DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Primer parcial

27 de mayo de 2015 — Teoria de Juegos

Alumno	LU	Correo electrónico
Vileriño, Silvio	106/12	svilerino@gmail.com

Docente	Nota

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Introducción

El objetivo de este documento es la resolucion del parcial descripto en la seccion enunciado.

2. Enunciados

Teoría de Juegos

Parcial

---

1. Consideremos el siguiente juego combinatorio:

   Tenemos $n \geq 2$ fichas en una bolsa, y $k \geq 2$ pilas que inicialmente están vacías.
   Los jugadores I y II alternan sus movidas. Comienza I, y coloca una de las fichas de la bolsa en la pila que elija. Luego, II coloca una de las fichas de la bolsa en la pila que elija. Continúan así hasta que se vacía la bolsa. A partir de ese momento, juegan el Nim usual, y comienza el jugador que tiene el turno (I si n era par, II si n era impar).
   Gana el que retira la última ficha.

   Demuestre que:

   a) Si n y k son pares, II tiene una estrategia gandora. ¿Cuál es?
   b) Si n es impar, II tiene una estrategia ganadora.
   c) Si $k = 3$, I puede dejar siempre una posición donde dos pilas tienen la misma cantidad de fichas, y la tercera tiene la misma cantidad o más. Esto es, las pilas quedan de la forma (x, x, y) con $x \leq y$ [sug.: inducción].
   d) Si $x = 2^h - 1$ para algún h, entonces $x \oplus (x+1) = 2^{h+1} - 1$ [sug.: inducción]. Si no, $x \oplus (x+1) < x$.
   e) Si n es par pero $n \neq 2^j - 2$ y $k = 3$, I tiene una estrategia ganadora.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz de pagos de un juego de suma cero. Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ otra matriz tal que

   $$a_{ij} \leq b_{ij} \qquad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

   Probar que $Val(A) \leq Val(B)$.

   ¿Vale algo similar para juegos bimatriciales y sus equilibrios de Nash? Sug.: considere, para $M > 0$,

   $$\begin{array}{ccc} & L & R \\ L & 1,1 & 0,2 \\ R & 2,0 & -M,-M \end{array}$$

   encuentre todos los equilibrios de Nash, el pago en cada uno, y vea qué pasa cuando $M \to \infty$.

3. Tenemos un grafo cualquiera, donde cada nodo representa un jugador, y los links determinan si dos jugadores son vecinos o no. Cada jugador quiere tener un taladro, ya que le reporta un beneficio b, si bien comprarlo le genera un costo c.

   Cada uno puede elegir entre las siguientes estrategias[1]:

   - *Ned Flanders*: compra el taladro, que le proporciona una utilidad $b - c$.
   - *Homero*: no compra taladro, y se lo pide a un vecino, con lo cual su utilidad es b si alguno juega *Ned Flanders*, y es 0 si todos juegan *Homero*.

   Suponiendo que $c < b$, probar que:

   a) Si los rojos juegan *Ned Flanders*, y los azules *Homero*, ¿la imagen corresponde a un equilibrio de Nash?
   b) Para todo grafo finito, existe un equilibrio de Nash. Probar que nunca es único si hay al menos dos jugadores conectados.
   c) Describa un algoritmo simple para encontrar algún equilibrio de Nash.
   d) Proponga familias de grafos sencillos con N nodos, sin nodos aislados, tal que:
      - en una familia, el equilibrio de Nash necesita un número de taladros independiente de N.
      - en otra, todo equilibrio de Nash necesita al menos $N/2$ taladros, pero existe una distribución de taladros tal que 2 sean suficientes para que todos tengan un taladro o tengan un vecino que tenga taladro.
      - en otra, todo equilibrio de Nash utiliza aproximadamente una fracción N/k de taladros, con k fijo (y que el grafo no sea unión de dos o más grafos disjuntos).

El parcial finaliza el **miércoles 27/05** a las 14 hs, y deberían entregarlo antes de que comience la clase. También pueden tipearlo -o escanearlo- y enviarlo por mail a jpinasco@gmail.com.

[1] Idea de Rafa Martín.

3. Desarrollo

3.1. Ejercicio 1

3.2. Estrategias ganadoras del jugador II

Para los incisos a) y b) de este ejercicio, definiremos ciertas cosas a continuacion.
Nota: $\bigoplus$ es la suma nim.

Teorema 3.1 (Teorema de Bouton). *Una posicion* $(X_1, \ldots, X_n)$ *en Nim, es* `P-Position` $\leftrightarrow$ $X_1 \bigoplus ... \bigoplus X_n = 0$

Teorema 3.2. *Las posiciones de un juego se particionan en* `N-Position` *y* `P-Position`*.*

Teorema 3.3 (Propiedad caracteristica de las posiciones). *Las posiciones de tipo* `N-Position` *y* `P-Position` *se definen recursivamente como:*

1. *Todas las posiciones terminales son* `P-Position`*.*
2. *Desde toda* `N-Position` ***existe al menos una*** *jugada a una* `P-Position`
3. *Desde toda* `P-Position`*,* ***todas*** *las jugadas son hacia* `N-Position`*.*

Idea: Comenzando en una `N-Position`, en cada turno del jugador II, este siempre debe moverse a una posicion en la cual el jugador I vuelva a mover a una `N-Position`.

