Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовая работа
по курсу «Уравнения математической физики»
Вариант №12

Студент:	С. М. Власова
Преподаватель:	С. А. Колесник
Группа:	М8О-306Б
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2020

Вариант

Власова
80-306

Курсовая работа по УМФ
Вариант №12

Сформулировать и решить задачи:

1. О нагреве конечного стержня $x \in [0;l]$ с начальным распределением $T_0 = 300\left(a^2 = 10^{-6}\right)$ и наличием конвективного члена $\left(+b\frac{\partial u}{\partial x}, b = 10^{-6}\right)$, когда на левом конце поддерживается постоянная температура, равная 500, а на правый – теплоизолирован. Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить графики $u(x,t)$, $l = 0{,}1$м.

2. О вынужденных колебаниях конечного стержня $x \in [0,\pi]$, $a^2 = 10^6$, $f(x,t) = \sin\left(\frac{x}{\pi} + t\right)$, когда начальные отклонения и скорость равны нулю, левый конец зажат, а правый свободен. Результаты вывести графически.

3. Задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда заданы граничные условия $u(x,l_2) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right)$, $u(l_2,y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$, а на остальных границах – нулевые условия.

Задача №1

Теория:

Количество тепла, протекающего в направлении оси Ox за бесконечно малый промежуток времени dt через сечение S с абсциссой x

$$dQ_x = -k\frac{\partial u}{\partial x}Sdt$$

Составим тепловой баланс для элемента стержня $dV = Sdx$, заключенного между бесконечно близкими сечениями $x, x + dx$.
Количество тепла, созданное за dt источниками тепла в элементе dV

$$\Phi(x,t)\rho Sdxdt =$$

Количество тепла, накопленное элементом dV за время dt

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x Sdt + k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} Sdt + \Phi(x,t)\rho Sdxdt$$

Выразим

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x$$

Тогда

$$dQ = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x Sdxdt + \Phi(x,t)\rho Sdxdt$$

С другой стороны

$$dQ = c\rho Sdx\frac{\partial du}{\partial dt}dt$$

$$c\rho\frac{\partial du}{\partial dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\Phi(x,t)$$

Здесь $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, где a – коэффициент температуропроводности, $b = \frac{1}{c}$ – коэффициент при конвективном члене.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\Phi(x,t)$$

Постановка задачи:
Сформулировать и решить задачу о нагреве конечного стержня $x \in [0; l]$ с начальным распределением $T_0 = 300 (a^2 = 10^{-6})$ и наличием конвективного члена $\left(+b\dfrac{\partial u}{\partial x}, b = 10^{-6}\right)$, когда на левом конце поддерживается постоянная температура, равная 500, а правый — теплоизолирован. Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить графики $u(x,t)$, $l = 0,1$м.

Решение:
Сформулируем задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + b u_x, & x \in (0; l); t > 0 \\ u(x,0) = T_0 = 300, & x \in (0; l); t = 0; \\ u(0,t) = T_1 = 500, & x = 0; t > 0; \\ u_x(l,t) = 0, & x = l; t > 0; \end{cases} \tag{1}$$

Для решения задачи (1) необходимо избавиться от конвективного члена bu_x. Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\mu t + \nu x},$$

где пусть $e^{\mu t + \nu x} = E$.

$$u_t = v_t E + \mu E v = E(v_t + \mu v)$$
$$u_x = v_x E + \nu E v = E(v_x + \nu v)$$
$$u_{xx} = E(v_{xx} + \nu v_x) + \nu E(v_x + \nu v) = E(v_{xx} + 2\nu v_x + \nu^2 v).$$

Подставим u_t, u_x, u_{xx} в первое уравнение задачи (1)

$$E(v_t + \mu v) = a^2 E(v_{xx} + 2\nu v_x + \nu^2 v) + bE(v_x + \nu v)$$

$$v_t = a^2 v_{xx} + (2a^2\nu + b)v_x + (\nu^2 a^2 + b\nu - \mu)v$$

Теперь выберем ν и μ так, чтобы коэффициенты перед v_x и v стали равны 0

$$\begin{cases} 2a^2\nu + b = 0, \\ a^2\nu^2 + b\nu - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = -\dfrac{b}{2a^2}, \\ \mu = a^2\nu^2 + b\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = -\dfrac{b}{2a^2}, \\ \mu = \dfrac{a^2 b^2}{4a^4} - \dfrac{b^2}{2a^2} = -\dfrac{b^2}{4a^2}. \end{cases}$$

Сформулируем краевые и начальные условия

$$u(x,0) = v(x,0)e^{\mu \cdot 0 + \nu x} = v(x,0)e^{\nu x} = T_0 = 300$$

$$v(x,0) = T_0 e^{-\nu x}$$

$$u(0,t) = v(0,t)e^{\mu t+\nu\cdot 0} = v(0,t)e^{\mu t} = T_1 = 500$$

$$v(0,t) = T_1 e^{-\mu t}$$

$$u_x(l,t) = e^{\mu t+\nu\cdot l}(v_x(l,t) + \nu v(l,t)) = 0$$

$$v_x(l,t) + \nu v(l,t) = 0$$

Получаем начально-краевую задачу для $v(x,t)$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & x \in (0;l); t > 0 \\ v(x,0) = T_0 e^{-\nu x}, & x \in (0;l); t = 0; \\ v(0,t) = T_1 e^{-\mu t}, & x = 0; t > 0; \\ v_x(l,t) + \nu v(l,t) = 0, & x = l; t > 0; \end{cases} \tag{2}$$

Будем искать $v(x,t)$ в виде

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t)$$

$$\begin{cases} v_{1xx} = 0, \\ v_1(0,t) = T_1 e^{-\mu t}, \\ v_{1x}(l,t) + \nu v_1(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} a^2 v_{2xx} = v_{2t}, \\ v_2(x,0) = T_0 e^{-\nu t} - v_1(x,0), \\ v_2(0,t) = 0, \\ v_{2x}(l,t) + \nu v_2(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} v_{3t} = a^2 v_{3xx} - v_{1t}, \\ v_3(x,0) = 0, \\ v_3(0,t) = 0, \\ v_{3x}(l,t) + \nu v_3(l,t) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Решаем задачу (3)

$$\begin{cases} v_{1xx} = 0, \\ v_1(0,t) = T_1 e^{-\mu t}, \\ v_{1x}(l,t) + \nu v_1(l,t) = 0 \end{cases}$$

Будем искать $v_1(x,t)$ в виде

$$v_1(x,t) = C_1(t)x + C_2(t)$$

Подставим в краевые условия

$$v_1(0,t) = C_1(t)\cdot 0 + C_2(t) = \underline{C_2(t) = T_1 e^{-\mu t}}$$

$$v_{1x}(l,t) + \nu v_1(l,t) = C_1(t) + \nu(C_1(t)\cdot l + C_2(t)) = C_1(t)(1+\nu\cdot l) + \nu C_2(t) = 0$$

$$\underline{C_1(t) = -\frac{\nu C_2(t)}{1+\nu l} = -\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l}}$$

