
        Er(1,k) = k;
        Er(2,k) = n;
        Er(3,k) = abs(y(n+1)-y1(n+1));
        figure(2)
        if k == 1 | k == 4 | k == 8 | k == 11;
            subplot(2,2,j)
            scatter(x(1:n/20:end),y(1:n/20:end), 'x'); ...
                hold on;
            plot(x,y1);
            xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
            ylabel('Tilfærsla brettis ...
                [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
            if j==1
                legend({'Töluleg lausn','Fáguð ...
                    lausn'},'Location','northeast');
                dim = [0.2 0.5 0.3 0.3];
            end
```

```
                if j==2
                    dim = [0.65 0.5 0.3 0.3];
                end
                if j==3
                    dim = [0.2 0.0 0.3 0.3];
                end
                if j==4
                    dim = [0.65 0.0 0.3 0.3];
                end
                annotation('textbox',dim,'String',['k = ' ...
                   num2str(k)],'FitBoxToText','on');
                hold off;
                j = j + 1;
            end
        end
        figure(3)
        loglog(Ex,Yp,'x', 'MarkerSize', 15)
        grid on;
        xlabel('h [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Skekkja í enda brettis ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        T = table(Er(1,:)',Er(2,:)',Er(3,:)','VariableNames',...
        {'k',n','Skekkja'});
    end
```

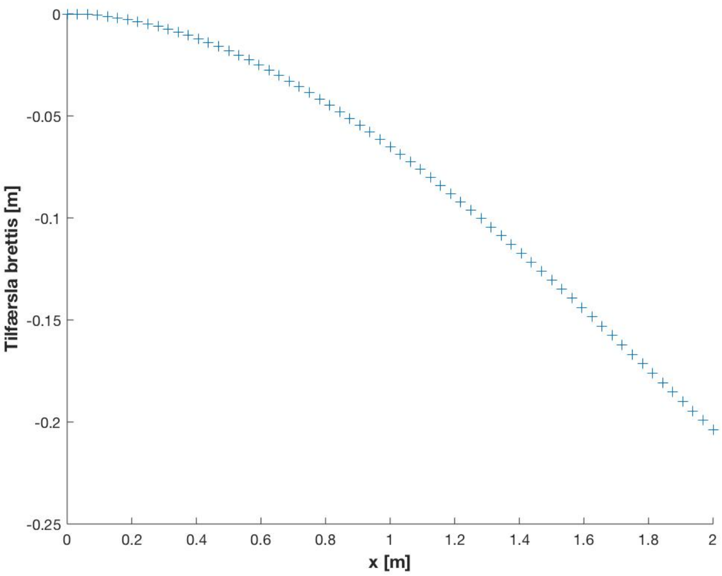
3.6. Tilfærsla brettis fyrir dýfara

Nú er sínuslaga álagið fjarlægt og 70 $[kg]$ dýfari fer á brettið. Hann stendur á ystu 20 $[cm]$ brettisins og þar bætist álagið $-9.8 \cdot 70/0.2\,[N/m]$ við. Þar sem besta niðurstaðan fékkst með $k = 6$ fyrir sínuslaga álag, þá er $k = 6$ notað fyrir þessa útreikninga. Tilfærsla brettisins er reiknuð með hjálparfallinu `lidur6`. Það bætir aukaálaginu við þar sem $1.8 \leq x_i \leq 2$ og finnur tilfærsluna.

```
function bognun = lidur6
    k = 6;
    n = 10 * 2^k;
    h = L/n;
    v = alag .* ones(n,1);
    x = linspace(h,L,n)';
    for i = 1:n
        if x(i) >= 1.8;
            v(i) = v(i) - g * (70/0.2);
        end
    end
    y = fylki(n) \ ((h^4/(E * I)) .* v);
    x = [0; x];
    y = [0; y];
    figure(4)
    scatter(x(1:10:end),y(1:10:end),'+');
    xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
    ylabel('Tilærsla brettis ...
       [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
    bognun = y(n+1);
end
```

Fallið teiknar svo graf sem sýnir tilfærslu brettisins og skilar tilfærslunni í $x = L$ (bognuninni) sem svar. Kallað er á fallið með `Bognun6=lidur6`.

