

Численное исследование аттракторов

Евгений Лагутин Валентин Самохин

May 21, 2019

ФУПМ МФТИ

Проект по курсу "Вычислительная математика".

Проект подразумевает применение методов Рунге-Кутты 1 и 4 порядков аппроксимации для расчёта поведения аттракторов Лоренца и Рёслера, исследование аттракторов как систем нелинейных дифференциальных уравнений, исследование численных методов на сходимость по сетке в приложении к данной задаче.

Постановка задачи

- Проведите исследования свойств систем ОДУ в зависимости от параметров процессов $(\sigma, r, b, \gamma_1, \gamma_2)$.
- Исследуйте сходимость численного решения по сетке.
- Используйте методы Рунге-Кутты 1-го и 4-го порядков точности.

Теория устойчивости методов РК

Теорема (Устойчивость методов Рунге-Кутты)

Пусть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ Липшиц-непрерывна по второму аргументу, т.е.

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

Причём это условие выполняется для каждого t , $C \neq C(\tau)$ и $C\tau \ll 1$.

Тогда разностное уравнение $\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n)$ устойчиво и имеет место оценка

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\| \leq e^{C_2 t} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| + \frac{2\epsilon e^{C_2 t}}{C_2}.$$

Здесь $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n$ - решения близких систем разностных уравнений.

ϵ - максимальная погрешность при вычислении правой части системы, т.е. для всех n (включая ноль) а постоянная C_2 незначительно отличается от C .

Для системы Лоренца такой константой является число, приблизительно равное 33 (reference), что делает затруднительным точные вычисления на большом промежутке времени.

Утверждение. Пусть матрица

$$\mathbf{A}(u) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_u(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_u^*(\mathbf{u}))$$

строго отрицательна, т.е.

$$(\mathbf{A}(\mathbf{u})\xi, \xi) \leq -a(\xi, \xi)$$

для любых ξ, \mathbf{u} и $a > 0$ (траектория, в окрестности которой выполняется то условие, называется устойчивой).

Тогда при интегрировании правильным методом Рунге-Кутты k -го порядка аппроксимации погрешность приближённого решения есть $O(\tau^k)$ при любом $t > 0$ при выполнении условий $a\tau \ll 1$.

Правило Рунге для оценки точности численного решения ОДУ:

Для оценки требуется решить задачу на 2 сетках: один раз с шагом τ ($y_{i,\tau}$) и второй — с шагом $\tau/2$ ($y_{i,\tau/2}$). Тогда формула для погрешности решения с точностью до $O(\tau^{p+1})$:

$$\varepsilon = \frac{|y_{i,\tau} - y_{i,\tau/2}|}{2^p - 1},$$

где p — порядок точности численного метода

Пусть используется метод с порядком аппроксимации p . Тогда главный член погрешности метода ε имеет вид

$$\varepsilon = C_2 \tau^{p+1}$$

Пусть есть две сетки с шагом τ и $\tau/2$.

Тогда $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2^{p+1}$

Зная погрешности в точке, можем проверить сходится ли метод с необходимой точностью.

1 Аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Параметры задачи:

$x(0) > 0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, ($y_0 = z_0 = 1$), $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \{8/3, 10, 20\}$, $t_k = 20$, $\tau = \{10^{-3}, 10^{-2}\}$

Здесь σ — число Прандтля, r — число Рэлея.

Система была изначально предложена Эдвардом Лоренцом для приближения конвекции в морской воде, но в последствии использовалась и для других задач. Из-за большой константы Липшица, поведение системы становится неустойчивым и приводит к появлению траекторий, изображение которых в фазовом пространстве имеет интересный вид. Впрочем, явление, которое эта система стремится описать, также имеет хаотический характер. По этой причине, система относительно точно предсказывает траекторию лишь для небольшого промежутка времени, что обуславливает выбор методов и мелкость сетки.

Почему это аттрактор:

Посчитаем поток векторного поля \vec{F} :

$$\nabla \cdot \vec{F} = -(\sigma + 1 + \beta)$$

Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность в фазовом пространстве $S(t)$, ограничивающую объем $V(t)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_{S(t)} \vec{F} \cdot ds = -(\sigma + 1 + \beta) V(t) \\ V(t) &= \exp(-(\sigma + 1 + \beta)t) V(0) \end{aligned}$$

Эта выражение экспоненциально убывает со временем. Далее мы берем функцию

$$v(x) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

(Считаем производную по времени как у сложной функции, рассматриваем области где производная больше нуля и меньше и получаем что из области где производная больше нуля мы попадаем рано или поздно в область где производная меньше нуля, но из нее выбраться мы не можем) Можно показать, что для любых параметров любой фазовый портрет будет ограничен.

