# Задача

Когда разложение Холецкого совпадает с $LU$-разложением?

## Решение

Пусть $A \in S^n_{++}$, $A = LU$, где $L$ - нижнетреугольная с единицами на диагонали, $U$ - верхнетреугольная. Тогда обозначим через $D$ такую диагональную матрицу, что $U = D\hat{L}^\top$, причём $\hat{L}$ - нижнетреугольная с единицами на диагонали. Тогда $A = LD\hat{L}^\top$. Так как $A$ - симметричная, $LD\hat{L}^\top = \hat{L}DL^\top$, откуда следует, что $L\hat{L}^\top = \hat{L}L^\top$. Из этого равенства и того, что у обеих матриц на диагоналях нули, следует, что первые столбцы у матриц совпадают. Далее по индукции от $n$ показывается, что из этого равенства следует $L = \hat{L}$. Следовательно $A = LDL^\top$. Отсюда получаем разложение Холецкого матрицы $A$ с матрицей $(LD^{1/2})$.

Разложение Холецкого совпадает с $LU$- разложением, если

- $L = LD^{1/2} \Rightarrow D^{1/2} = I$
- $U = D^{1/2}L^\top \Rightarrow U = L^\top$

Получили необходимое условие вида матрицы $U$ совпадения разложения Холецкого с $LU$-разложением. С другой стороны, очевидно, что оно и достаточное.

Далее можно получить вид матрицы $A$, при котором это выполнено.

Пусть $A = LL^\top$, где $L$ - нижнетр. с единицами на диагонали.

$a_{ij} = \langle l_i, l_j \rangle = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk} + l_{ji}$ при $i < j$ ($l_i$ - $i$ строка матрицы $L$)

Тогда $l_{ji} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk}$ при $i < j$.

$a_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1}(a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} a_{kt}a_{it})^2 \ \forall i = 1..n$

Далее, рассуждая по индукции, можно показать, что это условие является необходимым и достаточным.