```
Bognun6 =

   -0.2039
```



Mynd 3.4: Tilfærsla brettis með dýfara

3.7. Klemmdur bjálki

Hér er litið á bjálka sem er fastur í báða enda, og sig hans frá upphafsstöðu hermt. Jaðarskilyrðin eru $y(0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = y(L) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=L} = 0$. Skipting netpunkta er frábrugðin fyrri liðum þar sem $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = L$ með $h = x_i - x_{i-1}$ fyrir $i = 1, ..., n$. Þannig fæst $n \times n$ jöfnuhneppi fyrir n netpunkta á bilinu $[h, L-h]$ sem ákvarðar $y_1, ...y_n$. Stuðlafylkið A er eins og í fyrri liðum, nema seinustu tvær línunar eru fyrstu tvær speglaðar. Til að búa til klemmda stuðlafylkið A er skilgreint fallið `klemmtFylki`. Fallið tekur inn heiltölu sem ákvarðar stærð þess.

```
function A = klemmtFylki(n)
    A = sparse(n,n);
    A(1,1) = 16; A(1,2) = -9; A(1,3) = 8/3;
    A(1,4) = -1/4;
    for i = 2:n-2
        if i - 2 > 0
            A(i,i-2) = 1;
        end
        A(i,i-1) = -4;
        A(i,i) = 6;
        A(i,i+1) = -4;
        A(i,i+2) = 1;
    end
    A(n-1,n-3) = 1; A(n-1,n-2) = -4; A(n-1,n-1) = 6;
    A(n-1,n) = -4;
    A(n,n) = 16; A(n,n-1) = -9; A(n,n-2) = 8/3;
    A(n,n-3) = -1/4;
end
```

Sett er sínusálag á klemmda brettið. Fáguð lausn er þá

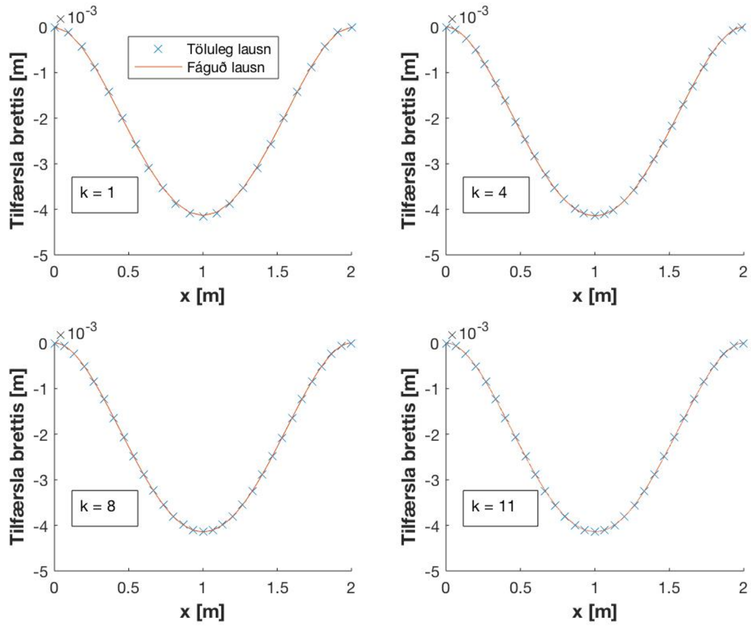
$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(L-x^2)^2 - \frac{pgL^2}{\pi^4 EI}\left(L^2 sin\frac{\pi}{L}x + \pi x(x-L)\right). \tag{3.12}$$

Til að herma þetta líkan er hjálparfallið `lidur7` skilgreint. Fallið hefur ekkert inntak en skilar út töflu sem inniheldur skekkju í miðpunkti brettisins ($x = L/2$) og ástandstölu klemmda fylkisins A fyrir mismunandi gildi á k og n. Fallið er byggt upp á svipaðan hátt og fyrri hjálparföll. Meginöxull fallsins er for-lykkja sem keyrir fyrir heiltölur $k \in [1, 11]$. Til að fá netpunkt í miðpunkti brettisins þarf n að vera oddatala og tryggir