Численное исследование аттракторов

Евгений Лагутин   Валентин Самохин

May 21, 2019

Проект подразумевает применение методов Рунге-Кутты 1 и 4 порядков аппроксимации для расчёта поведения аттракторов Лоренца и Рёслера, исследование аттракторов как систем нелинейных дифференциальных уравнений, исследование численных методов на сходимость по сетке в приложении к данной задаче.

Постановка задачи

- Проведите исследования свойств систем ОДУ в зависимости от параметров процессов $(\sigma, r, b, \gamma_1, \gamma_2)$.
- Исследуйте сходимость численного решения по сетке.
- Используйте методы Рунге-Кутты 1-го и 4-го порядков точности.

Теориия устойчивости методов РК

Теорема (Устойчивость методов Рунге-Кутты)
Пусть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ Липшиц-непрерывна по второму аргументу, т.е.

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

Причём это условие выполняется для каждого t, $C \neq C(\tau)$ и $C\tau \ll 1$.
Тогда разностное уравнение $\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n)$ устойчиво и имеет место оценка

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\| \leq e^{C_2 t}\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| + \frac{2\epsilon e^{C_2 t}}{C_2}.$$

Здесь $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_n$ - решения близких систем разностных уравнений.
ϵ - максимальная погрешность при вычислении правой части системы, т.е. для всех n (включая ноль) а постоянная C_2 незначительно отличается от C.
Для системы Лоренца такой констаной является число, приблизительно равное 33 (reference), что делает затруднительным точные вычисления на большом промежутке времени.
Утверждение. Пусть матрица

$$\mathbf{A}(u) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^*_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}))$$

строго отрицательна, т.е.

$$(\mathbf{A}(\mathbf{u})\xi, \xi) \leq -a(\xi, \xi)$$

для любых $\xi, \mathbf{u}$ и $a > 0$ (траектория, в окрестности которой выполняется то условие, называется устойчивой).

Тогда при интегрировании правильным методом Рунге-Кутты k-го порядка аппроксимации погрешность приближённого решения есть $O(\tau^k)$ при любом $t > 0$ при выполнении условий $a\tau \ll 1$.

Правило Рунге для оценки точности численного решения ОДУ:

Для оценки требуется решить задачу на 2 сетках: один раз с шагом τ ($y_{i,\tau}$) и второй — с шагом $\tau/2$ ($y_{i,\tau/2}$). Тогда формула для погрешности решения с точностью до $O(\tau^{p+1})$:

$$\varepsilon = \frac{|y_{i,\tau} - y_{i,\tau/2}|}{2^p - 1},$$

где p — порядок точности численного метода

Пусть используется метод с порядком аппроксимации p. Тогда главный член погрешности метода ε имеет вид

$$\varepsilon = C_2 \tau^{p+1}$$

Пусть есть две сетки с шагом τ и $\tau/2$.

Тогда $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2^{p+1}$

Зная погрешности в точке, можем проверить сходится ли метод с необходимой точностью.

1 Аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Параметры задачи:

$x(0) > 0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0,\ (y_0 = z_0 = 1),\ \sigma = 10,\ r = 28,\ b = \{8/3, 10, 20\},\ t_k = 20,\ \tau = \{10^{-3}, 10^{-2}\}$

Здесь σ – число Прандтля, r – число Рэлея.

Почему это аттрактор:

Посчитаем поток векторного поля $\vec{F}$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = -(\sigma + 1 + \beta)$$

Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность в фазовом пространстве $S(t)$, ограничивающую объем $V(t)$. Тогда:

$$\dot{V} = \int_{S(t)} \vec{F} \cdot ds = -(\sigma + 1 + \beta) V(t)$$

$$V(t) = exp(-(\sigma + 1 + \beta)t)V(0)$$

Эта выражение экспоненциально убывает со временем. Дальше мы берем функцию

$$v(x) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

(Считаем производную по времени как у сложной функции, рассматриваем области где производная больше нуля и меньше и получаем что из области где производная больше нуля мы попадаем рано или поздно в область где производная меньше нуля, но из нее выбраться мы не можем) Можно показать, что для любых параметров любой фазовый портрет будет ограничен.

