Задача

Когда разложение Холецкого совпадает с LU-разложением?

Решение

Пусть $A \in S^n_{++}$, $A = LU$, где L - нижнетреугольная с единицами на диагонали, U - верхнетреугольная. Тогда обозначим через D такую диагональную матрицу, что $U = D\hat{L}^\top$, причём $\hat{L}$ - нижнетреугольная с единицами на диагонали. Тогда $A = LD\hat{L}^\top$. Так как A - симметричная, $A = \hat{L}DL^\top$, причём это LU-разложение A. Из единственности LU-разложения матрицы следует, что $L = \hat{L}$.

Следовательно $A = LDL^\top$. Отсюда получаем разложение Холецкого матрицы A с матрицей $(LD^{1/2})$.

Разложение Холецкого совпадает с LU- разложением, если

- $L = LD^{1/2} \Rightarrow D^{1/2} = I$
- $U = D^{1/2}L^\top \Rightarrow U = L^\top$

Получили необходимое условие вида матрицы U совпадения разложения Холецкого с LU-разложением. С другой стороны, очевидно, что оно и достаточное.

Далее можно получить вид матрицы A, при котором это выполнено.

Пусть $A = LL^\top$, где L - нижнетр. с единицами на диагонали.

$a_{ij} = \langle l_i, l_j \rangle = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk} + l_{ji}$ при $i < j$ (l_i - i строка матрицы L)

Тогда $l_{ji} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk}$ при $i < j$.

$$a_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1}(a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} a_{kt}a_{it})^2 \;\; \forall i = 1..n \qquad (1)$$

Итак, показано, что если , $A = LL^\top$, где L - нижнетреугольная с единицами на диагонали, то диагональный элемент A a_{ii} выражается через элементы A с индексами не больше i по формуле (1).

Заметим также , что в произведении $LL^\top$ диагональный элемент $LL^\top$ a_{ii} выражается через элементы L с индексами не больше i.

Пусть $A \in S^n_{++},\ a_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1}(a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} a_{kt}a_{it})^2 \;\; \forall i = 1..n$.

Произведём LU-разложение или разложение Холецкого матрицы A и рассмотрим диагональные элементы нижнетреугольной матрицы L из разложения. Пусть $\exists j: \;\; L_{jj} \neq 1$. Выберем наименьший из таких j. Теперь заметим, что при замене L_{jj} на 1 свойство матрицы A должно сохраниться для диагональных элементов с индексами $1..j$ (ключевой переход), но этого быть не может, так как при такой замене должен измениться элемент a_{jj}. Получили противоречие, значит предположение не верно.

Таким образом разложение Холецкого совпадает с LU разложением $A \in S^n_{++}$ тогда и только тогда, когда $a_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1}(a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} a_{kt}a_{it})^2 \;\; \forall i = 1..n$.