Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2
по дисциплине "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Светличная А.А.

Группа ИУ7-63Б

Преподаватель Власов П.А.

Москва — 2023 г.

1 Задание на лабораторную работу

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания $\mathrm{M}X$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n), \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания $\mathrm{M}X$;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии $\mathrm{D}X$.
2. вычислить $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Содержание отчета

1. определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины;
2. формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины;

3. текст программы;
4. результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$).

2 Теоретичсеая часть

2.1 Определение γ-доверительного итервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Определение. Интервальной оценкой параметра θ уровня γ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma.$$

Определение. γ-доверительным интервалом для параметра θ называется реализация (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны.

Тогда для построения γ-доверительного интервала для μ используется центральная статистика

$$g(\vec{X}, \mu) = \frac{\mu - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для μ вычисляются по формулам:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,

$S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$,

$t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы,

n — объем выборки.

Для построения γ-доверительного интервала для σ^2 используется центральная статистика

$$g(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для σ^2 вычисляются по формулам:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где n — объем выборки,

$S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$,

$h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ и $h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

3 Практическая часть

3.1 Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

```
Выборочное среднее = 11.9532
Исправленная выборочная дисперсия = 1.1818

gamma = 0.9

gamma-доверительный интервал для mu: (11.7886, 12.1177)

gamma-доверительный интервал для sigma: (0.9669, 1.4834)
```

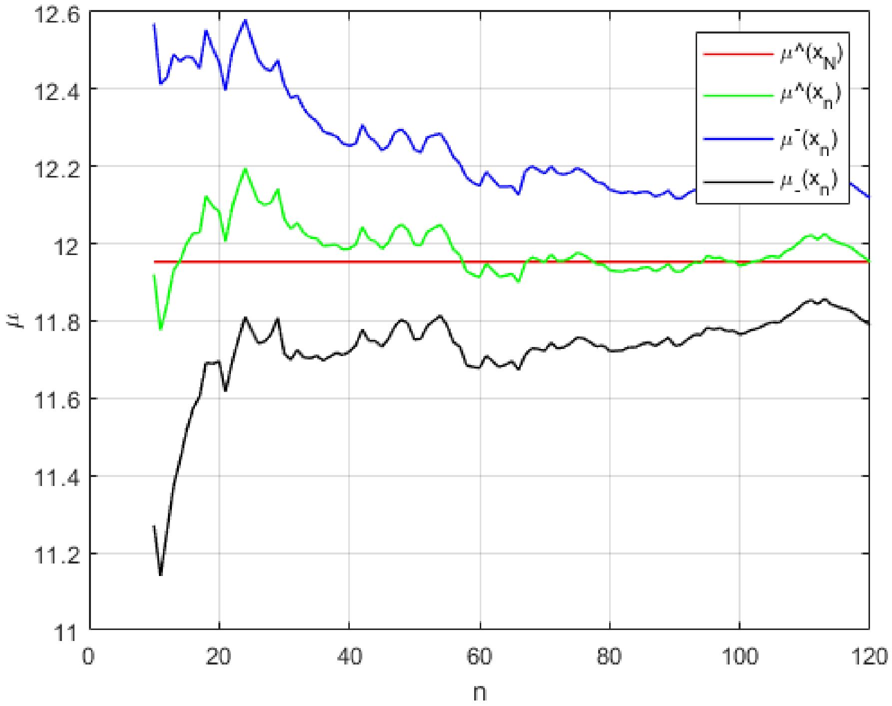

Рисунок 3.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

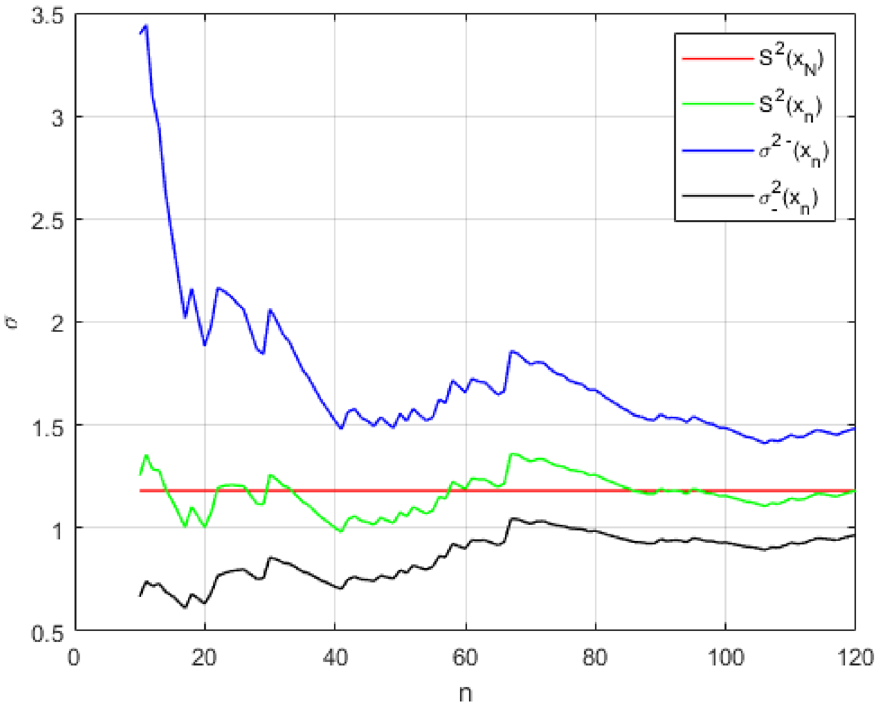

Рисунок 3.2 – Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N