Teorema 3.4 (Estrategia ganadora de II). *Si el jugador II comienza en una* `N-Position`*, tiene una estrategia ganadora.*

Demostración. Si el jugador II comienza en una `N-Position`. Por definicion(3.3), existe una jugada que me lleva a una `P-Position`. Por definicion de `P-Position`, el jugador I va a tener que perder el juego porque dicha posicion es terminal o moverse a una `N-Position`, y nuevamente, el jugador II puede moverse a alguna `P-Position`. Este proceso se repite y es la estrategia ganadora para el jugador II.

□

Corolario 3.4.1. *Por definicion de* `P-Position`*(3.3), todas las movidas posibles llevan a una* `N-Position`*. Si el jugador I comienza en una* `P-Position`*, el jugador II tambien tiene estrategia ganadora desde el momento que I le cede la* `N-Position` *al mover o pierde porque es una posicion terminal.*

Corolario 3.4.2. *Usando los teoremas 3.1 y 3.2 tenemos que si* $(X_1, \ldots, X_k)$ *es el nim inicial, entonces vale:*

- *La posicion inicial es una* `P-Position` *si* $(X_1 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k) = 0$
- *La posicion inicial es una* `N-Position` *si* $(X_1 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k) \neq 0$

Teorema 3.5 (Equivalencia de suma nim a un bitwise exclusive or). *La suma nim es equivalente a aplicar un* ***bitwise XOR*** *a los numeros a y b en base 2. Es decir, podemos definir la suma nim como* $a \bigoplus b = ((a)_2 \hat{} (b)_2)_{10}$*.*

Demostración. Se desprende de considerar las tablas de definicion de la suma modulo 2 y la tabla de verdad del xor tomando 0 como falso y 1 como verdadero. □

3.2.1. Inciso a

Sabemos que:

- El numero n, de fichas en la bolsa, es par
- El numero k, de pilas, es par

Dado que n es par, luego de la etapa de colocacion de fichas, comienza jugando el nim el jugador I.
Como establecimos en 3.4.1 y 3.4.2. Si el nim inicial $(X_1, \ldots, X_k)$ es tal que $(X_1 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k) = 0$, el jugador I comenzara en una `P-Position` y el jugador II tendra la estrategia ganadora mencionada en 3.4.

Solo resta encontrar una manera para que el nim inicial sume cero.

Idea: Le balanceo las pilas nim al jugador I de a pares. Luego, en el nim inicial $(X_1, \ldots, X_k)$, tengo una cantidad par k de torres tales que:

1. **Para cada pila, existe otra con la misma cantidad de elementos:** $\forall\, X_j \in (X_1, \ldots, X_k)$ $\exists\, X_i$ tal que $(i \neq j) \wedge (X_i = X_j)$
2. **Ley de cancelacion de suma nim:** $(X_i \bigoplus X_j) = 0$

Por lo tanto, el nim inicial que comienza jugando I es una `P-Position`. Como queriamos.

Teorema 3.6 (Se puede armar un nim inicial que suma cero)**.** *Bajo estas hipotesis, siempre se puede llegar a un nim balanceado de a pares.*

Demostración. Por Induccion en cantidad de fichas:

Sean:

- El numero n, de fichas en la bolsa, natural par no nulo.
- El numero k, de pilas, natural par no nulo.
- P(n): Las pilas estan balanceadas(misma cantidad de elementos) de a pares.

Dado que la cantidad de pilas es par, podemos establecer una relacion de apareo entre pares de pilas. Diremos que 2 pilas estan apareadas cuando tienen la misma cantidad de elementos. Concretamente, al final de cada par de turnos tendremos una cantidad par de pares de pilas apareadas.

- **Caso base, n = 2**
  Como k es par(y no nulo), entonces $k \geq 2$. El jugador I coloca una ficha en alguna de las pilas. Luego, existe alguna pila vacia. El jugador II pone una ficha en la pila vacia. Finalmente para toda pila en el nim, o bien esta vacia, o bien es alguna de las 2 pilas con 1 elemento.
- **Caso inductivo, n $\rightarrow$ n+1** Vale la hipotesis inductiva. El jugador I coloca una ficha en alguna pila X_j. Como las pilas estan balanceadas, existe una pila X_i, `apareada` a X_j tal que si el jugador II coloca una ficha en ella quedan X_j y X_i con la misma cantidad de fichas, balanceadas nuevamente. Como no tocamos ninguna otra pila. Las pilas vuelven a quedar balanceadas.

$\square$

3.2.2. Inciso b

Sabemos que:

- El numero n, de fichas en la bolsa, es impar

Dado que n es impar, juega primero el jugador II en el nim, queremos que II comience en una **N-Position**. Equivalentemente por 3.4.2, queremos que la posicion inicial $(X_1, \ldots, X_k)$ sume nim **distinto de cero**, $(X_1 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k) \neq 0$.

