Предел числовой последовательности

Определение. Число A $\in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окресности V(A) точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от V(A)), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки A.

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall V(A) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in V(A))$$

и соответственно

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (|x_n - A| < \varepsilon).$$

Предел функции

Определение. Итак, число A называется пределом функции $f : E \to \mathbb{R}$ при x, стремящемся по множеству E к точке a (предельной для E), если для любой окрестности точки A найдется проколотая окрестность точки a в множестве E, образ которой при отображении $f : E- > \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки A.

$$(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A) := \forall V_{\mathbb{R}}(A)\ \exists \dot{U}_E(a)\ (f(\dot{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A))$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Разложение фукнции в ряд Тейлора

$$P_n(x_0;x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1}$$

Определение. Алгебраический полином, заданный соотношением (1), называется полиномом Тейлора[1] порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0;x) = r_n(x_0;x)$$

уклонение полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называется часто остатком, точнее, n-м остатком или n-м остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x) \tag{2}$$

Также давайте разложим наиболее часто используемые функции по формуле (2):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + O(x^n+1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

[1] Б. Тейлор (1685 - 1731) – английский математик

Интеграл Римана

Определение. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в пункте (3) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \to 0$ (т.е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\Re[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3}$$

Формула Тейлора

Теорема. Если функция $f : U(x) \to \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}\ (U(x); \mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство

$$f(x^1 + h^1, ..., x^m + h^m) - f(x^1, ..., x^m) =$$
$$= \sum^{n-1} k = 1 \frac{1}{k!}(h^1\delta_1 + ... + h^m\delta_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h),$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h^1\delta_1 + ... + h^m\delta_m)^n f(x + th)dt$$

Интеграл по гладкой поверхности

Определение. (интеграла от k-формы ω по заданной картой $\varphi : I \to S$ гладкой k-мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i \omega(x_i)(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k) = \lim_{\lambda\to 01} \sum_i (\varphi * \omega)(\tau_i)(\tau_1, ..., \tau_k). \tag{4}$$

Если применить это определение к k-форме $f(t)dt^1 \wedge ... \wedge dt^k$ на I (когда φ – тождественное отображение), то очевидно, получим, что:

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge ... \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 ... \, dt^k. \tag{5}$$

Таким образом, из (4) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi * \omega,$$

а последний интеграл, как видно из равенства (5), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi * \omega$ функции f на промежутке I.

Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$

Утверждение. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая компатная двумерная поверхность с краем δS, лежаща в области $G \subset \mathbb{R}^{\nvDash}$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega = P\ dx + Q\ dy + R\ dz$. Тогда имеет место соотношение

$$\int_{\delta S} P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \iint_S \left(\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z}\right)\ dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right) dx \wedge dy,$$

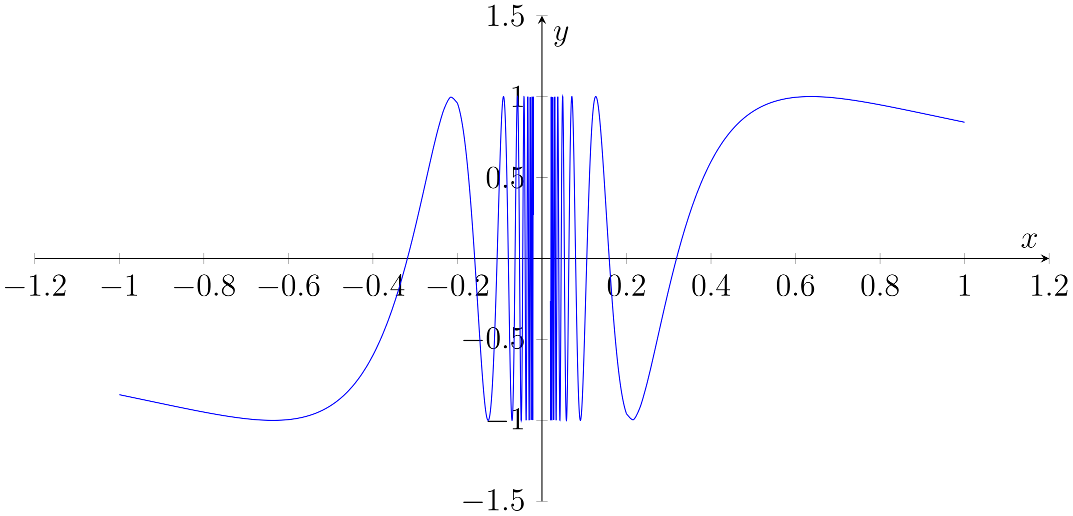
где ориентация края δS берется согласованной с ориентаией поверхности S.

