Teoría de Juegos

Parcial

---

1. Consideremos el siguiente juego combinatorio:

   > Tenemos n fichas en una bolsa, y k pilas que inicialmente están vacías.
   > Los jugadores I y II alternan sus movidas. Comienza I, y coloca una de las fichas de la bolsa en la pila que elija. Luego, II coloca una de las fichas de la bolsa en la pila que elija. Continúan así hasta que se vacía la bolsa. A partir de ese momento, juegan el Nim usual, y comienza el jugador que tiene el turno (I si n era par, II si n era impar).
   > Gana el que retira la última ficha.

   Demuestre que:

   a) Si n y k son pares, II tiene una estrategia gandora. ¿Cuál es?

   b) Si n es impar, II tiene una estrategia ganadora.

   c) Si $k = 3$, I puede dejar siempre una posición donde dos pilas tienen la misma cantidad de fichas, y la tercera tiene la misma cantidad o más. Esto es, las pilas quedan de la forma (x, x, y) con $x \leq y$ [sug.: inducción].

   d) Si $x = 2^h - 1$ para algún h, entonces $x \oplus (x+1) = 2^{h+1} - 1$ [sug.: inducción]. Si no, $x \oplus (x+1) < x$.

   e) Si $n \neq 2^j - 2$ y $k = 3$, I tiene una estrategia ganadora.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz de pagos de un juego de suma cero. Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ otra matriz tal que

   $$a_{ij} \leq b_{ij} \qquad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

   Probar que $Val(A) \leq Val(B)$.

   ¿Vale algo similar para juegos bimatriciales y sus equilibrios de Nash? Sug.: considere, para $M > 0$,

   $$\begin{array}{ccc} & L & R \\ L & 1,1 & 0,2 \\ R & 2,0 & -M,-M \end{array}$$

   encuentre todos los equilibrios de Nash, el pago en cada uno, y vea qué pasa cuando $M \to \infty$.

3. Tenemos un grafo cualquiera, donde cada nodo representa un jugador, y los links determinan si dos jugadores son vecinos o no. Cada jugador quiere tener un taladro, ya que le reporta un beneficio b, si bien comprarlo le genera un costo c.

   Cada uno puede elegir entre las siguientes estrategias[1]:

   - *Ned Flanders*: compra el taladro, que le proporciona una utilidad $b - c$.
   - *Homero*: no compra taladro, y se lo pide a un vecino, con lo cual su utilidad es b si alguno juega *Ned Flanders*, y es 0 si todos juegan *Homero*.

   Suponiendo que $c < b$, probar que:

   a) Si los rojos juegan *Ned Flanders*, y los azules *Homero*, ¿la imagen corresponde a un equilibrio de Nash?
   b) Para todo grafo finito, existe un equilibrio de Nash. Probar que nunca es único si hay al menos dos jugadores conectados.
   c) Describa un algoritmo simple para encontrar algún equilibrio de Nash.
   d) Proponga familias de grafos sencillos con N nodos, sin nodos aislados, tal que:
      - en una familia, el equilibrio de Nash necesita un número de taladros independiente de N.
      - en otra, todo equilibrio de Nash necesita al menos $N/2$ taladros, pero existe una distribución de taladros tal que 2 sean suficientes para que todos tengan un taladro o tengan un vecino que tenga taladro.
      - en otra, todo equilibrio de Nash utiliza aproximadamente una fracción N/k de taladros, con k fijo (y que el grafo no sea unión de dos o más grafos disjuntos).

El parcial finaliza el **miércoles 27/05** a las 14 hs, y deberían entregarlo antes de que comience la clase. También pueden tipearlo -o escanearlo- y enviarlo por mail a jpinasco@gmail.com.

[1] Idea de Rafa Martín.