Раздел 1. Основы образования чертежа

Лекция №1. Проецирование простых геометрических объектов

1.1. Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика: роль предмета в инженерной деятельности

Одним из распространенных методов познания природы, законов ее развития, исследования явлений и процессов, происходящих в природе, а также выявления их главных свойств является моделирование, в котором человек создает физическую или абстрактную (математическую) модель процесса или объекта. Физические модели сохраняют природу изучаемого объекта, повторяя его в малых масштабах, а математические модели представляются различного рода уравнениями, которые описывают основные свойства изучаемых процессов.

В инженерной практике мы постоянно встречаемся с геометрическими моделями в виде чертежей, которые и являются средством общения людей в их производственной деятельности.

Математическая наука, занимающаяся изучением графических методов отображения пространства, разработкой научных основ построения и исследования геометрических моделей, проецируемых геометрических объектов (точек, линий, поверхностей) и их отображения на плоскости, называется НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ.

Наряду с этим начертательная геометрия развивает пространственное воображение, что позволяет решать графические задачи из других областей знаний.

Основы НГ были обобщены *Гаспаром Монжем* (1746-1818) — выдающимся французским математиком и инженером, — издавшем в 1799 году книгу под названием «Geometrie descriptive» (начертательная геометрия), базовые понятия которой не претерпели изменений до наших дней.

Название этой дисциплины Г. Монж определил следующим образом:

«Начертательная геометрия преследует две цели. Первая заключается в том, чтобы на чертеже, имеющем лишь два измерения, с точностью изобразить тела трех измерений, лишь бы они были вполне определенными. С этой точки зрения эта геометрия должна быть языком, необходимым как для инженера, составляющего проекты, так и для того, кто по этим проектам должен выполнять работу.

Вторая цель этой науки заключается в способах выводить на основании точного описания тел все свойства, относящиеся к их форме, к их относительному расположению. В этом смысле она является средством изыскания истины и представляет примеры перехода от известного к неизвестному, будучи всегда прилагаема к предметам, подлежащим наибольшей очевидности».

Если, используя высказывание Г. Монжа, считать «чертеж языком техники», то «начертательная геометрия является грамматикой этого языка». Так продолжил мысль Г. Монжа замечательный русский геометр *В.И. Курдюмов* (1853-1904), развивший в своих трудах ряд положений НГ.

Таким образом, современный инженер должен одинаково свободно владеть как самим языком технического общения (ИНЖЕНЕРНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКОЙ), так и основными правилами, методами и способами построения графических изображений (НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ).

1.2. Методы проецирования

Правила построения изображений, излагаемые в курсе начертательной геометрии, основаны на методе проекций. Рассмотрение метода проекций начинают с построения проекции точки, на примере которого рассматривают все базовые понятия и правила проецирования.

Это не сужает круг решаемых задач в начертательной геометрии, т.к. все линии и поверхности можно представить как совокупность точек.

Центральное проецирование

Наиболее общим методом проецирования является центральное проецирование (рис.1.1, а).

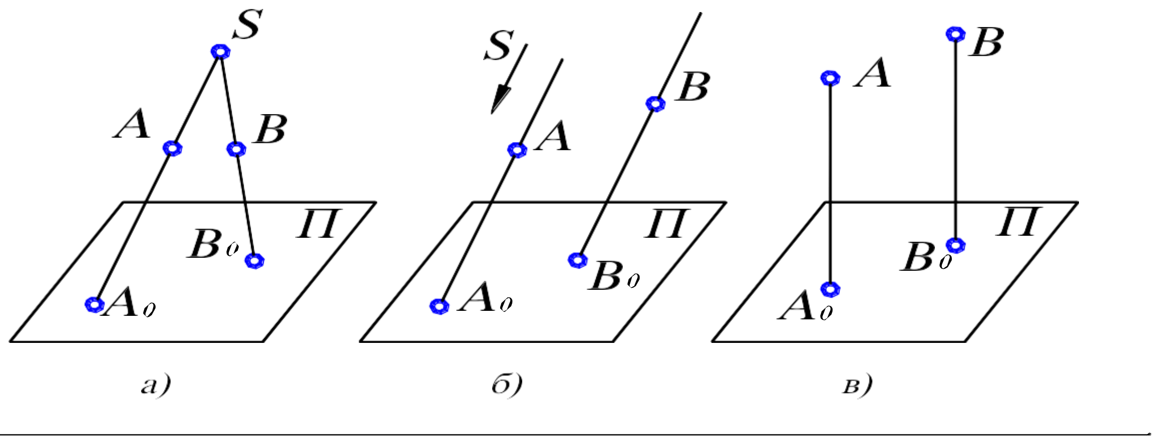

Рис. 1.1. Методы проецирования: а) центральное; б) параллельное; в) ортогональное.

Сущность центрального проецирования заключается в следующем: пусть даны плоскость $П$ и точка S ($S \notin П$). Возьмем произвольную точку A ($A \notin П, A \notin S$). Через заданную точку S и точку A проводим прямую SA и отмечаем точку A_0, в которой эта прямая пересекает плоскость $П$. Плоскость $П$ называют плоскостью проекций, точку S центром проецирования, полученную точку A_0 – центральной проекцией точки A на плоскость $П$, прямую SA – проецирующей прямой. Аналогично можно получить проекцию любой другой точки, например точки B, на том же чертеже. Характерной особенностью получаемых проекций является то, что размеры геометрических объектов будут искаженными. Так, на указанном чертеже видно, что если соединить точки A и B прямой, то ее проекция A_0B_0 значительно больше в размерах, чем прямая AB.

Наглядным примером центрального проецирования на практике может служить тень на некоторой поверхности (в частности, плоскости) какого-либо предмета, освещенного лампочкой (т.е. точечным источником света).

Параллельное проецирование

Частным случаем центрального проецирования является параллельное (рис. 1.1, б), когда центр проецирования находится в бесконечности. Тогда проецирующие лучи параллельны друг другу. Поскольку в природе трудно представить наглядно такой центр, то образным примером может служить тень, отбрасывыаемая каким-либо предметом, освещенным солнцем. В этом случае солнечные лучи можно считать параллельными друг другу.

Ортогональное проецирование

Еще более частный случай, при котором проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций (рис. 1.1, в), называется ортогональным проецированием.

В дальнейшем будем рассматривать лишь ортогональное проецирование, т.к. построение плоских изображений основано на этом методе.

