Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Лабораторная работа №3
Задание №4 по курсу «Численные методы»
Вариант №12

Студент:	С. М. Власова
Преподаватель:	И. Э. Иванов
Группа:	М8О-306Б
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2020

Задание №3.4

Вычислить первую и вторую производную от таблично заданной функции $y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$ в точке $X^\star$.
Вариант: 12

$X^\star = 0.2$.

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.4	0.2	0.6	1.0
y_i	-1.4142	-0.55838	0.27870	0.84008	1.4142

1 Описание метода решения

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Формулы численного дифференцирования в основном используются при нахождении производных от функции $y = f(x)$, заданной таблично. Исходная функция $y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, M$ на отрезках $[x_j, x_{j+k}]$ заменяется некоторой приближающей, легко вычисляемой функцией $\varphi(x, \overline{a}), \quad y = \varphi(x, \overline{a}) + R(x)$, где $R(x)$ — остаточный член приближения, $\overline{a}$ — набор коэффициентов, вообще говоря, различный для каждого из рассматриваемых отрезков, и полагают, что $y'(x) \approx \varphi'(x, \overline{a})$. Наиболее часто в качестве приближающей функции $\varphi(x, \overline{a})$ берется интерполяционный многочлен $\varphi(x, \overline{a}) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, а производные соответствующих порядков определяются дифференцированием многочлена.

При решении практических задач, как правило, используются аппроксимации первых и вторых производных.

В первом приближении, таблично заданная функция может быть аппроксимирована отрезками прямой $y(x) \approx \varphi(x) = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$. В этом случае:

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = const, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

производная является кусочно-постоянной функцией и рассчитывается, по формуле выше с первым порядком точности в крайних точках интервала, и со вторым порядком точности в средней точке интервала.

При использовании для аппроксимации таблично заданной функции интерполяционного многочлена второй степени имеем:

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + \frac{\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}}{x_{i+2} - x_i}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}}{x_{i+2} - x_i}(2x - x_i - x_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

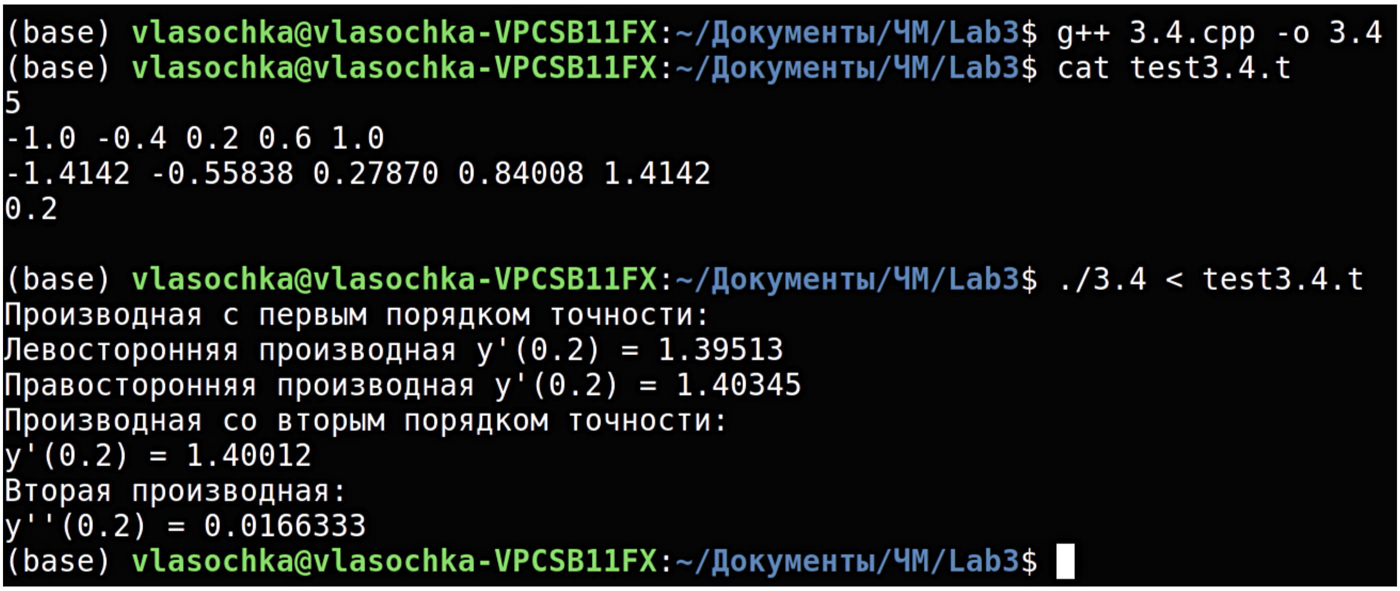
При равностоящих точках разбиения данная формула обеспечивает второй порядок точности.

