

NO GUANYARÀS AQUEST JOC SI JO NO JUGUE AMB TU¹

PRÁCTICA 4

1. Determine los conjuntos de pagos posibles NTU y TU para los siguientes juegos. Indique los ótimos de Pareto:

$$\begin{pmatrix} (0, 4) & (3, 2) \\ (4, 0) & (2, 3) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (3, 1) & (0, 2) \\ (1, 2) & (3, 0) \end{pmatrix}$$

2. Sea $S = \{(x, y) : y \geq 0, y \leq 4 - x^2\}$ el conjunto de pagos posibles NTU.

- Hallar la solución NTU si $(u^*, v^*) = (0, 0)$.
- Hallar la solución NTU si $(u^*, v^*) = (0, 1)$.
- Hallar el valor y estrategias óptimas.

3. Encuentre la solución NTU en los siguientes juegos:

$$\begin{pmatrix} (6, 3) & (0, 0) & (0, 0) \\ (1, 8) & (4, 6) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) & (0, 0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1, 0) & (-1, 1) & (0, 0) \\ (3, 3) & (-2, 9) & (2, 7) \end{pmatrix}$$

4. Encuentre la solución TU en los siguientes juegos:

$$\begin{pmatrix} (5, 2) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 4) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (3, 2) & (0, 5) \\ (2, 1) & (1, 0) \end{pmatrix}$$

5. Encuentre la función característica de los siguientes juegos de tres jugadores:

- Observe que este juego es de suma cero, Yérez contra Xérez y Zérez:

si Xerez elige a

		Zerez	
		a	b
Yerez	a	$(-2, 1, 1)$	$(1, -4, 3)$
	b	$(1, 3, 4)$	$(10, -5, -5)$

si Xerez elige b

		Zerez	
		a	b
Yerez	a	$(-1, -2, 3)$	$(-4, 2, 2)$
	b	$(12, -6, -6)$	$(-1, 3, -2)$

- Este no:

6. Sea $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. Xérez elige $i \in S$. Yérez -conociendo i - elige $j \in S$, $j \neq i$. Zérez -conociendo i , j - elige $k \in S$, $k \neq i$, $k \neq j$. El pago es $(|i - j|, |j - k|, |k - i|)$. Encuentre la forma coalicional del juego.

¹Cesar Borgia a su padre, cuando éste se transformó en el Papa Alejandro VI.

si Xerez elige a

		Zerez	
		a	b
Yerez	a	(1, 2, 1)	(3, 0, 1)
	b	(-1, 6, -3)	(3, 2, 1)

si Xerez elige b

		Zerez	
		a	b
Yerez	a	(-1, 2, 4)	(1, 0, 3)
	b	(7, 5, 4)	(3, 2, 1)

7. Para el siguiente juego de dos personas, $\begin{pmatrix} (0, 2) & (4, 1) \\ (2, 4) & (5, 4) \end{pmatrix}$,

- Hallar el juego asociado en forma coalicional. ¿Es simétrico?
- Hallar el valor TU para el juego en forma estratégica. ¿Quién gana más?

8. Hallar las imputaciones y el núcleo en la Batalla de los Sexos con pagos $\begin{pmatrix} (4, 2) & (1, 1) \\ (0, 0) & (2, 4) \end{pmatrix}$.

9. Un juego con función característica v se dice simétrico si $v(s)$ depende sólo en el cardinal de S , esto es, $v(s) = f(|S|)$ para cierta f .

- En un juego simétrico de tres jugadores con $v(\{i\}) = 0$, $v(\{i, j\}) = a$, $v(\{I, II, III\}) = 3$, ¿para qué valores de a el núcleo es no vacío?
- En un juego simétrico de cuatro jugadores con $v(\{i\}) = 0$, $v(\{i, j\}) = a$, $v(\{i, j, k\}) = b$, $v(\{I, II, III, IV\}) = 4$, ¿para qué valores de a y b el núcleo es no vacío?
- En un juego simétrico de n jugadores, hallar condiciones en los valores de $v(S) = f(|S|)$ para que el núcleo no sea vacío.

