($[A]_i$ - i-ая строка матрицы A)

Упражнение 4.

Для матричных норм $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, подчинённых соответствующим векторным нормам $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$, вывести формулы

$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

Решение

$A \in Mat(n \times m, \mathbb{C})$

1. $\|\cdot\|_1$

   $$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1 \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^{n} |[Ax]_i| = \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}x_j| \leq \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| = \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{j=1}^{m} |x_j|(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|) \leq \sup_{\|x\|_1=1} (\max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)\|x\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

   Пусть $j^* = \arg\max\limits_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Тогда при выборе $x : x_{j^*} = 1, \;\; x_k = 0, \; k \neq j^* \; \|x\|_1 = 1$, и получаем

   $$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}x_j| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij^*}| \cdot 1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

   Следовательно $\|A\|_1 \leq \max\limits_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ и $\exists\, x : \;\; \|x\|_1 = 1, \;\; \|Ax\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

   Следовательно $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. $\|\cdot\|_\infty$

   $$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\leq i\leq n} |[Ax]_i| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j| \leq \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

   Пусть $i^* = \arg\max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$

   Пусть $x_j = \mathrm{sign}(a_{i^*j}) \quad \forall j : \;\; 1 \leq j \leq m$, тогда $\|x\|_\infty = 1$, и получаем

   $$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathrm{sign}(a_{i^*j}) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

   То есть верхняя оценка достигается. $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

Упражнение 5

Для матричной норм $\|A\|_2$, подчинённой соответствующей векторной норме $\|x\|_2$
$(x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{M}\mathrm{at}(n, \mathbb{R})$,

$\max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant \|A\|_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |[Ax]_i|^2} = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j|^2}$$

Пусть $i^*, j^* = \arg\max_{i,j} |a_{ij}|$ и $x: \quad x_{j^*} = 1,\ x_k = 0, \quad k \neq j^*$. Тогда $\|x\|_2 = 1$ и

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij^*}|^2}$$

Заметим, во-первых, что $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij^*}|^2} \geq \sqrt{|a_{i^*j^*}|^2} = |a_{i^*j^*}| = \max_{i,j} |a_{ij}|$

Следовательно $\|A\|_2 \geq \|Ax\|_2 \geq \max_{i,j} |a_{ij}|$.

С другой стороны, используя неравенство Коши-Буняковского,

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j|^2} = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle [A]_i, x \rangle^2} \leq \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|[A]_i\|^2 \|x\|_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|[A]_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

$$\leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$$