

# MEK4420 - Krefter og respons ved hivbevegelse

Sverre Vinje

April 2021

## Introduksjon

Vi har et fluiddomenet og en rektangulær (eller kvadratisk) geometri som flyter ved overflaten. Geometriets bunn og sider er omringet av fluidet. Oppgavens tema er utregning av krefter, respons og resonans ved hivbevegelse, samt om addert masse er en størrelse vi kan neglisjere ved disse utregningene. Lengre utregninger er gjort for hånd.

### 6.1

Grenseverdiproblemet for hivpotensiale er gitt ved:

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = n_2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = K \phi_2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial(\pm x)} = -iK \phi_2 \quad (4)$$

$$|\nabla \phi_2| \rightarrow 0 \quad (5)$$

Der (1) er i fluiddomenet, (2) er grensen på geometrien, (3) er på den frie overflaten, (4) er langt borte langs x-aksen og (5) er dypt i fluidet ( $y \rightarrow -\infty$ )

### 6.2

Den todimensjonale Greens Function ser slik ut:

$$G = \log(r/r_1) + \operatorname{Re}(f_1) + i \operatorname{Re}(f_2)$$

Der parameterne er definert som:

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y + \bar{y})^2}$$

og

$$f_1 = 2PV \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta}^*)}}{\nu - k} dk = -2e^Z (E_1(Z) + \log Z - \log(-Z))$$

$$f_1 \rightarrow \pm 2\pi i e^Z, \quad x - \bar{x} \rightarrow \pm \infty$$

$$f_2 = 2\pi e^Z$$

$$Z = \nu(y + \bar{y}) - i\nu(x - \bar{x})$$

Der  $E_1$  funksjonen er eksponentielt integral. Grenseverdiproblemet blir:

$$\nabla^2 G = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = KG \tag{7}$$

$$\phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial(\pm x)} = -iKG \tag{9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial(\pm x)} = -iKG \tag{10}$$

(6) gjelder i fluiddomenet, (7) på den frie overflaten, (8) på den frie overflaten langt borte, (9) langt borte i x-retning og (10) dypt nede i y-retning

### 6.3

Integrallikning for  $\phi$  med fri overflate

$$\iint_S \left( \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dS = \quad (1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} = \pi \phi_2 & \text{p\u00e5 grensen av geometrien } S_B \\ = 2\pi \phi_2 & \text{i fluiddomenet} \end{cases}$$

$$= \int_{S_B + S_F + S_{\infty} + S_{-\infty}} \dots$$

Her at  $\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = n_z$  p\u00e5 geometriens grense, s\u00e5 (1) blir

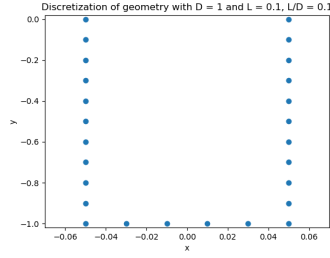
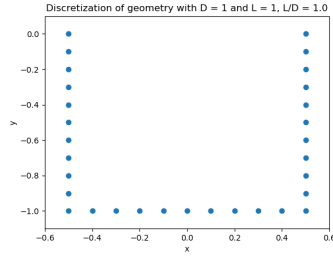
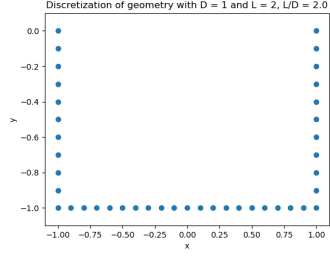
$$\int_{S_B} \left( \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - G n_z \right) dS = \pi \phi_2(\bar{x}, \bar{y})$$

Med  $\bar{x}, \bar{y}$  er i fluidet

$$\int_{S_B} \phi_2 \left( \frac{\partial G}{\partial n} - G n_z \right) dS = 2\pi \phi_2(\bar{x}, \bar{y})$$

### 6.4-5

Diskretiseringen er gjort i Python. Programmet inneholder en plot geometry-funksjon. Under har vi de tre geometriene oppgaven ber om:

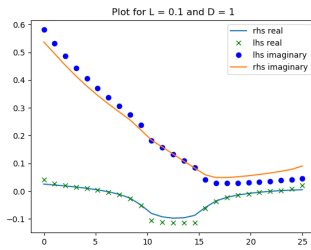
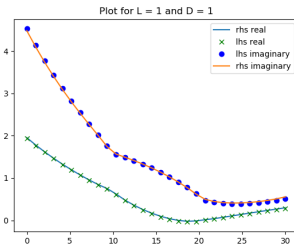
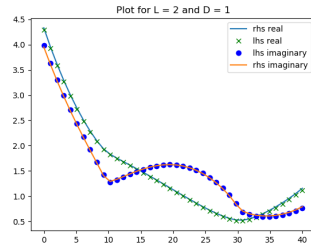


## 6.5.2

En diskret versjonen av likningen  $\pi\varphi_0 + \int_{S_B} \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_B} G \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS$  kan se slik ut:

$$\pi\varphi_0(\bar{x}_n, \bar{y}_n) + \sum_{m=1}^N \varphi_0(\bar{x}_m, \bar{y}_m) \int_{S_m} \frac{\partial G}{\partial n} dS = \sum_{m=1}^N \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \bigg|_{(\bar{x}_m, \bar{y}_m)} \int_{S_m} G dS$$

Har plottet RHS og LHS for  $KD = 0.9$ . Venstreside og høyreside matcher hverandre relativt bra, men den tynne geometrien har et par små avvik.

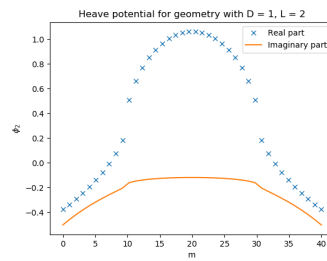


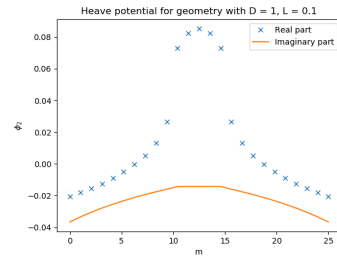
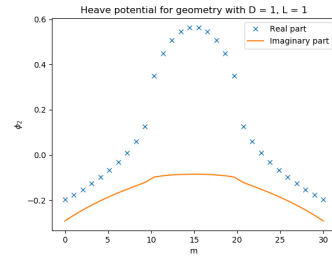
### 6.5.3

Likningnen som skal løses numerisk er:

$$-\pi\phi_2 + \int_{S_B} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_B} G n_2 dS$$

Under er resultatet plottet for de tre geometriene





## 6.6

$\phi_2$  langt borte

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow A_2^{-\infty} e^{K\bar{y} + iK\bar{x}} \quad \bar{x} \rightarrow -\infty$$

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow A_2^{\infty} e^{K\bar{y} - iK\bar{x}} \quad \bar{x} \rightarrow \infty$$

$$K = \omega^2/g$$

Skal bruke  $2\pi\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{SB} \left( \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dS$

til å uttrykke  $A_2^{-\infty}$  og  $A_2^{\infty}$

Ved innsetting får vi

$$A_2^{\pm\infty} = \frac{1}{2\pi e^{K\bar{y} \pm iK\bar{x}}} \int_{SB} \phi_2 \left( \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dS$$

$$= \frac{1}{2\pi e^{K\bar{y} \pm iK\bar{x}}} \int_{SB} \left( \left( \phi_2 \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - n_2 \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left( e^{K(y+\bar{y}) \pm iK(x-\bar{x})} \right) dS \right)$$

Vi har gitt:  $e_0 = e^{ky - iKx}$

og vi kan utrykke

$$A_2^\infty = i \int_{S_B} \left( (\phi_2 n_1 \frac{de_0}{dx} + n_2 \frac{de_0}{dy}) - n_2 \right) dS$$

$$= \int_{S_B} (\phi_2 (Kn_2 - iKn_1) - n_2) \bar{e}_0 dS \quad \bar{x} \rightarrow \infty$$

der  $\bar{e}_0$  er den konjugerte

$$\frac{de_0}{dn} = K(n_2 - in_1)e_0$$

$$A_2^{-\infty} = \int_{S_B} (\phi_2 (Kn_2 - iKn_1) - n_2) e_0 dS \quad \bar{x} \rightarrow -\infty$$