Исследование на устойчивость

Рассмотрим матрицу Якоби системы:

$$A(x, y, z) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -r - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$(\lambda + \sigma)\left[(\lambda + 1)(\lambda + b) + x^2\right] + \sigma[(\lambda + b)(z - r) + xy] = 0$$

Для неподвижной точки, расположенной в начале координат:

$$(\lambda+\sigma)\left[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)\right]=0$$

Откуда находим три корня:

$$\lambda_1=-b, \quad \lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}(\sigma+1)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma+1)^2+\sigma(r-1)}$$

Точка неустойчива при $r>1$.
Обратимся теперь к точкам O_1, O_2, которые существуют, как было показано.
Подставляя x, y, z получаем кубическое уравнение относительно λ:

$$\lambda^3+(\sigma+b+1)\lambda^2+b(\sigma+r)\lambda+2\sigma b(r-1)=0$$

Найдём порог устойчивости из уравнения.
Подставим $\lambda=iw$

$$-iw^3-(\sigma+b+1)w^2+b(\sigma+r)iw+2\sigma b(r-1)=0$$

Отсюда

$$b=\frac{\sigma r-r-\sigma^2-3\sigma}{r+\sigma}=\frac{122}{38}\approx 3,21$$

При значениях, больших $3,21$, одно собственное значение действительное и трицательное, а два других - комплексные с отрицательной дейчтвительной частью, следовательно обе точки - устойчивые фокусы.

В противном случае - точки - неустойчивые фокусы.

1.1 Численное решение

Далее продемонстрированы численные решения ДУ при различных значениях параметров, полученные с помощью методов РК первого и четвёртого порядков.

