

Trabajo Práctico 1

Cálculo de isotermas en sectores circulares

Jueves 3 de septiembre de 2015

Métodos Numéricos

Integrante	LU	Correo electrónico
Nahuel Lascano	476/11	laski.nahuel@gmail.com
XXXX	XXXX	xxxx
XXXX	XXXX	xxxx

En este trabajo aplicamos dos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (factorización LU y eliminación gaussiana) para el cálculo de isotermas de sectores circulares, dadas las temperaturas de las circunferencias interior y exterior.

Palabras clave: factorización LU, eliminación gaussiana, sistemas de ecuaciones lineales, matriz banda



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellon I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
<http://www.fcen.uba.ar>

Índice

1. Introducción teórica	2
2. Desarrollo	3
3. Resultados	5
4. Discusión	6
5. Conclusiones	7
6. Apéndice	7
6.1. Apéndice A: Enunciado	7
6.2. Apéndice B: Elección del orden de las incógnitas para obtener una matriz banda . . .	7
7. Referencias	7

1. Introducción teórica

2. Desarrollo

De la discretización de la ecuación del calor provista por el informe resulta una nueva ecuación que nos va a servir para armar nuestro sistema discreto:

$$\frac{t_{j-1,k} - 2t_{jk} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{t_{j,k-1} - 2t_{jk} + t_{j,k+1}}{(\Delta \theta)^2} = 0 \quad (1)$$

Para poder armar el sistema $Ax = b$ equivalente, es necesario:

- Extraer los factores que multiplican a cada una de las cinco incógnitas: $t_{j-1,k}$; $t_{j,k}$; $t_{j+1,k}$; $t_{j,k-1}$ y $t_{j,k+1}$.

Estos se obtienen de la ecuación 1.

$$\begin{aligned} t_{j-1,k} & * \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j \Delta r} \right) \\ t_{j,k} & * \left(\frac{-2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_j \Delta r} - \frac{2}{r_j^2 (\Delta r)^2} \right) \\ t_{j+1,k} & * \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} \right) \\ t_{j,k-1} & * \left(\frac{1}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} \right) \\ t_{j,k+1} & * \left(\frac{1}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} \right) \end{aligned}$$

Para simplificar, en adelante llamaremos $F_{j,k}$ al factor que multiplica a la incógnita $t_{j,k}$ y $Ft_{j,k}$ a $F_{j,k} * t_{j,k}$.

- Analizar los “casos borde”: aquellos puntos donde la ecuación 1 no vale.

Para evitar confusiones de variables, tomaremos $\theta_0 = 0$ como el menor valor posible de θ y θ_{n-1} como el mayor, pues vale $(r_j, \theta_n) = (r_j, \theta_0)$ para cualquier j .

Los casos interesantes para valores de j, k entonces son:

1. La pared interior del horno ($j = 0$; $k = 0, \dots, n-1$). La ecuación en esos casos es $t_{0,k} = T_i(\theta_k)$.
2. La pared exterior del horno ($j = m$; $k = 0, \dots, n-1$). La ecuación en esos casos es $t_{m,k} = T_e(\theta_k)$.
3. El valor mínimo de θ ($j = 0, \dots, m$; $k = 0$). Se debe reemplazar $t_{j,k-1}$ por $t_{j,n-1}$ en todas las ecuaciones correspondientes.
4. El valor máximo de θ ($j = 0, \dots, m$; $k = n-1$). Se debe reemplazar $t_{j,k+1}$ por $t_{j,0}$ en todas las ecuaciones correspondientes.

Estos últimos reemplazos se pueden resumir en

$$(j, k) \Rightarrow (j, k \bmod n)$$

- Combinar los puntos anteriores para plantear el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} t_{0,k} &= T_i(\theta_k) & \forall k &= 0, \dots, n-1 \\ t_{m,k} &= T_e(\theta_k) & \forall k &= 0, \dots, n-1 \\ Ft_{j-1,k} + Ft_{j,k} + Ft_{j+1,k} + Ft_{j,k-1} + Ft_{j,k+1} &= 0 & \forall j &= 1, \dots, m-1; k = 1, \dots, n-2 \\ Ft_{j-1,0} + Ft_{j,0} + Ft_{j+1,0} + Ft_{j,n-1} + Ft_{j,1} &= 0 & \forall j &= 1, \dots, m-1 \\ Ft_{j-1,n-1} + Ft_{j,n-1} + Ft_{j+1,n-1} + Ft_{j,n-2} + Ft_{j,0} &= 0 & \forall j &= 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Del mismo podemos obtener fácilmente la matriz A (que tendrá 5 valores no nulos por fila a lo sumo) y el vector b (que será nulo en todas sus componentes salvo aquellas correspondientes a $j = 0$ y $j = m$).

- Resta pensar un orden para las incógnitas que permita asegurar que la matriz resultante sea *banda*. El mismo es:

$$(0, 0); (0, 1); \dots; (j, n - 1); (j + 1, 0); (j, 1); \dots; (m, n - 1)$$

Sobre el proceso llevado adelante para su elección hablaremos en la sección 6.2.

3. Resultados

4. Discusión

5. Conclusiones

6. Apéndice

6.1. Apéndice A: Enunciado

6.2. Apéndice B: Elección del orden de las incógnitas para obtener una matriz banda

7. Referencias