Informe Simulaciones TP10: Método de transformada inversa
Generación de números aleatorios con distribuciones no uniformes

Curso: 6to 1ra

Turno: Noche

CPU: Intel Core 2 Duo E6600

Vileriño, Silvio

24 de octubre de 2010

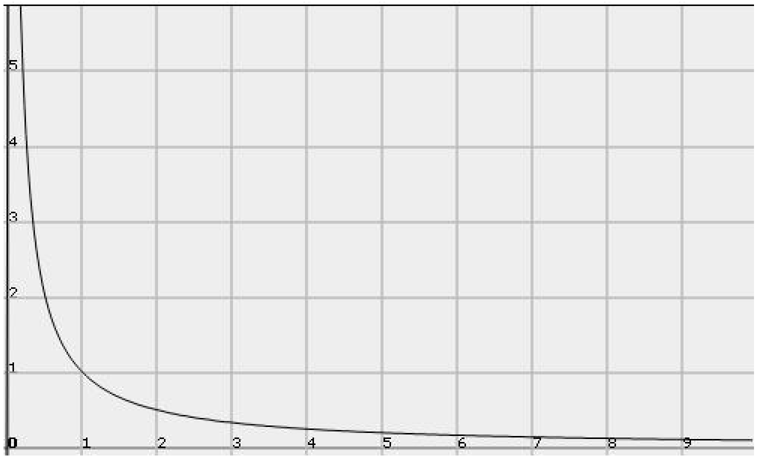
Índice

0.1. Introducción

En esta simulación se desarrolla el método de la transformada inversa para la generación de números aleatorios de distribución de probabilidad no uniforme utilizando la función o transformada inversa de la función de distribución.

$$Sea \begin{cases} f(x) \text{ una función definida en el intervalo } [\alpha, \beta] \\ x \ \in \mathbb{R}_{\supset}[\alpha, \beta] \end{cases}$$

Se desean generar K números aleatorios donde $\alpha = 1$, $\beta = 10$ dando un intervalo $[1, 10]$ con una función de distribución o reparto del tipo $f(x) = \frac{1}{x}$, de forma que la distribución quede dada por $f(x)$ y el histograma adquiera la siguiente forma:



Se procede a calcular N, que indica la cantidad de puntos en un intervalo(estadísticamente).

$$N = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} \, dx$$

Una vez calculado N, se procede a calcular la función $g(x)$, que no es más que la función $f(x)$ normalizada por N, lo cual nos da la probabilidad de aparición de x en el intervalo $[\alpha, \beta]$ calculando $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, dx$
Teniendo esto en cuenta, podemos obtener las siguientes deducciones:

$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{N} \, dx = p(x)$ Donde p es la probabilidad de aparición de x. $x \in [\alpha, \beta]$

Si acotamos el intervalo a $[\alpha, \gamma]$, obtenemos $\int_{\alpha}^{\gamma} g(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{f(x)}{N} \, dx = p(x)$ Podemos manejar los intervalos según nos convenga pero esta ecuación siempre nos dará números en el intervalo $[0, 1]$ pudiendo establecer la siguiente igualdad:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} g(x) \, dx = p(x) = Rnd, \ Rnd \in \mathbb{R}_{\supset}/0 \leq Rnd \leq 1$$

Entonces, si introducimos valores del intervalo $[\alpha, \gamma]$ en $p(x)$ obtenemos $[0, 1]$.
Esto implica que:

$$p : [\alpha, \gamma] \longrightarrow [0,1]$$
$$p^{[-1]} : [0,1] \longrightarrow [\alpha, X]$$

Si ingresamos valores del intervalo $[0,1]$ en $p^{[-1]}$ obtendremos un GNA con una distribución dada por $f(x)$

$$x = p^{[-1]}(Rnd)$$

Ejemplo Practico:
Función $f(x) = \frac{1}{x}$

Intervalo $[\alpha, \beta] = [0,1]$

Se calcula $N = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}\, dx = \int_{1}^{10} \frac{1}{x}\, dx = \ln(10) - \ln(1) = \ln(\frac{10}{1})$

$N = \ln(10)$

$g(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(10)} = \frac{1}{x.\ln(10)}$

$\int_{\alpha}^{X} \frac{1}{x.\ln(10)}\, dx = \frac{1}{\ln(10)}.\ln(x) \mid_{\alpha}^{X}$

$\ln(x) \mid_{\alpha}^{\gamma} = \ln(\gamma) - \ln(\alpha) = \ln(\frac{X}{\alpha})$

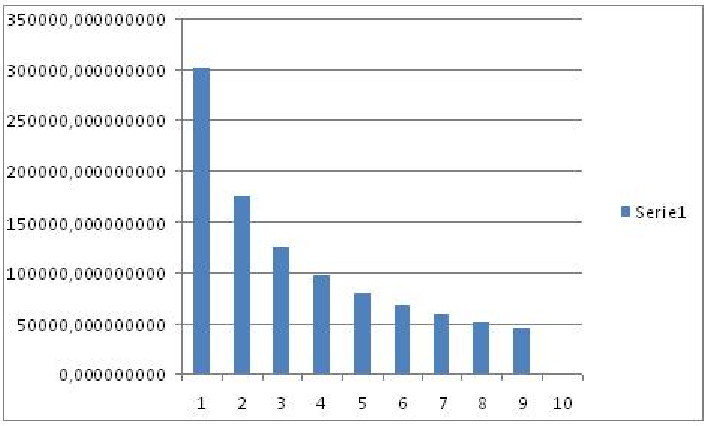
$$y = \frac{\ln(\frac{\gamma}{\alpha})}{\ln(10)}$$
$$y.\ln(10) = ln(\frac{\gamma}{\alpha})$$
$$\gamma = \alpha.e^{\ln(10).y} \text{ donde } y = RND$$

Función inversa final:

$$X = \alpha.e^{\ln(\gamma).x} \text{ donde } x = RND$$

Luego de realizar la simulación, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Funcion $f(x) = \frac{1}{x}$
- Intervalo $[1, 10]$
- Cantidad de números generados : 1000000


350000,000000000
300000,000000000
250000,000000000
200000,000000000
150000,000000000
100000,000000000
50000,000000000
0,000000000
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Serie1

0.2. Conclusión

Se comprueba que por medio de este método se pueden obtener distribuciones en función de una tranformada cualquiera, en este caso $f(x) = \frac{1}{x}$. Es un método interesante y útil, ya que se puede utilizar para alimentar simulaciones estocásticas con alguna tendencia en particular, lo cual amplía las posibilidades de investigación.