## 6.7-8

Fra Newman har vi kreftene assosiert med de forskjellige former for bevegelse gitt ved:

$$F_i = - \sum_{j=1}^6 \left( a_{ij} \dot{U}_j + b_{ij} U_j \right)$$

Der  $a_{ij}$  er addert masse-koeffisienten og  $b_{ij}$  er dempingskoeffisienten. For hiv får vi:

$$F_2(t) = -\dot{U}_2 a_{22} - U_2 b_{22} = \text{Re} \left\{ -i\omega^2 \xi_2 f_{22} e^{i\omega t} \right\}$$

Der  $f_{22}$  er gitt ved:

$$f_{22} = \rho \int_{S_B} \phi_2 n_2 dS = a_{22} + \frac{b_{22}}{2i\omega}$$

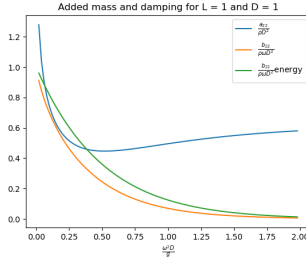
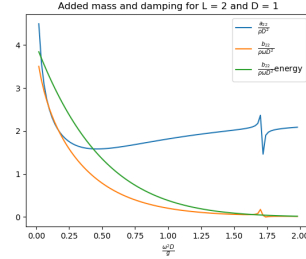
Vi kan da utrykke følgende relasjoner:

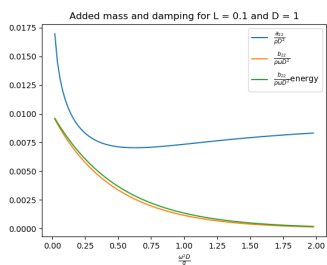
$$\frac{a_{22}}{\rho D^2} = \text{Re} \{ f_{22} \} \quad , \quad \frac{b_{22}}{\rho \omega D^2} = -\text{Im} \{ f_{22} \}$$

Vi skal også kalkuere  $b_{22}$  gjennom energibalanse

$$\frac{1}{2} |\xi_2|^2 \omega^2 b_{22} = \bar{E}^{-\infty} c_g + \bar{E}^{\infty} c_g$$

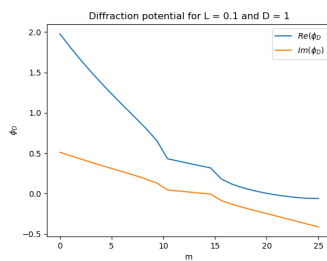
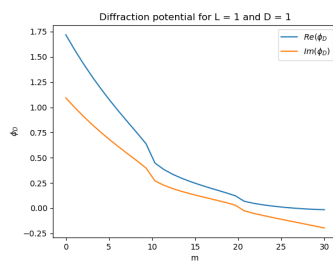
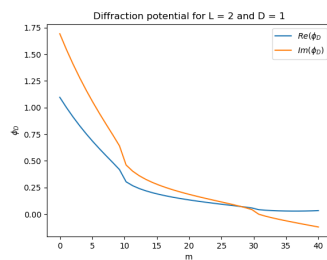
Nedenfor er resultatet plottet for de tre geometriene





## 6.10

Her skal vi løse diffraksjonsproblemet numerisk. Nedenfor er plot for de tre geometriene (potensialet som funksjon av geometriesegmentene).



## 6.10.1

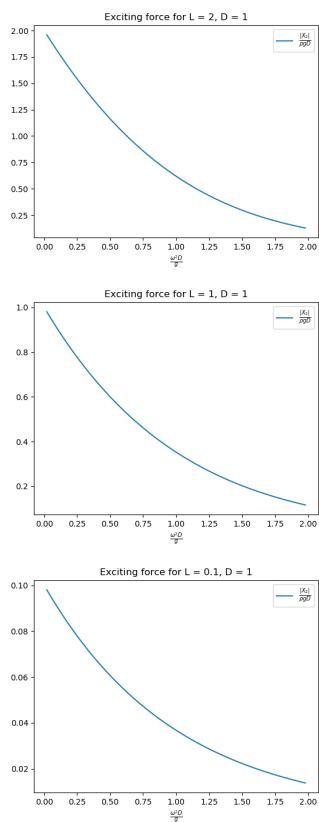
Vi har oppgitt:

$$\frac{X_2}{\rho g} = -\frac{i\omega}{g} \int_{S_B} \phi_D n_2 dS = \frac{i\omega}{g} \int_{S_B} (\phi_0 + \phi_7) n_2 dS$$