Teorema 3.7. *Sea $(X_1, \ldots, X_k)$ una posicion en el nim, esta posicion es una* `P-Position` $\leftrightarrow$ $(X_1 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k) = 0$*, usando 3.5 tenemos que:*

	$X_1 =$	$(X_{1,1}, \ldots, X_{1,t})_2$
	$X_2 =$	$(X_{2,1}, \ldots, X_{2,t})_2$
$\bigoplus$		$\ldots$
	$X_k =$	$(X_{k,1}, \ldots, X_{k,t})_2$
	0	$(0, ..., 0)_2$

Nota: *$t \in \mathbb{N}$ es la cantidad de bits requerida para representar el maximo numero del conjunto $X_1, \ldots, X_k$.*

Esto ocurre unicamente cuando para todo j entre 1 y t vale que $X_{1,j} + X_{2,j} + \cdots + X_{k,j} = 0$ $(mod\ 2)$. Es decir, cuando la cantidad de unos en cada una de las columnas es par.

Demostración. Es facil ver esto, considerando la asociatividad del XOR en la suma por columna mencionada anteriormente, aplicando la operacion xor de a 2 elementos por columna hasta que finalmente da 0 cuando la cantidad de unos es par, 1 caso contrario. □

Corolario 3.7.1. *Como nosotros queremos comenzar a jugar el nim en una **N-Position**, debe existir **ALGUNA** columna tal que la operacion exclusive or en dicha columna de distinto de cero, es decir, que dicha columna tenga una cantidad **IMPAR** de unos.*

Lema 3.8. *El bit mas a la derecha en la suma nim especificada como operacion exclusive or, indica el bit de paridad del numero X_j, es decir. Si dicho bit es 0, el numero X_j es par, caso contrario, el numero X_j es impar.*

Idea: Conseguir una cantidad impar de torres con cantidad impar de fichas en el armado de las torres.

Teorema 3.9. *Al ser n impar, el numero de columnas X_j en el nim inicial $(X_1, \ldots, X_k)$ tales que X_j es impar,tambien lo sera.*

Demostración. Sabemos que $n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ y n es impar.

Tomando congruencia modulo 2.

$n \equiv 1 \equiv X_1 + X_2 + \cdots + X_n \equiv$

$\sum\limits_{X_k \equiv 1 (mod 2)} X_k + \sum\limits_{X_j \equiv 0 (mod 2)} X_j$

Desaparece la sumatoria de los pares por la congruencia.

$\equiv \sum\limits_{X_k \equiv 1 (mod 2)} 1$

$\equiv t \equiv$ Cantidad de pilas impares

Por lo tanto, por transitividad de la congruencia tenemos que Cantidad de pilas impares $\equiv 1$ $\square$

Por lo enunciado anteriormente, la suma nim de la posicion nim inicial, sera **distinta de cero**, que es lo que queriamos ver.

3.2.3. Inciso c

Sabemos que:

- k, el numero de pilas del nim, es 3.

Trabajaremos con una tupla (x, y, z). Pero cualquier permutacion es analoga ya que no nos importa el orden de las pilas.

Demostración. Probaremos esto usando induccion , en la cantidad de turnos, bajo el siguiente predicado:
P(n): I puso n fichas y el nim satisface que (x, y, z) tal que $x = y$, $z \geq y$

- Caso base: P(1): I coloco una ficha en el nim vacio. Y este quedo de la forma (0, 0, 1). Lo cual cumple con la restriccion pedida.
- Caso inductivo: $P(n) \rightarrow P(n + 1)$: Podemos suponer por la hipotesis inductiva que vale lo siguiente:
  - El nim tiene la forma (x, y, z) tal que x=y, $z \geq y$.
  - El jugador I coloco n fichas y el proximo turno es de II.

  Tenemos 3 casos:

  1. Si II coloca (x, y, z+1), en el proximo turno n+1-esimo, I contesta con (x, y, z+2) lo cual satisface lo que queremos.
  2. Si II coloca (x+1, y, z), en el proximo turno, (n+1) I puede contestar (x+1, y+1, z) si $z > y$ o (x+1, y, z+1) si z=y.
  3. Si II coloca(x, y+1, z) es analogo al caso anterior(b), pues x=y por HI.

  Luego, $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ pues:

  - El nim tiene la forma (x, y, z) pedida.
  - El jugador I coloco n+1 fichas y el proximo turno es de II.

$\square$

3.2.4. Inciso d

Lema 3.10 (Caracterizacion de potencias de 2 en binario)**.** *Todo numero de la forma $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ Se escribe en base 2 como $(1, \ldots, 0)_2$ donde, de derecha a izquierda, hay k ceros en su tira de bits y luego un uno.*

Lema 3.11 (Caracterizacion de potencias de 2 menos uno en binario)**.** *Todo numero de la forma $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ Se escribe en base 2 como $(0, 1, \ldots, 1)_2$ donde, de derecha a izquierda, hay k unos en su tira de bits.*

Teorema 3.12. *Si $X = (2^h - 1)$, $h \in \mathbb{N}$, entonces $X \bigoplus (X + 1) = (2^{h+1} - 1)$.*

Demostración. Utilizando la equivalencia de la suma nim, con la operacion de bits xor y las caracterizaciones de los lemas anteriores. Es inmediato ver que el resultado de la operacion $X \bigoplus (X+1) = (1, \ldots, 1)_2$, donde de derecha a izquierda hay k+1 unos. Usando la caracterizacion del lema 3.11, vemos que este numero es $2^{h+1} - 1$, como queriamos ver. □

