Métodos Numéricos
Segundo Cuatrimestre 2015
Práctica 9
Ceros de funciones

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1. Las ecuaciones siguientes tienen todas una raíz en el intervalo $(0, 16)$.

   - $x\cos(x) = \ln(x)$
   - $2x - e^{-x} = 0$
   - $e^{-2x} = 1 - x$

   Para cada una de ellas, se pide:

   (a) Realizar dos iteraciones de los métodos de bisección, Newton, secante y regula falsi, observando cuál es la distancia a la solución en cada caso.

   (b) Comparar los métodos.

2. Las raíces del polinomio $p(x) := x^3 + 94x^2 - 389x + 294$ son 1, 3 y -98. El punto $x_0 = 2$ debería ser en este caso un buen punto inicial para calcular cualquiera de las raíces "pequeñas" del polinomio p por medio del método de Newton. Hacer los cálculos y explicar lo que sucede.

3. Las raíces cuadradas de un número positivo a son los ceros del polinomio $f(x) = x^2 - a$. Aplicando el método de Newton al polinomio f, se obtiene la sucesión de aproximaciones $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ $(n \geq 0)$.

   (a) Si $x_0 > \sqrt{a}$, probar que $x_{n+1} < x_n$ para $n \geq 0$ (suponiendo que las operaciones se realizan con precisión infinita)

   (b) Deducir una fórmula análoga para el cálculo de las raíces n–ésimas de a, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. En las siguientes funciones, proponer un intervalo cerrado en el que se cumplan las condiciones para aplicar el método de punto fijo si existe, o demostrar que no existe tal intervalo.

   (a) $g(x) = \frac{x^5}{6}$

   (b) $g(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$ (usando $[0, 1]$ como intervalo)

   (c) $g(x) = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2}$

   (d) $g(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$

5. La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una sola raíz en el intervalo $[1, 2]$. Existen muchas maneras de reducir este problema al de calcular un punto fijo $x = g(x)$ de una función g adecuada. Por ejemplo, se puede elegir como función $g(x)$ alguna de las siguientes:

   (a) $g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

   (b) $g(x) = (\frac{10}{x} - 4x)^{\frac{1}{2}}$

   (c) $g(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$

   (d) $g(x) = (\frac{10}{4+x})^{\frac{1}{2}}$

   (e) $g(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$

Determinar si se cumplen las condiciones para aplicar el método de punto fijo sobre g para cada una de las funciones en el intervalo $[1,2]$. Para los casos afirmativos, calcular el orden de convergencia, y ejecutar el método comenzando con $x_0 = 1.5$.

6. Sea $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}$, $n \geq 1$ (la notación de puntos suspensivos denota n raíces anidadas).

   (a) Hallar una función g tal que $x_{n+1} = g(x_n)$ para $n \geq 1$.

   (b) Analizar la convergencia de la sucesión definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \geq 0)$, comenzando por $x_0 = 1.5$.

7. Dada $g(x) = x^2 - 2x + 2$, ¿para qué valores de x_0 la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \geq 0)$ converge? ¿Cuál es el orden de convergencia?

8. Probar que la sucesión definida por $x_{n+1} = \cos(x_n)$ $(n \geq 0)$ es convergente para cualquier valor $x_0 \in \mathbb{R}$, y el límite no depende de x_0.

9. Se trata de resolver la ecuación $x + \ln x = 0$, cuya raíz es $\alpha \approx 0.5$, por medio de un método iterativo. Se proponen las siguientes tres fórmulas de iteración:

$$F_1: \quad x_{n+1} = -\ln x_n\,; \qquad F_2: \quad x_{n+1} = e^{-x_n}\,; \qquad F_3: \quad x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}\,.$$

   (a) Indicar cuáles de las tres fórmulas *pueden* utilizarse, e indicar su orden de convergencia.

   (b) Hallar una fórmula de iteración con mayor orden de convergencia que las anteriores.

10. Sea f un polinomio con una raíz múltiple $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (a) Demostrar que α es una raíz simple de la función racional f/f'.

    (b) Sea $f(x) := (x-1)(x-2)^2$. Aplicar el método de Newton a las funciones f y f/f' con $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo tal que las sucesiones resultantes converjan a (la raíz múltiple de f) $x = 2$. Comparar los órdenes de convergencia de ambas sucesiones.

11. El polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ tiene una única raíz real en $\xi \approx 1.839\ldots$. Consideramos la iteración de punto fijo $x_n = g(x_{n-1})$ para

$$g_1(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \quad \text{y} \quad g_2(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

    (a) Mostrar que el punto fijo de $g_1(x)$ y $g_2(x)$ es la raíz ξ de $p(x)$.

    (b) Demostrar que $g_1(x)$ converge si consideramos el intervalo $[1,2]$ y que para $g_2(x)$ no es posible asegurar la convergencia.

    (c) Demostrar que $g_1(x)$ converge para cualquier $x_0 \geq 0$.