skipunin `n = 10*2^k+1` það. Fallið reiknar fágaða lausn og ákvarðar tölulega lausnarvigurinn í öllum netpunktum líkt og áður. Bæta þarf endapunktunum (0,0) og (L,0) við lausnarvigrana $\vec{x}$ og $\vec{y}$ því hneppið tekur ekki tillit til jaðarpunkta. Þessar lausnir eru teiknaðar fyrir $k = 1, 4, 8, 11$ (sjá mynd 3.5). Taflan er ákvörðuð líkt og í `lidur3`. Vigurinn $\vec{Y_p}$ geymir skekkju í miðpunkti brettisins og eftir for-lykkjuna eru þær upplýsingar teiknaðar á móti h á *log-log* skala. Billengdin er nú $h = L/(n+1)$ þar sem fjöldi bila er $n+1$. Færsla brettisins í miðjunni ($x = L/2$) er stak númer $\frac{n+3}{2}$ í $\vec{y}$ vigrinum eftir að $y = 0$ er sett sem fyrsta stak vigursins.
Eftirfarandi tafla er byggð á úttaki fallsins sem fæst með skipuninni `T=lidur7`.

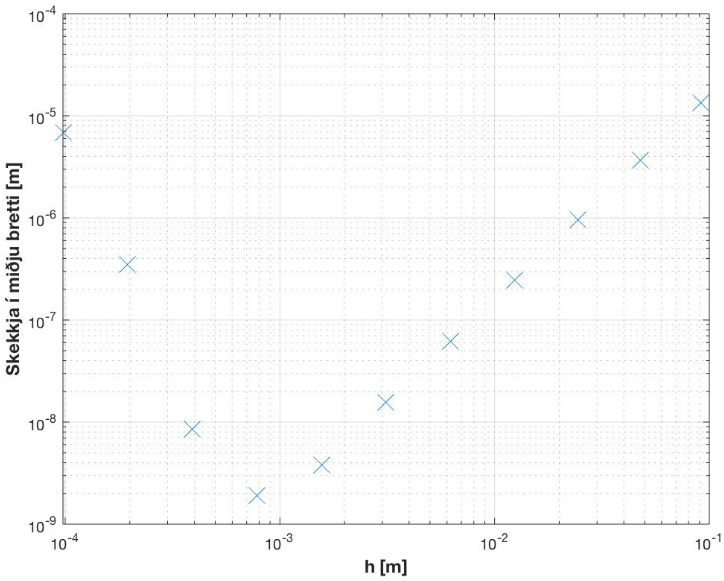
Tafla 3.3: Tafla sem sýnir gildi á n, skekkju tölulegrar lausnar í frjálsum enda brettisins og ástandstölu A fyrir $k \in [1, 11]$ þegar brettið er undir sínusálagi

k	n	Skekkja [m]	cond(A)
1	21	1.3399e-05	12882
2	41	3.6728e-06	1.7043e+05
3	81	9.6319e-07	2.4735e+06
4	161	2.4676e-07	3.767e+07
5	321	6.2455e-08	5.8793e+08
6	641	1.5716e-08	9.2903e+09
7	1281	3.8236e-09	1.4772e+11
8	2561	1.8986e-09	2.3562e+12
9	5121	8.5543e-09	3.764e+13
10	10241	3.5019e-07	6.018e+14
11	20481	6.899e-06	9.6267e+15

Líkt og í lið 3.5 þá minnkar skekkjan með aukningu netpunkta til að byrja með, en fer svo að aukast. Ástandstalan eykst með stærð fylkisins sem vinnur gegn þeirri nákvæmni sem fæst með aukningu í fjölda netpunkta.



Mynd 3.5: Tilfærsla klemmds brettis við sínusálag fyrir mismunandi k



Mynd 3.6: Skekkja í miðju bretti sem fall af billengd

Af mynd 3.6 má sjá að fyrir $h \in [10^{-3}, 10^{-1}]$ er skekkjan í miðpunkti brettis línulega háð billengd h á log-log skala. Með sömu rökum og í 3.5 má því ætla að skekkjan sé línulega háð h^2. Þegar $h \leq 10^{-3}$ fer ástandstalan að hafa áhrif og skekkjan tekur að aukast.

