# Предел числовой последовательности

Определение. Число A $\in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окресности V(A) точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от V(A)), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки A.

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall V(A) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in V(A))$$

и соответственно

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (|x_n - A| < \varepsilon).$$

# Предел функции

Определение. Итак, число А называется пределом функции $f : E \to \mathbb{R}$ при $x$, стремящемся по множеству $E$ к точке $a$ (предельной для $E$), если для любой окрестности точки $A$ найдется проколотая окрестность точки $a$ в множестве $E$, образ которой при отображении $f : E- > \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки $A$.

$$(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A) := \forall V_{\mathbb{R}}(A) \ \exists \dot{U}_E(a) \ (f(\dot{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A))$$

## Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

# Разложение фукнции в ряд Тейлора

$$P_n(x_0;x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Определение. Алгебраический полином, заданный соотношением (**??**), называется полиномом Тейлора[1] порядка $n$ функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0;x) = r_n(x_0;x)$$

уклонение полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называется часто остатком, точнее, $n$-м остатком или $n$-м остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x)$$

Также давайте разложим наиболее часто используемые функции по формуле (**??**):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + O(x^n+1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

[1] Б. Тейлор (1685 - 1731) – английский математик

# Интеграл Римана

Определение. Функция $f$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в пункте (**??**) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \to 0$ (т.е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\Re[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

# Формула Тейлора

Теорема. Если функция $f : U(x) \to \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}\ (U(x); \mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство

$$f(x^1 + h^1, ..., x^m + h^m) - f(x^1, ..., x^m) =$$
$$= \sum^{n-1} k = 1 \frac{1}{k!}(h^1\delta_1 + ... + h^m\delta_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h),$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h^1\delta_1 + ... + h^m\delta_m)^n f(x + th)dt$$

# Интеграл по гладкой поверхности

Определение. (интеграла от $k$-формы $\omega$ по заданной картой $\varphi : I \to S$ гладкой $k$-мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i \omega(x_i)(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k) = \lim_{\lambda \to 01} \sum_i (\varphi * \omega)(\tau_i)(\tau_1, ..., \tau_k).$$

Если применить это определение к $k$-форме $f(t)dt^1 \wedge ... \wedge dt^k$ на $I$ (когда $\varphi$ – тождественное отображение), то очевидно, получим, что:

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge ... \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 ... \ dt^k.$$

Таким образом, из (**??**) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi * \omega,$$

а последний интеграл, как видно из равенства (**??**), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi * \omega$ функции $f$ на промежутке $I$.

# Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$

Утверждение. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая компатная двумерная поверхность с краем $\delta S$, лежаща в области $G \subset \mathbb{R}^{\nvDash}$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega = P\ dx + Q\ dy + R\ dz$. Тогда имеет место соотношение

$$\int_{\delta S} P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \iint_S \left(\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z}\right)\ dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right) dx \wedge dy,$$

где ориентация края $\delta S$ берется согласованной с ориентаией поверхности S.