Имеем

$$\boxed{\mathrm{v}_1(x,t) = -\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l}\cdot x + T_1 e^{-\mu t}}$$

$$v_1(x,0) = -\frac{\nu T_1}{1+\nu l}\cdot x + T_1 = T_1\cdot(1 - \frac{\nu}{1+\nu l}\cdot x)$$

$$v_{1t} = \frac{\nu\mu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l}\cdot x - \mu T_1 e^{-\mu t}$$

Решим задачу (4). Запишем её в виде

$$\begin{cases} a^2 v_{2xx} = v_{2t}, \\ v_2(x,0) = \varphi(x), \\ v_2(0,t) = 0, \\ v_{2x}(l,t) + \nu v_2(l,t) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\nu x} - v_1(x,0) = T_0 e^{-\nu x} - T_1(1 - \frac{\nu}{1+\nu l}\cdot x)$$

Решение будем искать в виде

$$v_2(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

Подставим в первое уравнение системы (6)

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля о нахождении собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) + \nu X(l) = 0, \nu > 0 \end{cases}$$

I. $\lambda^2 > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

$$X(0) = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \sin(\lambda x)$$

$$X'(l) + \nu X(l) = C_1 \lambda \cos(\lambda l) + \nu C_1 \sin(\lambda l) = 0$$

$$\lambda \cos(\lambda l) + \nu \sin(\lambda l) = 0$$

$$\boxed{\lambda_n = -\nu \operatorname{tg}(\lambda_n l)}$$

Уравнение имеет ∞ множество решений – собственных значений, которым соответствует собственная функция

$$\boxed{\mathrm{X}_n(x) = \sin(\lambda_n x)}, \quad n \in N$$

II. $\lambda^2 < 0$

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$X'(l) + \nu X(l) = C_1(\lambda + \nu) e^{\lambda x} + C_2(\nu - \lambda) e^{-\lambda x} = 0$$

Имеем СЛАУ относительно C_1, C_2 :

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1(\lambda + \nu) + C_2(\nu - \lambda) = 0$$

Определитель соответствующей матрицы равен $-2\lambda \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$. Задача имеет лишь тривиальные решения.

III. $\lambda^2 = 0$

$$X(x) = C_1 X + C_2$$

$$X(0) = \underline{C_2 = 0}$$

$$X'(l) + \nu X(l) = C_1 + \nu l C_1 = C_1(1 + \nu l) = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = 0}$$

Итак, задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное множество нетривиальных решений при $\lambda^2 > 0$, где собственные значения являются решением уравнения

$$\operatorname{tg}(\lambda_n l) = -\frac{\lambda_n}{\nu},$$

а собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x).$$

Теперь решим уравнение

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$$

Его решением является

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

Получаем

$$v_{2n}(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \sin(\lambda_n x) e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

$$v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{2n}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x) e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

Определим константы C_n. Для этого разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x)$

$$v_2(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \Rightarrow C_n = \varphi_n$$

Имеем

$$\boxed{\mathrm{v}_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t}}$$

где

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \cdot \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

$$||X_n||^2 = \frac{l}{2} + \frac{\nu}{2(\lambda_n^2 + \nu^2)}$$

Решим задачу (5).

$$\begin{cases} v_{3t} = a^2 v_{3xx} + f(x,t), \\ v_3(x,0) = 0, \\ v_3(0,t) = 0, \\ v_{3x}(l,t) + \nu v_3(l,t) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$f(x,t) = -v_{1t} = -\frac{\nu\mu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l} \cdot x + \mu T_1 e^{-\mu t}$$

Решение будем искать в виде

$$v_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{3n}(t) X_n(x)$$

Разложим $f(x,t)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x)$.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l f(\xi,t) X_n(\xi) d\xi$$

$$X_n'' = (\lambda_n \cos(\lambda_n x))' = -\lambda_n^2 X_n(x)$$

Подставим $v_3(x,t)$ и $f(x,t)$ в (7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{3n}'(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_{3n}(t) X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{v_{3n}'(t) + a^2\lambda_n^2 v_{3n}(t) - f_n(t)\} X_n(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_{3n}'(t) + a^2\lambda_n^2 v_{3n}(t) - f_n(t) = 0$$

Решением этого ОДУ является функция

$$v_{3n}(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau$$

Решением задачи (5) является

$$v_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} X_n(x) d\tau,$$

где

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \cdot \int\limits_0^l f(\xi,t) X_n(\xi) d\xi$$

Решение задачи (2):

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t) =$$

$$= -\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l} \cdot x + T_1 e^{-\mu t} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} X_n(x) d\tau$$

Здесь

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x),$$

$$||X_n||^2 = \frac{l}{2} + \frac{\nu}{2(\lambda_n^2+\nu^2)} = \frac{l(\lambda_n^2+\nu^2)+\nu}{2(\lambda_n^2+\nu^2)}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \cdot \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \cdot \int\limits_0^l f(\xi,t) X_n(\xi) d\xi,$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\nu x} - v_1(x,0) = T_0 e^{-\nu x} - T_1(1 - \frac{\nu}{1+\nu l} \cdot x),$$

$$f(x,t) = -v_{1t} = -\frac{\nu\mu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l} \cdot x + \mu T_1 e^{-\mu t},$$

Ответ: Решение задачи (1):

$$u(x,t) = v(x,t) \cdot e^{\mu t + \nu x} =$$

$$= -\frac{\nu T_1 e^{\nu x}}{1+\nu l} \cdot x + T_1 e^{\nu x} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t + \mu t + \nu x} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau) + \mu t + \nu x} X_n(x) d\tau$$

Здесь

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x),$$

$$||X_n||^2 = \frac{l}{2} + \frac{\nu}{2(\lambda_n^2+\nu^2)} = \frac{l(\lambda_n^2+\nu^2)+\nu}{2(\lambda_n^2+\nu^2)}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \cdot \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \cdot \int\limits_0^l f(\xi, t) X_n(\xi) d\xi,$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\nu x} - v_1(x, 0) = T_0 e^{-\nu x} - T_1(1 - \frac{\nu}{1+\nu l} \cdot x),$$

$$f(x, t) = -v_{1t} = -\frac{\nu \mu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l} \cdot x + \mu T_1 e^{-\mu t},$$

$$\mu = -\frac{b^2}{4a^2},$$

$$\nu = -\frac{b}{2a^2},$$

$$a^2 = 10^{-6},$$

$$b = 10^{-6},$$

$$l = 0.1,$$

$$T_0 = 300,$$

$$T_1 = 500.$$

Проверка:

$$v(x, 0) = T_0 e^{-\nu x} = -\frac{\nu T_1}{1+\nu \cdot l} \cdot x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^0 f_n(\tau) \cdot e^{a^2 \lambda_n^2 \tau} X_n(x) d\tau =$$

$$= -\frac{\nu T_1}{1+\nu \cdot l} \cdot x + T_1 + T_0 e^{-\nu x} - T_1(1 - \frac{\nu}{1+\nu l} \cdot x) = T_0 e^{-\nu x}$$

$$v(0, t) = T_1 e^{-\mu t} = T_1 e^{-\mu t} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(0) \cdot e^{a^2 \lambda_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cdot e^{a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} X_n(0) d\tau =$$

$$= T_1 e^{-\mu t} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot e^{a^2 \lambda_n^2 t} \sin(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cdot e^{a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} \sin(0) d\tau = T_1 e^{-\mu t}$$

$$v_x(l, t) + \nu v(l, t) = 0 = -\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot X_n'(l) \cdot e^{-a^2 \lambda_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cdot e^{-a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} \cdot X_n'(l) d\tau +$$

$$+\nu\cdot\left(-\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}\cdot l}{1+\nu l}+T_1e^{-\mu t}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cdot X_n(l)\cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t}+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cdot e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\cdot X_n(l)d\tau\right)=$$

$$=-\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l}-\frac{\nu^2 T_1 e^{-\mu t}\cdot l}{1+\nu l}+\nu T_1 e^{-\mu t}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cdot\left[X_n'(l)+\nu X_n(l)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cdot e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\cdot\left[X_n'(l)+\nu X_n(l)\right]d\tau$$