Из принципов построения ортогональных проекций вытекают основные свойства ортогонального проецирования, которые здесь приведем без доказательства.

Свойства ортогонального проецирования:

- Проекция точки – точка.
- Проекция прямой – прямая.
- Проецирующий луч проецируется в точку.
- Точка принадлежит прямой линии, если одноименные проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой линии.
- Прямые в пространстве параллельны, если их одноименные проекции параллельны.
- Прямой угол проецируется в прямой, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна к ней (***Теорема о прямом угле***).
- Прямая линия параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, принадлежащей заданной плоскости.
- Проекция плоской фигуры – плоская фигура.
- Решение задач начертательной геометрии и все дальнейшие построения основываются именно на этих свойствах.

1.3. Комплексный чертеж Монжа

Проекция геометрического объекта на одну плоскость, рассмотренная нами ранее, не дает полного и однозначного представления о форме геометрического объекта. Поэтому рассмотрим проецирование хотя бы на две взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.2), одна из которых расположена горизонтально, а другая вертикально.

Несмотря на наглядность, с чертежом, изображенным на рис 1.2, а работать неудобно, т.к. горизонтальная плоскость на нем показана с искажением. Удобнее выполнять различные построения на чертеже, гдеплоскости проекций расположены в одной плоскости, а именно, плоскости чертежа. Для этого надо горизонтальную плоскость развернуть вокруг оси OX на 90° и совместить с фронтальной так, чтобы передняя пола горизонтальной плоскости ушла вниз, а задняя вверх. Этот метод предложил Г. Монж.

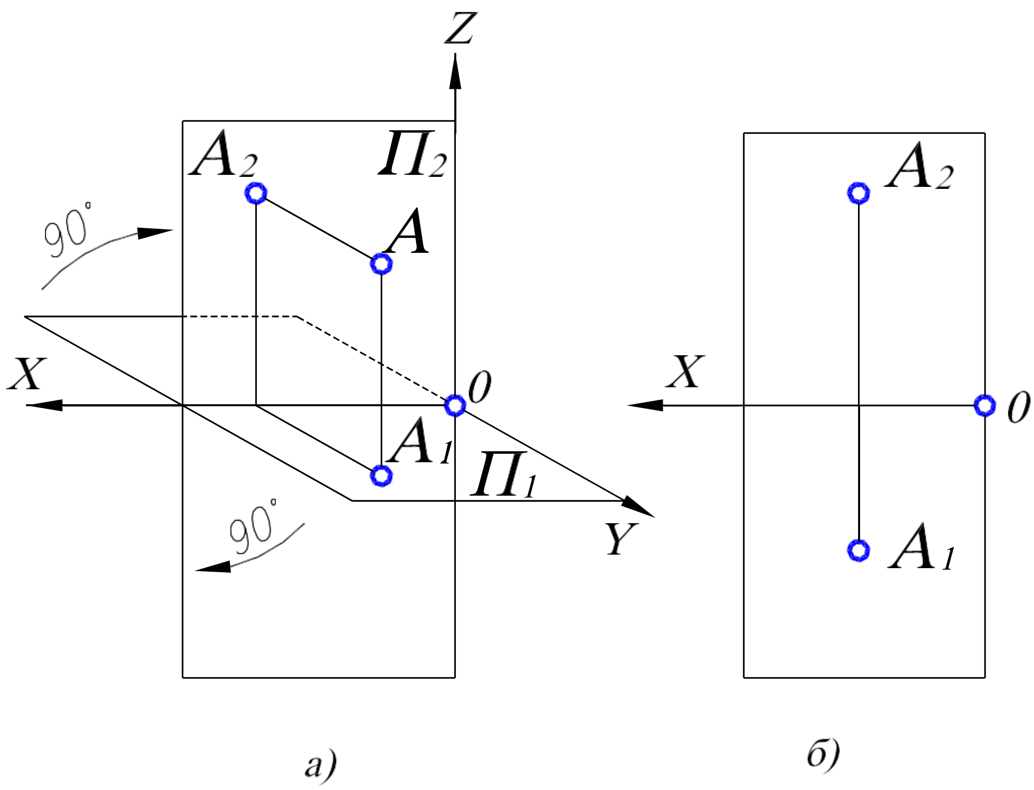

Рис. 1.2. Построение эпюра Монжа:

а) пространственная картина расположения проекций точки А; б) плоскостная картина расположения проекций точки А.

Поэтому чертеж, полученный таким образом (рис. 1.2, б), называется эпюром Монжа или комплексным чертежом.

Обычно двух проекций недостаточно, чтобы составить полное представление о рассматриваемом геометрическом объекте. Поэтому предлагается ввести третью плоскость проекций, ортогональную первым двум (рис.1. 3, а).