Исследование на устойчивость

Рассмотрим матрицу Якоби системы:

$$A(x, y, z) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -r - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$(\lambda + \sigma) [(\lambda + 1)(\lambda + b) + x^2] + \sigma[(\lambda + b)(z - r) + xy] = 0$$

Для неподвижной точки, расположенной в начале координат:

$$(\lambda + \sigma) [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$$

Откуда находим три корня:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}$$

Точка неустойчива при $r > 1$.

Обратимся теперь к точкам O_1, O_2 , которые существуют, как было показано.

Подставляя x, y, z получаем кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

Найдём порог устойчивости из уравнения.

Подставим $\lambda = iw$

$$-iw^3 - (\sigma + b + 1)w^2 + b(\sigma + r)iw + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

Отсюда

$$b = \frac{\sigma r - r - \sigma^2 - 3\sigma}{r + \sigma} = \frac{122}{38} \approx 3,21$$

При значениях, больших 3,21, одно собственное значение действительное и отрицательное, а два других - комплексные с отрицательной действительной частью, следовательно обе точки - устойчивые фокусы.

В противном случае - точки - неустойчивые фокусы.

1.1 Численное решение

Далее продемонстрированы численные решения ДУ при различных значениях параметров, полученные с помощью методов РК первого и четвёртого порядков.