Согласно задаче Штурма-Лиувилля

$$X'(l)+\nu X(l)=0$$

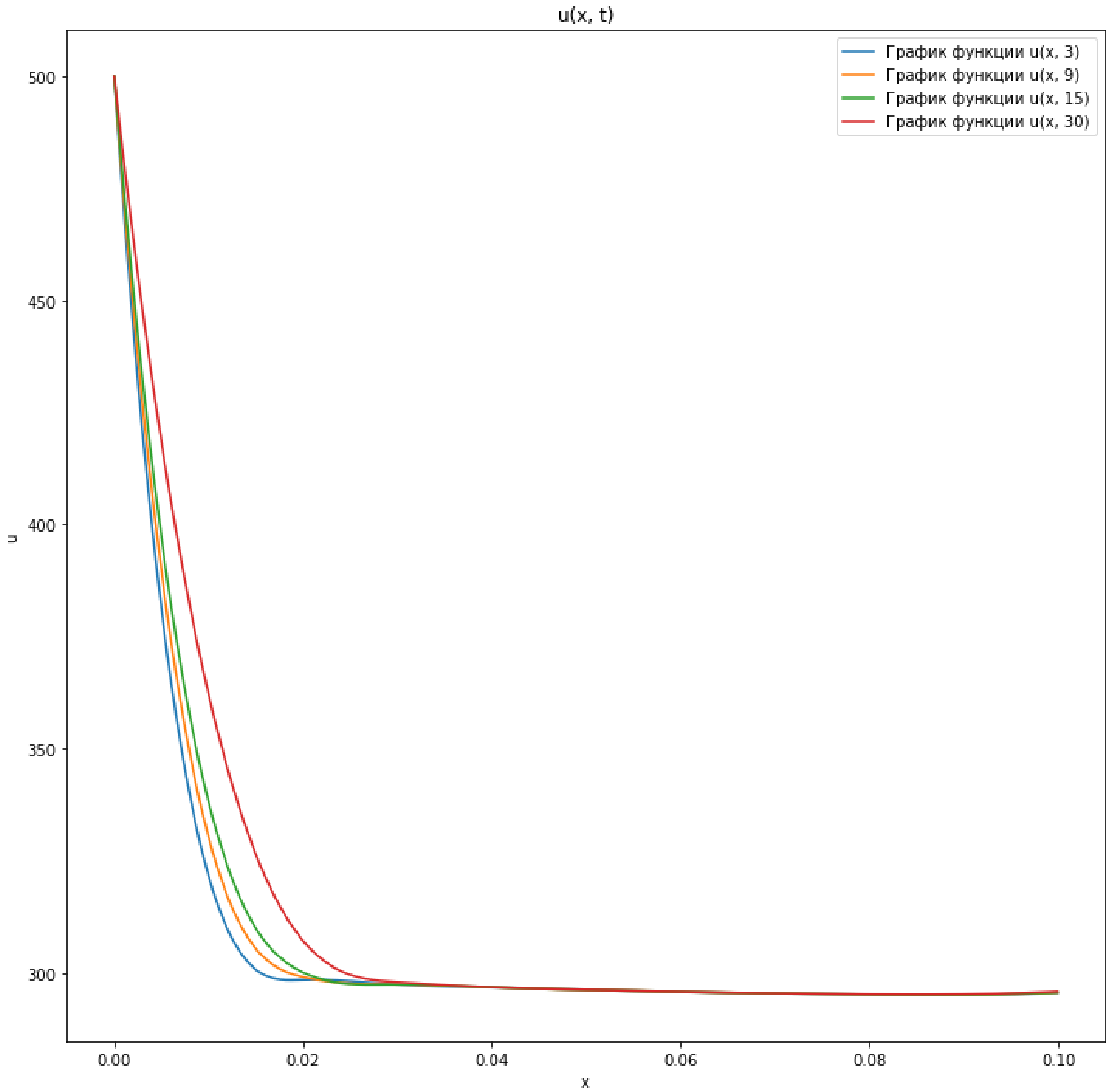
Следовательно,

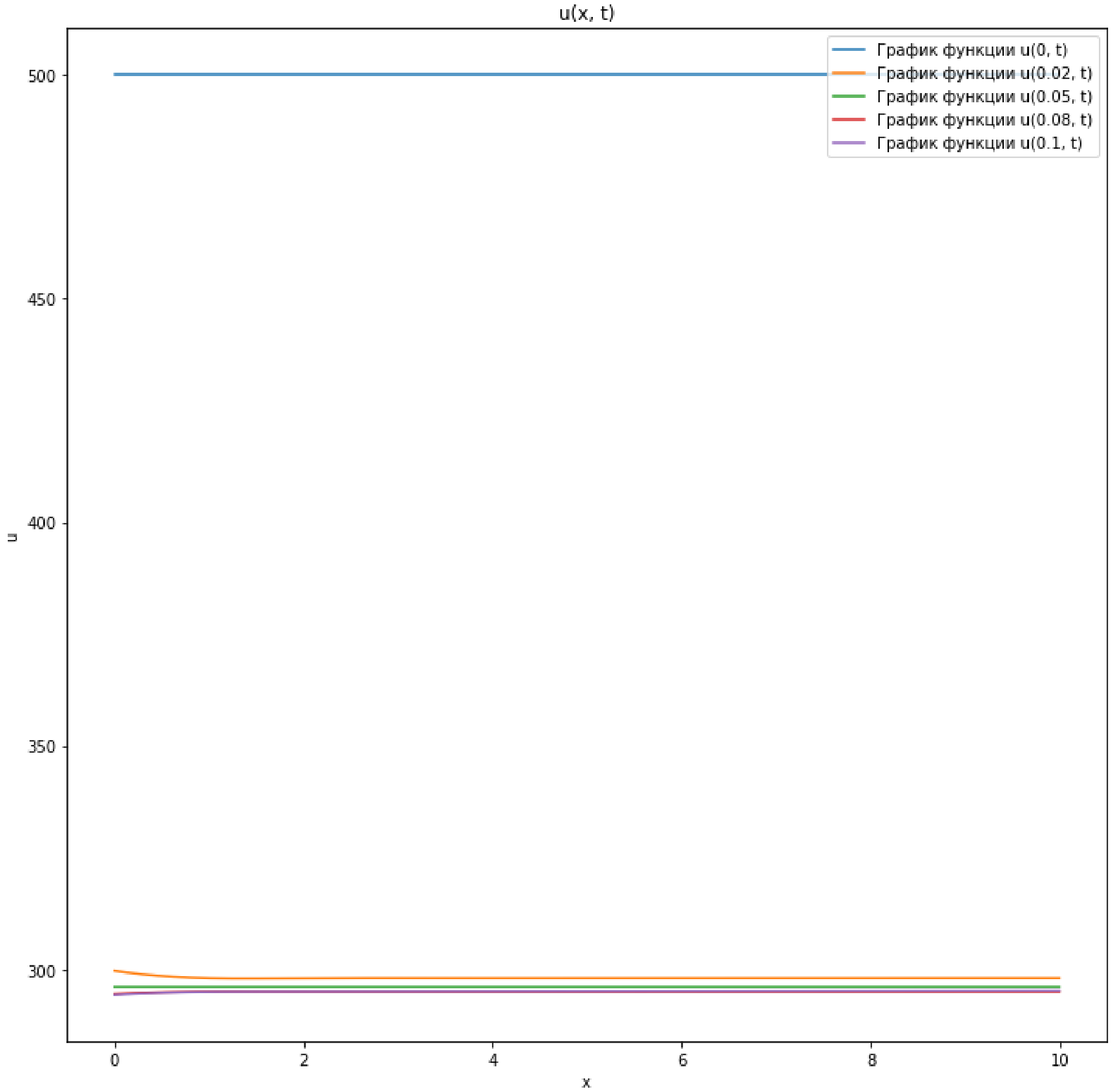
$$v_x(l,t)+\nu v(l,t)=0=-\frac{\nu T_1 e^{-\mu t}}{1+\nu l}-\frac{\nu^2 T_1 e^{-\mu t}\cdot l}{1+\nu l}+\nu T_1 e^{-\mu t}=$$