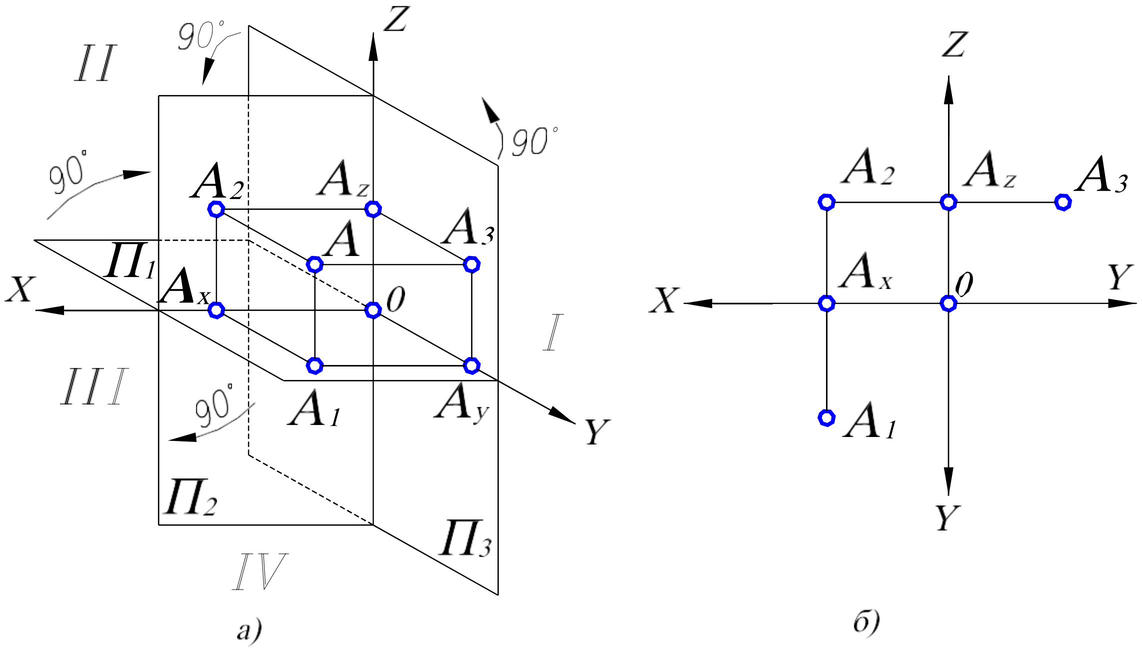

Рис. 1.3. Построение трехкартинного комплексного чертежа (эпюра Монжа):
а) пространственная модель плоскостей проекций; б) трехкартинный комплексный чертеж.

Тогда плоскость $П_1$ называется горизонтальной плоскостью проекций, $П_2$ — фронтальной плоскостью проекций (т.к. она расположена перед нами по фронту), $П_3$ — профильной плоскостью проекций (расположена в профиль по отношению к наблюдателю). Соответственно A_1 — горизонтальная проекция точки A, A_2 — фронтальная проекция точки A, A_3 — профильная проекция точки A.

Оси *OX, OY, OZ* называются осями проекций. Они аналогичны координатным осям декартовой системы координат с той лишь разницей, что ось *OX* имеет положительное направление не вправо, а влево. Теперь, чтобы получить проекции в одной плоскости (плоскости чертежа) необходимо и профильную плоскость проекций развернуть до совмещения с фронтальной. Для этого ее нужно развернуть на 90° вокруг оси *OZ*, причем переднюю полу плоскости развернем вправо, а заднюю влево. В результате получим трехкартинный комплексный чертеж (эпюр Монжа), показанный на рис. 1.3, б.

Так как ось OY разворачивается вместе с двумя плоскостями Π_1 и Π_3 , то на комплексном чертеже ее изображают дважды.

Из этого следует важное правило взаимосвязи проекций. А именно, исходя из рис. 1.3, а, в математической форме его можно записать в виде: $A_1A_x = OA_y = A_zA_3$. Следовательно, в текстологическом виде оно звучит так: расстояние от горизонтальной проекции точки до оси OX равно расстоянию от профильной проекции указанной точки до оси OZ. Тогда по двум любым проекциям точки можно построить третью. Горизонтальную и фронтальную проекции точки A связывает вертикальная линия связи, а фронтальную и профильную проекции – горизонтальная.

В связи с тем, что комплексный чертеж представляет собой свернутую в плоскости модель пространства, на нем нельзя изобразить проецируемую точку (за исключением случаев, когда ее положение совпадает с одной из проекций). Исходя из этого, следует иметь в виду, что на комплексном чертеже мы оперируем не самими геометрическими объектами, а их проекциями.

1.4. Графическое отображение точки на комплексном чертеже

В общем случае плоскости проекций разделяют все пространство на 8 частей, которые называют октантами. В практике изображения геометрических объектов на чертежах из соображения удобства и наибольшей наглядности проецируемый объект располагают в I октанте. Поэтому в нашем курсе начертательной геометрии мы ограничимся рассмотрением геометрических объектов, расположенных только в этом октанте.

В том случае, когда точка занимает частное положение в пространстве, ее проекции расположены особенным образом. Частным положением точки считаем такое, при котором она находится либо на оси проекций, либо в плоскости проекций. Так, если точка расположена на оси проекций, тогда две ее проекции лежат на этой оси, а третья в начале координат. Если точка расположена на плоскости проекций, тогда одна из ее проекций лежит в этойже плоскости, а две другие – на осях проекций.

Для точек, занимающих частное положение в пространстве, построения следует начинать с проекций, принадлежащих либо оси, либо плоскости проекций.

Для построения чертежей реальных деталей, имеющих конкретные геометрические размеры и привязанных к определенным координатам, необходимо установить взаимосвязь между проекциями точки и ее координатами.

Построение проекций точки по ее координатам

Пусть заданы координаты какой-либо точки A (x, y, z). Тогда ее проекции строят следующим образом: сначала откладывают абсциссу по оси OX; затем проводят вертикальную линию; далее на ней откладывают ординату по оси OY и аппликату по оси OZ (вверх, либо вниз от оси OX в зависимости от знака координат y, z). По оси OY получают горизонтальную проекцию A_1, по оси OZ — фронтальную A_2. Профильную проекцию A_3 строят по A_1 и A_2 (либо по координатам). Например, построим проекции точки A (10, 20, 30), заданной конкретными координатами. Построения показаны на рис. 1.4.

Необходимо помнить, что положение горизонтальной проекции определяется координатами x и y, фронтальной проекции — координатами x и z, профильной проекции — координатами y и z. Ордината y всегда характеризует положение горизонтальной проекции, а аппликата – фронтальной.

