Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Лабораторная работа №3
Задание №5 по курсу «Численные методы»
Вариант №12

Студент:	С. М. Власова
Преподаватель:	И. Э. Иванов
Группа:	М8О-306Б
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2020

Задание №3.5

Вычислить определенный интеграл $F = \int\limits_{x_0}^{x_1} y dx$, методами прямоугольников, трапеций, Симпсона с шагами h_1 и h_2. Оценить погрешность вычислений, используя Метод Рунге-Ромберга.

Вариант: 12

$$y = \frac{x}{x^3 + 8}, \qquad X_0 = -1, X_k = 1, \quad h_1 = 0.5, \quad h_2 = 0.25.$$

1 Описание метода решения

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формулы численного интегрирования используются в тех случаях, когда вычислить аналитически определенный интеграл $F = \int\limits_a^b f(x)dx$ не удается. Отрезок $[a, b]$ разбивают точками $x_0 \dots x_N$ так, что $a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_N = b$ с достаточно мелким шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$ и на одном или нескольких отрезках h_i подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют такой приближающей $\varphi(x)$, что она, во-первых, близка $f(x)$, а, во-вторых, интеграл от $\varphi(x)$ легко вычисляется. Рассмотрим наиболее простой и часто применяемый способ, когда подынтегральную функцию заменяют на интерполяционный многочлен $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, причем коэффициенты многочлена a_j, вообще говоря, различны на каждом отрезке $[x_i, x_{i+k}]$ и определяются из условия $\varphi(x_j) = f(x_j),\ \ j = i, \dots, i+k$, т.е. многочлен P_n зависит от параметров $a_j - P_n(x, \overline{a}_i)$, тогда

$$f(x) = P_n(x, \overline{a}_i) + R_n(x, \overline{a}_i), \quad x \in [x_i, x_{i+k}],$$

где $R_n(x, \overline{a}_i)$ — остаточный член интерполяции. Тогда

$$F = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} P_n(x, \overline{a}_i)dx + R,$$

где

$$R = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} R_n(x, \overline{a}_i)dx$$

— остаточный член формулы численного интегрирования или ее погрешность.

При использовании интерполяционных многочленов различной степени получают формулы численного интегрирования различного порядка точности.

Заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Лагранжа нулевой степени, проходящим через середину отрезка — точку $\overline{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, получим *формулу прямоугольников*.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} h_i f(\frac{x_{i-1} + x_i}{2})$$

В случае постоянного шага интегрирования $h_i = h, \ \ i = 1, 2, \dots, N$ и существования $f''(x), \ \ x \in [a, b]$, имеет место оценка остаточного члена формулы прямоугольников

$$R \le \frac{1}{24} h^2 M_2 (b - a),$$

где $M_2 = \max|f''(x)|_{[a,b]}$. В случае таблично заданных функций удобно в качестве узлов интерполяции выбрать начало и конец отрезка интегрирования, т.е. заменить функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа первой степени.

$$F = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(f_i + f_{i-1})h_i$$

это формула носит название *формулы трапеций.*
В случае постоянного шага интегрирования величина остаточного члена оценивается

$$R \leq \frac{b-a}{12}h^2 M_2,$$

где $M_2 = \max|f''(x)|_{[a,b]}$.

Для повышения порядка точности формулы численного интегрирования заменим подынтегральную кривую параболой — интерполяционным многочленом второй степени, выбрав в качестве узлов интерполяции концы и середину отрезка интегрирования: $x_{i-1}, \quad x_{i-\frac{1}{2}} = (x_{i-1} + x_i)/2, \quad x_i$.