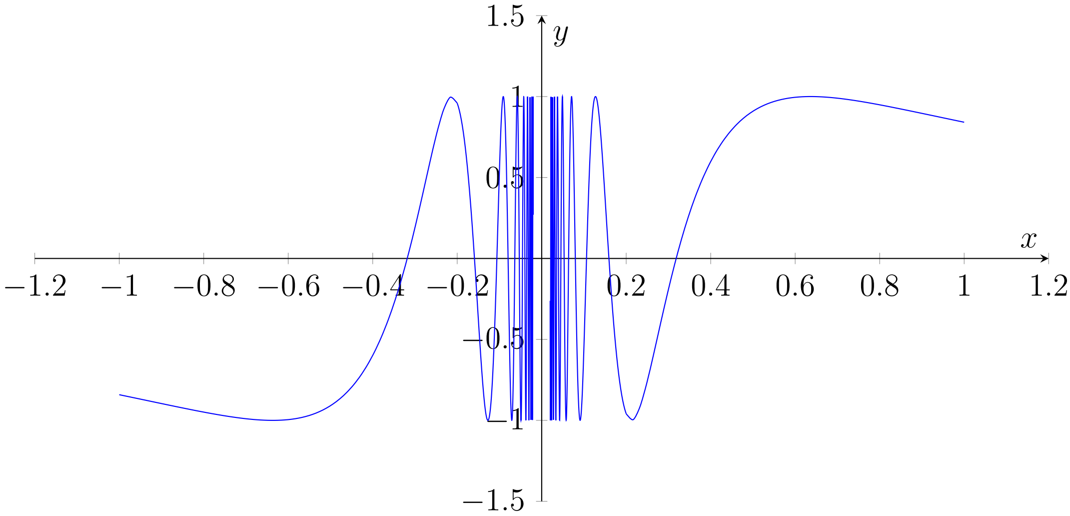
# Алгебра форм

Пусть $X$ - линейное пространство, а $F^k : X^k \to \mathbb{R}$ – вещественнозначная $k$-форма на $X$. Если $e_1, ..., e_n$ – базис в $X$, а $x_1 = x^{i_1}e_{i_1}, ..., x_k = x^{i_k}e_{i_k}$ – разложение векторов $x_1, ..., x_k \in X$ по этому базису, то в силу линейности $F_k$ по каждому аргументу

$$F^k(x_1, ..., x_k) = F^k(x_1^i e_{i_1}, ..., x_k^i e_{i_k}) = \tag{2}$$

$$= F^k(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) x^{i_1} \cdot ... \cdot x^{i_k} = a_{i_1 ... i_k} x^{i_1} \cdot x^{i_k}. \tag{3}$$

## График функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$



# Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения. Определено отображение (операции сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x, y)$ элементов $x, y$ из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой $x$ и $y$. При этом выполнены следующие условия:

$1_+$. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем):

$$\exists 0\ \forall x : x + 0 = x.$$

$2_+$. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к $x$, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

$3_+$. Операция $+$ ассоциативна, т.е. для любых элементов $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

$4_+$. Операция $+$ коммутативна, т.е. для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + z$$

(II) Аксиомы умножения. Определено отражение (операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x, y)$ элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением $x$ и $y$, причем так, что выполнены следующие условия:

$1_\bullet$. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}\backslash 0$ (называемый в случае умножения единицей) такой, что

$$\exists 1\ \forall x : x \cdot 1 = x.$$

$2_\bullet$. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}\backslash 0$ имеется элемент $x^-1 \in \mathbb{R}$, называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^-1 = x^-1 \cdot *x = 1.$$

$3_\bullet$. Операция $\bullet$ ассоциативна, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$4_\bullet$. Операция $\bullet$ коммутативна, т.е. для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R}\backslash 0$, как можно проверить, является (мультипликативной) группой.

# Умножение матриц

Теорема 1. Произведение $\varphi A \varphi B$ двух линейных отображений с матрицами $A$ и $B$ является линейным отображением с матрицей $C = AB$. Другими словами

$$\varphi A \varphi B = \varphi AB.$$

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение $AB$ двух произвольных матриц $A, B$, имея в виду, однако, что символ $AB$ имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице $A$ совпадает с числом строк в матрице $B$. Именно при этом условии выполняется правило умножения $i-$й строки $A_{(i)}$ на $j-$й столбец $B^{(j)}$, согласно которому

$$A_{(i)}B^{(j)} = (a_{i1}, ..., a_{is})[b_{1j}, ..., b_{sj}]$$

Следствие. Умножение матриц ассоциативно:

$$A(BC) = (AB)C$$

Действительно, произведение матриц соответствует произведению линейных отображений (теорема 1 и соотношение **??**). К тому же результату можно прийти вычислительным путём, используя непосредственно соотношение (**??**). □

Обратим ещё внимание на так называемые законы дистрибутивности:

$$(A + B)C = AC + BC, \qquad D(A + B) = DA + DB$$

где $A, B, C, D$ – произвольные матрицы размеров соответственно $m \times s, m \times s, s \times n, n \times m$.

Действительно, пологая $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$, мы получим для любых $i$, $j$ равенство (используя дистрибутивность в $\mathbb{R}$)

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj},$$

левая часть которого дает элемент $g_{ij}$ матрицы $(A + B)C$, а правая – элементы $h_{ij}$ и $h'_{ij}$ матриц $AC$ и соответственно $BC$. Второй закон дистрибутивности (**??**) проверяется совершенно аналогично.

## Транспонирование матриц

Будем говорить, что матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно получаются друг из друга транспонированием – заменой строк на столбцы, а столбцов на строки.