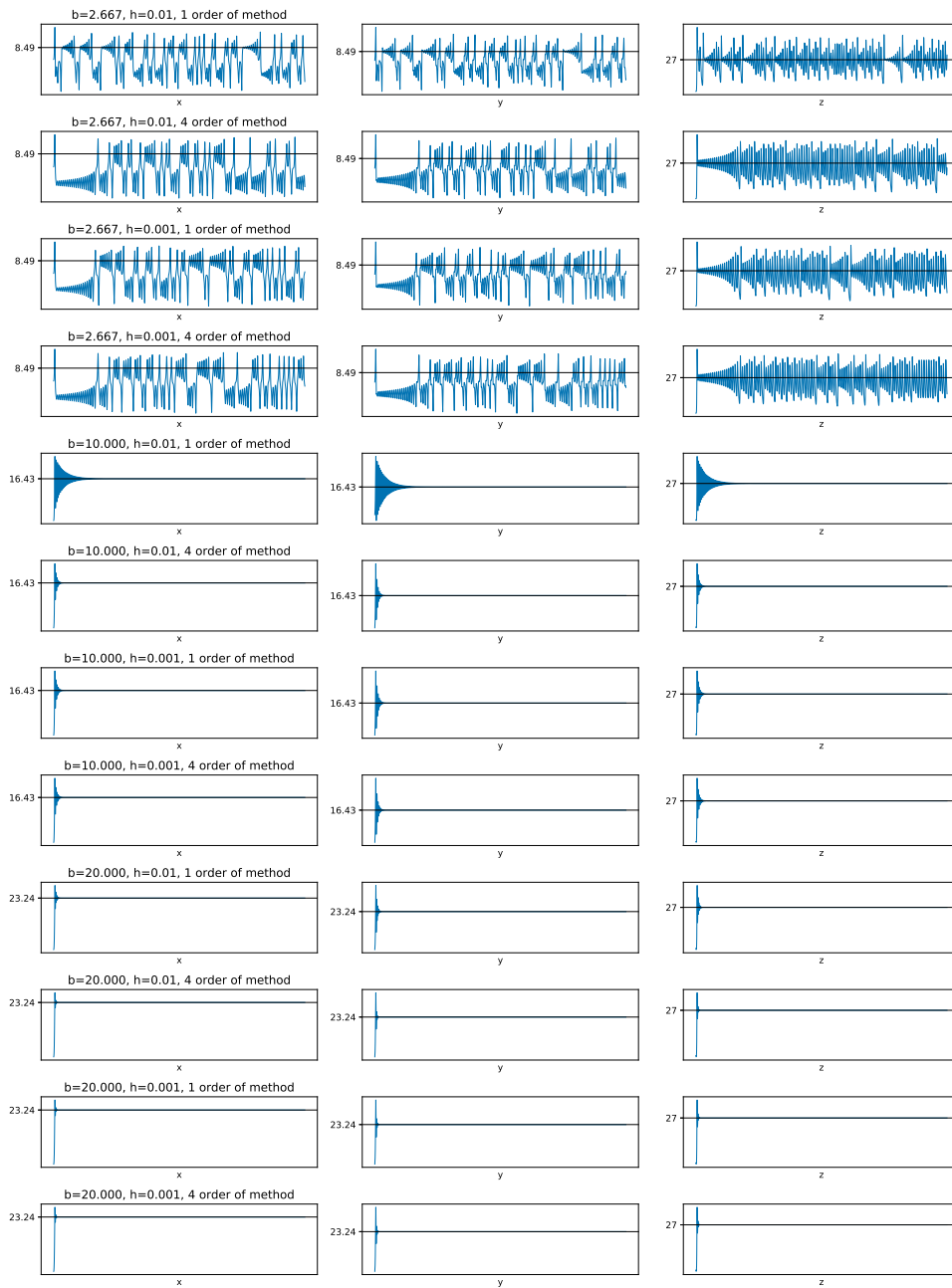


Figure 1: Траектории решений, полученных с помощью методов РК. Чёрными линиями обозначены теоретически полученные особые точки системы ДУ, посчитанные аналитически