```
    function T = lidur7
        j = 1;
        Er = zeros(4,11);
        for k = 1:11
            n = 10 * 2^k+1;
            h = L/(n+1);
            x = linspace(h,L-h,n)';
            f = @(x) (alag/(24*E*I)).*x.^2.*((L-x).^2)...
                -((p*g*L^2)/(E*I*pi^4))*...
                (L^2.*sin((pi/L).*x)+pi.*x.*(x-L));
            v = alag.*ones(n,1) - p.*g.*sin((pi/L).*x);
            v = (((h^4)/(E*I))).* v;
            A = klemmtFylki(n);
            y = A \ v;
            x = [0; x; L];
            y = [0; y; 0];
            y1 = f(x);
            figure(5);
```

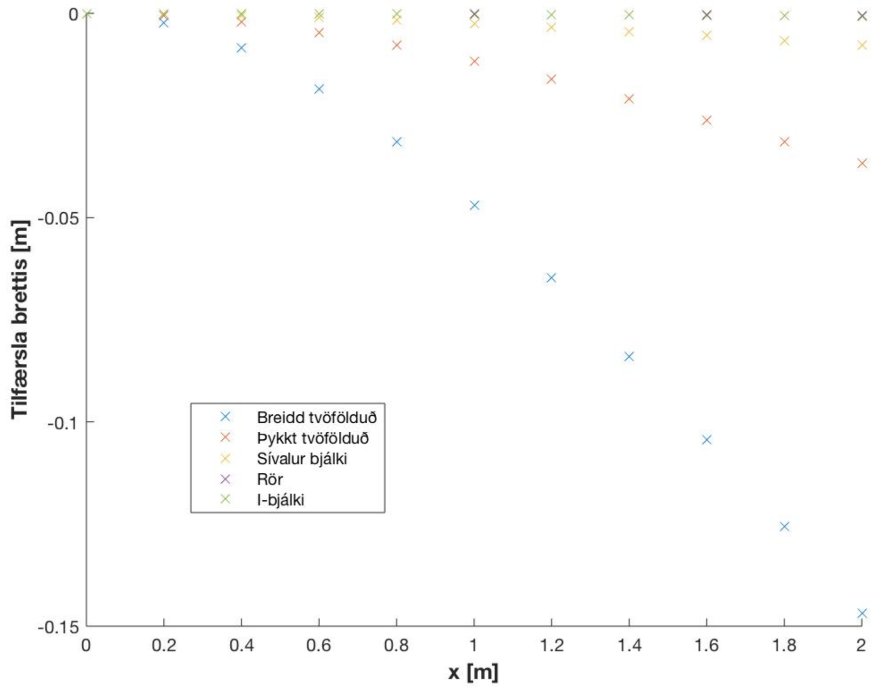
```
            if k == 1 | k == 4 | k == 8 | k == 11;
                subplot(2,2,j)
                scatter(x(1:n/30:end),y(1:n/30:end), 'x'); ...
                    hold on;
                plot(x,y1);
                xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
                ylabel('Tilfærsla brettis [m]','FontSize',12,...
                    'FontWeight','bold');
                if j==1
                    legend({'Töluleg lausn','Fáguð ...
                        lausn'},'Location',...
                        'north');
                    dim = [0.15 0.5 0.2 0.2];
                end
                if j==2
                    dim = [0.59 0.5 0.2 0.2];
                end
                if j==3
                    dim = [0.15 0.03 0.2 0.2];
                end
                if j==4
                    dim = [0.59 0.03 0.2 0.2];
                end
                annotation('textbox',dim,'String',...
                    ['k = ' num2str(k)],'FitBoxToText','on');
                hold off;
                j = j + 1;

            end
            Er(1,k) = k;
            Er(2,k) = n;
            Er(3,k) = abs(y((n+3)/2)-y1((n+3)/2));
            Er(4,k) = condest(A);
            Ex(k) = h;
            Yp(k) = abs(y((n+3)/2)-y1((n+3)/2));