Teorema 3.13. *Si $X \neq (2^h - 1)$, $h \in \mathbb{N}$, entonces $X \bigoplus (X+1) < X$.*

Demostración. Vemos que como $X \neq (2^h - 1)$ entonces existe un primer cero de derecha a izquierda tal que $X = (1, \ldots, 0, 1, \ldots)_2$ donde los primeros puntos suspensivos indican la posible presencia de bits genericos y los segundos puntos suspensivos indican la posible presencia de unos.
Luego, tenemos que $X + 1 = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)_2$ donde los primeros puntos suspensivos indican los mismos bits que en X y los segundos puntos suspensivos indican la posible presencia de ceros.
Luego tenemos que $X \bigoplus (X+1) = (0, \ldots, 0, \ldots)_2$ Las posiciones en el desarrollo binario donde X y X+1 eran prefijos, quedan en 0 por la operacion de XOR. Luego, es claro ver que $X \bigoplus (X+1) < X$. Para ver esto, consideremos que $(0_j, \ldots, 0, \ldots)_2$ es un numero claramente menor que 2^j. Pero en el desarrollo en base 2 de X, aparece dicho bit en 1. Con lo cual $X \geq 2^j$. Luego por transitividad, $X \bigoplus (X+1) < X$. □

3.2.5. Inciso e

Sabemos que:

- n es par.
- $n \neq 2^j - 2$.
- $k = 3$

Queremos que I tenga estrategia ganadora. Esto es equivalente a decir que queremos que I comience en una **N-Position** o que II comience en una **P-Position**. Usando los teoremas definidos anteriormente, esto es equivalene a que sea $(X_1, \ldots, X_n)$ el nim inicial, su suma nim de cero o distinto de cero, segun querramos.

Usando lo demostrado en el **inciso c** sabemos que I tiene forma de dejar el nim inicial de la forma (x, x, y) con $y \geq x$.

n par: II pone la ultima ficha y el primer turno del nim es de I
Tomando lo visto en la demo del inciso c, II puede dejar el nim inicial, de las siguientes maneras:

1. Si II coloca (x, x, y+1) con $x \leq y$, luego el nim inicial suma distinto de cero pues $x \bigoplus x \bigoplus (y+1) = 0 \bigoplus (y+1) = y + 1 \neq 0$. I Comienza en una **N-Position**, por lo tanto tiene estrategia ganadora.
2. Si II coloca (x, x+1, y), con $x \leq y$.
   a) Si $x = y$, entonces $x \bigoplus y \bigoplus (x+1) = 0 + (x+1) = (x+1) \neq 0$. y es identico al caso anterior.
   b) Si $y = x + 1$, entonces tenemos que $x \bigoplus (x+1) \bigoplus (x+1) = x$. Si $x \neq 0$ comenzaremos en una **N-Position** que es lo que queremos. Veamos que x no puede ser cero, por el absurdo: Supongamos que x=0. Entonces $n = 0 + 1 + 1 = 2 = 2^2 - 2$, lo cual es absurdo por hipotesis.
   c) Si $y > x + 1$, entonces queremos ver como queda $x \bigoplus (x+1) \bigoplus y$. Como vimos en el inciso d, tenemos dos casos nuevamente:
      1) $x \bigoplus (x+1) < x$ si $x \neq 2^k - 1$:
      Como $x < y$, entonces $((x+1) \bigoplus x) < x < y$, mas particularmente nos sirve el hecho de que $((x+1) \bigoplus x) \neq y$, porque ahora sabemos que $((x+1) \bigoplus x) \bigoplus y \neq 0$ y I tiene estrategia ganadora.

2) $x\bigoplus(x+1) = 2^{k+1} - 1$ si $x = 2^k - 1$:
I tiene una estrategia ganadora $\leftrightarrow x\bigoplus(x+1)\bigoplus y \neq 0 \leftrightarrow 2^{k+1} - 1 \bigoplus y \neq 0 \leftrightarrow 2^{k+1} - 1 \neq y$. Demo: Supongamos que $y = 2^{k+1} - 1$, luego $n = x + (x+1) + y \leftrightarrow n = (2^k - 1) + (2^k - 1 + 1) + (2^{k+1} - 1) \leftrightarrow n = (2^{k+1} - 1) + (2^{k+1} - 1) \leftrightarrow n = (2^{k+2} - 2)$, lo cual es absurdo por la hipotesis de que $n \neq 2^j - 2$.

3. el caso donde II coloca (x+1, x, y) es analogo por conmutatividad.

3.3. Ejercicio 2

3.3.1. Inciso a

Teorema 3.14 (Minimax)**.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz de pago de un juego de suma cero. Entonces existen $v \in \mathbb{R}$ y p,q vectores de probabilidad. Tales que:*

- $v = Val(A) = \max_p\{\min_q\{p^t.A.q\}\} = \min_q\{\max_p\{p^t.A.q\}\}$

Lema 3.15. *Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ Matrices. Si $a_{ij} \leq b_{ij}$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Entonces $p^t.A.q \leq p^t.B.q$ para todo vector $p \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $q \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ que sean vectores de probabilidad(todos sus elementos suman uno y cada elemento mayor o igual a cero).*

Demostración. Si desarrollamos los productos $p^t.A.q$ y $p^t.B.q$ vemos que cada uno es un numero real, y termino a termino se puede aplicar la desigualdad valida por hipotesis. $a_{ij} \leq b_{ij}$.