$$=\frac{-\nu T_1 e^{-\mu t}-\nu^2 T_1 e^{-\mu t}\cdot l+\nu T_1 e^{-\mu t}+\nu^2 T_1 e{-}\mu t\cdot l}{1+\nu l}=0.$$

Задача (2) решена корректно $\Rightarrow$ задача (1) так же решена верно.

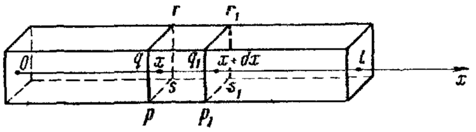
Графики:


u(x, t)
График функции u(x, 3)
График функции u(x, 9)
График функции u(x, 15)
График функции u(x, 30)
500
450
400
350
300
u
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
x


u(x, t)
График функции u(0, t)
График функции u(0.02, t)
График функции u(0.05, t)
График функции u(0.08, t)
График функции u(0.1, t)
500
450
400
350
300
u
0
2
4
6
8
10
x

Задача №2

Теория:



Рассмотрим сечение $pqrs$, x – его абсцисса в состоянии покоя. Будем искать смещение этого сечения $u(x,t)$ в любой момент времени t.
Найдем относительное удлинение участка стержня, ограниченного участками $pqrs$ и $p_1q_1r_1s_1$. Если абсцисса сечения $p_1q_1r_{s1}$ в состоянии покоя $x+dx$, то смещение этого сечения в момент времени t с точностью до бесконечно малых высшего порядка равно

$$u(x+dx,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

Поэтому относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой x в момент времени t равно

$$\frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_x(x,t)$$

Будем считать, что силы, вызывающие удлинение, подчиняются закону Гука. Найдем величину силы натяжения T, действующей на сечение $pqrs$

$$T = ESu'_x(x,t),$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, E – модуль упругости (Юнга) материала стержня.

Соответственно, сила, действующая на сечение $p_1q_1r_1s_1$, равна

$$T_1 = ESu'_x(x+dx,t)$$

Результирующая сил

$$T_1 - T = ES\left[u'_x(x+dx,t) - u'_x(x,t)\right] = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Считая выделенный участок материальной точкой с массой ρSdx, где ρ – объемная площадь стержня, и применяя к нему второй закон Ньютона, составим уравнение

$$\rho Sdx\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Получим дифференциальное уравнение свободных продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Если к стержню приложена внешняя сила $g(x,t)$, рассчитанная на единицу объема

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x,t)$$

Постановка задачи:
Сформулировать и решить задачу о вынужденных колебаниях конечного стержня $x \in [0;\pi]$, $\quad a^2 = 10^6$, $\quad f(x,t) = \sin(\frac{x}{\pi} + t)$, когда начальные отклонения и скорость равны нулю, левый конец зажат, а правый свободен. Результаты вывести графически.
Решение:
Сформулируем задачу

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in [0;\pi]; \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in [0;\pi]; \quad t = 0 \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0;\pi]; \quad t = 0 \\ u(0,t) = 0, & x = 0; \quad t > 0 \\ u_x(l,t) = 0, & x = l; \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Будем искать решение задачи (1) в виде разложения в ряд по собственным функциям $X_n(x)$ соответствующей однородной задачи.
Сформулируем однородную задачу

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}, & x \in [0;\pi]; \quad t > 0 \\ w(x,0) = 0, & x \in [0;\pi]; \quad t = 0 \\ w_t(x,0) = 0, & x \in [0;\pi]; \quad t = 0 \\ w(0,t) = 0, & x = 0; \quad t > 0 \\ w_x(l,t) = 0, & x = l; \quad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Найдем собственные функции $X_n(x)$ задачи (2). Используем метод разделения переменных Фурье.

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t) X''(x)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля.

$$\begin{cases} X''+\lambda^2X=0, \\ X(0)=0, \\ X'(l)=0 \end{cases}$$

I. $\lambda^2>0$

$$X(x)=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)$$

$$X(0)=C_2=0\Rightarrow X(x)=C_1\sin(\lambda x)$$

$$X'(l)=C_1\lambda\cos(\lambda l)=0\Rightarrow \lambda l=\pi n-\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lambda_n=\tfrac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}}$$

Уравнение имеет ∞ множество решений – собственных значений, которым соответствует собственная функция

$$\boxed{\mathrm{X}_n(x)=\sin(\lambda_n x)},\quad n\in N$$

II. $\lambda^2<0$

$$X(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$$

$$X(0)=C_1+C_2=0$$

$$X'(l)=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}=0$$

Имеем СЛАУ относительно $C_1,C_2:$

$$C_1+C_2=0$$

$$C_1\lambda-C_2\lambda=0$$

Определитель соответствующей матрицы равен $-2\lambda\neq0\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow X\equiv0$. Задача имеет лишь тривиальные решения.

III. $\lambda^2 = 0$

$$X(x) = C_1 X + C_2$$

$$X(0) = \underline{C_2 = 0}$$

$$X'(l) = \underline{C_1 = 0}$$

Итак, задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное множество нетривиальных решений при $\lambda^2 > 0$.