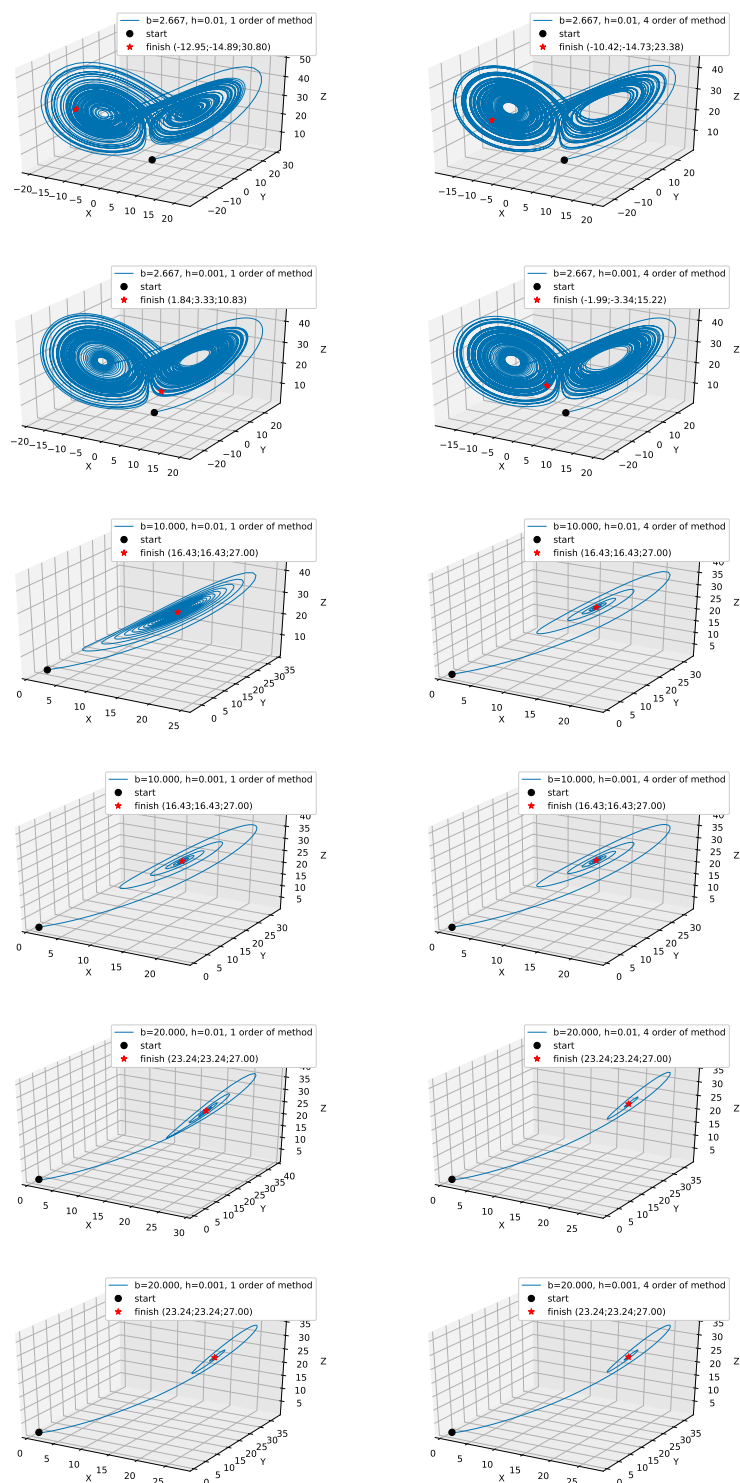


Figure 2: Тректории решений в пространстве

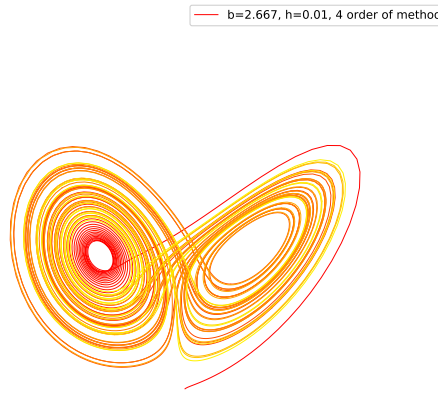


Figure 3: Аттрактор Лоренца

Исследование на сходимость

С помощью формул для погрешностей методов РК, получены графики изменения ошибки при измельчении сетки и график численного порядка метода. Использовался метод РК 4 порядка.

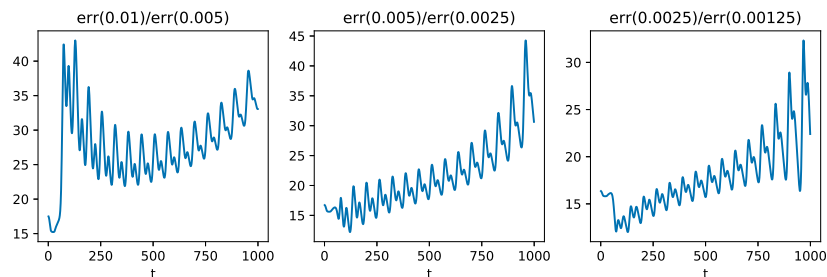


Figure 4: Численная оценка порядка метода. По оси ординат должно быть $2^p - 1$, где p - порядок

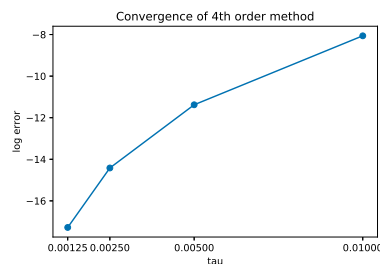


Figure 5: Изменение ошибки при измельчении сетки вдвое.

Мы можем видеть, что ошибка уменьшается с уменьшением шага сетки, что и было целью исследования. Тем не менее, мы можем заметить, что отношение ошибок растет с каждой итерацией, что подтверждает утверждения о невозможности хорошо предсказывать процессы на больших промежутках времени.

2 Аттрактор Рёслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \frac{y}{5} \\ \dot{z} = \frac{1}{5} + z(x - \mu) \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad 0 < \mu \leq 10$$

Модель, описываемая системой Ресслера, возникла при описании химических процессов в среде с перемешиванием. Она обладает свойствами линейного осциллятора с отрицательным коэффициентом затухания и обратной связью.

Приведем особые точки этой системы:

$$z = \frac{5\mu \pm \sqrt{25\mu^2 - 4}}{2}, y = -z, x = \frac{z}{5}$$

Заметим, что при $\mu < \frac{2}{5}$, неподвижных точек нет.

Рассмотрим матрицу Якоби

$$A(x, y, z) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ z & 0 & x - \mu \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение на собственные числа имеет вид:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left(x - \mu + \frac{1}{5} \right) - \lambda \left(\frac{x}{5} - \frac{\mu}{5} - 1 - z \right) + x - \mu + \frac{z}{5} = 0$$

Численное решение

Далее продемонстрированы численные решения ДУ при различных значениях параметров, полученные с помощью методов РК первого и четвёртого порядков.