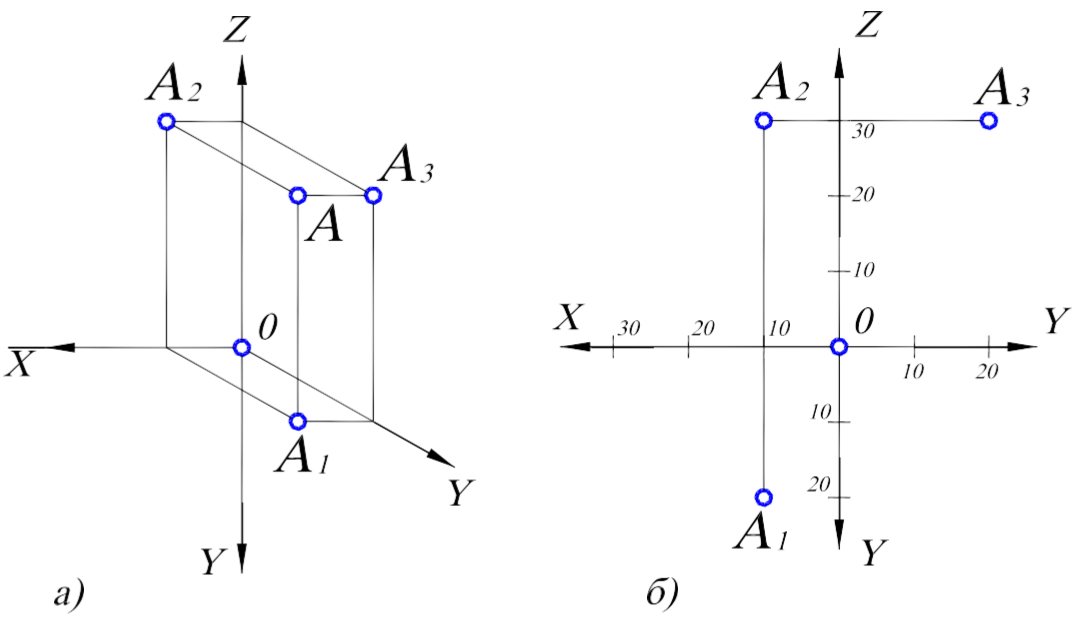

Рис. 1.4. Взаимосвязь координат точки и ее проекций:

а) вид в аксонометрии; б) комплексный чертеж.

Исходя из тех же положений, решается обратная задача – определение координат точки по ее проекциям. Если на комплексном чертеже изображены проекции точки, тогда, измерив соответствующие расстояния, определяем ее координаты (см. рис. 1.4, б). Причем для определения всех трех координат достаточно двух проекций, т.к. любая пара проекций однозначно задается тремя координатами.

Удаленность точки от плоскостей проекций

Расстояние точки от какой-либо плоскости проекций определяет положение соответствующих проекций, а именно: расстояние до $П_1$ характеризует положение фронтальной проекции, расстояние до $П_2$ – горизонтальной проекции, расстояние до $П_3$ – и горизонтальной и фронтальной проекций. Так, если известно, что точка A удалена от $П_1$ на 30 мм, тогда ее фронтальная проекция A_2 удалена от оси OX на 30 мм; если задано, что точка A

удалена от $П_3$ на 10 мм, тогда A_1 и A_2 удалены от осей OZ и OY соответственно на это расстояние (рис. 1.5).

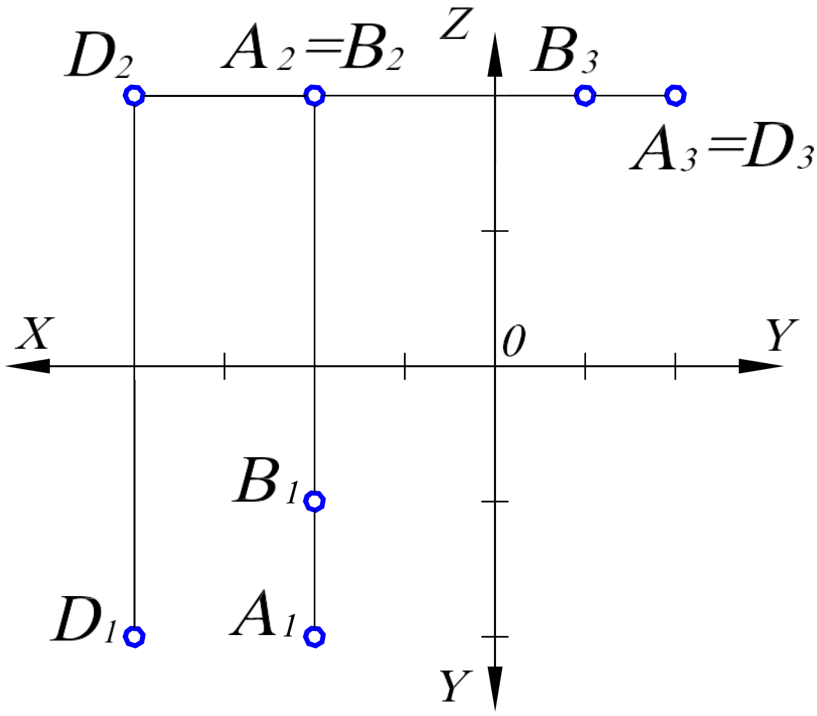

Рис. 1.5. Построение точек, удаленных от плоскостей проекций на заданное расстояние

Если сказано, что точка B расположена на 10 мм ближе, чем точка A к плоскости проекций $П_2$, тогда на комплексном чертеже это выглядит, как показано на рис. 1.5. Ясно, что при этом одна из проекций совпадает с предыдущей, а положение двух других меняется соответствующим образом. Другой пример проиллюстрирован на рис. 1.5, где точка D расположена дальше от $П_3$, чем точка A на 20 мм.

1.5. Графическое отображение прямой на комплексном чертеже

Следующим по сложности построения проекций после точки геометрическим объектом является прямая линия. Поскольку ее положение в пространстве однозначно определяется двумя точками, то и для определения положения проекций прямой также достаточно построить проекции двух точек. Поэтому для построения проекций прямой можно использовать все правила, касающиеся проецирования точки.

Прямые частного положения

Прямая называется прямой частного положения, если она занимает в пространстве частное положение, а именно либо параллельна, либо перпендикулярна одной из плоскостей проекций.

Прямые уровня

Прямой уровня называется прямая, параллельная одной из плоскостей проекций. Поскольку плоскостей проекций три, то и прямых уровня тоже три.

а). Прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1, называется горизонтальной прямой уровня или ***горизонталью*** и обозначается h.

б). Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2, называется фронтальной прямой уровня или ***фронталью*** и обозначается f.

в). Прямая, параллельная профильной плоскости проекций Π_3,называется ***профильной линией уровня*** и обозначается p.

Исходя из положения прямых уровня в пространстве — расположены на одинаковом расстоянии от какой-либо плоскости проекций, поэтому две проекции из трех параллельны соответствующим осям — их проекциивыглядят, как показано на рис. 1.6.

