Juegos potenciales

Práctica 5

Sea G un juego con N jugadores $\{1, \cdots, n\}$; cada jugador i tiene un conjunto finito de estrategias X_i, y sus pagos están dados por una función de utilidad $u_i : \prod_{i=1}^{n} \to \mathbb{R}$. Dado $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, sea

$$x' = (x_{-i}, y_i) = (x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n),$$

es decir, sólo el jugador i cambia su estrategia. Decimos que $\Phi : \prod_{j=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ es una *función potencial* si para todo jugador i, todo vector de estrategias x, y estrategias x_i, y_i en X_i se tiene

$$\Phi(x_{-i}, x_i) - \Phi(x_{-i}, y_i) = u_i(x_{-i}, x_i) - u_i(x_{-i}, y_i).$$

El juego se dirá un *juego potencial.*

1. Probar que en todo juego potencial existe un equilibrio de Nash donde cada jugador utiliza una estrategia pura.

   Sug: cuando u represente una ganancia, los máximos de Φ serán equilibrios de Nash; si u_i representa un costo, los mínimos de Φ serán equilibrios de Nash.

2. Verificar que P es una función potencial para el siguiente Dilema del Prisionero G (los pagos son años en la cárcel):

$$G = \begin{pmatrix} (1,1) & (9,0) \\ (0,9) & (6,6) \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Verificar que G no tiene una función potencial:

$$G = \begin{pmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (0,1) \end{pmatrix}$$

4. Probar que si Φ y Ψ son funciones potenciales de un mismo juego, entonces existe una constante c tal que $\Phi(x) - \Psi(x) = C$ para todo vector de estrategias x.

5. Si $\Phi : \prod_{j=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ satisface para todo jugador i, todo vector de estrategias x, y estrategias x_i, y_i en X_i, que existe una constante $c_{i,x_i} > 0$ tal que

$$\Phi(x_{-i}, x_i) - \Phi(x_{-i}, y_i) = c_{i,x_i}[u_i(x_{-i}, x_i) - u_i(x_{-i}, y_i)],$$

   decimos que es una *función potencial escalar.* Demostrar que existe un equilibrio de Nash donde cada jugador utiliza una estrategia pura.

6. Sea G un juego potencial con N jugadores, $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, $\Phi(x)$ la función potencial, y definamos un costo social $C(x)$. Si

$$aC(x) \leq \Phi(x) \leq bC(x),$$

   con $a, b > 0$, entonces el precio de la estabilidad es menor o igual a b/a.

7. Un ε-equilibrio es una estrategia $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ tal que, para todo jugador i, y estrategias x_i, y_i en X_i se tiene
$$u_i(x_{-i}, x_i) + \varepsilon \geq u_i(x_{-i}, y_i)$$
(y_i puede mejorar el pago, pero menos que ε). Probar que desde un vector de estrategias x se llega a un ε-equilibrio en a lo sumo $\Phi(x)/\varepsilon$ pasos.

8. Sea G un juego tal que los conjuntos de estrategias son un intervalo de la recta, $X_i = [a, b]$, y las funciones de utilidad son C^2. Entonces:

   a) Φ es una función potencial para G si y solo si Φ es C^1 y
   $$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

   b) * G es un juego potencial si y solo si
   $$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}.$$
   Además, fijando un vector de estrategias y, una curva C^1 a trozos $\gamma(t) : [0, 1] \to [a, b]^n$, con $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = x$, la siguiente función Φ es una función potencial:
   $$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial u_i(\gamma(t)}{\partial x_i} \gamma_i'(t) dt.$$

9. * Probar que en un juego de N jugadores, simétrico (todos tienen el mismo conjunto de estrategias, y las mismas funciones de utilidad), existe un equilibrio de Nash simétrico (donde todos juegan la misma estrategia, pura o mixta). En un juego potencial simétrico, ¿existe un equilibrio de Nash simétrico en estrategias puras?

10. * En el ejemplo de Pigou con costo no lineal (la ruta A cuesta 1 siempre, B cuesta $c(x) = x^p$), verificar que el precio de la anarquía crece con p como $p/\ln(p)$.

    Sug: desvíe ε por A, y el resto por B, con
    $$\varepsilon = 1 - (p + 1)^{-1/p},$$
    el costo será $\varepsilon + (1 - \varepsilon)^{p+1}$, y el equilibrio cuesta 1.