$$p^t.A.q = \sum_{i=1}^{n} p_i.\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.qj \leq \sum_{i=1}^{n} p_i.\sum_{j=1}^{m} b_{ij}.qj = p^t.B.q$$

□

Teorema 3.16. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz de pago de un juego de suma cero. Sea $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ otra matriz tal que $a_{ij} \leq b_{ij}$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Entonces $Val(A) \leq Val(B)$.*

Demostración. Consideremos las funciones $f : (\Delta_x \times \Delta_y)$ y $g : (\Delta_x \times \Delta_y)$, continuas, donde Δ_x y Δ_y son compactos de vectores de probabilidades. Donde f y g estan definidas como:

- $f(p, q) = p^t.A.q$
- $g(p, q) = p^t.B.q$

Usando el teorema `Minimax` definido en 3.14, tenemos que:

- $Val(A) = \min_q\{\max_p\{f(p, q)\}\}$
- $Val(B) = \min_q\{\max_p\{g(p, q)\}\}$

Usando el lema 3.15 Tenemos que $f(p, q) \leq g(p, q)\ \forall p \in \Delta_x, q \in \Delta_y$.

1. Tomando $\max_p$ de ambos lados tenemos:
$\max_p f(p, q) \leq \max_p g(p, q)$
2. Tomando $\min_q$ de ambos lados tenemos:
$\min_q \max_p f(p, q) \leq \min_q \max_p g(p, q)$
3. Por la observacion anterior de `minimax` tenemos que:
$Val(A) \leq Val(B)$

Como queriamos ver.

□

3.3.2. Inciso b

Definicion 3.17. *Cuando a todo jugador, sabiendo que hace el resto y sabiendo que ningun otro va a cambiar de estrategia, no le conviene(o le da igual), cambiar de estrategia, se dice que hay un equilibrio de nash.*

Definicion 3.18. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{2^{n \times m}}$ *una matriz de pagos de un juego bimatricial, tal que el par* $(j_1, j_2)_{ij}$ *indica la utilidad de los jugadores 1 y 2. Sean* $\Delta_x = \{p_i/p_i \geq 0, \sum p_i = 1\}$, $\Delta_y = \{q_i/q_i \geq 0, \sum q_i = 1\}$. $(p,q) \in \Delta_x \times \Delta_y$ *es un equilibrio mixto de nash si:*

- $p^t.A.q \geq p'^t.A.q \; \forall p' \in Delta_x$
- $p^t.A.q \geq p^t.A.q' \; \forall q' \in Delta_y$

Nota: *Los vectores p y q de probabilidad, para ser mixto, no deberian acumular toda la probabilidad en una estrategia. ie, ningun* p_i, q_i *de los conjuntos delta deberia ser igual a 1.*

Supongamos un valor $M > 2$, fijo. Por ejemplo $M = 4$. Luego la matriz de pagos para ambos jugadores queda:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (0,2) \\ (2,0) & (-4,-4) \end{pmatrix}$$

Figura 1: Matriz de pagos suponiendo M=4.

Dadas las combinaciones de estrategias **puras** para ambos jugadores $\{L, R\} \times \{L, R\}$. Analicemos cada una:

- **L, L**: El pago de los jugadores es $(1, 1)$, pero vemos que al jugador I, le conviene cambiar a R, pues asi gana 2 y mejora su pago. Analogamente, al jugador II, le conviene cambiar a R, pues asi gana 2, mejorando su pago. Luego esta estrategia no es un equilibrio de nash.
- **L, R**: El pago de los jugadores es $0, 2$, vemos que en este caso, al jugador I no le conviene cambiar de estrategia porque su pago seria -M, es decir, -4, que es menor que el actual, 2. Analogamente, al jugador II no le conviene cambiar porque pasa de ganar 2 a 0. **Este es un equilibrio.**
- **R, L**: Analogamente, en este caso, si I cambia, pasa de ganar 2 a 1, no le conviene. Si II cambia, pasa de ganar 0 a -1, tampoco le conviene.
- **R, R**: El pago de los jugadores es $(-4, -4)$, si el jugador I cambia, pasa de -4 a 0, por lo tanto le conviene cambiar. Al jugador II, le conviene tambien cambiar pues, de ganar -4 pasa a ganar 2. Con lo cual este no es un equilibrio.

Veamos que pasa cuando M tiende a infinito.

Se puede pensar este juego como el de los autos enfrentados acelerando, como en `Rapido y furioso`, donde L es frenar y R es acelerar. Consideremos en este caso, que M, al ser la muerte, tiende a infinito. Con lo cual, la estrategia de acelerar ambos lleva a la muerte y a una perdida infinita.

Busquemos las estrategias mixtas: Para esto usamos el principio de indiferencia. Siendo jugador I, quiero jugar con probabilidades p y $(1 - p)$ las dos posibles estrategias, tal que a mi enemigo le de lo mismo cual estrategia jugar. Analogamente, siendo jugador II busco q y $(1 - q)$ tal que pase lo mismo.
Si queremos que nos de igual que jugar, nos debe dar la misma ganancia hacer cualquiera de las opciones.