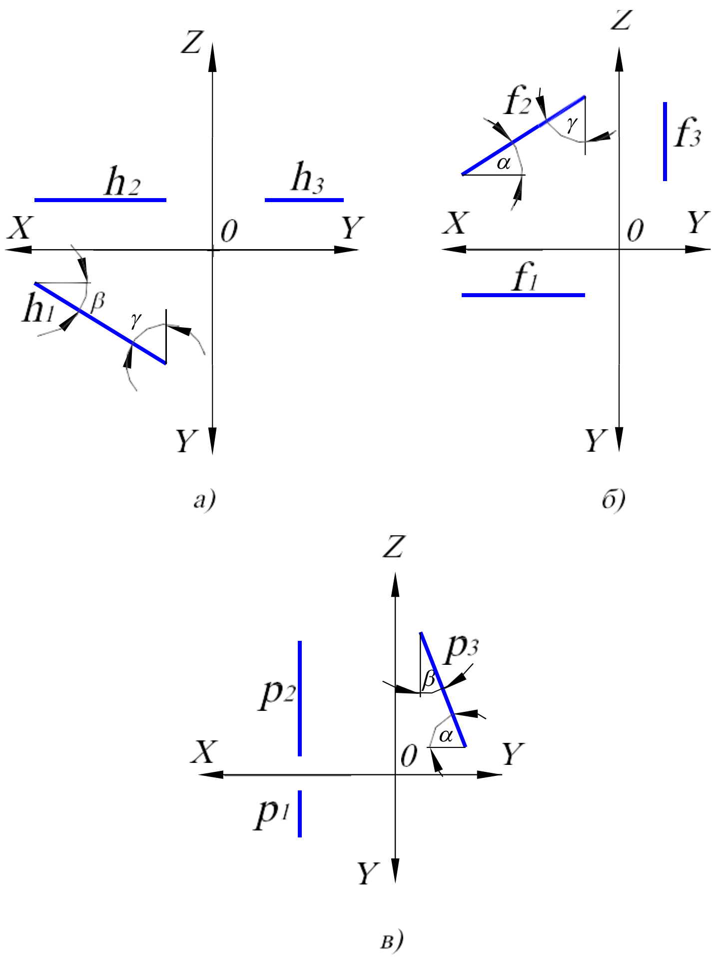

Рис. 1.6. Линии уровня на комплексном чертеже: а) горизонталь; б) фронталь; в) профильная линия уровня.

Горизонталь характеризуется тем, что ее фронтальная проекция параллельна оси *OX*. У фронтали горизонтальная проекция параллельна оси *OX*. При этом по правилу взаимосвязи проекций расстояние от f_3 до оси *OZ* равно расстоянию от f_1 до оси *OX*. У профильной линии уровня и фронтальная и горизонтальная проекции параллельны соответствующим осям, и следовательно, перпендикулярны оси *OX*.

Очевидно, что если прямая параллельна какой-либо плоскости, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину (без искажений). Поэтому h_1, f_2, p_3 – это натуральная величина соответствующих прямых h, f, p.

Очевидно, что углы наклона проекций прямой к осям проекций характеризуют соответствующие углы наклона самой прямой к плоскостям проекций, а именно:

α — угол наклона прямой уровня к Π_1,

β — угол наклона прямой уровня к Π_2,

γ — угол наклона прямой уровня к Π_3.

Проецирующие прямые

Проецирующей прямой называется прямая ***перпендикулярная*** одной из плоскостей проекций, а следовательно, параллельная двум другим плоскостям проекций.

а). Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1, называется горизонтально-проецирующей прямой и обозначается i.

б). Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2, называется фронтально-проецирующей прямой и обозначается j.

в). Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3, называется профильно-проецирующей прямой обозначается r.

Исходя из положения проецирующих прямых в пространстве, их проекции выглядят как показано на рис. 1.7.

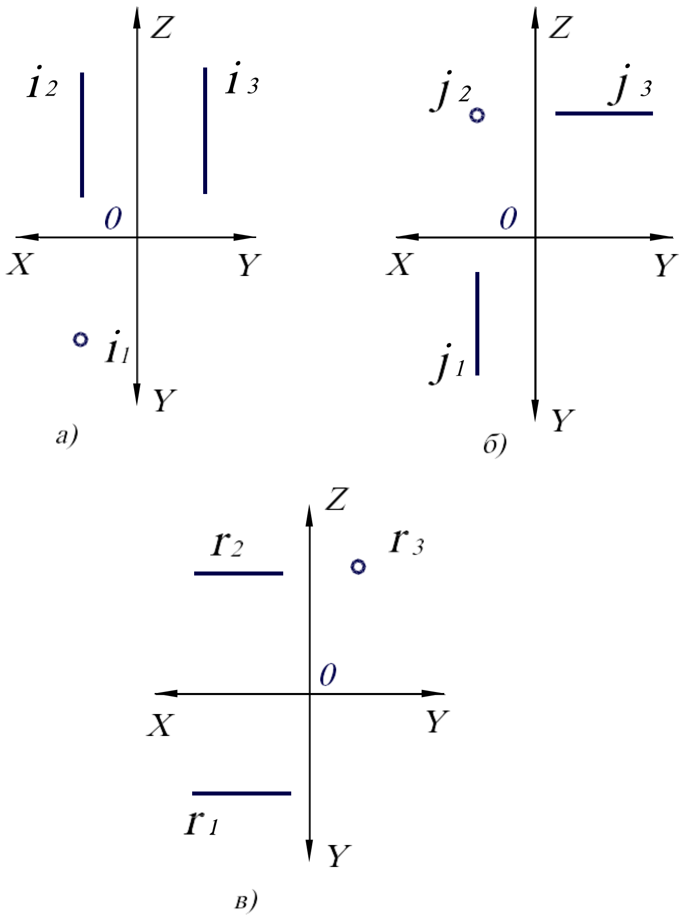

Рис. 1.7. Проецирующие прямые на комплексном чертеже: а) горизонтально-проецирующая прямая; б) фронтально-проецирующая прямая; в) профильно–проецирующая прямая.

Горизонтально-проецирующая прямая характерна тем, что ее горизонтальной проекцией является точка, а фронтальная и профильная проекции перпендикулярны соответственно осям *OX*, *OY*. Фронтально-проецирующая прямая отличается тем, что ее фронтальной проекцией является точка, а горизонтальная и профильная проекции перпендикулярны соответствующим осям. У профильно-проецирующей прямой фронтальная и горизонтальная проекции параллельны оси OX, а профильная проекция — точка.

У проецирующих прямых две проекции параллельны плоскостям проекций. Поэтому i_2, i_3, j_1, j_3, r_1, r_2 – это натуральные величины соответствующих прямых i, j, r.

Прямая общего положения

Прямой общего положения называется прямая, занимающая общее положение в пространстве, т.е. не параллельная ни к одной из плоскостей проекций, а следовательно, расположенная к каждой из них под углом.

