Введение в линейную алгебру

Часть 2

Рубаненко Евгений

5 июля 2018

План

Определение матрицы

Матрицей размера $[m, n]$ будем называть прямоугольник из m строк, каждая из которых содержит n компонент.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Произведение матриц

Произведение матриц

$$X = (x_{ij}) \qquad\qquad Y = (y_{ij}),$$

где X - матрица размера $[m, n]$, Y - матрица размера $[n, t]$.
Тогда

$$C = X \cdot Y = (c_{ij}),$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot y_{kj}$$

- есть матрица размера $[m, t]$.

Система линейных уравнений

Система линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{gathered}$$

Матричная форма записи СЛУ

Матричная форма записи СЛУ

$$A \cdot x = b,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Разрешимость СЛУ

Утв. СЛУ может иметь :

1. единственное решение ;
2. бесконечно много решений ;
3. не иметь решений.

Примеры СЛУ

Пример СЛУ, имеющей единственное решение

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ 2x + y &= -7 \end{aligned}$$

Пример СЛУ, имеющей бесконечно много решений

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + t &= 1 \\ 8x + 12y - 9z + 8t &= 3 \\ 4x + 6y + 3z - 2t &= 3 \\ 2x + 3y + 9z - 7t &= 3 \end{aligned}$$

Пример СЛУ, не имеющей решения

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z - t &= 8 \\ 3x - 2y + z - 3t &= 7 \\ 5x - 3y + z - 8t &= 1 \end{aligned}$$

Элементарные преобразования

Элементарными преобразованиями матриц назовем следующие операции :

1. Переставление строк матрицы местами
2. Умножение строки матрицы на число
3. Прибавление одной строки матрицы к другой

Утв. Элементарные преобразования не меняют множество решений СЛУ.

Связанные определения

Расширенной матрицей СЛУ $Ax = b$ назовем следующую матрицу

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Обозначение : $(A|b)$

Будем говорить, что матрица имеет ступенчатый вид, если она представляется в виде

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b'_m \end{array}\right]$$

Решение СЛУ

Метод Гаусса заключается в том, чтобы привести расширенную матрицу СЛУ к ступенчатому виду, а затем последовательно (снизу вверх) вычислить значения неизвестных переменных.

Определитель

Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $[n, n]$ определитель $\det(A)$ вычисляется по формуле

$$\det(A) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n},$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, а $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ обозначает число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Аксиоматическое определение

Определителем вещественной матрицы называется функция $\det : R^{n \times n} \to R$, обладающая следующими свойствами :

1. $\det(A)$ - кососимметрическая функция строк (столбцов) матрицы A ;
2. $\det(A)$ - полилинейная функция строк (столбцов) матрицы A ;
3. $\det(E) = 1$, где E - единичная матрица.

Разложение по строке, столбцу

Разложение по столбцу

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Разложение по строке

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

M_{ij} - дополнительный минор к элементу a_{ij}.
Утв. Определитель матрицы не зависит от того, по какой строке (столбцу) его раскладывать.

Свойства

Основные свойства определителя :

1. $\det(E) = 1$
2. $\det(cA) = c^n \det(A)$
3. $\det(A^T) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Определение обратной матрицы

Пусть имеется матрица A размера $[\mathrm{n}, \mathrm{n}]$. Обратной матрицей A^{-1} называется матрица размера $[\mathrm{n}, \mathrm{n}]$, удовлетворяющая следующему свойству :

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}$$

Утв. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель не равен нулю.

Методы нахождения обратной матрицы

Два основных метода :

1. Метод Крамера ;
2. Метод Гаусса-Жордана.

Метод Гаусса-Жордана

Метод Гаусса-Жордана заключается в том, что если с помощью элементарных преобразований строк привести расширенную матрицу (A|E) к виду (E|X), то матрица X есть A^{-1}.

Собственный вектор

Пусть L(R) - векторное пространство, A - некоторая матрица.
Собственным вектором матрицы A называется такой ненулевой вектор x, что

$$\exists\ \lambda \in \mathrm{R}\ :\ \mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x}.$$

Нахождение собственных векторов

Утв. Собственные значения находятся как решения уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Утв. Собственные векторы, отвечающие собственному значению λ, находятся как решения СЛУ

$$(A - \lambda E)x = 0$$

Базис из собственных векторов

Утв. Если собственные векторы матрицы A образуют базис в рассматриваемом пространстве L(R), то матрица A приводима к диагональному виду, т.е.

$$\mathrm{A}' = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{V}^{-1}$$

Возведение матрицы в степень

$$\mathrm{X}^{\mathrm{n}} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{X} \cdot \mathrm{X} \cdot \ldots \cdot \mathrm{X}$$

Извлечение квадратного корня из матрицы

Матрица B называется квадратным корнем из матрицы A, если

$$B \cdot B = A.$$

Утв. Не у всех матриц квадратный корень существует.
Утв. Положительно определённая матрица всегда имеет ровно один положительно определённый корень.

Нахождение квадратного корня

Матрица A называется положительно определенной, если

$$\forall x \in \mathrm{R}^n \; x^T \cdot A \cdot x > 0.$$

Утв. Положительно определенная матрица A представима в виде

$$A = V \cdot D \cdot V^{-1},$$

где D - диагональная матрица с собственными векторами матрицы A на диагонали.
В таком случае корень из матрицы A есть

$$A^{\frac{1}{2}} = V \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot V^{-1},$$

где $D^{\frac{1}{2}}$ есть диагональная матрица с элементами $\sqrt{\lambda_i}$ на диагонали.

Дополнительные источники по теме лекций

Рекомендуемая литература :

1. Винберг Э.Б. "Курс алгебры"
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра

Полезные онлайн - курсы :

1. https ://www.khanacademy.org/math/linear-algebra
2. https ://class.coursera.org/ml-005/lecture/preview
3. https ://www.youtube.com/watch ?v=ZumgfOei0Ak