- Jugador I:
  Supongamos que II juega L con probabilidad q y R con probabilidad $(1-q)$
  - $g_{j1}(L) = \{\text{Ganancia esperada para el jugador I de jugar L}\} = 1 \times q + 0 \times (1-q)$
  - $g_{j1}(R) = \{\text{Ganancia esperada para el jugador I de jugar R}\} = 2 \times q - M \times (1-q)$

  Buscamos que nos den la misma ganancia, asi que igualamos $g_{j1}(L) = g_{j1}(R)$ y tenemos:

  1. $1 \times q + 0 \times (1-q) = 2 \times q - M \times (1-q)$
  2. $q = 2q - M(1-q)$
  3. $-q = -M(1-q)$
  4. $M(1-q) - q = 0$
  5. $M - Mq - q = 0$
  6. $M = Mq + q$
  7. $M = (M+1)q$
  8. $\frac{M}{M+1} = q$
  9. **Consideremos que pasa cuando n tiende a infinito:** $q = \lim\limits_{M\to\infty} \dfrac{M}{M+1}$
  10. **Indeterminacion $\frac{\infty}{\infty}$, uso L'Hopital, derivo arriba y abajo** $q = \lim\limits_{M\to\infty} \dfrac{1}{1+0}$
  11. $q = \lim\limits_{M\to\infty} 1$
  12. $q = 1$

- Jugador II: Supongamos que I juega L con probabilidad p y R con probabilidad $(1-p)$
  - $g_{j2}(L) = \{\text{Ganancia esperada para el jugador II de jugar L}\} = 1 \times p + 0 \times (1-p)$
  - $g_{j2}(R) = \{\text{Ganancia esperada para el jugador II de jugar R}\} = 2 \times p - M \times (1-p)$

  Buscamos que nos den la misma ganancia, asi que igualamos $g_{j2}(L) = g_{j2}(R)$ y tenemos las mismas ecuaciones que para jugador I, con lo cual $p = 1$ cuando $M \to \infty$.

Esto quiere decir que tanto el jugador I como el jugador II jugaran con **probabilidad uno** la estrategia L. En el contexto que dimos de manejar hasta chocar, ambos frenaran.

3.4. Ejercicio 3

3.4.1. Inciso a

Sabemos que:

- Rojo es flanders
- Azul es homero
- $b \in \mathbb{R}_{>0}$ es el beneficio de tener taladro
- $c \in \mathbb{R}_{>0}$ es el costo de comprar el taladro
- $b > c \implies b - c > 0$

Definicion 3.19. *Sea $G = (V, E)$ un grafo.*

- *Sea la funcion $f : V \to \{v \in V\}$ la funcion que dado un nodo $v \in V$ me devuelve los vecinos.*
- *Sea la funcion $g : V \to \{Homero, Flanders\}$ que dado un nodo me devuelve la estrategia elegida por el.*

- *Sea la funcion $h : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que dado un nodo me devuelve la utilidad, definida para las siguientes estrategias como:*
  - ***Ned flanders:*** *Jugador v, compra el taladro, su utilidad es $h(v) = b - c > 0$*
  - ***Homero:*** *Jugador v, no compra el taladro, y se lo pide a un vecino, su utilidad es*
    - $h(v) = c$ *Si* $(\exists w \in f(v)/g(w) = flanders)$. ***Si tiene algun vecino flanders.***
    - $h(v) = 0$ ***En caso contrario.***

Teorema 3.20. *Un grafo que cumple las siguientes condiciones, corresponde a un equilibrio de nash.*

- ***Todos los jugadores flanders tienen todos vecinos homero.*** $(\forall v \in V/g(v) = flanders) \implies (\forall w \in f(v), g(w) = homero)$
- ***Todos los jugadores homero tienen al menos un vecino flanders.*** $(\forall v \in V/g(v) = homero) \implies (\exists w \in f(v)/g(w) = flanders)$

Demostración. Veamos porque un grafo que cumple estas condiciones representa un equilibrio de nash:

- A los jugadores v, que juegan homero, con utilidad $h(v) = b > 0$, no les conviene cambiar a flanders porque de hacerlo, tendrian utilidad $h(v) = b - c < b$. **Les va mejor pidiendo prestado a su vecino flanders.**
- A los jugadores v, que juegan flanders, con utilidad $h(v) = b - c > 0$, no les conviene cambiar a homero porque de hacerlo, tendrian utilidad $h(v) = 0 < b - c$, **ya que no tienen ningun vecino a quien pedirle el taladro.**

□

Teorema 3.21. *El grafo de la figura es un equilibrio de nash.*

Demostración. Asumiendo que el grafo se extiende fuera del grafico de la misma forma. Lo que se observa es que dicho grafo cumple las condiciones mencionadas en 3.20. □

3.4.2. Incisos b y c

Teorema 3.22. *Si un grafo G=(V, E) se corresponde a un equilibrio de nash, entonces valen las condiciones enunciadas en 3.20.*

Demostración. Supongamos que no, es decir que alguna de las siguientes es cierta y sigue siendo un equilibrio:

1. **Existe un jugador flanders que tiene otro vecino flanders**. $(\exists v \in V/g(v) = flanders) \implies (\exists w \in f(v), g(w) = flanders)$
2. **Existe un jugador homero que tiene todos vecinos homero**. $(\exists v \in V/g(v) = homero) \implies (\forall w \in f(v)/g(w) = homero)$