12. Kepler descubrió las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Los planetas giran en una órbita elíptica, uno de cuyos focos lo ocupa el Sol, pero no lo hacen con un movimiento uniforme, sino cubriendo áreas iguales en tiempos iguales. El plasmado matemático de esta ley es la Ecuación de Kepler:

$$M = E - e\sin E$$

donde M es la anomalía media o ángulo que recorrería un planeta ficticio que se moviese con movimiento uniforme por la circunferencia principal, e es la excentricidad de la elipse situada entre $0 \leq e < 1$ y E es la anomalía excéntrica que es la **incógnita** que permite obtener la posición del planeta. Se pide:

(a) Probar que si la iteración de punto fijo dada por la función $g(E) = M + e\sin(E)$ converge, entonces converge a una solución de la ecuación de Kepler.

(b) Dados $M = 1$ y $e = 0.5$, demostrar que la iteración de punto fijo dada por g converge para cualquier $E_0 \in [1, 2]$.

(c) Plantear la iteración de Newton y probar que converge siempre para cualquier valor de M y e, partiendo de un E_0 lo suficientemente cerca de la solución, e indicar el orden de convergencia.

Sugerencia: reescribir la ecuación de Kepler como $0 = E - e\sin E - M$.

13. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$ en (a, b) que tiene una raíz doble en un punto $\alpha \in (a, b)$.

(a) Demostrar que si la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definida por el método de Newton converge, entonces lo hace *linealmente* para x_0 suficientemente cercano a α.

(b) Analizar el orden de convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definida por:

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ (n \geq 0)$$

para x_0 suficientemente cercano a α.

14. Dada la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, cada una de las siguientes funciones determina un problema equivalente de punto fijo:

- $g_1(x) = x^2 - 2$
- $g_2(x) = \sqrt{x + 2}$
- $g_3(x) = 1 + \frac{2}{x}$
- $g_4(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$

Analice cada una de las correspondientes iteraciones de punto fijo para la raíz 2 considerando $|g_i^{'}(2)|$.

Resolver en computadora

i Implementar el método de Bisección, Newton y Secante, y testear las implementaciones encontrando al menos una raíz de las siguientes ecuaciones:

- $x^3 - 2x - 5 = 0$
- $e^{-x} = x$
- $x \cdot \sin(x) = 1$
- $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

(a) ¿Qué criterio de parada debería usar?

(b) ¿Cuál es el orden de convergencia en cada caso?

(c) Compare sus resultados con los de alguna rutina para hallar ceros de funciones.

ii Para los casos del ejercicio 4 en que se haya encontrado un intervalo de convergencia, calcular el punto fijo.

iii Usando lo visto en el ejercicio 8, hallar una aproximación con tres dígitos significativos correctos de la (única) solución real α de la ecuación $x = \cos(x)$.

iv Calcular el valor de α en el ejercicio 9 con cada uno de los métodos analizados.

v Sabiendo que la excentricidad de la elipse formada por la órbita terrestre es de 0.0167, se pide hallar la anomalía excéntrica para $M = 27/365 * 2\pi$ (es decir, 27 días después de que la Tierra haya pasado por su punto más cercano al sol), usando la ecuación de Kepler vista en el ejercicio 12.

vi Verifique la convergencia (o divergencia) y compare los diferentes órdenes de convergencia de cada una de las iteraciones del ejercicio 14, y compare con lo hallado analíticamente.

Funciones útiles

Es muy útil poder graficar la función en cuestión para poder determinar un intervalo inicial más conveniente.

- Graficar una función usando matplotlib de Python:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = lambda x: x ** 2 - 0.5 * x + 2
xs = np.linspace(-5,5,200)
plt.plot(xs, f(xs), label="f(x) = x^2 - x/2 + 1")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

- Graficar una función usando Matlab/Octave:

```matlab
f = @(x) x.^2 - 0.5*x + 2
xs = -5 : 10/200 : 5;
plot(xs,f(xs))
legend('f(x)=x^2-0.5*x+2')
```

En general, el software para resolver $f(x) = 0$ requiere que el usuario proporcione la función f para cualquier valor x. También suele ser común proporcionar tolerancias relativas o absolutas del error para utilizarse en el criterio de parada del proceso iterativo implementado.

- `MATLAB` cuenta con la función `fzero` para la resolución de ecuaciones no lineales en una variable. Ejemplo para calcular π buscando el cero de la función sin con $x_0 = 3$:

```matlab
fun = @sin; % function
x0 = 3; % initial point
x = fzero(fun,x0)
```

References

[1] R. Brent. *Algorithms for Minimization Without Derivatives.* Prentice-Hall, 1973.

[2] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis.* Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.

[3] G. Dahlquist and Å. Björck. *Numerical Methods in Scientific Computing: Vol. 1.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008.

[4] M. A. Malcolm C. B. Moler Forsythe, G. E. *Computer Methods for Mathematical Computations.* Prentice-Hall, 1976.

[5] Michael T. Heath. *Scientific Computing An Introductory Survey.* The McGraw-Hill, 1997.