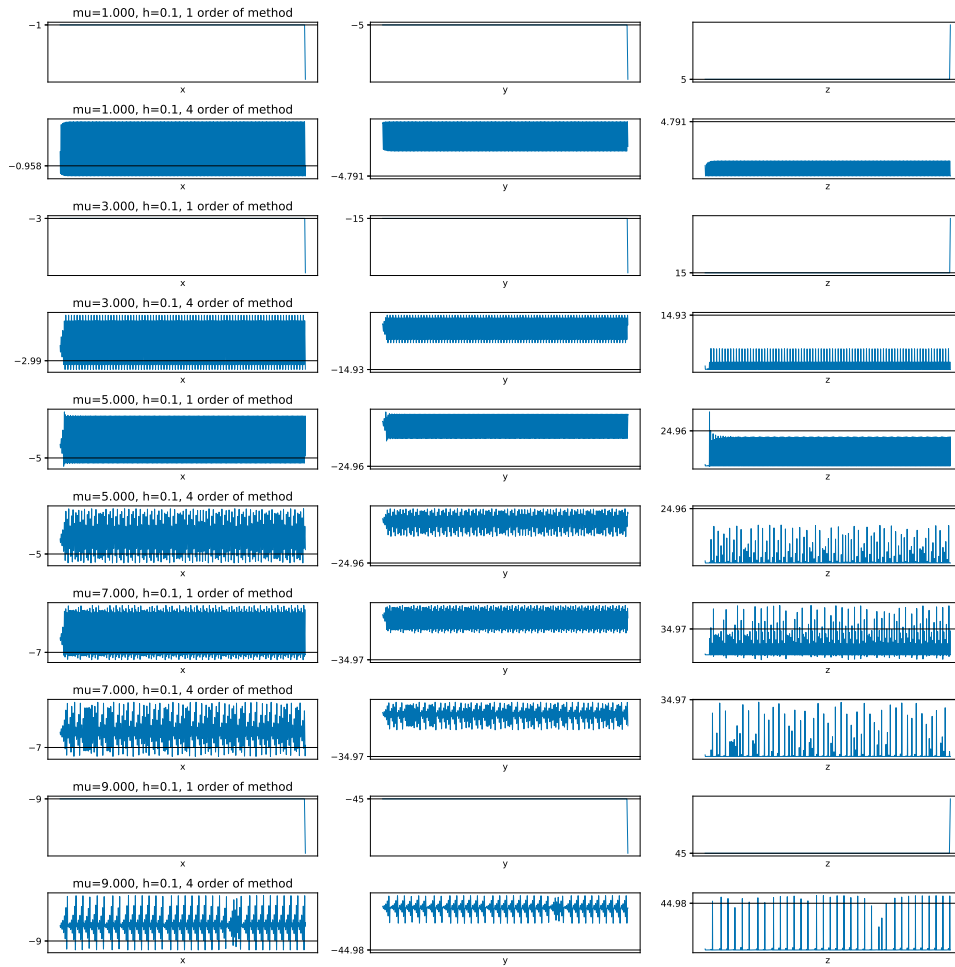


Figure 6: Траектории решений, полученных с помощью методов РК. Чёрными линиями обозначены теоретически полученные особые точки системы ДУ, посчитанные аналитически