Собственные значения

$$\boxed{\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l}}$$

Собственные функции

$$\boxed{\mathrm{X}_n(x) = \sin(\tfrac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot x)}, \quad n \in N$$

Мы нашли собственные функции X_n однородной задачи. Теперь представим $u(x,t)$ в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot x)$$

Заметим, что $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,t) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cdot \sin(0) = 0$$

$$u_x(l,t) = 0 = \frac{2 \cdot l}{\pi(2n-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cdot cos(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot l) = 0$$

Чтобы $u(x,t)$ удовлетворяла нулевым начальным условиям, будем считать, что

$$\gamma_n(0) = 0; \quad \gamma_n'(0) = 0$$

Запишем $u(x,t)$ в виде

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$

Заменим $u(x,t)$ полученным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\gamma_n''(t)+a^2\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4\cdot l^2}\cdot\gamma_n(t)\right]\cdot\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot x)=f(x,t)$$

Разложим $f(x,t)$ в интервале $(0;l)$ в ряд по синусам по аргументу x

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cdot\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot x),$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\cdot\int\limits_0^l f(\xi,t)\cdot\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot\xi)d\xi$$

Приравняем в полученных разложениях коэффициенты при собственных функциях

$$\begin{cases}\gamma_n''(t)+a^2\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4\cdot l^2}\cdot\gamma_n(t)=f_n(t)\\ \gamma_n(0)=0\\ \gamma_n'(0)=0\end{cases}$$

Решение системы имеет следующий вид

$$\gamma_n(t)=\frac{2\cdot l}{\pi a(2n-1)}\cdot\int\limits_0^t f_n(\tau)\cdot\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot(t-\tau))d\tau$$

Запишем решение задачи (1)

$$u(x,t)=\frac{2\cdot l}{\pi a(2n-1)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^t f_n(\tau)\cdot\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot(t-\tau))d\tau\right]\cdot\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot x),$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\cdot\int\limits_0^l f(\xi,t)\cdot\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot\xi)d\xi$$

$$f(x,t)=\sin(\frac{x}{\pi}+t)$$

Проверка:

$$u(x,0)=0=\frac{2\cdot l}{\pi a(2n-1)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^0 f_n(\tau)\cdot\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot(t-\tau))d\tau\right]\cdot\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2\cdot l}\cdot x)=$$

$$= \frac{2 \cdot l}{\pi a(2n-1)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot x) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \gamma_n'(t) = 0$$

Будем искать $\gamma_n(t)$

$$\gamma_n(t) = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^l f(\xi,\tau) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi \right] \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot (t-\tau)) d\tau$$

Пусть

$$I = \int\limits_0^l f(\xi,\tau) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi = \int\limits_0^l \sin(\frac{\xi}{\pi} + \tau) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi =$$

$$\cos(\tau) \cdot \int\limits_0^l \sin(\frac{\xi}{\pi}) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi + \sin(\tau) \cdot \int\limits_0^l \cos(\frac{\xi}{\pi}) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi = (\star) + (\star\star)$$

$$(\star) = \cos(\tau) \cdot \int\limits_0^l \sin(\frac{\xi}{\pi}) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi = \cos(\tau) \cdot \left[\frac{\pi l \cdot \sin(\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{l}{\pi})}{\pi^2(2n-1) - 2 \cdot l} - \frac{\pi l \cdot \sin(\pi n - \frac{\pi}{2} + \frac{l}{\pi})}{\pi^2(2n-1) + 2 \cdot l} \right] =$$

$$= \cos(\tau) \cdot R^{(\star)}$$

$$(\star\star) = \sin(\tau) \cdot \int\limits_0^l \cos(\frac{\xi}{\pi}) \cdot \sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot \xi) d\xi =$$

$$= \sin(\tau) \cdot \left[\frac{\pi l \cdot (1 - \cos(\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{l}{\pi}))}{\pi^2(2n-1) - 2 \cdot l} + \frac{\pi l \cdot (1 - \cos(\pi n - \frac{\pi}{2} + \frac{l}{\pi}))}{\pi^2(2n-1) + 2 \cdot l} \right] =$$

$$= \sin(\tau) \cdot R^{(\star\star)}$$

$$I = \cos(\tau) \cdot R^{(\star)} + \sin(\tau) \cdot R^{(\star\star)}$$

$$\gamma_n(t) = \int\limits_0^t I \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot (t-\tau))d\tau = R^{(\star)} \cdot \int\limits_0^t \cos(\tau) \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot (t-\tau))d\tau +$$

$$+R^{(\star\star)} \cdot \int\limits_0^t \sin(\tau) \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot (t-\tau))d\tau$$

Данный интеграл я искала с помощью формул суммы и разности синусов и косинусов. Получилось следующее

$$\gamma_n(t) = R^{(\star)} \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot t) \cdot l \cdot \left[\frac{\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t + t)}{a\pi(2n-1) + 2 \cdot l} + \frac{\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t - t)}{a\pi(2n-1) - 2 \cdot l} \right] -$$

$$-R^{(\star)} \cdot \cos(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot t) \cdot l \cdot \left[\frac{1 - \cos(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t + t)}{a\pi(2n-1) + 2 \cdot l} + \frac{1 - \cos(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t - t)}{a\pi(2n-1) - 2 \cdot l} \right] +$$

$$+R^{(\star\star)} \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot t) \cdot l \cdot \left[\frac{1 - \cos(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t + t)}{a\pi(2n-1) + 2 \cdot l} + \frac{\cos(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t - t) - 1}{a\pi(2n-1) - 2 \cdot l} \right] -$$

$$-R^{(\star\star)} \cdot \cos(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot t) \cdot l \cdot \left[\frac{\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t - t)}{a\pi(2n-1) - 2 \cdot l} - \frac{\sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} t + t)}{a\pi(2n-1) + 2 \cdot l} \right]$$

Чтобы упростить взятие производной, я решила не рассчитывать коэффициенты, а просто проиллюстрировать равенство производной нулю.