Для случая $h_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$, получим *формулу Симпсона (парабол)*

$$F = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i)h_i$$

В случае постоянного шага интегрирования $h_i = h, \quad i = 1, 2, \ldots, N$, формула Симпсона принимает вид

$$F \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + 2f_1 + 4f_{\frac{3}{2}} + 2f_2 + \ldots + 2f_{N-1} + 4f_{N-\frac{1}{2}} + f_N\right],$$

при этом количество интервалов, на которое делится отрезок интегрирования, равно $2N$. В том случае если существует$f^{IV}(x), \quad x \in [a, b]$, для оценки величины погрешности справедлива мажорантная оценка

$$R \leq \frac{(b-a)}{180}h^4 M_4,$$

где $M_4 = \max|f^{IV}(x)|_{[a,b]}$.

Метод Рунге-Ромберга-Ричардсона позволяет получать более высокий порядок точности вычисления. Если имеются результаты вычисления определенного интеграла на сетке с шагом $h - F = F_h + O(n^p)$ и на сетке с шагом $kh - F = F_{kh} + O((kh)^p)$, то

$$F = \int\limits_a^b f(x)dx = F_h + \frac{F_h - F_{kh}}{k^p - 1} + O(h^{p+1}).$$

2 Протокол

Входные данные я храню в файле *test3.5.t*: две точки — верхний и нижний пределы интегрирования и значения шагов h_1 и h_2.
Выходные данные я вывожу на экран.
Скриншот консоли:

```
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$ g++ 3.5.cpp -o 3.5
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$ cat test3.5.t
-1 1 0.5 0.25
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$ ./3.5 < test3.5.t
Определенный интеграл методом прямоугольников с шагом h = 0.5 : -0.00501867
Определенный интеграл методом трапеций с шагом h = 0.5 : -0.00891331
Определенный интеграл методом Симпсона с шагом h = 0.5 : -0.00659341
Определенный интеграл методом прямоугольников с шагом h = 0.25 : -0.0059615
Определенный интеграл методом трапеций с шагом h = 0.25 : -0.00696599
Определенный интеграл методом Симпсона с шагом h = 0.25 : -0.00631688
Уточненные значение методом Рунге-Ромберга-Ричардсона: -0.00627577; -0.00631688; -0.00629845
Точное значение интеграла: -0.00629484
Абсолютная погрешность метода прямоугольников: 1.90691e-05
Абсолютная погрешность метода трапеций: 2.20396e-05
Абсолютная погрешность метода Симпсона: 3.60468e-06
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$
```

I. h = 0.5

(a) Метод прямоугольников $\int\limits_{-1}^{1} y dx = -0.00501867$

(b) Метод трапеций $\int\limits_{-1}^{1} y dx = -0.00891331$

(c) Метод Симпсона $\int\limits_{-1}^{1} y dx = -0.00659341$

II. h = 0.25

(a) Метод прямоугольников $\int\limits_{-1}^{1} y dx = -0.0059615$

(b) Метод трапеций $\int\limits_{-1}^{1} y dx = -0.00696599$

(c) Метод Симпсона $\int\limits_{-1}^{1} y dx = -0.00631688$

Уточненные значения методом Рунге-Ромберга-Ричардсона:

1. Метод прямоугольников $\int\limits_{-1}^{1} ydx = -0.00627577$
2. Метод трапеций $\int\limits_{-1}^{1} ydx = -0.00631688$
3. Метод Симпсона $\int\limits_{-1}^{1} ydx = -0.00629845$

Абсолютные погрешности:

1. Метод прямоугольников $\Delta = 1.90691e - 05$
2. Метод трапеций $\Delta = 2.20396e - 05$
3. Метод Симпсона $\Delta = 3.60468e - 06$

Лучший результат показал метод Симпсона (метод парабол), однако, все формулы вычислили достаточно точное значение интеграла.