Естественно, что ни одна из проекций прямой общего положения не показывает ее натуральную величину, а также угол наклона к какой-либо из плоскостей проекций (рис. 1.8). Любая проекция такой прямой меньше самой прямой. Таким образом, для прямой общего положения верно утверждение, что ее натуральная величина больше любой проекции.

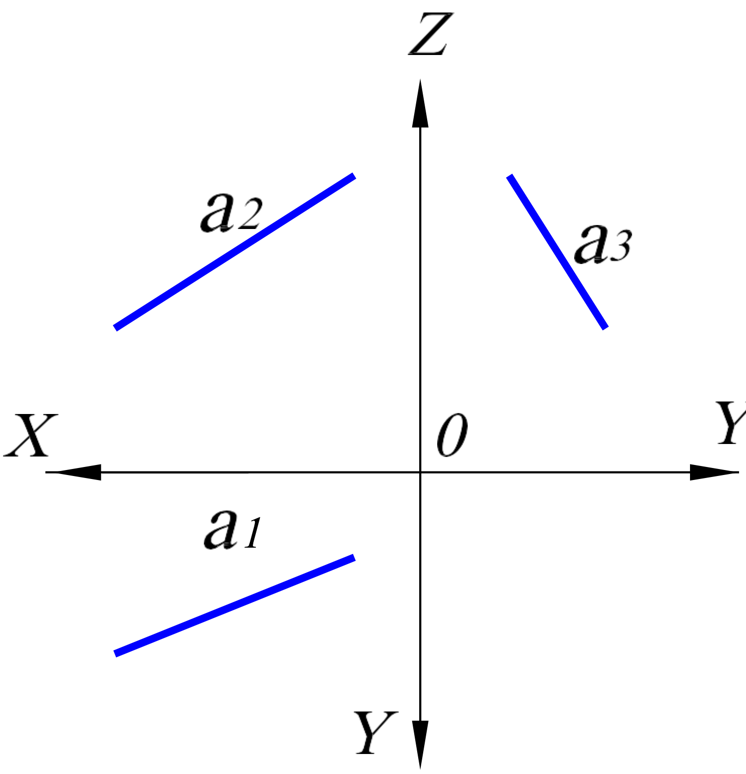

Рис. 1.8. Прямая общего положения на комплексном чертеже.

Деление отрезка прямой в заданном отношении

При делении отрезка прямой в заданном отношении используется теорема о подобии треугольников, известная из курса элементарной геометрии. Так, если необходимо отрезок AB разделить в отношении 2:3, тогда и его проекции будут разделены в том же отношении. Для этого на одной из проекций (например, горизонтальной) из любой граничной точки (например, B)отрезка проведем прямую линию d в произвольном направлении (рис. 1.9). Затем отложим на ней 5 равных отрезков, после чего соединим полученную точку B^* с точкой A_1. Далее через вторую засечку на линии d проведем прямую, параллельную A_1B^*. На отрезке A_1B_1 получим точку C_1, которая делит его в заданном отношении, т.е. $B_1C_1 : A_1C_1$=2 : 3.

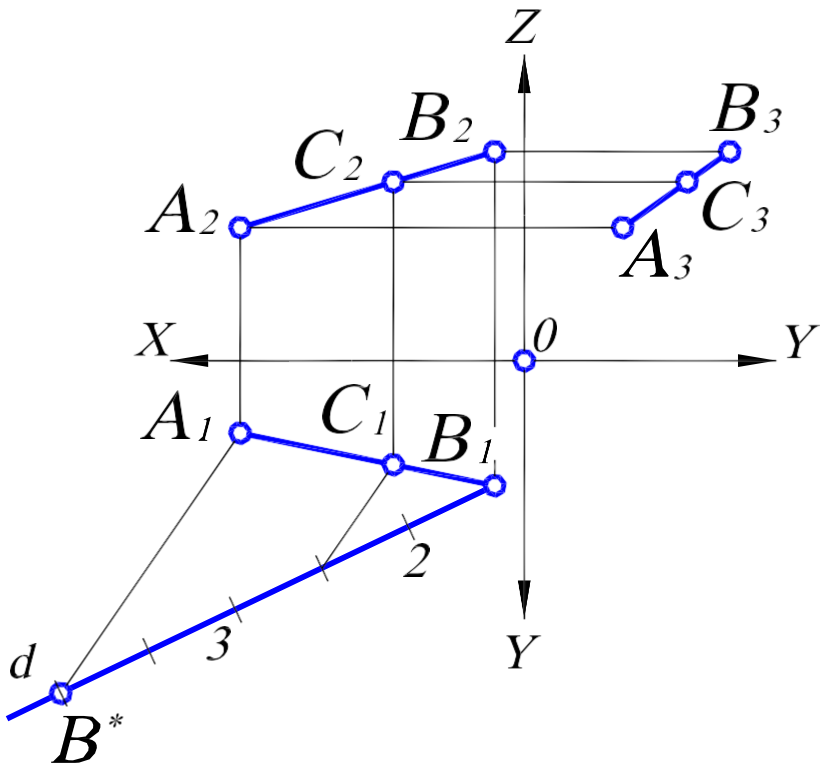

Рис. 1.9. Деление отрезка в заданном отношении.

Проведя соответствующие линии проекционной связи, получим проекции точки деления на проекциях A_2B_2 и A_3B_3. Таким образом, разделив проекции отрезка в заданном отношении, мы тем самым решили задачу деления самого отрезка.

Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций методом прямоугольного треугольника

Одним из методов определения натуральной величины отрезка прямой является ***метод прямоугольного треугольника***, который можно сформулировать так: натуральной величиной отрезка является гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого служит горизонтальная (фронтальная) проекция отрезка, другим – разность расстояний от граничных точек фронтальной (горизонтальной) проекции отрезка до оси OX. При этом углом наклона отрезка к горизонтальной (фронтальной) плоскости проекции является угол между гипотенузой прямоугольного треугольника и горизонтальной (фронтальной) проекцией отрезка.

Пусть задан отрезок CD. Из любой точки (например, D_1) отрезка проведем перпендикуляр к нему (рис. 1.10.).