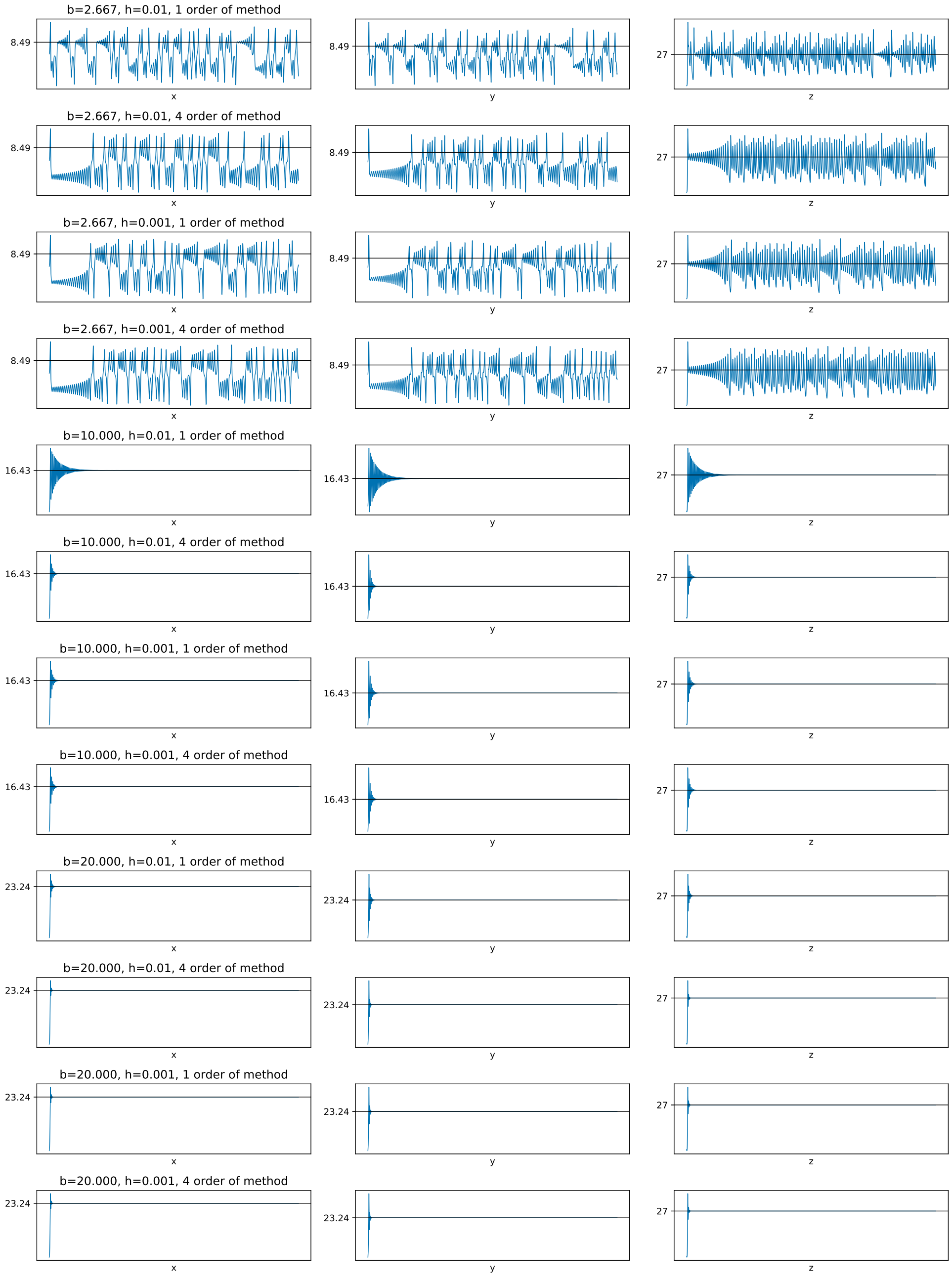

Figure 1: Траектории решений, полученных с помощью методов РК. Чёрными линиями обозначены теоретически полученные особые точки системы ДУ, посчитанные аналитически