3 Исходный код

Листинг 1: Численное интегрирование

```
#include <vector>
#include <math.h>
#include <iostream>

double YValue(double x)
{
    double value = x/(pow(x, 3) + 8);
    return value;
}

void Methods(std::vector<double>& RectMethod, std::vector<double>& TrapezMethod, std::
    vector<double>& Simpson, double x0, double xk, double h, int index)
{
    double y_val;
    int kaf = 4;
    for(double i = x0; i <= xk; i += h)
    {
        if(i != xk)
            RectMethod[index] += YValue((2*i + h)/2);
        y_val = YValue(i);
        if(i == x0 || i == xk)
        {
            TrapezMethod[index] += y_val/2;
            Simpson[index] += y_val;
        }
        else
        {
            TrapezMethod[index] += y_val;
            Simpson[index] += y_val*kaf;
            kaf = (kaf == 4) ? 2 : 4;
        }
    }
    RectMethod[index] *= h;
    TrapezMethod[index] *= h;
    Simpson[index] *= h/3;
}

int main()
{
```

```cpp
    double x0, xk, h1, h2;
    double ExR, ExT, ExS;
    double ex_val = -0.006294843240543572;
    std::vector<double> RectMethod(2, 0);
    std::vector<double> TrapezMethod(2, 0);
    std::vector<double> Simpson(2, 0);

    std::cin >> x0 >> xk;
    std::cin >> h1 >> h2;

    Methods(RectMethod, TrapezMethod, Simpson, x0, xk, h1, 0);
    Methods(RectMethod, TrapezMethod, Simpson, x0, xk, h2, 1);

    std::cout << "Defined integral by the method of rectangle with a step h = " << h1 << " : " << RectMethod[0] << std::endl;
    std::cout << "Defined integral by the method of trapeze with a step h = " << h1 << " : " << TrapezMethod[0] << std::endl;
    std::cout << "Defined integral by the Simpson's method with a step h = " << h1 << " : " << Simpson[0] << std::endl;

    std::cout << "Defined integral by the method of rectangles with a step h = " << h2 << " : " << RectMethod[1] << std::endl;
    std::cout << "Defined integral by the method of trapeze with a step h = " << h2 << " : " << TrapezMethod[1] << std::endl;
    std::cout << "Defined integral by the Simpson's method with a step h = " << h2 << " : " << Simpson[1] << std::endl;

    ExR = RectMethod[0] + (RectMethod[0] - RectMethod[1])/(pow(h2/h1, 2) - 1);
    ExT = TrapezMethod[0] + (TrapezMethod[0] - TrapezMethod[1])/(pow(h2/h1, 2) - 1);
    ExS = Simpson[0] + (Simpson[0] - Simpson[1])/(pow(h2/h1, 4) - 1);

    std::cout << "Refined values by the Runge-Romberg-Richardson method: " << ExR << "; " << ExT << "; " << ExS << std::endl;
    std::cout << "Exact value of the integral: " << ex_val << std::endl;
    std::cout << "Absolute error of the rectangle method: " << fabs(ex_val - ExR) << std::endl;
    std::cout << "Absolute error of the trapeze method: " << fabs(ex_val - ExT) << std::endl;
    std::cout << "Absolute error of the Simpson's method: " << fabs(ex_val - ExS) << std::endl;

    return 0;
}
```

4 Выводы

Выполнив пятое задание третьей лабораторной работы, я изучила три метода численного интегрирования заданной таблично функции — метод прямоугольников, метод трапеции и метод Симпсона. Все эти методы базируются на том, что отрезок интегрирования разбивают на точки, и на одном или нескольких таких мини-отрезках подынтегральная функция заменяется приближающей функцией — интерполяционным многочленом. Формула прямоугольников получается, если заменить подынтегральную функцию многочленом Лагранжа нулевой степени, формула трапеции — если заменить ее многочленом Лагранжа первой степени. Для повышения порядка точности формулы численного интегрирования можно заменить подынтегральную кривую параболой — интерполяционным многочленом второй степени. В таком случае получается формула Симпсона. Так же с помощью метода Рунге-Ромберга-Ричардсона можно повысить порядок точности вычисления, если имеются результаты вычисления определенного интеграла на сетке с двумя разными шагами.