En el primer caso, sea v dicho jugador, le conviene cambiar a homero y mejorar su utilidad de $b - c$ a $b > b - c$. Por lo tanto no es un equilibrio. En el segundo caso, sea dicho jugador w, le conviene cambiar a flanders y mejorar su utilidad de 0 a $b - c > 0$. Por lo tanto, tampoco es un equilibrio. □

Corolario 3.22.1. *Usando 3.20 y 3.22. Podemos decir que un grafo representa un equilibrio de nash $\leftrightarrow$ cumple con las condiciones enunciadas en 3.20.*

Definicion 3.23. *Dado G=(V, E) un grafo, se define $T \subseteq V$ un conjunto independiente de nodos si y solo si $\forall w, v \in Tw \neq v$ la arista $(v, w) \notin E$. Es decir, los nodos de T no tienen links entre ellos.*

Definicion 3.24. *Un conjunto independiente maximal T, es aquel conjunto independiente tal que no esta contenido en ningun otro conjunto independiente.*

Definicion 3.25. *Dado G=(V, E) un grafo, se define $T \subseteq V$ un conjunto dominante de nodos si $\forall v \in (V \setminus T)\ \exists w \in T$ tal que $(v, w) \in E$. En castellano, que todo nodo de $(V \setminus T)$ sea vecino de un elemento de T.*

Teorema 3.26. *Dado G=(V, E) un grafo que representa un equilibrio de nash, $V = F \cup H$ donde F es el conjunto de los nodos que juegan Flanders y H es el conjunto de nodos que juegan Homero. Usando la caracterizacion de 3.22.1 y las definiciones anteriores. Notemos que F es un conjunto independiente y dominante. Y podemos definir una particion del conjunto de nodos como $V = F \cup (V \setminus F)$ tal que G sigue representando un equilibrio de nash.*

Demostración. Veamos que esta particion del conjunto de nodos $V = S \cup (V \setminus S)$ cumple las 2 condiciones enunciadas en 3.20.

1. $\forall v \in S\ (\forall w \in f(v), g(w) = homero)$. De lo contrario habria 2 nodos en S con una arista, absurdo porque S es independiente.
2. Sea $H = (V \setminus S)$, entonces $(\forall v \in H) \implies (\exists w \in f(v)/g(w) = flanders)$. De lo contrario habria un nodo en $V = (V \setminus S)$ que no es vecino de un nodo en V, absurdo porque S es dominante.

□

Teorema 3.27. *Un conjunto independiente maximal V, es tambien un conjunto dominante.*

Demostración. Supongamos que no, luego tenemos un elemento $w \in (V \setminus S)$ tal que $(w, v) \notin E$ para ningun $v \in V$, entonces si considero $T = V \cup \{w\}$ tambien es un conjunto independiente, lo cual es absurdo, porque V era maximal. □

Teorema 3.28. *Dado G=(V, E) un grafo, un algoritmo que me construya un conjunto independiente maximal S, me genera una particion de nodos $V = S \cup (V \setminus S)$ tal que si tomo V como los nodos que juegan flanders y $(V \setminus S)$ como los nodos que juegan homero, tengo un equilibrio de nash. En definitiva, tal algoritmo me genera equilibrios de nash sobre el grafo G.*

Demostración. Sale del teorema 3.26. □

Teorema 3.29. *Sea G = (V, E) un grafo con al menos una arista tiene mas de un conjunto maximal independiente.*

Demostración. Consideremos la arista $(v, w) \in E$ que menciona la hipotesis. Ahora consideremos C_1 y C_2 conjuntos independientes maximales, construidos golosamente a partir de v y w. Debe valer $C_1 \neq C_2$ pues de lo contrario los nodos v, w de la arista estarian en el mismo conjunto independiente, lo cual es absurdo, porque el conjunto es independiente. Luego encontramos mas de un conjunto maximal independiente,como queriamos ver.

□

Teorema 3.30 (Existencia de multiples equilibrios de nash)**.** *Sea G=(V, E) un grafo finito con mas de dos jugadores conectados. Luego existe un equilibrio de nash, y no es unico.*

Demostración. Usando los teoremas 3.28 y 3.29. Aplicando el algoritmo sobre nodos iniciales v,w tales que $(v, w) \in E$, para que el conjunto independiente computado sea distinto. □

Teorema 3.31 (Algoritmo goloso de busqueda de un conjunto maximal)**.** *Sea G = (V, E), donde V es el conjunto de nodos del grafo, entonces:*

1. Sea $I = \emptyset$

2. Mientras haya nodos en V repetir

- *Elegir un nodo v_i de el conjunto V*
- $I = I \cup \{v\}$
- $V = V \setminus (\{v\} \cup f(v))$*, donde f(v) son los vecinos del nodo v.*

3. Devolver I.

I es un conjunto independiente maximal de G.

3.4.3. Inciso d

Se pide hallar familias de grafos de n nodos, conexos, tales que:

1. **Una familia de grafos tal que el numero de taladros sea independiente de n.** Vemos que en la familia de nodos K_n, o grafos completos, grafos donde estan presentes las aristas entre cada par de nodos, el numero de taladros necesarios para un equilibrio de nash es independiente de n. Mas aun, con un jugador que juegue flanders, y n-1 que jueguen homero. Se cumplen ambas propiedades mencionadas en 3.20, con las cuales justificamos en el inciso a que es un equilibrio de nash.