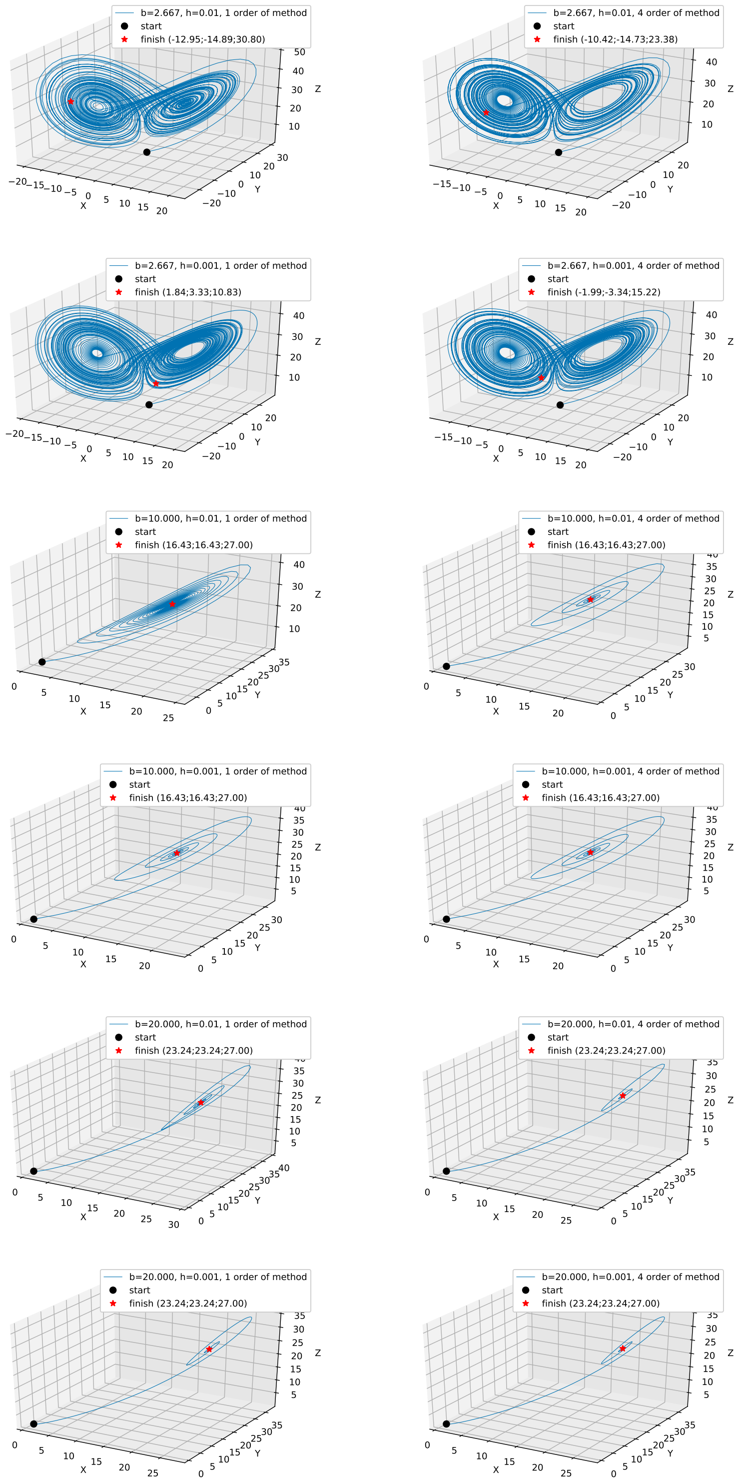

Figure 2: Тректории решений в пространстве

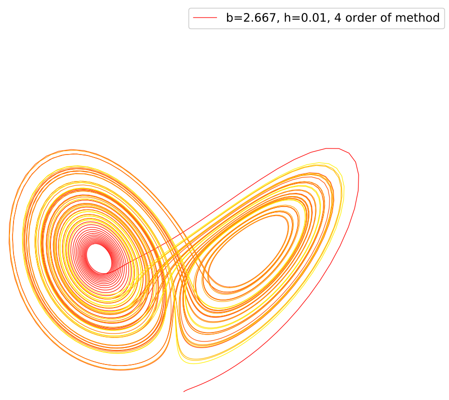

Figure 3: Аттрактор Лоренца

Исследование на сходимость

С помощью формул для погрешностей методов РК, полученны графики изменения ошибки при измельчении сетки и график численного порядка метода. Использовался метод РК 4 порядка.

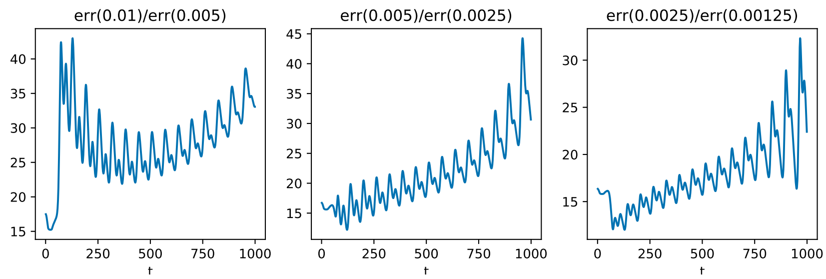

Figure 4: Численная оценка порядка метода. По оси ординат должно быть $2^p - 1$, где p - порядок

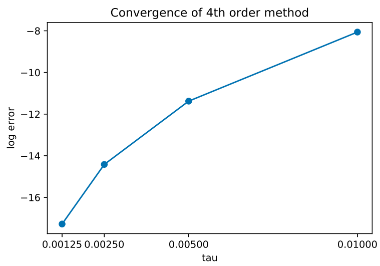

Figure 5: Изменение ошибки при измельчении сетки вдвое.

2 Аттрактор Рёслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \frac{y}{5} \\ \dot{z} = \frac{1}{5} + z(x - \mu) \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad 0 < \mu \leq 10$

Особые точки:

$$z = \frac{5\mu \pm \sqrt{25\mu^2 - 4}}{2}, y = -z, x = \frac{z}{5}$$

Заметим, что при $\mu < \frac{2}{5}$, неподвижных точек нет.

Рассмотрим матрицу Якоби

$$A(x,y,z) = \frac{\partial(\dot{x},\dot{y},\dot{z})}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ z & 0 & x-\mu \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2\left(x - \mu + \frac{1}{5}\right) - \lambda\left(\frac{x}{5} - \frac{\mu}{5} - 1 - z\right) + x - \mu + \frac{z}{5} = 0$$

Численное решение

Далее продемонстрированы численные решения ДУ при различных значениях параметров, полученные с помощью методов РК первого и четвёртого порядков.

