DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico 1
Cálculo de isotermas en sectores circulares

Jueves 3 de septiembre de 2015 — Métodos Numéricos

Integrante	LU	Correo electrónico
Nahuel Lascano	476/11	laski.nahuel@gmail.com
XXXX	XXXX	xxxx
XXXX	XXXX	xxxx

En este trabajo aplicamos dos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (factorización LU y eliminación gaussiana) para el cálculo de isotermas de sectores circulares, dadas las temperaturas de las circunferencias interior y exterior.

Palabras clave: factorización LU, eliminación gaussiana, sistemas de ecuaciones lineales, matriz banda

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellon I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autonoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Introducción teórica

2. Desarrollo

2.1. Armado del sistema de ecuaciones

De la discretización de la ecuación del calor provista por el informe resulta una nueva ecuación que nos va a servir para armar nuestro sistema discreto:

$$\frac{t_{j-1,k} - 2t_{jk} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r}\frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{t_{j,k-1} - 2t_{jk} + t_{j,k+1}}{(\Delta \theta)^2} = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación vale para cada punto del modelo salvo los límites, sobre los cuales hablaremos en breve.

Para poder armar el sistema $Ax = b$ equivalente, es necesario:

- Extraer los factores que multiplican a cada una de las cinco incógnitas: $t_{j-1,k}$; $t_{j,k}$; $t_{j+1,k}$; $t_{j,k-1}$ y $t_{j,k+1}$.

  Estos se obtienen de la ecuación 1.

$$\begin{aligned} t_{j-1,k} &* (\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j \Delta r}) \\ t_{j,k} &* (\frac{-2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_j \Delta r} - \frac{2}{{r_j}^2 (\Delta r)^2}) \\ t_{j+1,k} &* (\frac{1}{(\Delta r)^2}) \\ t_{j,k-1} &* (\frac{1}{{r_j}^2 (\Delta \theta)^2}) \\ t_{j,k+1} &* (\frac{1}{{r_j}^2 (\Delta \theta)^2}) \end{aligned}$$

  Por cuestiones de espacio, en adelante llamaremos $M_{j,k}$ al factor que multiplica a la incógnita $t_{j,k}$, $M_{j-1,k}$ al que multiplica a $t_{j-1,k}$ y así sucesivamente. Y resumiremos $Mt_{j,k} = M_{j,k} * t_{j,k}$, $Mt_{j-1,k} = M_{j-1,k} * t_{j-1,k}$.

- Analizar los "casos borde": aquellos puntos donde la ecuación 1 no vale.

  Para evitar confusiones de variables, tomaremos $\theta_0 = 0$ como el menor valor posible de θ y θ_{n-1} como el mayor, pues vale $(r_j, \theta_n) = (r_j, \theta_0)$ para cualquier j.

  Los casos interesantes para valores de j, k entonces son:

  1. La pared interior del horno ($j = 0$; $k = 0, ..., n-1$). La ecuación en esos casos es $t_{0,k} = T_i(\theta_k)$.
  2. La pared exterior del horno ($j = m$; $k = 0, ..., n-1$). La ecuación en esos casos es $t_{m,k} = T_e(\theta_k)$.
  3. El valor mínimo de θ ($j = 0, ..., m$; $k = 0$). Se debe reemplazar $t_{j,k-1}$ por $t_{j,n-1}$ en todas las ecuaciones correspondientes.
  4. El valor máximo de θ ($j = 0, ..., m$; $k = n-1$). Se debe reemplazar $t_{j,k+1}$ por $t_{j,0}$ en todas las ecuaciones correspondientes.