# Инварианты линейных групп

Линейной группой степени $n$ мы, как обычно, называем любую подгруппу в $GL(n, P)$, где $P$ – некоторое поле. В дальнейшем можно считать $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$. Если $G$ – абстрактная группа и $\Phi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ – её линейное представление, то пару $(G, \Phi)$ мы тоже будем называть линейной группой. Линейные преобразования $\Phi_g$ действуют на столбцы переменных $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{Vmatrix} \Phi_g(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_g(x_n) \end{Vmatrix} = \Phi_g \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n. \end{Vmatrix}$$

Они переводят любую форму (однородный многочлен) $f$ степени $m$ снова в форму степени $m$:

$$(\widetilde{\Phi_g} f)(x_1, ..., x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x1), ..., \Phi_{g^{-1}}(x_n)).$$

Определение. Форма $f \in P_m$, остающаяся неподвижной при действии $\widetilde{\Phi_g}$ (т.е. $\widetilde{\Phi_g} f = f \ \forall g \in G$), называется (целым) инвариантом степени $m$ линейной группы $(G, \Phi)$.

# Начала тензорного исчисления

**1. Понятие то тензорах.** Разумной общности можно достичь, ограничившись лишь полилинейными отображениями некоторого специального вида.

Определение. Пусть $\Re$ – поле, $V$ – векторное пространство над $\Re, V^*$ – сопряженное к $V$ пространство, $p$ и $q$ – целые числа $\geq 0$,

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^*}_{q}$$

– декартово произведение $p$ экземпляров пространства $V$ и $q$ экземпляров пространства $V^*$. Всякое $(p+q)$ – линейное отображение

$$f : V^p \times (V^*)^q \to \Re$$

называется тензором на $V$ типа $(p, q)$ и валентности (или ранга) $p + q$.

**2. Произведение тензоров.**Вначале пусть

$$f : V_1 \times ... \times V_r \to \Re \qquad g : W_1 \times ... \times W_s \to \Re$$

– произвольные полилинейные формы. Это значит, что $V_i, W_j$ – никак не связанные друг с другом векторные пространства.

Определение. Под тензорным произведением $f$ и $g$ понимают отображение

$$f \otimes g : V_1 \times ...V_r \times W_1 \times ... \times W_s \to \Re,$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(v_1, ..., v_r; w_1, ...., w_s) = f(v_1, ..., v_r)g(w_1, ..., w_s).$$

Существенно подчеркнуть, что переменные $V_i$ независимы от переменных $W_j$.

Резюмируем сказанное:

$1_\otimes$ операция умножения $\otimes$ определена для тензоров произвольных типов;

$2_\otimes$ валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей;

$3_\otimes$ тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно.

# Дифференциальное исчисление. Основные теоремы.

Теорема. Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$, определенная в окрестности $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^m) \in \mathbb{R}$, и пусть $x_0$ – критическая точка этой функции $f$.

Если в тейлоровском разложении

$$f(x_0^1 + h^1, ..., x_0^m + h^m) = f(x_0^1, ..., x_0^m) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i h^j + o(||h||^2)$$

функции в точке $x_0$ квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i h^j \equiv \delta_{ij} f(x_0) h^i h^j$$

a) знакоопределена, то в точке $x_0$ функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма (**??**) положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена;

b) может принимать значения разных знаков, то в точке $x_0$ функция экстремума не имеет.

◄ Пусть $h \neq 0$ и $x_0 + h \in U(x_0)$. Представим соотношение (**??**) в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2!} ||h||^2 \left[ \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \frac{h^i}{||h||} \frac{h^j}{||h||} + o(1) \right]$$

где $o(1)$ есть величина, бесконечно малая при $h \to 0$

Из (**??**) видно, что знак разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$ полностью определяется знаком величины, стоящей в квадратных скобках. Этой величиной мы теперь и займемся.