Для вычисления второй производной необходимо использовать интерполяционный многочлен, как минимум второй степени. После дифференцирования многочлена получаем

$$y''(x) \approx \varphi''(x) = 2\frac{\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}}{x_{i+2} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

2 Протокол

Входные данные я храню в файле *test3.4.t*: первая строка — число интерполяционных узлов, вторая строка — их значения, третья строка — значения функции в этих узлах, четвертая строка — точка, в которой необходимо вычислить первую и вторую производные.
Выходные данные я вывожу на экран.
Скриншот консоли:



```
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$ g++ 3.4.cpp -o 3.4
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$ cat test3.4.t
5
-1.0 -0.4 0.2 0.6 1.0
-1.4142 -0.55838 0.27870 0.84008 1.4142
0.2

(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$ ./3.4 < test3.4.t
Производная с первым порядком точности:
Левосторонняя производная y'(0.2) = 1.39513
Правосторонняя производная y'(0.2) = 1.40345
Производная со вторым порядком точности:
y'(0.2) = 1.40012
Вторая производная:
y''(0.2) = 0.0166333
(base) vlasochka@vlasochka-VPCSB11FX:~/Документы/ЧМ/Lab3$
```

Производная с первым порядком точности:

* левосторонняя производная $y'(X^\star) = y'(0.2) = 1.39513$
* правосторонняя производная $y'(X^\star) = y'(0.2) = 1.40345$

Производная со вторым порядком точности:

$$y'(X^\star) = y'(0.2) = 1.40012$$

Вторая производная:

$$y''(X^\star) = y''(0.2) = 0.0166333$$

3 Исходный код

Листинг 1: Численное дифференцирование

```
#include <vector>
#include <math.h>
#include <iostream>

int main()
{
    int n;
    double x_star = 0;
    double y_der, y_doub_der = 0;

    std::cin >> n;
    std::vector<double> x(n);
    std::vector<double> y(n);

    for(int i = 0; i < n; i++)
    {
        std::cin >> x[i];
    }

    for(int i = 0; i < n; i++)
    {
        std::cin >> y[i];
    }
    std::cin >> x_star;
    std::cout << "Derivative with the 1st order of accuracy:" << std::endl;
    for(int i = 0; i < n-1; i++)
    {
        if(x_star >= x[i] && x_star <= x[i+1])
        {
            y_der = (y[i+1]-y[i])/(x[i+1]-x[i]);
            y_doub_der = 2*( (y[i+2]-y[i+1])/(x[i+2]-x[i+1]) - y_der )/(x[i+2] - x[i]);
            if(x_star != x[i + 1])
                std::cout << "y'(" << x_star << ") = " << y_der << std::endl;
            else
            {
                std::cout << "Left-hand derivative y'(" << x_star << ") = " << y_der << std::endl;
                std::cout << "Right-hand derivative y'(" << x_star << ") = " << (y[i+2]-y[i+1])/(x[i+2]-x[i+1]) << std::endl;
```

```
            }
            std::cout << "Derivative with the 2nd order of accuracy:" << std::endl;
            std::cout << "y'(" << x_star << ") = " << y_der + 0.5*y_doub_der*(2*x_star - x[i] - x[i+1]) << std::endl;
            std::cout << "2nd derivative:" << std::endl;
            std::cout << "y''(" << x_star << ") = " << y_doub_der << std::endl;
            break;
        }
    }
    return 0;
}
```

4 Выводы

Выполнив четвертое задание третьей лабораторной работы, я изучила численное дифференцирование таблично заданных функций. Исходная функция заменяется приближающей функцией, которая чаще всего представляется в виде интерполяционного многочлена $n-$й степени. При решении практических задач, как правило, используются аппроксимации первых и вторых производных. Производная является кусочно-постоянной функцией и рассчитывается с первым порядком точности в крайних точках интервала и со вторым порядком точности в средней точке интервала.