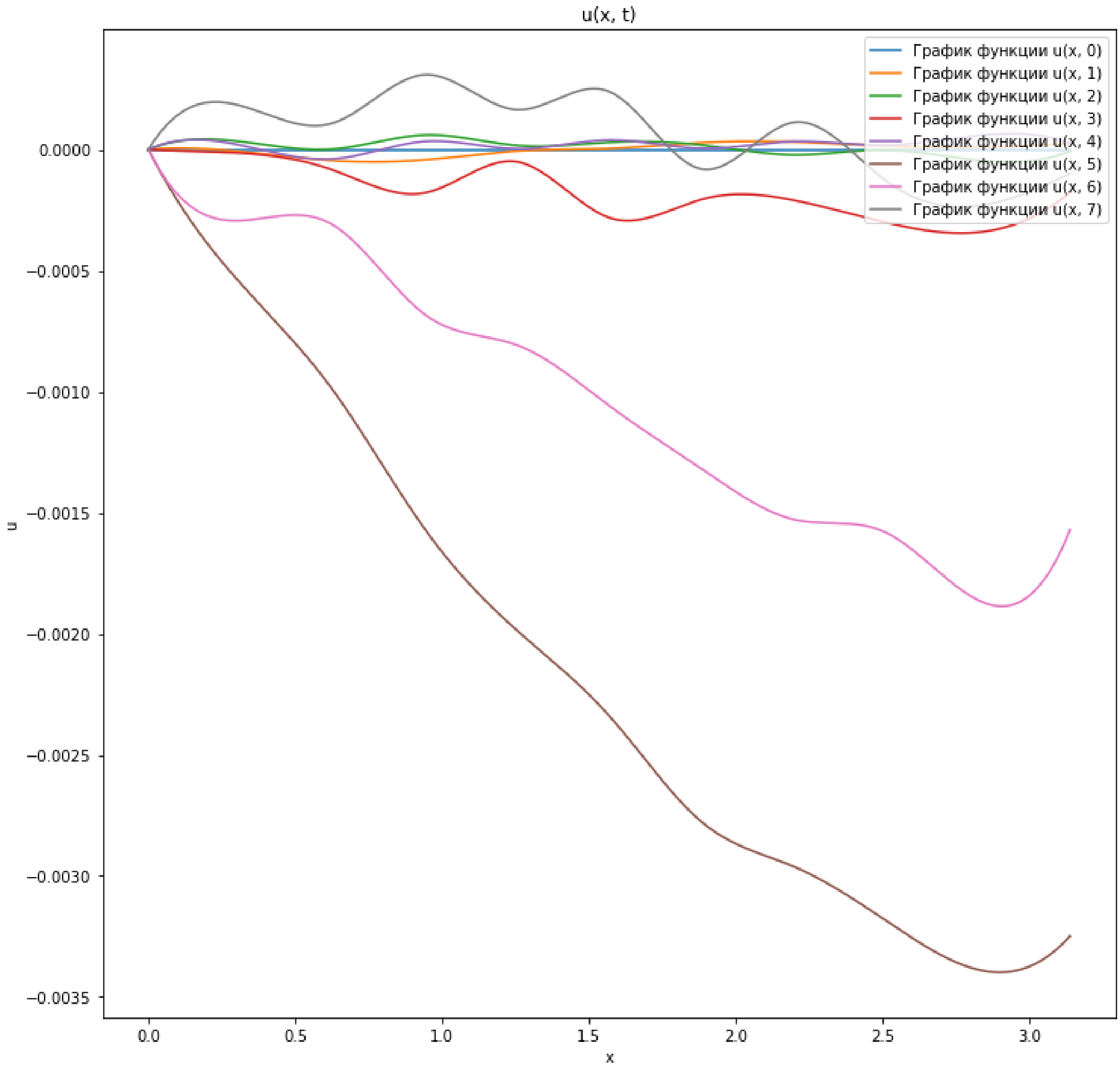
$$\gamma_n'(0) = R^{(\star)} \cdot \{\cos(0) \cdot [\sin(0) + \sin(0)] + \sin(0) \cdot [\ldots] + \sin(0) \cdot [\ldots] - \cos(0) \cdot [\sin(0) + \sin(0)]\} +$$
$$+R^{(\star\star)} \cdot \{\sin(0) \cdot [\ldots] - \cos(0) \cdot [\sin(0) - \sin(0)] - \cos(0) \cdot [\cos(0) - \cos(0)] + \sin(0) \cdot [\ldots]\} = 0$$

$$u(0,t) = \frac{2 \cdot l}{\pi a(2n-1)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^t f_n(\tau) \cdot \sin(\frac{a\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot (t-\tau))d\tau \right] \cdot \sin(0) = 0$$

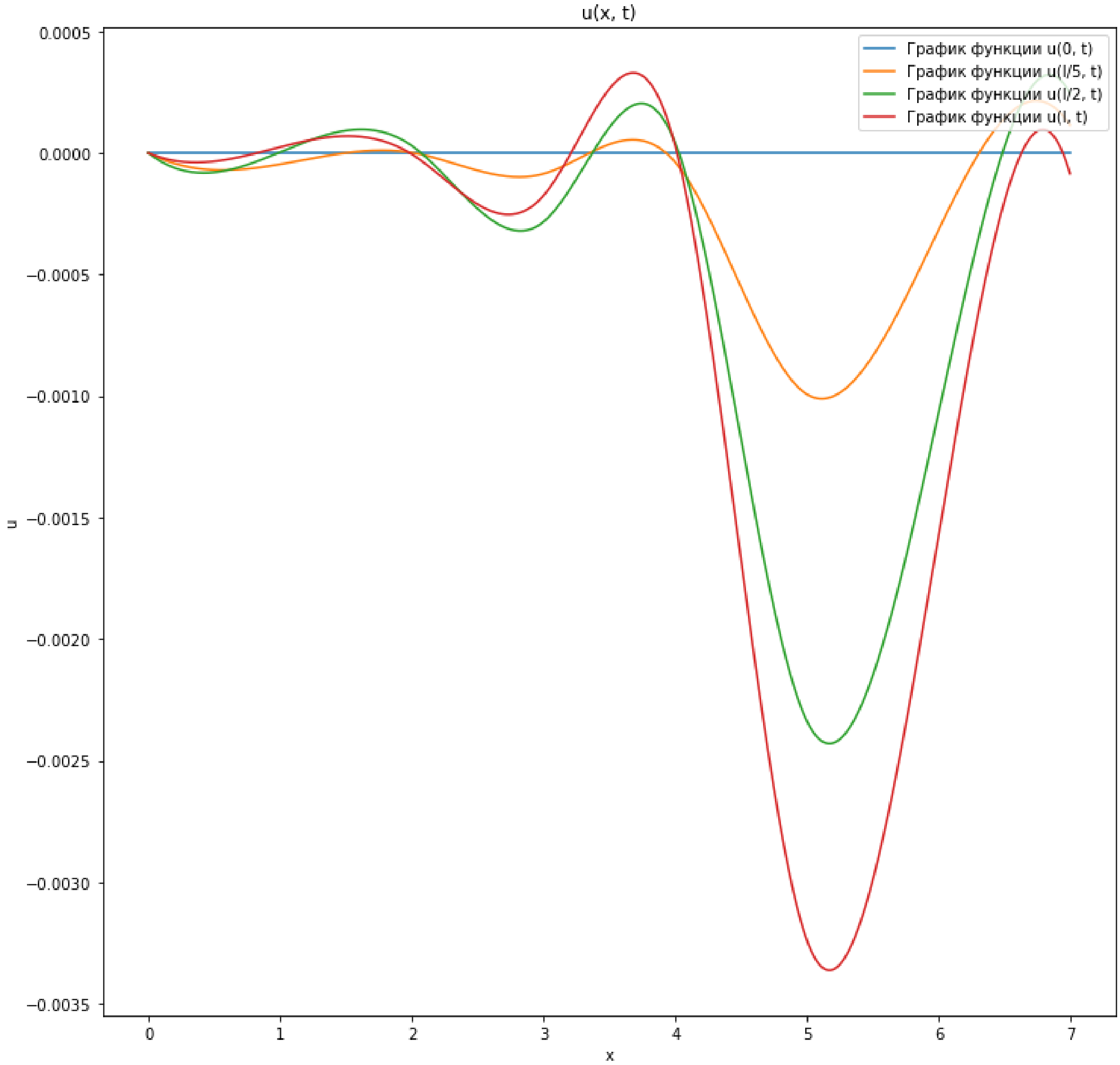
$$u_x(l,t) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cdot \left(\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot x) \right)' \Big|_l \Rightarrow \left(\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2 \cdot l} \cdot x) \right)' \Big|_l = 0 =$$

$$= -\frac{2 \cdot l}{\pi(2n-1)} \cdot \cos(\pi(k - \frac{1}{2})) = 0$$

Графики:



u(x, t)
График функции u(x, 0)
График функции u(x, 1)
График функции u(x, 2)
График функции u(x, 3)
График функции u(x, 4)
График функции u(x, 5)
График функции u(x, 6)
График функции u(x, 7)
0.0000
−0.0005
−0.0010
−0.0015
−0.0020
−0.0025
−0.0030
−0.0035
u
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x


u(x, t)
График функции u(0, t)
График функции u(l/5, t)
График функции u(l/2, t)
График функции u(l, t)
0.0005
0.0000
−0.0005
−0.0010
−0.0015
−0.0020
−0.0025
−0.0030
−0.0035
u
0
1
2
3
4
5
6
7
x

Задача №3

Постановка задачи:
Сформулировать и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда заданы граничные условия $u(x, l_2) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right)$, $u(l_1, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$, а на остальных границах – нулевые условия.