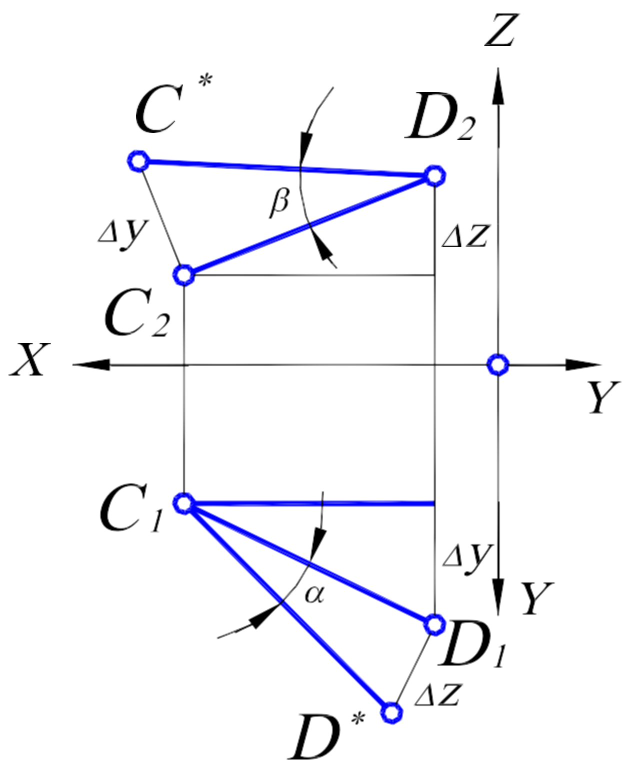

Рис. 1.10. Определение натуральной величины отрезка прямой способом прямоугольного треугольника.

На нем, отложив отрезок длиной Δz, получим точку D^*. Послесоединения точек D^* и C_1 получаем прямоугольный треугольник $C_1D_1D^*$, в котором C_1D^* - натуральная величина отрезка CD, α - угол наклона отрезка CD к плоскости Π_1. Для определения угла наклона к плоскости Π_2 проведем аналогичные построения на фронтальной проекции. Здесь C^*D_2 – натуральная величина CD , β - угол наклона CD к плоскости Π_2.

1.6. Безосные чертежи

Построение недостающих проекций геометрического объекта возможно и в том случае, когда оси проекций на чертеже отсутствуют.

Если указаны горизонтальная и профильная проекции некоторой точки А, то ее фронтальная проекция A_2 находится на пересечении линий связи: горизонтальной, выходящей из точки A_3, и вертикальной, выходящей из точки A_1 (рис. 1.11).

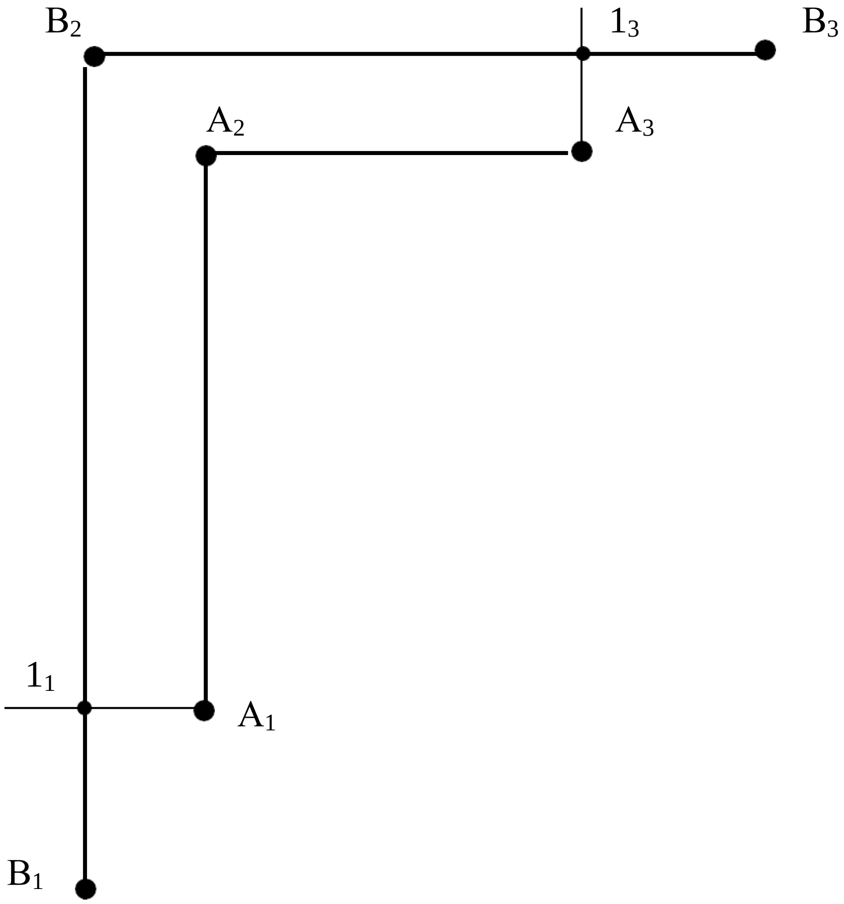

Рис. 1.11. построение точек на безосном чертеже.

Если на безосном чертеже показаны фронтальная и какая-либо из двух других проекций заданной точки, то невозможно построить недостающую третью проекцию, используя проекции только этой точки. Необходимо воспользоваться изображенными на чертеже проекциями какой-либо другой точки.

Пусть на том же самом чертеже, где заданы все три проекции точки A, показаны горизонтальная B_1 и фронтальная B_2 проекции точки B (см. рис. 1.11). Учитывая правило взаимосвязи проекций, можно утверждать, что точка B_3 дальше от воображаемой оси OZ, чем точка A_3, настолько же, насколько точка B_1 дальше от воображаемой оси OX, чем точка A_1. Остается воспроизвести на чертеже указанное правило. Для этого из точки A_1 проводим горизонтальную прямую до пересечения с линией связи B_1B_2. Получаем точку 1_1. Затем из точки

B_2 проводим горизонтальную линию связи (или перпендикуляр к B_1B_2). Източки A_3 проводим вертикальную прямую до пересечения с горизонтальной линией связи, где получаем точку 1_3. Наконец на продолжении горизонтальной линии связи откладываем расстояние, равное B_11_1, и находим положение точки B_3.

Действительно, точка B_1 дальше от оси OX, чем A_1, на расстояние B_11_1; точка B_3 дальше от оси OZ, чем A_3, на расстояние B_31_3; из построений следует, что $B_11_1=B_31_3$. Это и подтверждает правильность построений.