Алгебра форм

Пусть X - линейное пространство, а $F^k : X^k \to \mathbb{R}$ – вещественнозначная k-форма на X. Если $e_1, ..., e_n$ – базис в X, а $x_1 = x^{i_1}e_{i_1}, ..., x_k = x^{i_k}e_{i_k}$ – разложение векторов $x_1, ..., x_k \in X$ по этому базису, то в силу линейности F_k по каждому аргументу

$$F^k(x_1, ..., x_k) = F^k(x_1^i e_{i_1}, ..., x_k^i e_{i_k}) = \tag{6}$$
$$= F^k(e_{i_1}, ..., e_{i_k})x^{i_1} \cdot ... \cdot x^{i_k} = a_{i_1 ... i_k} x^{i_1} \cdot x^{i_k}. \tag{7}$$

График функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения. Определено отображение (операции сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1_+. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем):

$$\exists 0 \ \forall x : x + 0 = x.$$

2_+. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к x, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. Операция $+$ ассоциативна, т.е. для любых элементов $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4_+. Операция $+$ коммутативна, т.е. для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + z$$

(II) Аксиомы умножения. Определено отражение (операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

$1_\bullet$. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \backslash 0$ (называемый в случае умножения единицей) такой, что

$$\exists 1 \ \forall x : x \cdot 1 = x.$$

$2_\bullet$. Для любого элемента $x \in \mathbb{R} \backslash 0$ имеется элемент $x^-1 \in \mathbb{R}$, называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^-1 = x^-1 \cdot *x = 1.$$

$3_\bullet$. Операция $\bullet$ ассоциативна, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$4_\bullet$. Операция $\bullet$ коммутативна, т.е. для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \backslash 0$, как можно проверить, является (мультипликативной) группой.

Умножение матриц

Теорема 1. Произведение $\varphi A \varphi B$ двух линейных отображений с матрицами A и B является линейным отображением с матрицей $C = AB$. Другими словами

$$\varphi A \varphi B = \varphi AB. \tag{8}$$

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение AB двух произвольных матриц A, B, имея в виду, однако, что символ AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице A совпадает с числом строк в матрице B. Именно при этом условии выполняется правило умножения $i-$й строки $A_{(i)}$ на $j-$й столбец $B^{(j)}$, согласно которому

$$A_{(i)}B^{(j)} = (a_{i1}, ..., a_{is})[b_{1j}, ..., b_{sj}] \tag{9}$$

Следствие. Умножение матриц ассоциативно:

$$A(BC) = (AB)C$$

Действительно, произведение матриц соответствует произведению линейных отображений (теорема 1 и соотношение 8). К тому же результату можно прийти вычислительным путём, используя непосредственно соотношение (9). $\square$

Обратим ещё внимание на так называемые законы дистрибутивности:

$$(A + B)C = AC + BC, \qquad D(A + B) = DA + DB \tag{10}$$

где A, B, C, D – произвольные матрицы размеров соответственно $m \times s, m \times s, s \times n, n \times m$.

Действительно, пологая $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$, мы получим для любых i, j равенство (используя дистрибутивность в $\mathbb{R}$)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj},$$

левая часть которого дает элемент g_{ij} матрицы $(A + B)C$, а правая – элементы h_{ij} и h'_{ij} матриц AC и соответственно BC. Второй закон дистрибутивности (10) проверяется совершенно аналогично.

Транспонирование матриц

Будем говорить, что матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно получаются друг из друга транспонированием – заменой строк на столбцы, а столбцов на строки.

Инварианты линейных групп

Линейной группой степени n мы, как обычно, называем любую подгруппу в $GL(n, P)$, где P – некоторое поле. В дальнейшем можно считать $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$. Если G – абстрактная группа и $\Phi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ – её линейное представление, то пару (G, Φ) мы тоже будем называть линейной группой. Линейные преобразования Φ_g действуют на столбцы переменных $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{Vmatrix} \Phi_g(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_g(x_n) \end{Vmatrix} = \Phi_g \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n. \end{Vmatrix}$$

Они переводят любую форму (однородный многочлен) f степени m снова в форму степени m:

$$(\widetilde{\Phi_g} f)(x_1, ..., x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x1), ..., \Phi_{g^{-1}}(x_n)).$$

Определение. Форма $f \in P_m$, остающаяся неподвижной при действии $\widetilde{\Phi_g}$ (т.е. $\widetilde{\Phi_g} f = f \ \forall g \in G$), называется (целым) инвариантом степени m линейной группы (G, Φ).