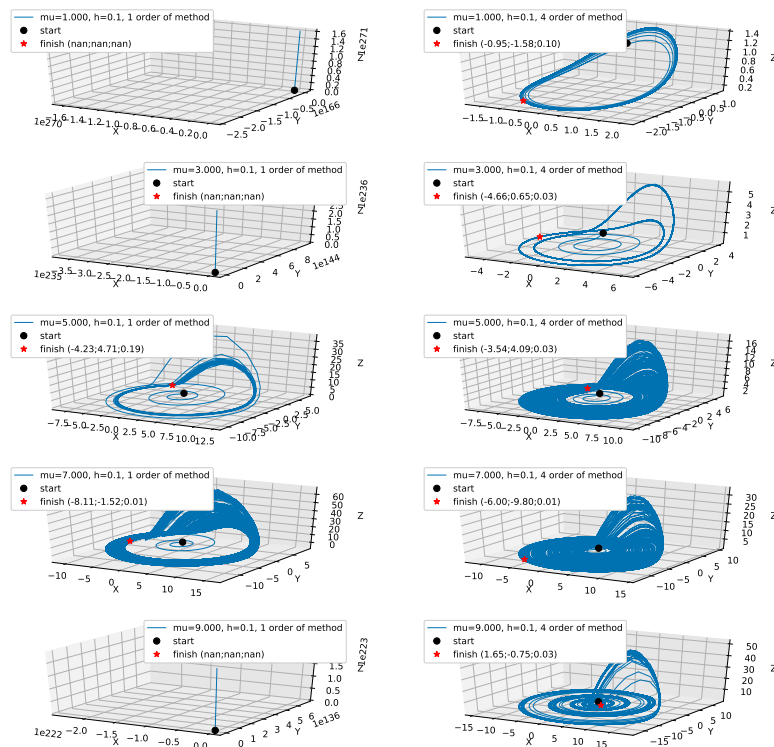


Figure 7: Тректории решений в пространстве

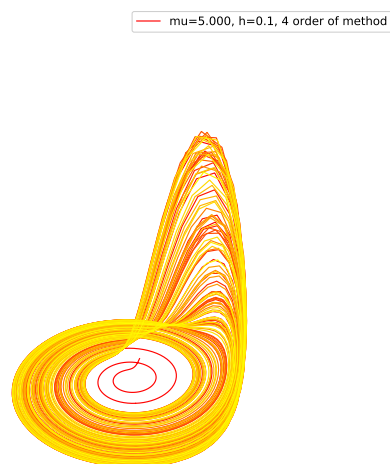


Figure 8: Аттрактор Рёслера

Исследование на сходимости

С помощью формул для погрешностей методов РК, получены графики изменения ошибки при измельчении сетки и график численного порядка метода. Использовался метод РК 4 порядка.

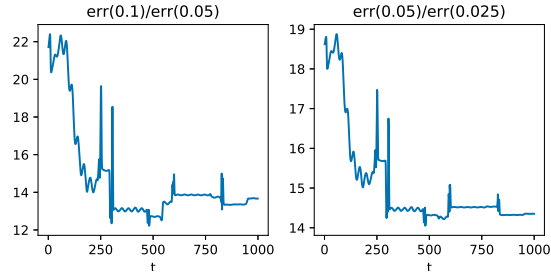


Figure 9: Численная оценка порядка метода. По оси ординат должно быть $2^p - 1$, где p - порядок

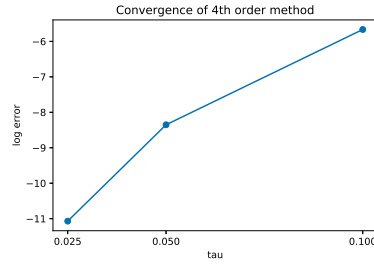


Figure 10: Изменение ошибки при измельчении сетки вдвое.

График показывает уменьшение ошибки с уменьшением шага сетки. Для дополнительных выводов требуется более подробное изучение решений.

3 Аттрактор Рикитаке

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + yz \\ \dot{y} = -\mu y + xr \\ \dot{z} = 1 - xy - \gamma_1 z \\ \dot{r} = 1 - xy + \gamma_2 r \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad 0, 2 \leq \mu \leq 2$$

$$\gamma_1 = [0, 002; 0, 004], \quad \gamma_2 = 0, 002$$

Численное решение

Далее продемонстрированы численные решения ДУ при различных значениях параметров, полученные с помощью методов РК первого и четвёртого порядков.

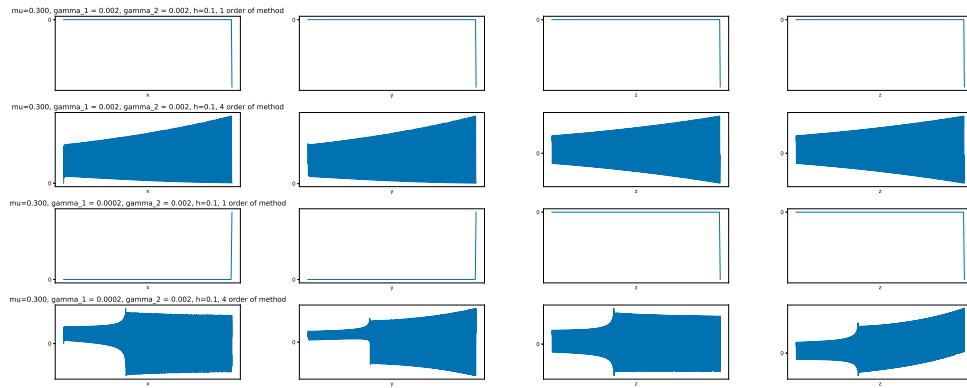


Figure 11: Траектории решений, полученных с помощью методов РК. Чёрными линиями обозначены теоретически полученные особые точки системы ДУ, посчитанные аналитически