Решение:
Сформулируем задачу

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in [0; l_1]; \quad y \in [0; l_2] \\ u(x,0) = 0, & x \in (0; l_1); \quad y = 0; \\ u(x, l_2) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right) = f_1, & x \in (0; l_1); \quad y = l_2; \\ u(0, y) = 0, & y \in (0; l_2); \quad x = 0; \\ u(l_1, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right) = f_2, & y \in (0; l_2); \quad x = l_1. \end{cases} \tag{1}$$

Запишем условия нормировки:

1. $f_1(0) = 0, \quad f_1(0) = \sin(0) = 0;$

2. $f_1(l_1) = f_2(l_2), \quad f_1(l_1) = \sin(\pi) = f_2(l_2) = 0;$

3. $f_2(0) = 0, \quad f_2(0) = \sin(0) = 0.$

Будем решать исходное уравнение методом редукции и разделения переменных. Представим $u(x, y$ в виде:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

и запишем задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in [0; l_1]; \quad y \in [0; l_2] \\ u_1(x,0) = 0, & x \in (0; l_1); \quad y = 0; \\ u_1(x, l_2) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right) = f_1, & x \in (0; l_1); \quad y = l_2; \\ u_1(0, y) = 0, & y \in (0; l_2); \quad x = 0; \\ u_1(l_1, y) = 0, & y \in (0; l_2); \quad x = l_1. \end{cases} \tag{2}$$

$$
\begin{cases}
\Delta u_2 = 0, & x \in [0; l_1]; \quad y \in [0; l_2] \\
u_2(x, 0) = 0, & x \in (0; l_1); \quad y = 0; \\
u_2(x, l_2) = 0, & x \in (0; l_1); \quad y = l_2; \\
u_2(0, y) = 0, & y \in (0; l_2); \quad x = 0; \\
u_2(l_1, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right) = f_2, & y \in (0; l_2); \quad x = l_1.
\end{cases} \tag{3}
$$

Решим задачу (2) методом разделения переменных Фурье:

$$u_1(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$X'' \cdot Y + Y'' \cdot X = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda_2 \quad \Rightarrow \text{задача Штурма-Лиувилля.}$$

Решим задачу с однородными краевыми условиями относительно X:

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X(0) = X(l_1) = 0$$

$$X = A \cdot \sin(\lambda x) + B \cdot \cos(\lambda x)$$

Решим систему:

$$\begin{cases} A \cdot \sin(0) + B \cdot \cos(0) = 0 \\ A \cdot \sin(\lambda l_1) + B \cdot \cos(\lambda l_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A \cdot \sin(\lambda l_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin(\lambda l_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{\pi k}{l_1}}$$

Итак, имеем

$$\boxed{\mathrm{X}_k = A_k \cdot \sin(\tfrac{\pi k}{l_1} \cdot x), \quad k = 1, 2, \ldots}$$

Решим задачу относительно Y:

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

$$Y(0) = 0; \quad Y(l_2) = \sin(\frac{\pi x}{l_1})$$

$$Y = C_1 e^{y} + C_2 e^{-\lambda y}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0 \\ C_1 e^{\lambda l_2} + C_2 e^{-\lambda l_2} = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\lambda l_2} + C_2 e^{-\lambda l_2} = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 \cdot \left(e^{\lambda l_2} - e^{-\lambda l_2}\right) = f_1 \end{cases}$$

Итак, имеем

$$\boxed{\mathrm{Y}_k = C_k \cdot \left(e^{\frac{\pi k}{l_1} y} - e^{-\frac{\pi k}{l_1} y}\right) = f_1, \quad k = 1, 2, \dots}$$

Получаем

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot Y_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot C_k \left(\sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \cdot e^{\frac{\pi k}{l_1} y} - \sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \cdot e^{-\frac{\pi k}{l_1} y}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{u}_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(\tfrac{\pi k}{l_1} x) \left(e^{\frac{\pi k}{l_1} y} - e^{-\frac{\pi k}{l_1} y}\right)}$$

Запишем неоднородное краевое условие

$$u_1(x, l_2) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \left(e^{\frac{\pi k l_2}{l_1}} - e^{-\frac{\pi k l_2}{l_1}}\right) = f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^I \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1} x),$$

где

$$f_k^I = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} f_1(\xi) \sin(\frac{\pi k}{l_1} \xi) d\xi$$

$$B_k \left(e^{\frac{\pi k l_2}{l_1}} - e^{-\frac{\pi k l_2}{l_1}}\right) = f_k^I$$

$$\boxed{\mathrm{B}_k = \frac{f_k^I}{e^{\frac{\pi k l_2}{l_1}} - e^{-\frac{\pi k l_2}{l_1}}}}$$

Получаем

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^I}{e^{\frac{\pi k l_2}{l_1}} - e^{-\frac{\pi k l_2}{l_1}}} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \left(e^{\frac{\pi k}{l_1} y} - e^{-\frac{\pi k}{l_1} y}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^I \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{l_1} y} - e^{-\frac{\pi k}{l_1} y}}{e^{\frac{\pi k l_2}{l_1}} - e^{-\frac{\pi k l_2}{l_1}}} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^I \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \cdot \frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1} y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}$$

Итак, мы нашли решение задачи (2)

$$\boxed{\mathrm{u}_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^I \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1}x) \cdot \frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1}y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}}$$

Решим задачу (3) аналогично

$$u_2(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$
$$X''Y + Y''X = 0$$
$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

Решим задачу Штурма-Лиувилля относительно Y:

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0$$
$$Y(0) = Y(l_2) = 0$$

Аналогично предыдущей задаче получим следующее

$$\boxed{\lambda_k = \frac{\pi k}{l_2}}$$

$$\boxed{\mathrm{Y}_k = A_k \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} \cdot y), \quad k = 1, 2, \ldots}$$

Решим задачу относительно X:

$$X'' - \lambda X = 0$$
$$X(0) = 0; \quad X(l_1) = \sin(\frac{\pi y}{l_2})$$

Аналогично предыдущей задаче получим следующее

$$\boxed{\mathrm{X}_k = C_k \cdot \left(e^{\frac{\pi k}{l_2}x} - e^{-\frac{\pi k}{l_2}x}\right) = f_1, \quad k = 1, 2, \ldots}$$