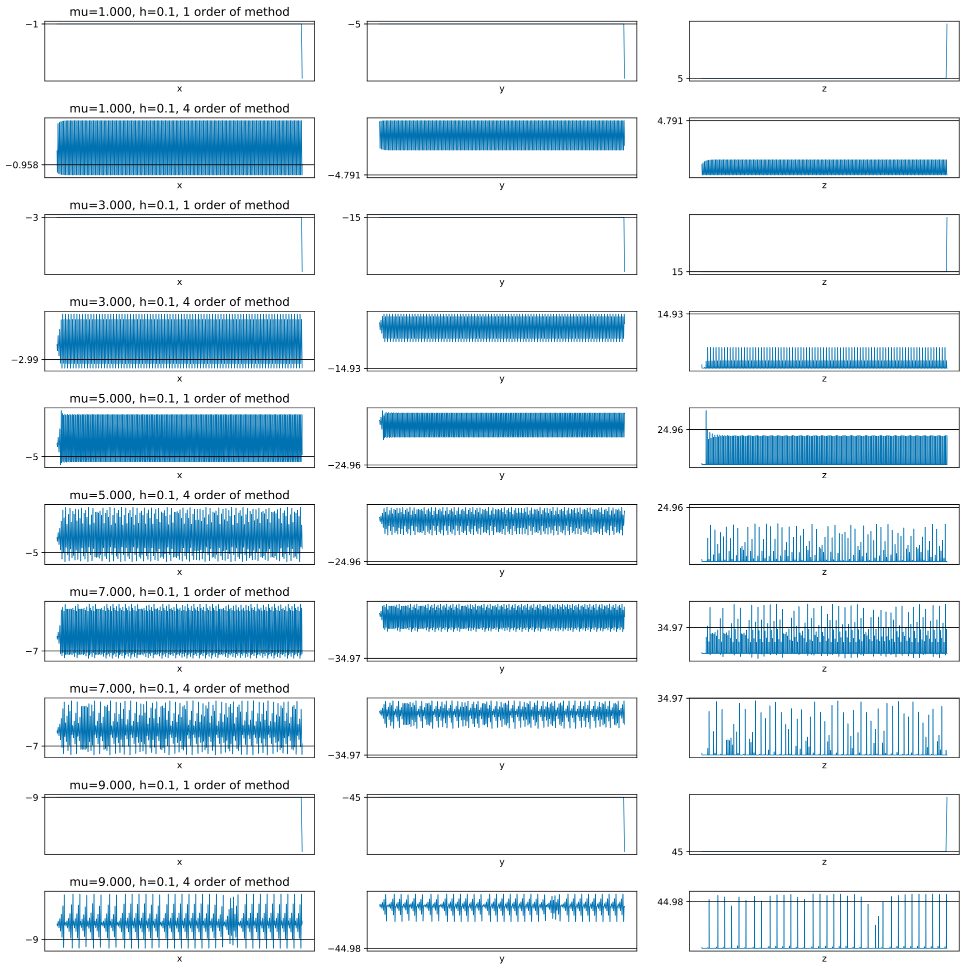

Figure 6: Траектории решений, полученных с помощью методов РК. Чёрными линиями обозначены теоретически полученные особые точки системы ДУ, посчитанные аналитически

