DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico 1
Cálculo de isotermas en sectores circulares

Jueves 3 de septiembre de 2015 Métodos Numéricos

Integrante	LU	Correo electrónico
Nahuel Lascano	476/11	laski.nahuel@gmail.com
XXXX	XXXX	xxxx
XXXX	XXXX	xxxx

En este trabajo aplicamos dos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (factorización LU y eliminación gaussiana) para el cálculo de isotermas de sectores circulares, dadas las temperaturas de las circunferencias interior y exterior.

Palabras clave: factorización LU, eliminación gaussiana, sistemas de ecuaciones lineales, matriz banda

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellon I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autonoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Introducción teórica

2. Desarrollo

De la discretización de la ecuación del calor provista por el informe resulta una nueva ecuación que nos va a servir para armar nuestro sistema discreto:

$$\frac{t_{j-1,k} - 2t_{jk} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r}\frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{t_{j,k-1} - 2t_{jk} + t_{j,k+1}}{(\Delta \theta)^2} = 0 \tag{1}$$

Para poder armar el sistema $Ax = b$ equivalente, es necesario:

- Extraer los factores que multiplican a cada una de las cinco incógnitas: $t_{j-1,k}$; $t_{j,k}$; $t_{j+1,k}$; $t_{j,k-1}$ y $t_{j,k+1}$.
  Estos se obtienen de la ecuación 1.

$$\begin{aligned}
&t_{j-1,k}(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j\Delta r}) \\
&t_{j,k}(\frac{-2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_j\Delta r} - \frac{2}{{r_j}^2(\Delta r)^2}) \\
&t_{j+1,k}(\frac{1}{(\Delta r)^2}) \\
&t_{j,k-1}(\frac{1}{{r_j}^2(\Delta \theta)^2}) \\
&t_{j,k+1}(\frac{1}{{r_j}^2(\Delta \theta)^2})
\end{aligned}$$

  Para simplificar, en adelante llamaremos $F_{j,k}$ al factor que multiplica a la incógnita $t_{j,k}$ y $Ft_{j,k}$ a $F_{j,k} * t_{j,k}$.

- Analizar los "casos borde": aquellos puntos donde la ecuación 1 no vale.

  Para evitar confusiones de variables, tomaremos $\theta_0 = 0$ como el menor valor posible de θ y θ_{n-1} como el mayor, pues vale $(r_j, \theta_n) = (r_j, \theta_0)$ para cualquier j. Los casos interesantes para valores de j, k entonces son:

  1. La pared interior del horno ($j = 0$; $k = 0, ..., n-1$). La ecuación en esos casos es $t_{0,k} = T_i(\theta_k)$.
  2. La pared exterior del horno ($j = m$; $k = 0, ..., n-1$). La ecuación en esos casos es $t_{m,k} = T_e(\theta_k)$.
  3. El valor mínimo de θ ($j = 0, ..., m$; $k = 0$). Se debe reemplazar $t_{j,k-1}$ por $t_{j,n-1}$ en todas las ecuaciones correspondientes.
  4. El valor máximo de θ ($j = 0, ..., m$; $k = n-1$). Se debe reemplazar $t_{j,k+1}$ por $t_{j,0}$ en todas las ecuaciones correspondientes.

  Estos últimos reemplazos se pueden resumir en que todo punto (j, k) sea $(j, k \bmod n)$.

- Combinar los puntos anteriores para plantear sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned}
&t_{0,k} = T_i(\theta_k) && \forall k = 0, ..., n-1 \\
&t_{m,k} = T_e(\theta_k) && \forall k = 0, ..., n-1 \\
&Ft_{j-1,k} + Ft_{j,k} + Ft_{j+1,k} + Ft_{j,k-1} + Ft_{j,k+1} = 0 && \forall j = 1, ..., m-1; k = 1, ..., n-2 \\
&Ft_{j-1,0} + Ft_{j,0} + Ft_{j+1,0} + Ft_{j,n-1} + Ft_{j,1} = 0 && \forall j = 1, ..., m-1 \\
&Ft_{j-1,n-1} + Ft_{j,n-1} + Ft_{j+1,n-1} + Ft_{j,n-2} + Ft_{j,0} = 0 && \forall j = 1, ..., m-1
\end{aligned}$$

  Del mismo podemos obtener fácilmente la matriz A (que tendrá 5 valores no nulos por fila a lo sumo) y el vector b (que será nulo en todas sus componentes salvo aquellas correspondientes a $j = 0$ y $j = m$).

- Resta pensar un orden para las incógnitas que permita asegurar que la matriz resultante sea *banda*. Sobre el proceso llevado adelante para su elección hablaremos en la sección 6.2. El orden elegido fue:

$$(0,0);(0,1);...;(j,n-1);(j+1,0);(j,1);...;(m,n-1)$$

3. Resultados

4. Discusión

5. Conclusiones

6. Apéndice

6.1. Apéndice A: Enunciado

6.2. Apéndice B: Elección del orden de las incógnitas para obtener una matriz banda

7. Referencias