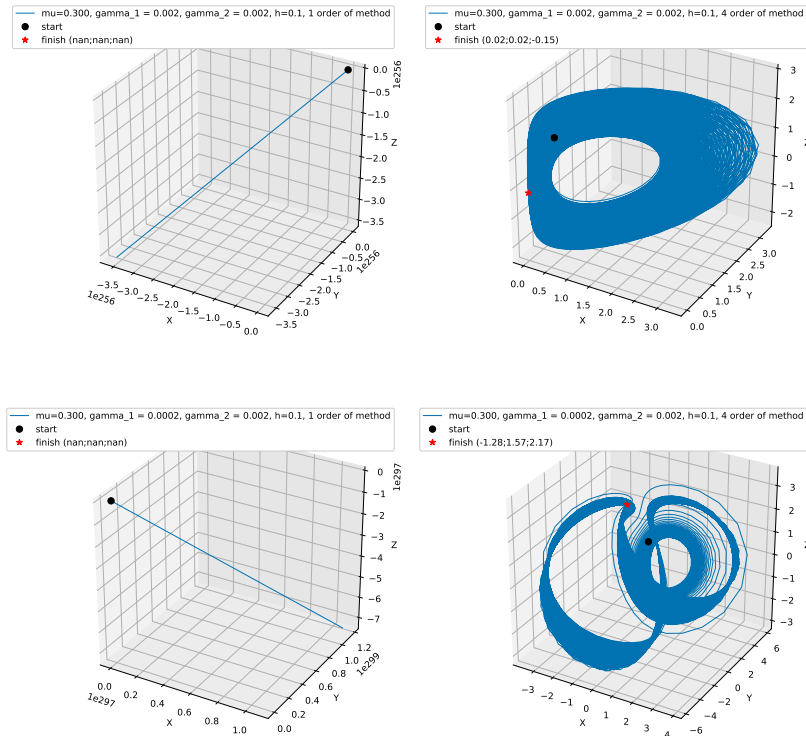


Figure 12: Тректории решений в пространстве

Исследование на сходимость

С помощью формул для погрешностей методов РК, получены графики изменения ошибки при измельчении сетки и график численного порядка метода. Использовался метод РК 4 порядка.

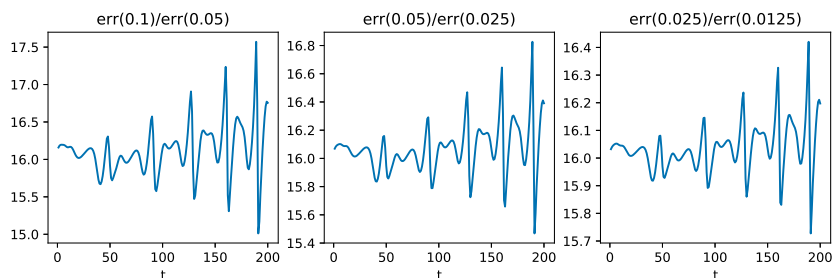


Figure 13: Численная оценка порядка метода. По оси ординат должно быть $2^p - 1$, где p - порядок

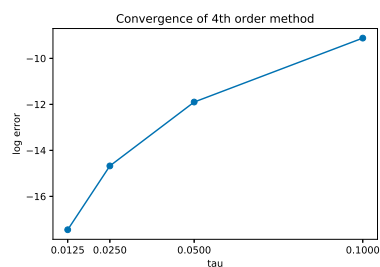


Figure 14: Изменение ошибки при измельчении сетки вдвое.

Наблюдаем поведение ошибки, аналогичное аттрактору Лоренца - есть уменьшение ошибки методов с

уменьшением шага сетки, однако с каждой итерацией ошибка растет.

4 Выводы

Изучив аттракторы на примере систем Лоренца, Реслера и Рикитаке, мы убедились, что порядок метода Рунге-Кутты существенно влияет на качество решения. Метод первого порядка не всегда способен справиться с такой задачей, в то время как метод четвертого порядка дает вразумительные результаты, которые можно визуализировать. Также мы смогли эмпирически оценить порядок сходимости метода и убедиться в уменьшении ошибки.