Введение в линейную алгебру

Часть 1

Рубаненко Евгений

4 июля 2018

План

Понятие операции

Пусть V — произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами. Будем говорить, что :

1. на множестве V задана операция сложения, если любым двум векторам $x, y \in V$ поставлен в соответствие некоторый однозначно определенный вектор $z \in V$, называемый суммой векторов x и y и обозначаемый через $x + y$;
2. на множестве V задана операция умножения вектора на число, если любому вектору $x \in V$ и любому числу t поставлен в соответствие некоторый однозначно определенный вектор $y \in V$, называемый произведением вектора x на число t и обозначаемый через tx.

Векторное пространство

Векторным пространством называется произвольное непустое множество V, на котором заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие следующим условиям, которые называются аксиомами векторного пространства :

1. если $x, y \in V$, то $x + y = y + x$ (сложение векторов коммутативно) ;
2. если $x, y, z \in V$, то $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сложение векторов ассоциативно) ;
3. $\forall\ x \in V\ \exists\ 0 \in V$ (нулевой вектор) такой, что $x + 0 = x$;
4. $\forall\ x \in V\ \exists\ y \in V$ (называемый противоположным к x и обозначаемый через -x) такой, что $x + y = 0$;
5. если $x, y \in V$, а $t \in R$, то $t(x + y) = tx + ty$ (умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов) ;
6. если $x \in V$, а $t, s \in R$, то $(t + s)x = tx + sx$ (умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел) ;
7. если $x \in V$, а $t, s \in R$, то $t(sx) = (ts)x$;
8. если $x \in V$, то $1 \cdot x = x$.

Определение вектора

Вектор - столбец, состоящий из m компонент.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Примеры :

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 137 \\ 82 \\ \vdots \\ 11 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} \text{animal} \\ 1 \\ \text{cat} \\ \vdots \\ 400 \end{bmatrix}$$

Основные операции над векторами

Сложение векторов

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix}$$

Умножение вектора на скаляр

$$C \cdot x = C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \cdot x_1 \\ C \cdot x_2 \\ \vdots \\ C \cdot x_m \end{bmatrix}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение

$$(x, y) = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_m \cdot y_m$$

Длина вектора

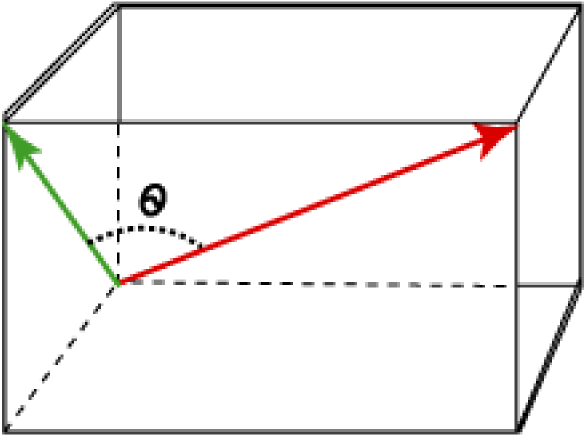
Длина вектора

$$|x|^2 = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$$

Угол между векторами

Угол между векторами

$$\cos(\theta) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$



Линейные комбинации векторов

Пусть даны вектора $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n,$$

где $\alpha_i \in R, i \in \overline{1, n}$.

Линейная оболочка векторов

Пусть даны вектора $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$.
<u>Линейная оболочка</u>

$$\mathrm{L} = \langle \alpha_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathrm{x}_2 + \ldots + \alpha_\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}_\mathrm{n} \rangle \,,$$

где $\alpha_\mathrm{i} \in \mathrm{R}, \mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}$.

Линейная зависимость векторов

Набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейно зависимым, если существует вектор x_j, который может быть представлен, как линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$, т.е.

$$x_j = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n,$$

где $\alpha_i \in R, i \in \overline{1, n}$.

Линейная независимость векторов

Если единственным решением уравнения

$$\alpha_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathrm{x}_2 + \ldots + \alpha_\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}_\mathrm{n} = 0$$

является $\alpha_\mathrm{i} = 0 \ \forall \ \mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}$, то векторы $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ называются линейно независимыми.

