

Предел числовой последовательности

Определение. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от $V(A)$), что все члены последовательности, номера которых больше N , содержатся в указанной окрестности точки A .

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A\right) := \forall V(A) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in V(A))$$

и соответственно

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A\right) := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n - A| < \varepsilon).$$

Предел функции

Определение. Итак, число A называется пределом функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ при x , стремящемся по множеству E к точке a (предельной для E), если для любой окрестности точки A найдется проколота окрестность точки a в множестве E , образ которой при отображении $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки A .

$$\left(\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = A \right) := \forall V_{\mathbb{R}}(A) \exists \dot{U}_E(a) (f(\dot{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A))$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Разложение функции в ряд Тейлора

$$P_n(x_0; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1)$$

Определение. Алгебраический полином, заданный соотношением (1), называется полиномом Тейлора¹ порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 .

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0; x) = r_n(x_0; x) \quad (2)$$

уклонение полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называется часто остатком, точнее, n -м остатком или n -м остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x) \quad (3)$$

Также давайте разложим наиболее часто используемые функции по формуле (3):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

¹Б. Тейлор (1685 - 1731) – английский математик

Интеграл Римана

Определение. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в пункте (5) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \rightarrow 0$ (т.е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\mathfrak{R}[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Формула Тейлора

Теорема. Если функция $f : U(x) \rightarrow \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x + h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство

$$f(x^1 + h^1, \dots, x^m + h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (h^1 \delta_1 + \dots + h^m \delta_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h),$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} (h^1 \delta_1 + \dots + h^m \delta_m)^n f(x + th) dt$$

Интеграл по гладкой поверхности

Определение. (интеграла от k -формы ω по заданной картой $\varphi : I \rightarrow S$ гладкой k -мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i \omega(x_i)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i (\varphi * \omega)(\tau_i)(\tau_1, \dots, \tau_k). \quad (4)$$

Если применить это определение к k -форме $f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$ на I (когда φ – тождественное отображение), то очевидно, получим, что:=

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 \dots dt^k. \quad (5)$$

Таким образом, из (1) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi \omega,$$

а последний интеграл, как видно из равенства (2), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi * \omega$ функции f на промежутке I .

Формула Стокса в \mathbb{R}^3

Утверждение. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая компактная двумерная поверхность с краем δS , лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^3$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

где ориентация края δS берется согласованной с ориентацией поверхности S .