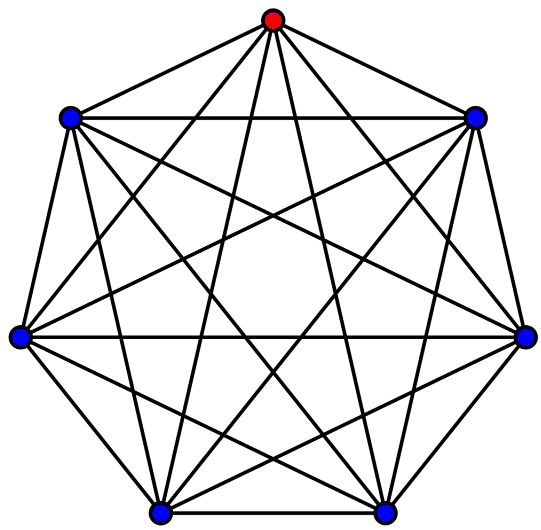

Figura 2: Grafo del item 3.d.1

2. **Una familia de grafos tal que el equilibrio de nash necesita al menos $\frac{n}{2}$ taladros, pero existe una distribucion de taladros tal que 2 sean suficientes para que todos tengan un taladro o tengan un vecino que tenga taladro.** Vemos que para este caso podemos considerar la familia de grafos indicada en las figuras debajo. 2 y 3. En la primer figura vemos que se cumplen las condiciones de 3.22.1 por lo tanto es un eq. de nash con $\frac{n}{2}$ taladros. En la segunda figura, los dos nodos centrales juegan taladro, entonces todos los nodos, o bien tienen taladro,o bien tienen un vecino con uno, esto ultimo NO es un equilibrio de nash.

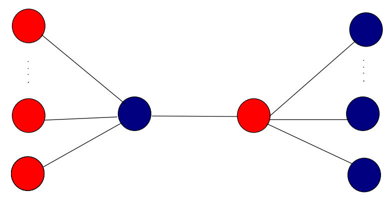

Figura 3: Grafo del item 3.d.2 exhibiendo la condicion de n/2 taladros.

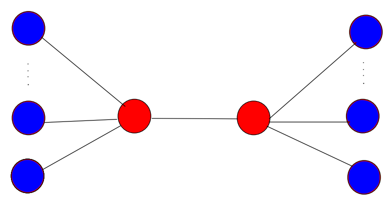

Figura 4: Grafo del item 3.d.2 exhibiendo la condicion de 2 taladros.

3. **Una familia de grafos tal que todo equilibrio de nash usa aproximadamente una fraccion $\frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}$, asumimos que si el grafo es conexo, no es union de grafos disjuntos.(pues hay una arista que los une, entonces no son disjuntos)**. Vemos que es casi una generalizacion del item anterior. Notemos que la fraccion $\frac{n}{k}$ es **aproximada**.

La idea es tener `nubes` de $\frac{n}{k}$ nodos sin conexion, cada nube se corresponderia con un grafo ${K_{\frac{n}{k}}}^c$. Luego una arista central, con dos nodos, llamemoslos v_1 y v_2. El conjunto de aristas del grafo quedaria determinado por las siguientes reglas:

a) v_1 y v_2 son vecinos.

b) Para toda nube n_i, $i \in \{1, ...k-2\}$, todos sus nodos $n_{i,j}$, estan conectados con v_1 y v_2 por las aristas $(n_{i,j}, v_1) \in E$ y $(n_{i,j}, v_2) \in E$

c) La nube n_{k-1} tiene todos sus nodos conectados a v_1 por las aristas $(n_{k-1,j}, v_2) \in E$

d) La nube n_k tiene todos sus nodos conectados a v_2 por las aristas $(n_{k,j}, v_2) \in E$

Las reglas de disposicion de estrategias es como sigue a continuacion:

a) Para toda nube n_i, $i \in \{1, ...k-1\}$ todos sus nodos juegan homero.

b) El nodo central v_1 juega flanders.

c) El nodo central v_2 juega homero.

d) La nube n_k, tiene todos sus nodos jugando flanders.

Puede pensarse una asignacion simetrica cambiando las estrategias de v1 y v2, y las ultimas 2 nubes en la enumeracion.
Es facil ver, dadas estas reglas, que valen las condiciones de 3.22.1,por lo tanto es un equilibrio de nash. Ademas, veamos que hay asignados $1 + \frac{n}{k}$ taladros.

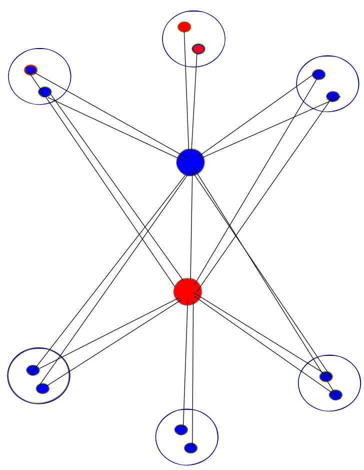

Figura 5: Grafo del item 3.d.3 con n y k fijos.