Начала тензорного исчисления

1. Понятие то тензорах. Разумной общности можно достичь, ограничившись лишь полилинейными отображениями некоторого специального вида.

Определение. Пусть $\Re$ – поле, V – векторное пространство над $\Re, V^*$ – сопряженное к V пространство, p и q – целые числа ≥ 0,

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^*}_{q}$$

– декартово произведение p экземпляров пространства V и q экземпляров пространства V^*. Всякое $(p+q)$ – линейное отображение

$$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow \Re$$

называется тензором на V типа (p, q) и валентности (или ранга) $p + q$.

2. Произведение тензоров.Вначале пусть

$$f : V_1 \times ... \times V_r \rightarrow \Re \qquad g : W_1 \times ... \times W_s \rightarrow \Re$$

– произвольные полилинейные формы. Это значит, что V_i, W_j – никак не связанные друг с другом векторные пространства.

Определение. Под тензорным произведением f и g понимают отображение

$$f \otimes g : V_1 \times ...V_r \times W_1 \times ... \times W_s \rightarrow \Re,$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(v_1, ..., v_r; w_1, ..., w_s) = f(v_1, ..., v_r)g(w_1, ..., w_s).$$

Существенно подчеркнуть, что переменные V_i независимы от переменных W_j.

Резюмируем сказанное:

$1_\otimes$ операция умножения $\otimes$ определена для тензоров произвольных типов;

$2_\otimes$ валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей;

$3_\otimes$ тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно.

Дифференциальное исчисление. Основные теоремы.

Теорема. Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$, определенная в окрестности $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^m) \in \mathbb{R}$, и пусть x_0 – критическая точка этой функции f.

Если в тейлоровском разложении

$$f(x_0^1 + h^1, ..., x_0^m + h^m) = f(x_0^1, ..., x_0^m) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i h^j + o(||h||^2) \tag{11}$$

функции в точке x_0 квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i h^j \equiv \delta_{ij} f(x_0) h^i h^j \tag{12}$$

a) знакоопределена, то в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма (12) положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена;

b) может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

◄ Пусть $h \neq 0$ и $x_0 + h \in U(x_0)$. Представим соотношение (11) в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2!}||h||^2 \left[\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \frac{h^i}{||h||} \frac{h^j}{||h||} + o(1)\right] \tag{13}$$

где $o(1)$ есть величина, бесконечно малая при $h \to 0$

Из (13) видно, что знак разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$ полностью определяется знаком величины, стоящей в квадратных скобках. Этой величиной мы теперь и займемся.

Теорема о определителях квадратной матрицы

Теорема. Определители любой квадратной матрицы A и транспонированной к ней матрицы A^T совпадают:

$$\det A^T = \det A$$

Доказательство. Положив $A = (a_{ij}), A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ji}$, и заметив, что $k = \pi(\pi^-1k)$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и для любого номера $k \in \{1, 2, ..., n\}$, мы видим, что упорядочение множителей произведения $a'_{1,\pi 1}...a'_{n,\pi n}$ в соответствии с перестоновкой π^-1 дает

$$a'_{1,\pi 1}...a'_{n,\pi n} = a'_{\pi^{-1}1,\pi(\pi^{-1}1)}...a'_{\pi^{-1}n,\pi(\pi^{-1}n)} = a'_{\pi^{-1}1,1}...a'_{\pi^{-1}n,n} = a_{1,\pi^{-1}1}...a_{n,\pi^{-1}n}.$$

Если учесть ещё, что $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi^{-1}}(\varepsilon_\pi\varepsilon_{\pi^{-1}} = \varepsilon_{\pi\pi^{-1}} = \varepsilon_e = 1)$, а $\{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\} = \{\pi | \pi \in S_n\}$ (поскольку $\pi \mapsto \pi^{-1}$) – биективное отображение из S_n в S_n), то по формуле нахождения определителя матрицы имеем

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon_\pi a'_{1,\pi^{-1}1}...a'_{n,\pi^{-1}n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma 1}...a_{n,\sigma n} = \det A$$

Организация стандартной библиотеки C++

Средства стандартной библиотеки определены в пространстве имен ***std*** и расположены в некотором наборе заголовочных файлов, реализующих большую часть этих средств. Перечисление этих заголовочных файлов дает представление о стандартной библиотеке и поясняет направление ее рассмотрение.

