Métodos Numéricos
Segundo Cuatrimestre 2015
Práctica 5
Autovalores y Autovectores.
Método de la potencia.
Descomposición en Valores Singulares.

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1. Hallar los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar las afirmaciones siguientes:

   a) Si A es simétrica entonces todos sus autovalores son reales.
   b) Si A es simétrica entonces existe una base de autovectores reales de A.
   c) Si A es simétrica y definida positiva (resp. negativa) entonces todos sus autovalores son reales positivos (resp. negativos).
   d) Si A es ortogonal entonces todos sus autovalores tienen módulo 1.
   e) Si A es antisimétrica entonces 0 es el único autovalor real posible.
   f) Si A es triangular entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal.

3. Sea A una matriz de $n \times n$ y λ un autovalor de A.

   a) Probar que λ^k es un autovalor de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.
   b) Probar que si $\lambda \neq 0$ y A es inversible entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}.
   c) Probar que $a\lambda + b$ es un autovalor de $aA + bI$.
   d) Sea $P(x) := a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$. Probar que $P(\lambda)$ es un autovalor de $P(A) := a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_mI$.

4. Sea A una matriz con dos autovalores distintos λ_1, λ_2. Sean v_1, v_2 autovectores de A correspondientes λ_1, λ_2 respectivamente.

   a) Demostrar que v_1, v_2 son linealmente independientes.
   b) Si A es simétrica, demostrar que v_1, v_2 son ortogonales.

5. Demuestre que en el método de la potencia normalizado, los vectores $x^{(k)}$ convergen a un autovector de λ_1.

6. Sea A una matriz simétrica de $\mathbb{R}^{n\times n}$ cuyos autovalores (reales) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ satisfacen la condición $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base ortonormal de autovectores de A tal que x_i es autovector de autovalor λ_i para $1 \leq i \leq n$. Dado un vector inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_1^t y_0 \neq 0$, se define la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ por:

$$y_{k+1} := \frac{Ay_k}{\|Ay_k\|} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

   donde $\|\cdot\|$ es una norma arbitraria.

   Demostrar que $A^k y_0 = a_1\lambda_1^k x_1 + \cdots + a_n\lambda_n^k x_n$ (donde $a_i = y_0^t x_i$ para $1 \leq i \leq n$) y que $y_k = \frac{A^k y_0}{\|A^k y_0\|}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

7. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define el *cociente de Rayleigh* r_k por $r_k := \frac{y_k^t A y_k}{y_k^t y_k}$. Demostrar que $\lim_{k\to\infty} r_k = \lambda_1$, es decir, que el método de las potencias converge. Más aún, demostrar que los errores relativos verifican:
$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = n_k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k},$$
donde los números n_k forman una sucesión acotada (notación: $\frac{r_k-\lambda_1}{\lambda_1} = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)$).

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distintos y autovectores $v_1, \dots, v_n$.

   a) Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal tal que $Hv_1 = \alpha e_1$. Justificar como se puede obtener esta matriz. Demostrar que
   $$HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^t \\ 0 & B \end{bmatrix}$$
   con $B \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ y $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

   b) Demostrar que $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de B.

   c) Sea w_2 el autovector de B asociado a λ_2. Demostrar que
   $$v_2 = H^{-1}\begin{bmatrix} \beta \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ con } \beta = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} b^t w_2.$$

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r y $A = U\Sigma V^t$ su descomposición en valores singulares (SVD), con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, siendo $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Llamamos a σ_i el i-ésimo valor singular. Sean $v_1, \dots, v_n$ las columnas de V y $u_1, \dots, u_m$ las columnas de U. Demostrar:

   a) $v_1, \dots, v_n$ son autovectores de A^tA.

   b) $u_1, \dots, u_m$ son autovectores de AA^t.

   c) $\lambda_i = \sigma_i^2$ son los autovalores de A^tA asociados al autovector v_i.

10. Hallar la descomposición en valores singulares de las siguientes matrices.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ la descomposición SVD de A.

   a) Expresar en función de U, Σ y V a las siguientes matrices:
      1) A^tA
      2) AA^t
      3) $(A^tA)^{-1}A^t$ (asumiendo A con columnas linealmente independientes)

   b) Hallar la descomposición SVD de las siguientes matrices:
      1) A^t
      2) A^{-1} (suponiendo $m = n$ y A inversible)

   c) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, hallar los valores singulares de la matriz $(A^tA + \alpha I)^{-1}A^t$ y expresarlos en función de α y los valores singulares de A.

12. Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

    a) Demostrar que todos los valores singulares de A son iguales si y solo si A es múltiplo de una matriz ortogonal.

    b) Demostrar que A y B tienen los mismos valores singulares si y solo si existen P y Q matrices ortogonales tal que $A = PBQ$.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$, donde I_n es la matriz indentidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de A.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

15. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene columnas ortogonales $w_1, w_2, \ldots, w_n$ donde $\|w_i\|_2 = \alpha_i > 0$. Calcular A^tA y hallar las matrices U, Σ y V de la descomposición en valores singulares de A.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, con $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar la descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es la descomposición SVD de R.

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango 1. Llamamos rango de A a la dimensión del espacio generado por la imagen $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Sea u un vector unitario en $Im(A)$.

    a) Demostrar que todas las columnas de A son múltiplos de u.

    b) Mostrar que A se puede escribir de la forma $A = \sigma uv^t$, con $v \in \mathbb{R}^n$ unitario y $\sigma > 0$.

    c) Mostrar que existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ cuya primer columna es u y una matriz ortogonal $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cuya primer columna es v. ¿Cómo podría construir dichas matrices?

    d) Deducir que toda matriz A de rango 1 tiene descomposición SVD. ¿Quién es Σ?

18. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ su descomposición SVD. Demostrar:

    a) $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ se maximiza para $x = v_1$, con v_1 la primer columna de V.

    b) $\|A\|_2 = \sigma_1$. Deducir que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$.

    c) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$.

    d) Si $m = n$ y A es inversible, entonces $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$.

Resolver en computadora

I Aplicar el método de las potencias para encontrar el máximo autovalor de A comenzando con $x^{(0)} = (1, 0, 0)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

II Hallar todos los autovalores y autovectores de las siguientes matrices usando el método de las potencias:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

III Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Si $A = U\Sigma V^t$ es su descomposición en valores singulares con U y V ortogonales, Σ diagonal con elementos en la diagonal en orden decreciente, u_i las columnas de U, v_i las columnas de V y σ_i los valores singulares, verificar que:

- $\|Av_1\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
- Si $rg(A) = r$, entonces $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$

Funciones útiles

Tanto Matlab[1] como Numpy[2] proveen funciones para calcular la descomposición SVD de una matriz.

- En Matlab:

```
A = [8  2; 2  4; 5  3]
[U,S,V] = svd(A)
```

- En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A = matrix([[8,2],[2,4],[5,3]], float)
U, s, V = svd(A)
```

En los dos casos, un segundo parámetro permite generar la descomposición en su forma 'corta'.

Referencias

[1] J. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997.

[2] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations.* Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.

[3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra Book and Solutions Manual.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

[1] http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/svd.html
[2] http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.svd.html