        end
        T = table(Er(1,:)',Er(2,:)',Er(3,:)',Er(4,:)',...
            'VariableNames', {'k','n','Skekkja','condA'});
        figure(6)
        loglog(Ex,Yp,'x', 'MarkerSize', 15)
        grid on;
        xlabel('h [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Skekkja í miðju bretti ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight',...
            'bold');
    end
```

3.8. Útvíkkun líkans

Líkanið er prófað fyrir mismunandi bjálka þegar dýfari stendur á enda brettisins líkt og í 3.6. Fyrst er skoðað hvaða áhrif tvöföldun á þykkt brettisins annars vegar og tvöföldun á breidd hins vegar hefur á tilfærsluna. Síðan er tilfærslan skoðuð fyrir svokallaðan I-bjálka, sívalan bjálka og rör. Þversniðsflatarmál er tvöfalt það flatarmál sem unnið var með í fyrri liðum fyrir alla bjálki. Massinn helst sá sami. Allt þetta er gert í hjálparfallinu `lidur8`. Fallið tekur heiltölu sem ákvarðar fjölda netpunkta. Síðan skilgreinir það undirföll sem leysa hvert tilvik fyrir sig. Undirföllin taka inn stýristærðir sem þau nota til að ákvarða flatartregðuvægið. Þau leysa síðan hneppið $A\vec{y} = \frac{h^4}{EI}\vec{f}$ og skila lausnavigrinum $\vec{y}$ sem inniheldur nálgunargildin $y_0, ..., y_n$. Síðan er tilfærslan teiknuð fyrir hvert tilfelli og tafla búin til sem inniheldur færsluna í frjálsa endanum $(x = L)$.
Mynd 3.7 og tafla 3.4 fást með skipuninni `lidur8(10)`.

Tafla 3.4: Tafla sem sýnir færslu í enda bjalka fyrir mismunandi gerðir bjálka

	Sívalur bjálki	Rör	Þykkt tvöfölduð	Breidd tvöfölduð	I-biti
Færsla $[cm]$	-0.7689	-0.0593	-14.68	-3.671	-0.0698



Mynd 3.7: Tilfærsla fyrir mismunandi gerðir bjálka

Af mynd 3.7 má sjá að mesta tilfærslan er þegar breidd stökkbrettisins er tvöfölduð. Minnsta tilfærslan fæst fyrir I-bjálka og rör. Skilyrðið að þverskurðsflatarmálið sé það sama fyrir alla bjálkana hefur mikil áhrif á lausnina. Hægt væri að framkvæma næmnigreiningu fyrir hvert tilfelli fyrir sig til að ákvarða stýribreytur þannig að tilfærslan og efnismagnið verður sem minnst.

```
function lidur8(n)
    w = 0.3;
    d = 0.03;
    g = 9.8;
    L = 2;
    E = 1.3 * 10^10;
    h = L/n;
    x = linspace(h,L,n)';
    f = -480 * 0.3 * 0.03 * g;
    alag = (-480*w*d*g).* ones(n,1);

    for i = 1:n
        if x(i) >= 1.8;
            alag(i) = alag(i) + -g * (70/0.2);
        end
    end

    function y = bretti(w,d)
        I = w * d^3 / 12;
        y = fylki(n)\((h^4 / (E*I)).* alag);
        y = [0; y];
    end

    function y = sivalur(ry, ri)
        I = pi * (ry^4-ri^4) / 4;
        y = fylki(n)\((h^4 / (E*I)).* alag);
        y = [0; y];
    end

    function y = Ibiti(h1,h2,a,b)
        I = (a*h2^3)/12 + (b/12)*(h1^3-h2^3);
        y = fylki(n) \ ((h^4)/(E*I).*alag);
        h
        y = [0; y];
    end

    ry = sqrt(2*w*d/pi);

    ry1 = 0.2;
    ri1 = sqrt(ry1^2-2*w*d/pi);

    a = 0.04;
    h1 = 0.4;
    h2 = 0.35;
    b = (2*w*d-a*h2)/(h1-h2);