Integralet vi løser numerisk blir:

$$\frac{|X_2|}{\rho g} = \int_{S_B} \phi_D n_2 dS$$

Plottet under



## 6.10.2

○ Hashind - Relaxation

$V$ : starten med mit  $f_i$  felle

$$\int_{SB} \left( \phi_2 \frac{d\phi_0}{dn} - \phi_0 \frac{d\phi_2}{dn} \right) dS = 0$$

$$\int_{SB} \phi_2 \frac{d\phi_0}{dn} dS = \int_{SB} \phi_0 \frac{d\phi_2}{dn} dS$$

Fra at  $\frac{d\phi_0}{dn} = 0$  for  $u_i$

$$X_2 = -i\omega \rho \int_{SB} \left( \phi_0 \frac{d\phi_2}{dn} - \phi_2 \frac{d\phi_0}{dn} \right) dS$$

$$\text{og} = i\omega \rho \int_{SB} \left( \phi_0 \frac{d\phi_2}{dn} - \phi_2 \frac{d\phi_0}{dn} \right) dS$$

$\phi_2$  langt unnu Glin

$$\phi_2 = i\omega A_2 e^{\pm i k_y y \pm i k_x x}, \quad x \rightarrow \pm \infty$$

$$X_2 = \oint_{S_\infty} \left( \Phi_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right) dS$$

$$+ \oint_{S=-\infty} \left( \Phi_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) dS$$

Med insättning av  $\Phi_2$   
 långt undan får vi eller en  
 del utveckling:

$$X_2 = \oint_{S_\infty} \left( \Phi_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right) dS = i g A_2^{-\infty}$$

$$\frac{X_2}{\rho g} = i A_2^{-\infty}$$

De fire versjonene vi skal sammenligne er nå:

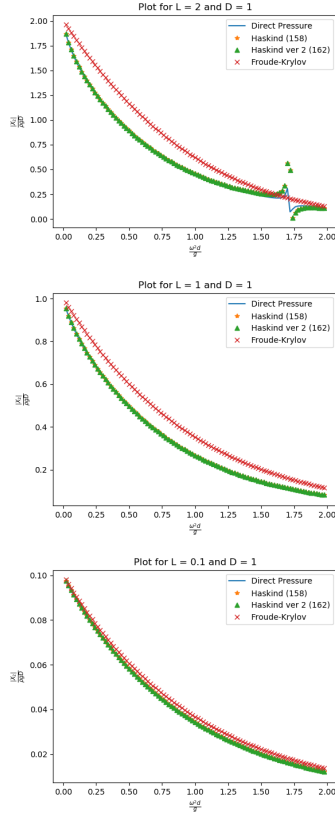
$$\frac{|X_2|}{\rho g} = \int_{S_B} \phi_D n_2 dS \quad (11)$$

$$\frac{|X_2^{HK1}|}{\rho g} = \int_{S_B} (\varphi_0 n_2 - \phi_2 (K (n_2 - i n_1) \varphi_0)) dS \quad (12)$$

$$\frac{|X_2^{HK2}|}{\rho g} = i A_2^{-\infty} \quad (13)$$

$$\frac{|X_2|}{\rho g} = L e^{-KL} \frac{\sin(KL/2)}{KL/2} \quad (14)$$

, der (11) er direkte integrasjon, (12) og (13) er Haskind versjon 1 og 2, og (14) er Froude-Krylov. Resultatet for de tre geometriene:



### 6.11.1

Response ved Hiv

Skal finne ut-lykk for  
response  $|x_2|/A$

Bewegelsesligninger til

$$\operatorname{Re}\{F_i e^{i\omega t}\} \quad (1)$$

$$\text{Her er } F_i = -\sum_j c_{ij} \dot{x}_j - \sum_j (k_{ij} x_j + b_{ij} \ddot{x}_j) + A x_i$$

Vel i putte  $F_i$  inn i 1

Jai ut element

$$\left[ -\omega^2 (M_{ij} + a_{ij}) + i\omega b_{ij} + c_{ij} \right] \dot{x}_j = A x_i$$