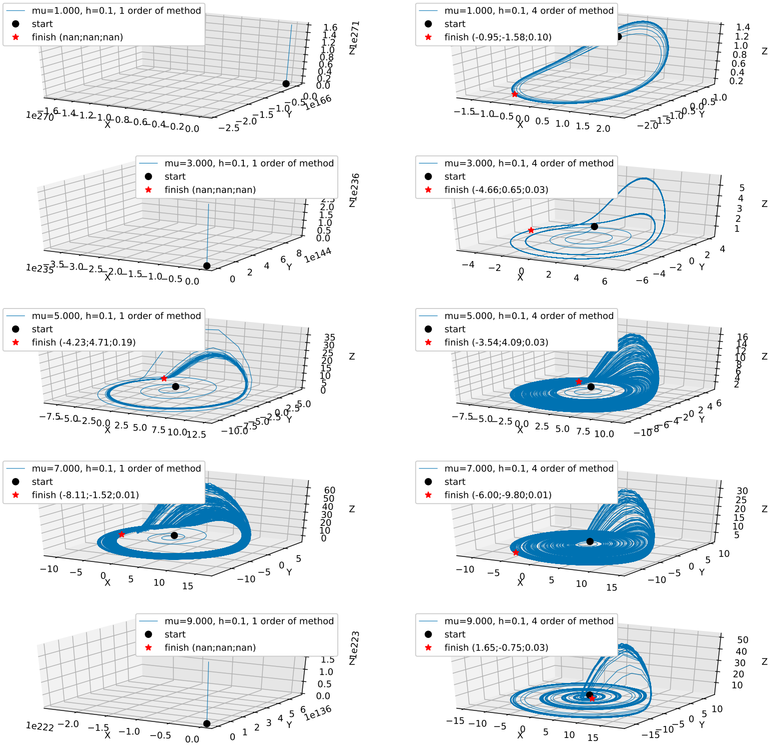

Figure 7: Тректории решений в пространстве

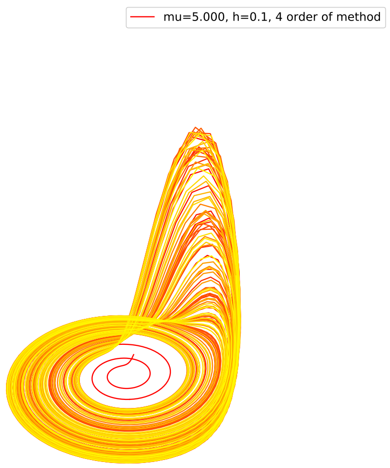

Figure 8: Аттрактор Рёслера

Исследование на сходимость

С помощью формул для погрешностей методов РК, полученны графики изменения ошибки при измельчении сетки и график численного порядка метода. Использовался метод РК 4 порядка.

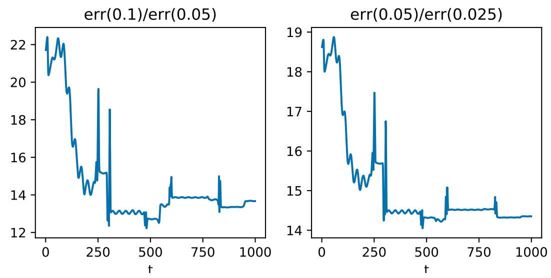

Figure 9: Численная оценка порядка метода. По оси ординат должно быть $2^p - 1$, где p - порядок

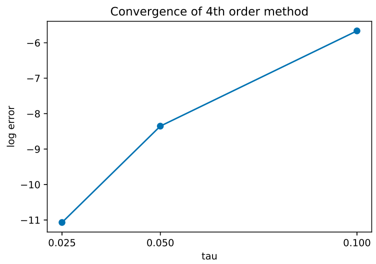

Figure 10: Изменение ошибки при измельчении сетки вдвое.

3 Аттрактор Рикитаке

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -\mu x + yz \\
\dot{y} = -\mu y + xr \\
\dot{z} = 1 - xy - \gamma_1 z \\
\dot{r} = 1 - xy + \gamma_2 r
\end{cases}
$$

$$
x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad 0,2 \leq \mu \leq 2
$$
$$
\gamma_1 = [0,002; 0,004], \quad \gamma_2 = 0,002
$$

Численное решение

Далее продемонстрированы численные решения ДУ при различных значениях параметров, полученные с помощью методов РК первого и четвёртого порядков.