    Er = zeros(1,5);
    ys = sivalur(ry,0); Er(2,1) = ys(n+1);
```

```
        yhs = sivalur(ry1,ri1); Er(2,2) = yhs(n+1);
        y2w = bretti(2*w,d); Er(2,3) = y2w(n+1);
        y2d = bretti(w,2*d); Er(2,4) = y2d(n+1);
        yI = Ibiti(h1,h2,a,b); Er(2,5) = yI(n+1);

        x = [0; x];
        figure(7)
        scatter(x,y2w,'x'); hold on;
        scatter(x,y2d,'x');
        scatter(x,ys, 'x');
        scatter(x,yhs, 'x');
        scatter(x,yI, 'x');
        xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Tilfærsla brettis ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        legend('Breidd tvöfölduð', 'Ãžykkt tvöfölduð', ...
            'Sívalur bjálki', ...
            'Rör', 'I-bjálki'); hold off;

        T = table(Er(:,1)',Er(:,2)',Er(:,3)',Er(:,4)',Er(:,5)',...
            'VariableNames',{'Sívalur bjálki','Rör','Ãžykkt ...
                tvöfölduð',...
            'Breidd tvöfölduð', 'I-bjálki'})
    end
```

Heimildir

Sauer, T. (2014). *Numerical Analysis* (2. útgáfa). Pearson Education Limited: Essex.

Turcotte, D. L. og Schubert, G. (2014). *Geodynamics* (3. útgáfa). Cambridge University Press: New York.

A. Viðauki

Aðalfallið í heild sinni

```
function adalfall
w = 0.3;
d = 0.03;
g = 9.8;
L = 2;
alag = -480 * w * d * g;
I =  w * d^3 / 12;
E = 1.3 * 10^10;
p = 100;

    function A = fylki(n)
        A = sparse(n,n);
        A(1,1) = 16; A(1,2) = -9; A(1,3) = 8/3;
        A(1,4) = -1/4;
        for i = 2:n-2
            if i - 2 > 0
                A(i,i-2) = 1;
            end
            A(i,i-1) = -4;
            A(i,i) = 6;
            A(i,i+1) = -4;
            A(i,i+2) = 1;
        end
        A(n-1,n-3) = 16/17; A(n-1,n-2) = -60/17; A(n-1,n-1) = ...
            72/17;
        A(n-1,n) = -28/17;
        A(n, n-3) = -12/17; A(n, n-2) = 96/17; A(n, n-1) = ...
            -156/17;
        A(n, n) = 72/17;
    end

    function [x, y] = lidur1(n)
```

```
        A = fylki(n);
        h = L/n;
        x = linspace(h,L,n)';
        y = A \ (((alag*h^4)/(E*I)).*ones(n,1));
        x = [0; x];
        y = [0; y];
    end

    function skekkja = lidur2(n,b)
        [x, y] = lidur1(n);
        f = @(x) (alag/(24*E*I)).*x.^2.*(x.^2-4*L.*x+6*L^2);
        y1 = f(x);
        if b
            figure(1);
            scatter(x,y,'+'); hold on;
            plot(x,y1);
            legend('Töluleg lausn','Fáguð lausn');
            xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
            ylabel('Tilfærsla brettis ...
                [m]','FontSize',12,'FontWeight',...
                'bold');
            hold off;
        end
        skekkja = abs(y(n+1) - y1(n+1));
    end

    function T = lidur3
        Er = zeros(4,11);
        for k = 1:11
            n = 10 * 2^k;
            Er(1,k) = k;
            Er(2,k) = n;
            Er(3,k) = lidur2(n,false);
            Er(4,k) = condest(fylki(n));
        end
        T = table(Er(1,:)',Er(2,:)',Er(3,:)',Er(4,:)' ...
        ,'VariableNames',{'k','n','Skekkja','condA'});
    end

    function T = lidur5
        f = @(x) (alag/(24*E*I)).*x.^2.*(x.^2-4*L.*x+6*L^2)...
            - (p*g*L)/(E*I*pi)*((L/pi)^3.*sin((pi/L).*x)...
            - (x.^3)./6 + (L/2).*x.^2-(L/pi)^2.*x);
        j = 1;
        Yp = zeros(11,1); Ex = zeros(11,1); Er = zeros(3,11);
        for k = 1:11
            n = 10 * 2^k;
            h = L/n;
            x = linspace(h,L,n)';
```