# Теорема о определителях квадратной матрицы

Теорема. Определители любой квадратной матрицы $A$ и транспонированной к ней матрицы $A^T$ совпадают:

$$\det A^T = \det A$$

Доказательство. Положив $A = (a_{ij}), A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ji}$, и заметив, что $k = \pi(\pi^-1k)$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и для любого номера $k \in \{1, 2, ..., n\}$, мы видим, что упорядочение множителей произведения $a'_{1,\pi 1}...a'_{n,\pi n}$ в соответствии с перестоновкой $\pi^-1$ дает

$$a'_{1,\pi 1}...a'_{n,\pi n} = a'_{\pi^{-1}1,\pi(\pi^{-1}1)}...a'_{\pi^{-1}n,\pi(\pi^{-1}n)} = \tag{4}$$

$$= a'_{\pi^{-1}1,1}...a'_{\pi^{-1}n,n} = a_{1,\pi^{-1}1}...a_{n,\pi^{-1}n}. \tag{5}$$

Если учесть ещё, что $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi^{-1}}(\varepsilon_\pi \varepsilon_{\pi^{-1}} = \varepsilon_{\pi\pi^{-1}} = \varepsilon_e = 1)$, а $\{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\} = \{\pi | \pi \in S_n\}$ (поскольку $\pi \mapsto \pi^{-1}$) – биективное отображение из $S_n$ в $S_n$), то по формуле нахождения определителя матрицы имеем

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon_\pi a'_{1,\pi^{-1}1}...a'_{n,\pi^{-1}n} = \tag{6}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma 1}...a_{n,\sigma n} = \det A \tag{7}$$

# Организация стандартной библиотеки C++

Средства стандартной библиотеки определены в пространстве имен ***std*** и расположены в некотором наборе заголовочных файлов, реализующих большую часть этих средств. Перечисление этих заголовочных файлов дает представление о стандартной библиотеке и поясняет направление ее рассмотрение.

Ниже в данном разделе мы приводим список заголовочных файлов стандартной библиотеки, сгруппированный по функциональности, и сопровождаемый краткими пояснениями.

Стандартный заголовочный файл, начинающийся на букву с, эквивалентен соответствующему заголовочному файлу стандартной библиотеки языка С. Для каждого файла <***X.h***>, определяющего часть стандартной библиотеки языка С в глобальном пространстве имен и в пространстве имен ***std***, имеется заголовочный файл <***cX***>, определяющий те же имена исключительно в пространстве имен ***std***.

| Контейнеры | |
|---|---|
| <***array***> | одномерный массив элементов ***T***, в количестве ***N*** |
| <***vector***> | одномерный динамический массив элементов ***T*** |
| <***list***> | двусвязный список элементов ***T*** |
| <***deque***> | двусторонняя очередь элементов ***T*** |
| <***stack***> | стек элементов ***T*** |
| <***map***> | упорядоченный ассоциативный контейнер элементов ***T*** |
| <***set***> | множество элементов ***T*** |
| <***bitset***> | множество булевских переменных |

Ассоциативные контейнеры ***multimap*** и ***multiset*** находятся в файлах <***map***> и <***set***>, соответственно. Контейнер ***priority map*** объявляется в <***queue***>.

# Комплексные числа

Подобно тому, как в области $\mathbb{Q}$ рациональных чисел алгебраическоет уравнение $x^2 = 2$ не имело решений, уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в области действительных чисел $R$, и подобно тому, как вводя внешний по отношению $\mathbb{Q}$ символ в $\sqrt{2}$ в качестве решения уравнения $x^2 = 2$, мы увязываем его с операциями в $\mathbb{Q}$ и получаем новые числа вида $r_1 + \sqrt{2}r^2$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, можно ввести символ $i$ в качестве решения уравнения $x^2 = -1$ и связать это внешнее по отношению к $\mathbb{R}$ число $i$ с действительными числами и арифметическими операциями в $\mathbb{R}$.

Реализуем теперь намеченную программу.

**a. Алгераическое расширение поля $\mathbb{R}$.** Итак, вводим (следуя обозначению Эйлера) новое число $i$ – мнимую единицу, такое что $i^2 = -1$.

Взаимодействие $i$ с действительными числами должно состоять в том, что можно умножать $i$ на числа $y \in \mathbb{R}$, т.е необходимо появляются числа вида $iy$, и складывать такие числа с вещественными, т.е появляются числа вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Если мы хотим, чтобы на множестве объектов вида $x+iy$, которые мы вслед за Гауссом назовем компл´ксными числами, были определены привычные операции коммутативноо сложения и коммутативного умножения, дистрибутивного относительно сложения, то необходимо положить по определению, что

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Два комплексных числа