Доказательство. $f^{(n-1)}(x)$ существует при $|x-\xi|<\epsilon$ для некоторо $\epsilon>0$. Тогда из теорем 177 и 178 (с заменой n на $n-1$) следует, что при $0<|h|<\epsilon$ между ξ и $\xi+h$ имеется y, такое, что:

$$f(\xi+h)-f(\xi)=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(y). \qquad (1)$$

$f^{n-1}(x)$ возрастает, соответственно убывает, в ξ, смотря по тому, будет ли $f^n(\xi)>0$, соответственно <0. Следовательно, существует $\epsilon_1, 0<\epsilon_1<\epsilon$, такое, что при $0<|h|<\epsilon_1$ для всех y между ξ и $\xi+h$ выполняется неравенство

$$hf^{n-1}(y)f^n(\xi)>0. \qquad (2)$$

Поэтому из (1) имеем при $0<|h|<\xi_1$, с тамошним y

$$h^n f^{(n)}(f(\xi+h)-f(\xi))=(\tfrac{(h''-1)^2}{(n-1)!}hf^{(n-1)}(y)f^{(n)}(\xi)>0.$$

Следовательно,

1) Если n четное и $f^{(n)}(\xi)>0$, то

$$f(\xi+h)-f(\xi)>0.$$

2) Если n четное и $f^{(n)}(\xi)<0$, то

$$f(\xi+h)-f(\xi)<0.$$

3) Если n нечетное и $f^{(n)}(\xi)>0$, то

$$h(f(\xi+h)-f(\xi))>0.$$

4) Если n нечетное и $f^{(n)}(\xi)<0$, то

$$h(f(\xi+h)-f(\xi))>0.$$

Примеры I)-IV) — те же, что и в конце гл. 7.
I) $f(x)=-x^2$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-2<0$: максимум в 0.
II) $f(x)=-x^2$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-2<0$: минимум в 0.
III) $f(x)=-x^3$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=6>0$: возрастание в 0.

IV) $f(x) = -x^3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6 < 0$: убывание в 0.

V) Пусть

$$f(x) = \tfrac{(x+1)^3}{x^2} \text{ при } x \neq 0.$$

Найдём все максимумы и минимумы этой функции. Так как, очевидно, $f(x)$ при $x \neq 0$ дифференцируема любое число раз (поскольку этим свойством обладают x^{-2} и $(x+3)^3$), то подозрительными на максимум или минимум являются лишь корни функции $f'(x)$ (т. е. те x, для которых $f'(x) = 0$). Но при $x \neq 0$ имеем

$$f'(x) = (x^{-2}(x+1)^3)' = -2x^{-3}(x+1)^3 + 3x^{-2}(x+1)^2 = \\ = x^{-3}(x+1)^2(-2x-2+3x) = x^{-3}(x+1)^2(x-2).$$

Таким образом, исследованию подлежат лишь $x = -1$ и $x = 2$. Для этого мы применим наш признак, не вычисляя, однако, ненужных членов.

Исследование $x = -1$:

$f''(x) = \left((x+1)^2\tfrac{x-2}{x^3}\right)' =$

$$= (x+1)^2\left(\tfrac{x-2}{x^3}\right)' + (x+1)\tfrac{x-2}{x^3},$$

$$f''(-1) = 0,$$

$$f'''(x) = \left((x+1)^2\tfrac{x-2}{x^3}\right)'' =$$

$$= (x+1)^2\left(\tfrac{x-2}{x^3}\right)'' + 4(x+1)\left(\tfrac{x-2}{x^3}\right)' + 2\tfrac{x-2}{x^3}$$

$$f'''(-1) = 0 + 0 + 2\tfrac{-3}{-1} > 0.$$

Возрастание, ни максимума, ни минимума.

Исследование $x = 2$:

$$f''(2) = \lim_{x=2} \tfrac{f'(x)}{x-2} = \lim_{x=2} \tfrac{(x+1)^2}{x^3} > 0.$$

Минимум,