Подпространство

Непустое подмножество M векторного пространства V называется подпространством пространства V, если выполняются следующие условия :

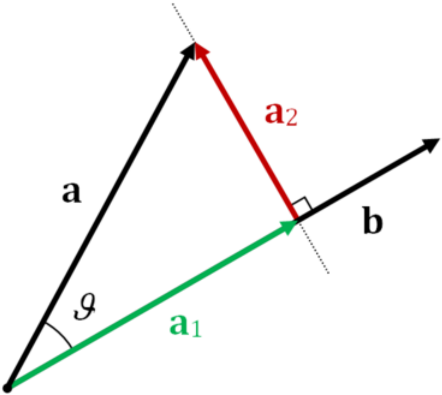
1. Если $x, y \in M$, то $x + y \in M$ (замкнутость подпространства относительно сложения векторов) ;
2. Если $x \in M$, а t — произвольное число, то $t \cdot x \in M$ (замкнутость подпространства относительно умножения вектора на число).

Базис. Размерность

Число элементов максимального линейно независимого множества элементов векторного пространства называется размерностью пространства, а само это множество — базисом.

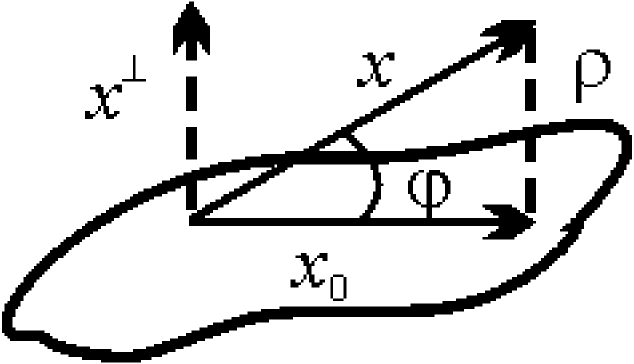
Проекция вектора на вектор

$$a_1 = \frac{(a, b)}{|b|^2} \cdot b$$



Проекция вектора на подпространство

$$x_0 = x - n \cdot \frac{(x, n)}{|n|}$$



Определение матрицы

Матрицей размера MxN будем называть прямоугольник из M строк, каждая из которых содержит N компонент.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2N} \\ & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \\ x_{M1} & x_{M2} & x_{M3} & \dots & x_{MN} \end{bmatrix}$$

Основные операции над матрицами

Сложение матриц

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2N} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_{M1} & x_{M2} & x_{M3} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2N} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_{M1} & y_{M2} & y_{M3} & \cdots & y_{MN} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & x_{13}+y_{13} & \cdots & x_{1N}+y_{1N} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & x_{23}+y_{23} & \cdots & x_{2N}+y_{2N} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_{M1}+y_{M1} & x_{M2}+y_{M2} & x_{M3}+y_{M3} & \cdots & x_{MN}+y_{MN} \end{bmatrix}$$

Основные операции над матрицами

Умножение матрицы на скаляр

$$C \cdot X = C \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2N} \\ & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \\ x_{M1} & x_{M2} & x_{M3} & \dots & x_{MN} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C \cdot x_{11} & C \cdot x_{12} & C \cdot x_{13} & \dots & C \cdot x_{1N} \\ C \cdot x_{21} & C \cdot x_{22} & C \cdot x_{23} & \dots & C \cdot x_{2N} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & \\ C \cdot x_{M1} & C \cdot x_{M2} & C \cdot x_{M3} & \dots & C \cdot x_{MN} \end{bmatrix}$$

Основные операции над матрицами

Транспонирование матрицы

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2N} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_{M1} & x_{M2} & x_{M3} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix} \to \quad X^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{M1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{M2} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_{1N} & x_{2N} & x_{3N} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix}$$

Основные операции над матрицами

Произведение матриц

$$X = (x_{ij}) \qquad\qquad Y = (y_{ij}),$$

где X - матрица размера MxN, Y - матрица размера NxT.
Тогда

$$C = X \cdot Y = (c_{ij}),$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} x_{ik} \cdot y_{kj}$$

- есть матрица размера MxT.