Métodos Numéricos
Segundo Cuatrimestre 2015
Práctica 7
Interpolación.
Integración numérica.

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1. Interpolar la siguiente tabla utilizando el método de Lagrange:

x_i	1	2	4	5
$f(x_i)$	0	2	12	20

2. Dados los pares (x_0, y_0), (x_1, y_1) con $x_0 < x_1$:

   a) Hallar el polinomio que los interpola.

   b) ¿Cuál es el máximo error que se puede cometer al interpolar linealmente una función sabiendo que $|f''| < M \in (x_0, x_1)$?

3. Una tabla de una variable se dice bien condicionada para la interpolación lineal si el error debido a la interpolación no excede al error de redondeo de la tabla. Se desea construir una tabla de seis cifras para la función $log(x)$ en $(1, 10)$, de tal manera que la tabla esté bien condicionada para interpolación lineal. Determinar el tamaño del paso más grande posible.

4. La función $\sqrt{x}$ está tabulada en los puntos $1, 2, \ldots$ con cuatro decimales. Se desea saber para qué valores de x la tabla está bien condicionada para la interpolación lineal.

5. Sea $f(x) = e^x$ para $0 \leq x \leq 2$.

   a) Aproximar $f(0{,}25)$ interpolando linealmente con $x_0 = 0$ y $x_1 = 0{,}5$.

   b) Aproximar $f(0{,}75)$ interpolando linealmente con $x_0 = 0{,}5$ y $x_1 = 1$.

   c) Aproximar $f(0{,}25)$ y $f(0{,}75)$ utilizando ahora un polinomio cuadrático con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

   d) Compare los resultados obtenidos.

6. Demostrar que $\sum_{i=0}^{n} \ell_i'(x) = 1$ con $\ell_i'(x) = \prod_{j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = c \neq 0$ con $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

   a) De los polinomios interpolantes, dar el de menor grado y justificar que no existe uno de grado n.

   b) Sea p un polinomio interpolante de grado $n + 1$. Probar que si $p(x) = c$ entonces $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

8. Consideremos una función f tal que $|f^{iii}| < M$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y sea P el polinomio que interpola a f en 0, 1 y 3. Acotar $|f(x) - P(x)|$.

9. *a*) Interpolar la siguiente tabla utilizando diferencias divididas:

x_i	1	2	4	5
$f(x_i)$	0	2	12	20

b) Comparar con el resultado del ejercicio 1.

10. Para el siguiente conjunto de datos:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	4	1	-2	1

a) Construir la tabla de diferencias divididas.

b) Dar la expresión del polinomio interpolador resultante.

c) Agregar a los datos el punto $(-2, 1)$, aumentar la tabla de diferencias y calcular el nuevo polinomio interpolante. ¿Qué conclusión puede sacar sobre los datos de la tabla?

11. Sea $f(x)$ un polinomio de grado menor que k, y sean $n+1$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_n$. Demostrar que si $k < n$, entonces $f[x_0, \ldots, x_n] = 0$.

12. Dados los puntos $(-1, 3), (1, 1), (2, 3), (3, 7)$, determinar cuántos polinomios de grado d existen que pasen por todos los puntos, para

a) $d = 2$

b) $d = 3$

c) $d = 4$

Para cada valor de d, en caso de ser posible, mostrar uno.

13. Determinar el spline cúbico natural que interpolan los datos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$.

14. Un spline cúbico natural S en el intervalo $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & 0 \leq x < 1 \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtener a, b, c y d.

15. Un spline cúbico sujeto S en el intervalo $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 + b(x-1) - 4c(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtener $f'(0)$ y $f'(2)$.

16. Determinar si $S(x)$ es un spline cúbico natural:

$$S(x) = \begin{cases} -x^3 + x & -1 \leq x < 0 \\ x^3 + x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

17. Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que $f(x)$ es su propio spline sujeto, y que no puede ser su propio spline natural.

18. Si los datos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^n$ se encuentran sobre una recta, ¿qué podemos decir de los splines naturales y sujetos de la función $f(x)$?

19. Dada la función $f(x)$ y los puntos $x_0 < x_1$:

a) Hallar el polinomio que interpola los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$.

b) Dar una expresión para aproximar $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ utilizando el polinomio interpolador.

c) Sabiendo que $|f''| < M, \forall x \in (x_0, x_1)$, indicar el error cometido en la aproximación.