Получаем

$$u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cdot X_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot C_k \left(\sin(\frac{\pi k}{l_2}y) \cdot e^{\frac{\pi k}{l_2}x} - \sin(\frac{\pi k}{l_2}y) \cdot e^{-\frac{\pi k}{l_2}x}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{u}_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2}y) \left(e^{\frac{\pi k}{l_2}x} - e^{-\frac{\pi k}{l_2}x}\right)}$$

Запишем неоднородное краевое условие

$$u_2(l_1, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y) \left(e^{\frac{\pi k l_1}{l_2}} - e^{-\frac{\pi k l_1}{l_2}} \right) = f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{II} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y),$$

где

$$f_k^{II} = \frac{2}{l_2} \int\limits_0^{l_2} f_2(\xi) \sin(\frac{\pi k}{l_2} \xi) d\xi$$

$$B_k \left(e^{\frac{\pi k l_1}{l_2}} - e^{-\frac{\pi k l_1}{l_2}} \right) = f_k^{II}$$

$$\boxed{\mathrm{B}_k = \frac{f_k^{II}}{e^{\frac{\pi k l_1}{l_2}} - e^{-\frac{\pi k l_1}{l_2}}}}$$

Получаем

$$u_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^{II}}{e^{\frac{\pi k l_1}{l_2}} - e^{-\frac{\pi k l_1}{l_2}}} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y) \left(e^{\frac{\pi k}{l_2} x} - e^{-\frac{\pi k}{l_2} x} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{II} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y) \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{l_2} x} - e^{-\frac{\pi k}{l_2} x}}{e^{\frac{\pi k l_1}{l_2}} - e^{-\frac{\pi k l_1}{l_2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{II} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y) \cdot \frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2} x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}$$

Итак, мы нашли решение задачи (3)

$$\boxed{\mathrm{u}_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{II} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y) \cdot \frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2} x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}}$$

Запишем решение задачи (1)

$$\boxed{\mathrm{u(x,\ y)} = \mathrm{u}_1(x, y) + u_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{I} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_1} x) \cdot \frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1} y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})} + f_k^{II} \cdot \sin(\frac{\pi k}{l_2} y) \cdot \frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2} x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}},$$

где

$$f_k^{I} = \frac{2}{l_1} \int\limits_0^{l_1} f_1(\xi) \sin(\frac{\pi k}{l_1} \xi) d\xi$$

$$f_k^{II} = \frac{2}{l_2} \int\limits_0^{l_2} f_2(\xi) \sin(\frac{\pi k}{l_2} \xi) d\xi$$

Проверка:

$$u_{xx}+u_{yy}=0=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-f_k^I\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1}y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}\cdot\left(\frac{l_1}{\pi k}\right)^2\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_1}x)+f_k^{II}\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2}x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_2}y)\cdot\left(\frac{l_2}{\pi k}\right)^2\right)+$$

$$+\left(f_k^I\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1}y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}\cdot\left(\frac{l_1}{\pi k}\right)^2\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_1}x)-f_k^{II}\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2}x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_2}y)\cdot\left(\frac{l_2}{\pi k}\right)^2\right)=0$$

$$u(x,0)=0=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^I\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_1}x)\cdot\frac{\mathrm{sh}(0)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}+f_k^{II}\cdot\sin(0)\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2}x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}=0$$

$$u(x,l_2)=f_1=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^I\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_1}x)\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}+f_k^{II}\cdot\sin(\frac{\pi k l_2}{l_2})\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_2}x)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^I\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_1}x)+0=$$

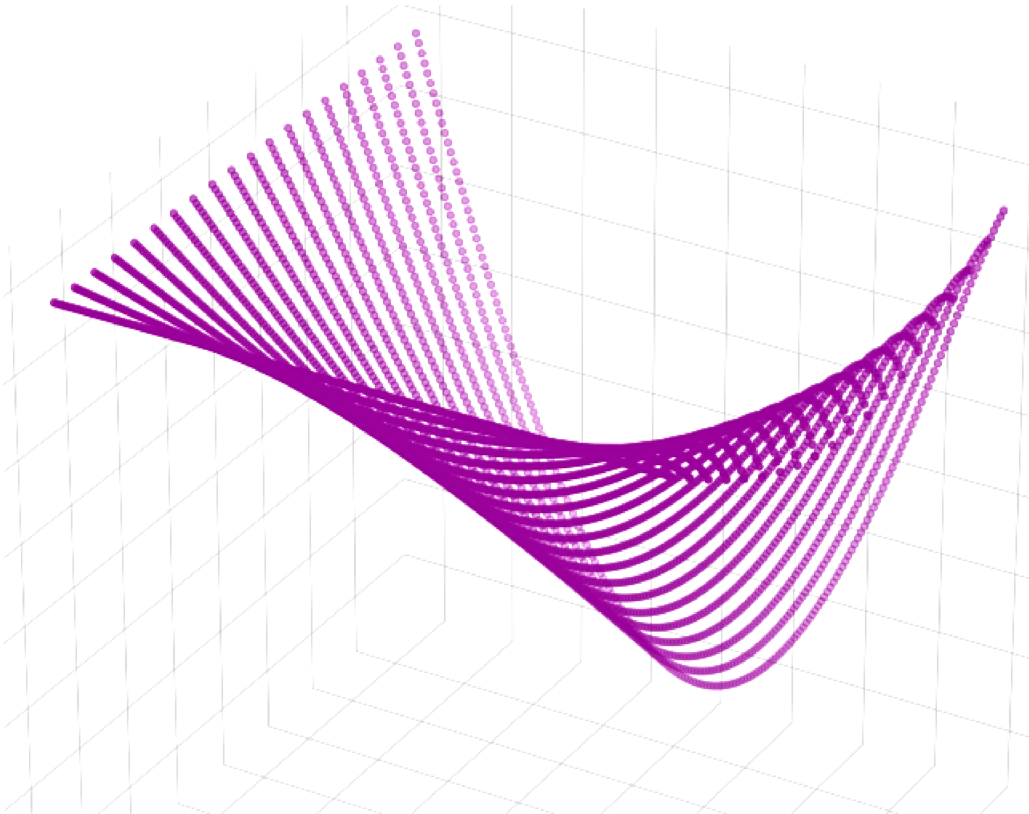
$$=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^I\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_1}x)=u_1(x,l_2)=f_1$$

$$u(0,y)=0=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^I\cdot\sin(0)\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1}y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}+f_k^{II}\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_2}y)\cdot\frac{\mathrm{sh}(0)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}=0$$

$$u(l_1,y)=f_2=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^I\cdot\sin(\frac{\pi k l_1}{l_1})\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k}{l_1}y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_2}{l_1})}+f_k^{II}\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_2}y)\cdot\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}{\mathrm{sh}(\frac{\pi k l_1}{l_2})}=\sum_{k=1}^{\infty}0+f_k^{II}\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_2}y)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{II}\cdot\sin(\frac{\pi k}{l_2}y)=u_2(l_1,y)=f_2$$

График:



Список литературы

[1] Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Изд. 5, стереотипное.* — М.: «Наука», 1977.

[2] Будак Б. М, Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Сборник задач по математической физике.* — М.: «Наука», 1980.

[3] Боголюбов А. Н, Кравцов В. В. *Задачи по математической физике* — М.: «Издательство Московского университета», 1998.

[4] Араманович И. Г, Левин В. И. *Уравнения математической физики* — М.: «Наука», 1969.