Ниже в данном разделе мы приводим список заголовочных файлов стандартной библиотеки, сгруппированный по функциональности, и сопровождаемый краткими пояснениями.

Стандартный заголовочный файл, начинающийся на букву c, эквивалентен соответствующему заголовочному файлу стандартной библиотеки языка C. Для каждого файла <***X.h***>, определяющего часть стандартной библиотеки языка C в глобальном пространстве имен и в пространстве имен ***std***, имеется заголовочный файл <***cX***>, определяющий те же имена исключительно в пространстве имен ***std***.

Контейнеры	
<***array***>	одномерный массив элементов ***T***, в количестве ***N***
<***vector***>	одномерный динамический массив элементов ***T***
<***list***>	двусвязный список элементов ***T***
<***deque***>	двусторонняя очередь элементов ***T***
<***stack***>	стек элементов ***T***
<***map***>	упорядоченный ассоциативный контейнер элементов ***T***
<***set***>	множество элементов ***T***
<***bitset***>	множество булевских переменных

Ассоциативные контейнеры ***multimap*** и ***multiset*** находятся в файлах <***map***> и <***set***>, соответственно. Контейнер ***priority map*** объявляется в <***queue***>.

Компле́ксные числа

Подобно тому, как в области $\mathbb{Q}$ рациональных чисел алгебраическое уравнение $x^2 = 2$ не имело решений, уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в области действительных чисел R, и подобно тому, как вводя внешний по отношению $\mathbb{Q}$ символ в $\sqrt{2}$ в качестве решения уравнения $x^2 = 2$, мы увязываем его с операциями в $\mathbb{Q}$ и получаем новые числа вида $r_1 + \sqrt{2}r^2$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, можно ввести символ i в качестве решения уравнения $x^2 = -1$ и связать это внешнее по отношению к $\mathbb{R}$ число i с действительными числами и арифметическими операциями в $\mathbb{R}$.

Реализуем теперь намеченную программу.

a. Алгебраическое расширение поля $\mathbb{R}$. Итак, вводим (следуя обозначению Эйлера) новое число i – мнимую единицу, такое что $i^2 = -1$.

Взаимодействие i с действительными числами должно состоять в том, что можно умножать i на числа $y \in \mathbb{R}$, т.е необходимо появляются числа вида iy, и складывать такие числа с вещественными, т.е появляются числа вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Если мы хотим, чтобы на множестве объектов вида $x+iy$, которые мы вслед за Гауссом назовем *компле́ксными числами*, были определены привычные операции коммутативного сложения и коммутативного умножения, дистрибутивного относительно сложения, то необходимо положить по определению, что

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{14}$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{15}$$

Два комплексных числа $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2$ считаются равными в том и только в том случае, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Отождествим числа $x \in \mathbb{R}$ с числами вида $x + i \cdot 0$, а i – с числом $0 + i * 1$. Роль нуля в множестве комплексных чисел, как видно из (14), играет число $0 + i \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$, роль единицы, как видно из (15), – числа $1 + i \cdot 0 = 1 \in \mathbb{R}$.

Из свойства вещественных чисел и определений (14), (15) следует, что множество комплексных чисел является полем, содержащим $\mathbb{R}$ в качестве подполя.

b. Геометрическая интерпретация поля $\mathbb{C}$. Комплексное число $z = x + iy$ мы можем отождествить с упорядоченной парой (x, y) действительных чисел, называемых соответственно действительной частью и мнимой частью компле́ксного числа z (обозначения: $x = \mathrm{Re}\ z, y = \mathrm{Im}\ z$ [2])

Но тогда, считая пару (x, y) декартовыми координатами точки плоскости $\mathbb{R}^2 = R \times R$, можно отождествить комплексные числа с точками этой плоскости или с двумерными векторами с координатами (x, y).

В такой векторной интерпретации покоординатное сложение (14) комплексных чисел соответствует правилу сложения векторов. Кроме того, такая интерпретация естественно приводит также к понятию модуля $|z|$ комплексного числа z как модуля или длины соответствующего ему вектора (x, y), т.е

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[2] От лат. realis (вещественный) и imaginarius (мнимый).