Для самопроверки можно провести ось OX через точку A_1. Тогда ось OZ пройдет через точку A_3. После этого построение проекции B_3 по заданным B_1 и B_2 выглядит очевидным.

Аналогично можно построить недостающую горизонтальную проекцию B_1 по заданным B_2 и B_3. В этом случае построения выполняются в обратном порядке.

Разумеется, следует иметь в виду, что если горизонтальная проекция точки ближе к оси OX, т.е. лежит выше, то и ее профильная проекция ближе к оси OZ, т.е. лежит левее на чертеже.

1.7. Взаимное положение прямых

Прямые в пространстве могут занимать по отношению друг к другу одно из трех положений: а) быть параллельными; б) пересекаться; в) скрещиваться, т.е. не пересекаться, но и не быть параллельными. Рассмотрим на рис. 1.12 как при этом располагаются их проекции. Поскольку профильные проекции прямых можно построить по двум имеющимся, то на рис. 1.12 ограничимся двухкартинным комплексным чертежом.

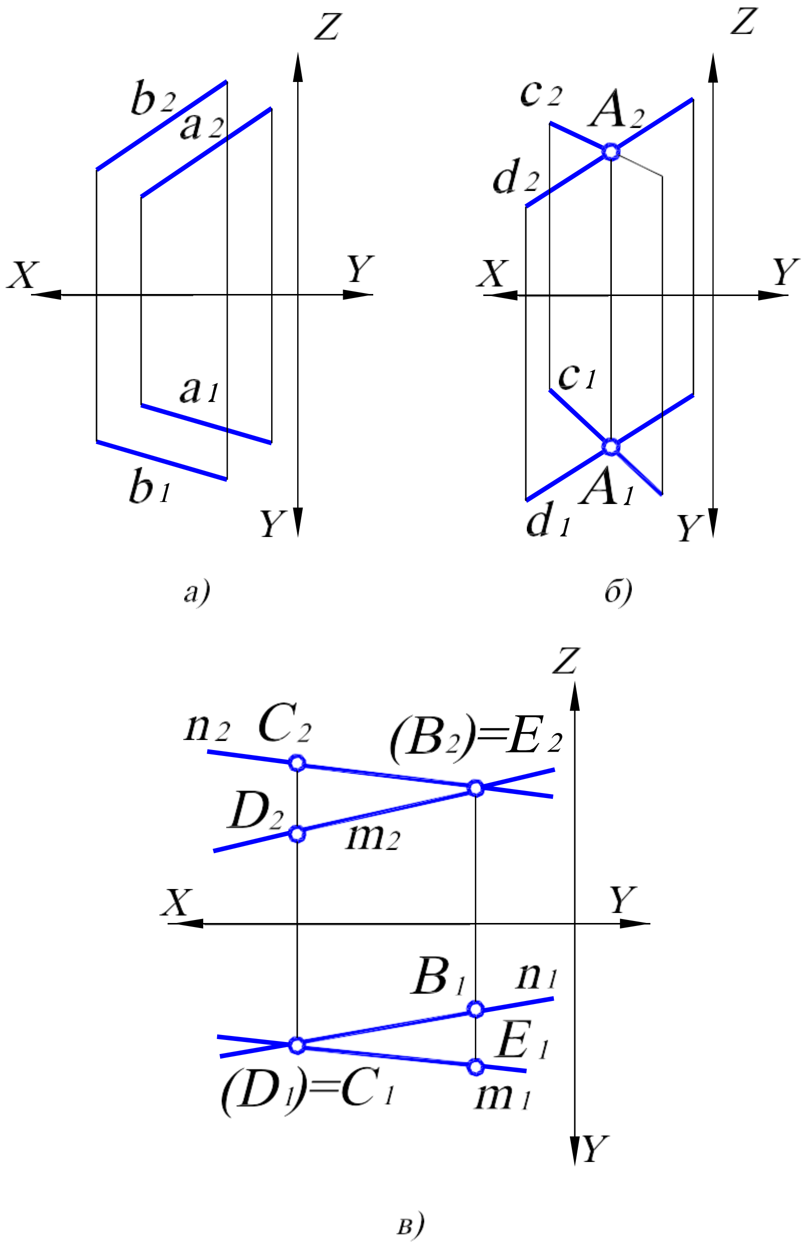

Рис. 1.12. Двухкартинный комплексный чертеж прямых, занимающих по отношению друг к другу следующее положение: а) $a \parallel b$; б) $c \cap d$; в) $n \div m$

В соответствии с одним из свойств ортогонального проецирования, если прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны (рис. 1.12, а). Если прямые пересекаются, то их проекции пересекаются, причем точки пересечения проекций лежат на одной линии проекционной связи (A – точка пересечения прямых c и d). Если прямые скрещиваются, то их проекции пересекаются, но точки пересечения проекций не лежат на одной линии проекционной связи (на рис. 1.12, в см. точки C_1 и B_2) не лежат на одной линии проекционной связи. Тогда, следуя по вертикальной линии связи от точки C_1, получим на каждой из прямых n_2 и m_2 соответственно две проекции: точки C_2 и другой точки D_2, а следовательно, на пересечении n_1 и m_1 лежат две точки C_1 и D_1, слившиеся в одну.

Точки, лежащие на одном проецирующем луче, называются ***конкурирующими***. Такие точки могут быть только на скрещивающихся прямых, что очевидно из их пространственного положения. Точки, горизонтальные проекции которых совпадают, называются горизонтально– конкурирующими (на рис. 1.12, в см. точки C и D), а если совпадают фронтальные проекции, то точки называются фронтально-конкурирующими (нарис. 1.12, в точки B и E).

При этом конкурирующие точки расположены на разном расстоянии от плоскостей проекций. Фронтально-конкурирующая точка, расположенная ближе к $П_2$, будет закрыта от наблюдателя точкой, расположенной дальше от $П_2$, а следовательно, ближе к наблюдателю. Значит, ее горизонтальная проекция расположена дальше от OX. Тогда в нашем примере точка E – видимая, а точка B – невидимая. Аналогично C – видимая , а D – невидимая. Таким образом, ***видимой*** является точка, у которой проекция расположена дальше от оси OX. Чтобы различать точки на чертеже, невидимую заключают в круглые скобки.