```
            v = (alag.*ones(n,1) - p * g .* ...
                sin((pi/L).*x))*(h^4/(E*I));
            y = fylki(n) \ v;
            x = [0 ; x];
            y = [0 ; y];
            y1 = f(x);
            Yp(k) = abs(y(n+1)-y1(n+1));
            Ex(k) = h;
            Er(1,k) = k;
            Er(2,k) = n;
            Er(3,k) = abs(y(n+1)-y1(n+1));
            figure(2)
            if k == 1 | k == 4 | k == 8 | k == 11;
                subplot(2,2,j)
                scatter(x(1:n/20:end),y(1:n/20:end), 'x'); ...
                    hold on;
                plot(x,y1);
                xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
                ylabel('Tilfærsla brettis [m]','FontSize',12,...
                    'FontWeight','bold');
                if j==1
                    legend({'Töluleg lausn','Fáguð ...
                        lausn'},'Location',...
                        'northeast');
                    dim = [0.2 0.5 0.3 0.3];
                end
                if j==2
                    dim = [0.65 0.5 0.3 0.3];
                end
                if j==3
                    dim = [0.2 0.0 0.3 0.3];
                end
                if j==4
                    dim = [0.65 0.0 0.3 0.3];
                end
                annotation('textbox',dim,'String',['k = ' ...
                    num2str(k)],...
                    'FitBoxToText','on');
                hold off;
                j = j + 1;
            end
        end
        figure(3)
        loglog(Ex,Yp,'x', 'MarkerSize', 15)
        grid on;
        xlabel('h [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Skekkja í enda brettis ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight',...
            'bold');
```

```
        T = table(Er(1,:)',Er(2,:)',Er(3,:)','VariableNames',...
            {'k','n','Skekkja'});
    end

    function bognun = lidur6
        k = 6;
        n = 10 * 2^k;
        h = L/n;
        v = alag .* ones(n,1);
        x = linspace(h,L,n)';
        for i = 1:n
            if x(i) >= 1.8;
                v(i) = v(i) - g * (70/0.2);
            end
        end
        y = fylki(n) \ ((h^4/(E * I)) .* v);
        x = [0; x];
        y = [0; y];
        figure(4)
        scatter(x(1:10:end),y(1:10:end),'+');
        xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Tilfærsla brettis ...
           [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        bognun = y(n+1);
    end

    function A = klemmtFylki(n)
        A = sparse(n,n);
        A(1,1) = 16; A(1,2) = -9; A(1,3) = 8/3;
        A(1,4) = -1/4;
        for i = 2:n-2
            if i - 2 > 0
                A(i,i-2) = 1;
            end
            A(i,i-1) = -4;
            A(i,i) = 6;
            A(i,i+1) = -4;
            A(i,i+2) = 1;
        end
        A(n-1,n-3) = 1; A(n-1,n-2) = -4; A(n-1,n-1) = 6;
        A(n-1,n) = -4;
        A(n,n) = 16; A(n,n-1) = -9; A(n,n-2) = 8/3;
        A(n,n-3) = -1/4;
    end

    function T = lidur7
        j = 1;
        Er = zeros(4,11);
        for k = 1:11
```

```
        n = 10 * 2^k+1;
        h = L/(n+1);
        x = linspace(h,L-h,n)';
        f = @(x) (alag/(24*E*I)).*x.^2.*((L-x).^2)...
            -((p*g*L^2)/(E*I*pi^4))*...
            (L^2.*sin((pi/L).*x)+pi.*x.*(x-L));
        v = alag.*ones(n,1) - p.*g.*sin((pi/L).*x);
        v = (((h^4)/(E*I))).* v;
        A = klemmtFylki(n);
        y = A \ v;
        x = [0; x; L];
        y = [0; y; 0];
        y1 = f(x);
        figure(5);
        if k == 1 | k == 4 | k == 8 | k == 11;
            subplot(2,2,j)
            scatter(x(1:n/30:end),y(1:n/30:end), 'x'); ...
                hold on;
            plot(x,y1);
            xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
            ylabel('Tilfærsla brettis [m]','FontSize',12,...
                'FontWeight','bold');
            if j==1
                legend({'Töluleg lausn','Fáguð ...
                    lausn'},'Location',...
                    'north');
                dim = [0.15 0.5 0.2 0.2];
            end
            if j==2
                dim = [0.59 0.5 0.2 0.2];
            end
            if j==3
                dim = [0.15 0.03 0.2 0.2];
            end
            if j==4
                dim = [0.59 0.03 0.2 0.2];
            end
            annotation('textbox',dim,'String',...
                ['k = ' num2str(k)],'FitBoxToText','on');
            hold off;
            j = j + 1;