Ut-lykk for hiv ( $i=2$ ) og på

derfor vis  $x_i$

$$M_{22} = p \Delta$$

$$c_{22} = p \delta$$

$$\frac{x_2}{A} = \frac{x_2}{c_{22} - \omega^2 (m + a_{22}) + i\omega b_{22}}$$

Resonansfrekvens

Vi har balansen av  
hydrostatiska krafter och

Inertia.

$$C_{22} = \omega_n^2 (m + a_{22})$$

och

$$\omega_n^2 = \frac{g}{D} \frac{1}{1 + \frac{a_{22}}{\rho D L}}$$

för  $\omega$   $\omega_n$   $\omega_n^2$   $D=1$   $L=2$

$$\frac{\omega_n^2 D}{g} = \frac{1}{1 + \frac{a_{22}}{\rho D^2}}$$

$$L=1 \text{ s} \quad \frac{\omega_n^2 D}{g} = \frac{1}{1 + \frac{a_{22}}{\rho D^2}}$$

$$L=0,7 \quad \frac{\omega_n^2 D}{g} = \frac{1}{1 + \frac{a_{22}}{0,1 \rho D^2}}$$



Die addierte müssen aufeinander  
an folgen oder geometrisch

Wir haben heute den Wert und folgen  $KD=1$

(1) Für  $L=2$  er  $a_{22} \approx 2$  und  $KD=1$

(2) Für  $L=1$  er  $a_{22} \approx 0,5$  und  $KD=1$

(3) Für  $L=0,1$  er  $a_{22} \approx 0,91$  und  $KD=1$

Det  $q_i$

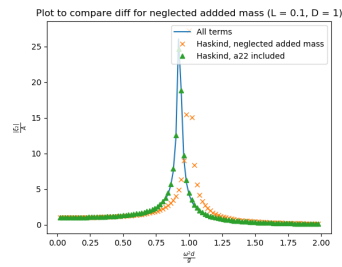
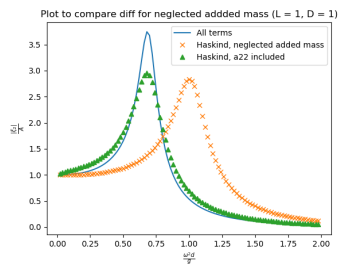
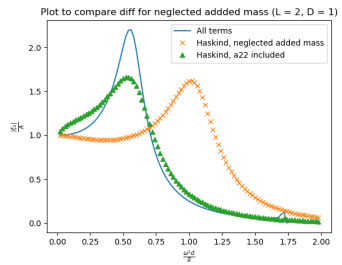
$$\frac{w_2^2}{9} \approx 0,5 \quad (1)$$

$$\frac{w_2^2}{9} \approx 0,67 \quad (2)$$

$$\frac{w_2^2}{9} \approx 0,91 \quad (3)$$

## 6.11.4

I plottene har jeg samlet sammen alt fra 6.11



## 6.12

- Vi har forsøkt å beregne krefter og bevegelse fra en oscillerende geometri som flyter på en overflate. Vi har brukt flere forskjellige metoder, og sammenlignet de for å undersøke om de matcher opp med hverandre
- I "radiation"-problemet er bølgebevegelsene drevet av oscillering av geometrien, og her har vi ingen inkomne bølger.
- Ved å løse potensiale numerisk kan vi senere regne ut demping og addert masse
- Froude-Krylovs beregninger var mye raskere å beregne men avvikte tydelig på grafene for  $L/D$  lik 2 og 1. Var mer likt på den tynne geometrien. Dette stemmer overens med teori
- Addert masse er viktig å ha med i beregningene, og er noe avhengig av geometrien. Responsen har en tydelig forskjell uten addert masse
- Å sammenligne venstreside og høyreside i integrallikningen for Greens Function er et nyttig verifiseringsverktøy før man går videre med beregningene
- Noen av plottene for addert masse (geometriavhengig) har en liten oscillering ved et spesifikt bølgetall. Hva dette betyr er jeg usikker på.
- Hovedpoenget med denne typen analysen er å kunne undersøke ved hvilke betingelser vi kan forkaste beregningen av f.eks. addert masse
- Spørsmålet er om vi kan generalisere noen egenskaper til når hvilke prosedyrer fungerer