10. Sea $\delta_i = v(N) - v(N - \{i\})$ para $1 \leq i \leq n$. Demuestre que el núcleo es vacío si $\sum_1^n \delta_i < v(N)$.

11. **Mercado de Guantes:** Sea $N = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$, y la función característica es

$$v(S) = \min\{|S \cap P|, |S \cap Q|\}.$$

- Hallar el núcleo si $|P| = |Q| = 2$.
 - Ver que el núcleo es un único punto si $|P| = 2$, $|Q| = 3$.
 - ¿Qué pasa si $|P| = n$, $|Q| = m$?
12. Xérez tiene un objeto que para él no vale nada y desea venderlo. Para Yérez vale 30, y para Zérez vale 40. Hallar la función característica y el valor de Shapley. ¿Está este valor en el núcleo?
13. Hallar el valor de Shapley del juego con función característica

$$\begin{array}{llll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2, 2\}) = 3 & & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1, 3\}) = -1 & v(\{1, 2, 3\}) = 6 \\ & v(\{3\}) = -4 & v(\{2, 3\}) = 3 & \end{array}$$

14. Demostrar que el valor de Shapley es una imputación.

15. Hallar el valor de Shapley de los juegos de n personas con $n > 2$ con funciones características:

- $v(S) = \begin{cases} |S| & 1 \in S \\ 0 & 1 \notin S \end{cases}$
- $v(S) = \begin{cases} |S| & \{1, 2\} \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \{1, 2\} \cap S = \emptyset \end{cases}$

16. Hallar el valor de Shapley para cuatro accionistas con 10, 30, 30 y 40 acciones.
17. **Casi Dictador:** Hallar el valor de Shapley para $n \geq 3$ jugadores, si Xérez tiene $2n - 3$ acciones, y el resto tiene 2.
18. **(*) Cleto:** Hallar el valor de Shapley para el vicepresidente (sólo vota en caso de empate).
19. Analizar el poder de los partidos políticos y comparar con la proporción de votantes que tienen si:
 - a) Hay un partido grande con $1/3$ de los votos y tres pequeños con $2/9$ cada uno.
 - b) Hay dos partidos grandes con $1/3$ de los votos y tres pequeños con $1/9$ cada uno.
20. Considere el juego de n jugadores $1, 2, \dots, n$ cuya función característica satisface

$$v(S) = k \quad \text{si } \{1, \dots, k\} \in S, \quad \text{pero } k+1 \notin S.$$

Hallar el valor del juego, y generalizar al caso

$$v(S) = a_k \quad \text{si } \{1, \dots, k\} \in S, \quad \text{pero } k+1 \notin S$$

con $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

21. **El núcleo de un juego simple:** en un juego simple (N, v) , el jugador i tiene poder de veto si $v(N - \{i\}) = 0$.
 - a) Demostrar que el núcleo es vacío si y solo si no hay jugadores con poder de veto.
 - b) Caracterizar el núcleo.
22. Demostrar que si el núcleo es no vacío contiene al nucleolo.
23. Demostrar que en un juego de tres jugadores de suma constante, el nucleolo es el valor de Shapley.
24. Hallar el nucleolo en los juegos 8, 9, 13.
25. Xérez puede llevar su ganado al mercado y ganará \$1200. Pero debe pasar por los campos de Yérez o Zérez, que le cobran una tasa. ¿Cuál sería una tasa razonable? Si la función característica es

$$v(X) = v(Y) = v(Z) = v(YZ) = 0, \quad v(XY) = v(XZ) = v(XYZ) = 1200,$$

- a) Hallar el núcleo y el nucleolo.
 - b) Calcular el valor de Shapley.
 - c) Cuál utilizaría y por qué?
26. Oópez y Pópez quieren vender sus casas y las valúan 10 y 20 respectivamente. Dos compradores potenciales Mérez y Nérez desean comprarlas. Mérez las valúa 14 y 23, y Nérez 18 y 25.
 - a) Determinar la función característica del juego.
 - b) Hallar el valor de Shapley.
 - c) Hallar el nucleolo.