        end
        Er(1,k) = k;
        Er(2,k) = n;
        Er(3,k) = abs(y((n+3)/2)-y1((n+3)/2));
        Er(4,k) = condest(A);
        Ex(k) = h;
        Yp(k) = abs(y((n+3)/2)-y1((n+3)/2));
```

```

        end
        T = table(Er(1,:)',Er(2,:)',Er(3,:)',Er(4,:)',...
            'VariableNames', {'k','n','Skekkja','condA'});
        figure(6)
        loglog(Ex,Yp,'x', 'MarkerSize', 15)
        grid on;
        xlabel('h [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Skekkja í miðju bretti ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight',...
            'bold');
    end

    function T = lidur8(n)
        w = 0.3;
        d = 0.03;
        g = 9.8;
        L = 2;
        E = 1.3 * 10^10;
        h = L/n;
        x = linspace(h,L,n)';
        f = -480 * 0.3 * 0.03 * g;
        alag = (-480*w*d*g).* ones(n,1);

        for i = 1:n
            if x(i) >= 1.8;
                alag(i) = alag(i) + -g * (70/0.2);
            end
        end

        function y = bretti(w,d)
            I = w * d^3 / 12;
            y = fylki(n)\((h^4 / (E*I)).* alag);
            y = [0; y];
        end

        function y = sivalur(ry, ri)
            I = pi * (ry^4-ri^4) / 4;
            y = fylki(n)\((h^4 / (E*I)).* alag);
            y = [0; y];
        end

        function y = Ibiti(h1,h2,a,b)
            I = (a*h2^3)/12 + (b/12)*(h1^3-h2^3);
            y = fylki(n) \ ((h^4)/(E*I).*alag);
            h
            y = [0; y];
        end

```

```
        ry = sqrt(2*w*d/pi);

        ry1 = 0.2;
        ri1 = sqrt(ry1^2-2*w*d/pi);

        a = 0.04;
        h1 = 0.4;
        h2 = 0.35;
        b = (2*w*d-a*h2)/(h1-h2);

        Er = zeros(1,5);
        ys = sivalur(ry,0); Er(2,1) = ys(n+1);
        yhs = sivalur(ry1,ri1); Er(2,2) = yhs(n+1);
        y2w = bretti(2*w,d); Er(2,3) = y2w(n+1);
        y2d = bretti(w,2*d); Er(2,4) = y2d(n+1);
        yI = Ibiti(h1,h2,a,b); Er(2,5) = yI(n+1);

        x = [0; x];
        figure(7)
        scatter(x,y2w,'x'); hold on;
        scatter(x,y2d,'x');
        scatter(x,ys, 'x');
        scatter(x,yhs, 'x');
        scatter(x,yI, 'x');
        xlabel('x [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        ylabel('Tilfærsla brettis ...
            [m]','FontSize',12,'FontWeight','bold');
        legend('Breidd tvöfölduð', 'Ãžykkt tvöfölduð', ...
            'Sívalur bjálki', ...
            'Rör', 'I-bjálki');  hold off;

        T = table(Er(:,1)',Er(:,2)',Er(:,3)',Er(:,4)',Er(:,5)',...
            'VariableNames',{'Sívalur bjálki','Rör','Ãžykkt ...
               tvöfölduð',...
            'Breidd tvöfölduð', 'I-bjálki'})
    end

%Kallað á alla liði verkefnisins

[x y] = lidur1(10)
Skekkja2 = lidur2(10,1)
Tafla3 = lidur3
Tafla5 = lidur5
Bognun6 = lidur6
Tafla7 = lidur7
Tafla8 = lidur8(10)

end
```

Undirskrift

Með undirskrift okkar staðfestum við að forritin og skýrslan séu okkar eigin verk.

Daníel Einar Hauksson	Gísli Björn Helgason
Sverrir Kristinsson	