20. La función $f(x)$ está definida en el intervalo $[0,1]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcular $\int_0^1 f(x)dx$ mediante las siguientes aproximaciones:

a) Regla de los Trapecios en $[0,1]$.

b) Regla de los Trapecios, primero en el $[0,\frac{1}{2}]$ y luego en $[\frac{1}{2},1]$.

c) Regla de Simpson en el $[0,1]$.

d) ¿Cumple $f(x)$ las condiciones requeridas para aplicar la fórmula del error?

21. Verificar que la siguiente fórmula es exacta para polinomios de grado ≤ 4:

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f(\frac{1}{4}) + 12f(\frac{1}{2}) + 32f(\frac{3}{4}) + 7f(1)\right]$$

(Sugerencia: tomar $f(x) = 1$, $f(x) = x$, etc.)

Utilizando lo anterior, encontrar una aproximación para $\int_a^b f(x)dx$.

22. Encontrar una expresión de la forma

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = A_1 f(0) + A_2 f(\pi)$$

que sea exacta para cualquier función del tipo $f(x) = a + b\cos x$. (Sugerencia: tomar primero $f = a$ y luego $f = b\cos x$).

23. Deducir la fórmula de Newton-Cotes para $\int_0^1 f(x)dx$ usando como nodos a los puntos $0, \frac{1}{2}, 1$.

24. Usando el ejercicio anterior, aproximar $\int_0^1 \sin(x)\,dx$ y calcular una cota para el error cometido.

25. Indicar cuántos puntos se deben tomar en la aproximación de

$$\int_0^1 \exp(-x^2)dx$$

por medio de la regla de los Trapecios Compuesta para que el error sea menor que 10^{-6}. Idem con la regla de Simpson Compuesta.

26. Se desea aproximar la integral de una función f usando la regla de Trapecios Compuesta. Para esto se tienen $2n$ nodos $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$, igualmente espaciados.

Inicialmente, se obtiene una primera aproximación α de la integral usando la regla de los Trapecios Compuesta solamente sobre los nodos **pares** $x_0, x_2, \ldots, x_{2n-2}$. Sin embargo, como se desea más precisión en la aproximación, se decide usar la totalidad de los nodos.

Halle una expresión para la regla de los Trapecios Compuesta sobre los $2n$ nodos que utilice el valor α ya calculado.

27. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función desconocida definida en el intervalo $[0,3]$ y que asumimos diferenciable en el intervalo $[0,3]$. Sea $S(x)$ un spline cúbico sujeto que interpola a g en los nodos 0, 1 y 3 dado por

$$S(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0,1), \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \\ & \text{si } x \in [1,3]. \end{cases}$$

a) Determinar los valores de a, b y c para que $S(x)$ defina un spline cúbico.

b) Determinar los valores de $g'(0)$ y $g'(3)$. ¿Es $S(x)$ además un spline cúbico natural?

c) Se busca aproximar el valor de

$$A_g = \int_0^3 g(x)dx$$

usando métodos de integración numérica basados en interpolación. Sabemos que el error final de la integración es una composición entre el error del método de integración con el del método de interpolación. Utilizando el método de Simpson, calcular una aproximación para A_g que dependa solo del error de interpolación.

Resolver en computadora

I La función Gamma está definida por: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$

Además si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

Por esta razón es que interpolar los datos:

t	1	2	3	4	5
y	1	1	2	6	24

debería dar una aproximación a la función Gamma en ese intervalo.

a) Computar el polinomio de grado 4 que interpola estos datos.
Plotear el polinomio resultante y la función Gamma[1] en el intervalo [1 : 5].

b) Usar una rutina de spline cúbico[2] para interpolar los mismos datos, y plotearlos también.

c) ¿Cuál de los dos interpoladores es más preciso en el intervalo en general?

d) ¿Cuál es más preciso en el [1 : 2]?

Funciones útiles

- Interpolar y graficar la función seno usando Python con Numpy:

```
x = np.linspace(0, 2*np.pi, 10)
y = np.sin(x)
xvals = np.linspace(0, 2*np.pi, 50)
yinterp = np.interp(xvals, x, y)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, y, 'o')
plt.plot(xvals, yinterp, '-x')
plt.show()
```

[1] Se pueden usar por ejemplo las funciones *gamma* y *polyfit* de Matlab.
[2] Por ejemplo *spline* en Matlab.

- Interpolar una función usando Matlab/Octave:

```
x = 0:10;
y = sin(x);
xx = 0:.25:10;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy)
```

Referencias

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis.* Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.

[2] Michael T. Heath. *Scientific Computing An Introductory Survey.* The McGraw-Hill, 1997.

[3] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing.* Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.