  Estos últimos reemplazos se pueden resumir en

$$(j, k) \Rightarrow (j, k \bmod n)$$

- Combinar los puntos anteriores para plantear el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{array}{lr}
t_{0,k} = T_i(\theta_k) & \forall k = 0, ..., n-1 \\
t_{m,k} = T_e(\theta_k) & \forall k = 0, ..., n-1 \\
Mt_{j-1,k} + Mt_{j,k} + Mt_{j+1,k} + Mt_{j,k-1} + Mt_{j,k+1} = 0 & \forall j = 1, ..., m-1; k = 1, ..., n-2 \\
Mt_{j-1,0} + Mt_{j,0} + Mt_{j+1,0} + Mt_{j,n-1} + Mt_{j,1} = 0 & \forall j = 1, ..., m-1 \\
Mt_{j-1,n-1} + Mt_{j,n-1} + Mt_{j+1,n-1} + Mt_{j,n-2} + Mt_{j,0} = 0 & \forall j = 1, ..., m-1
\end{array}
$$

  Del mismo podemos obtener la matriz A (que tendrá 5 valores no nulos por fila a lo sumo) y el vector b (que será nulo en todas sus componentes salvo aquellas correspondientes a $j = 0$ y $j = m$).

- Pensar un orden para las incógnitas que permita asegurar que la matriz resultante sea *banda*. El mismo es:

$$(0,0); (0,1); ...; (j, n-1); (j+1, 0); (j, 1); ...; (m, n-1)$$

  tanto para las filas como para las columnas. Sobre el proceso llevado adelante para su elección hablaremos en la sección 6.2.

Una vez realizados estos pasos estamos en condiciones de plantear el sistema de ecuaciones $Ax = b$:

Lo primero que debemos notar es que como hay $n * m$ puntos diferentes tendremos $n * m$ incógnitas diferentes. Luego, $A \in \mathbb{R}^{nm*nm}$: cada columna y cada fila de A corresponden a un punto $t_{j,k}$ del sistema. Asimismo, $x \in \mathbb{R}^{nm}$ y $b \in \mathbb{R}^{nm}$.

Lo segundo que debemos notar es que, por coincidir el orden elegido para filas y para columnas, el índice de la fila correspondiente al punto $t_{j,k}$ coincide con el de la columna correspondiente a ese punto. Llamaremos a este índice $i(j, k)$. Notar que podemos computar i fácilmente como $i(j, k) = j * m + k$ (suponiendo que indexamos por 0 tanto filas como columnas).

Por el orden elegido, las primeras n filas corresponden a los puntos $t_{0,k}$. Mirando el sistema de ecuaciones, las primeras n filas de A coinciden con la identidad (1 en la diagonal y 0 en el resto) y las primeras n filas de b coinciden con $T_i(\theta_k)$.

Lo mismo vale para las últimas n filas: corresponden a los puntos $t_{m,k}$, las filas correspondientes de A coinciden con la identidad y las componentes de b con $T_e(\theta_k)$.

Llegado este punto podemos definir completamente b: todas sus demás componentes son nulas (por ser 0 la solución al resto de las ecuaciones del sistema), por lo que resulta:

$$b = (T_i(0), T_i(1), ..., T_i(n-1), 0, ..., 0, T_e(0), T_e(1), ..., T_e(n-1))$$

Para $j \neq 0, j \neq m$, las filas $i(j, k)$ de A tendrán cinco componentes no-nulas (que corresponden a los vecinos de $t_{j,k}$ en el modelo). Fijados j y k $(0 \neq j \neq m, 0 \neq k \neq n-1)$, estas componentes serán $i(j-1, k); i(j, k); i(j+1, k); i(j, k-1)$ e $i(j, k+1)$ y coincidirán con lo que anteriormente llamamos $M(j-1, k); M(j, k); M(j+1, k); M(j, k-1)$ y $M(j, k+1)$ respectivamente.

Resta simplemente considerar los casos $k = 0$ y $k = n-1$, pero no reviste mayor complejidad que tomar módulo n después de las operaciones que involucren k.

2.2. Resolución del sistema de ecuaciones

3. Resultados

4. Discusión

5. Conclusiones

6. Apéndice

6.1. Apéndice A: Enunciado

6.2. Apéndice B: Elección del orden de las incógintas para obtener una matriz banda

7. Referencias