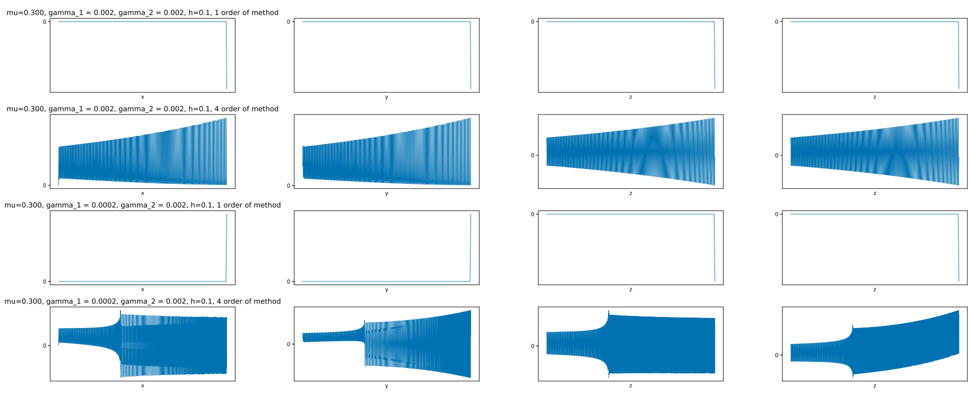

Figure 11: Траектории решений, полученных с помощью методов РК. Чёрными линиями обозначены теоретически полученные особые точки системы ДУ, посчитанные аналитически

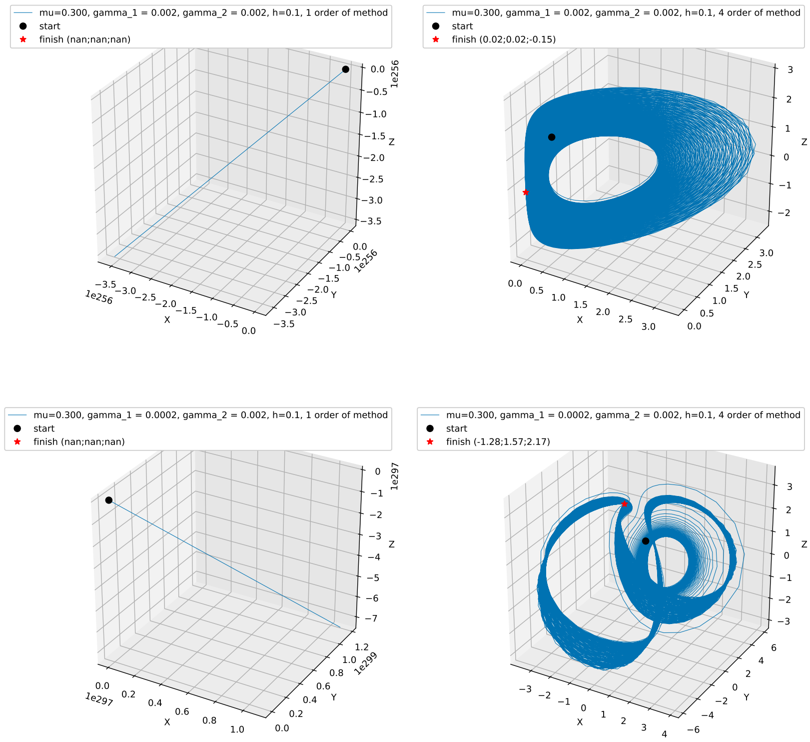

Figure 12: Тректории решений в пространстве

Исследование на сходимость

С помощью формул для погрешностей методов РК, полученны графики изменения ошибки при измельчении сетки и график численного порядка метода. Использовался метод РК 4 порядка.

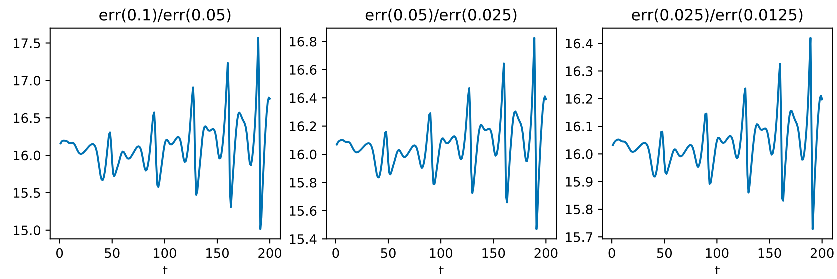

Figure 13: Численная оценка порядка метода. По оси ординат должно быть $2^p - 1$, где p - порядок

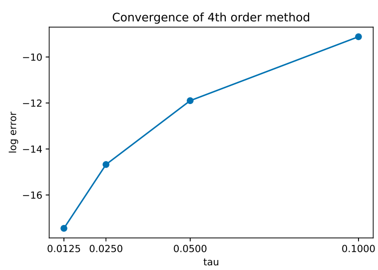

Figure 14: Изменение ошибки при измельчении сетки вдвое.