Предел числовой [zorich]последовательности

Определение. Число A $\in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окресности V(A) точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от V(A)), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки A.

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall V(A) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in V(A)) \tag{1}$$

и соответственно

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (|x_n - A| < \varepsilon). \tag{2}$$

Предел функции

Определение. Итак, число A называется пределом функции $f : E \to \mathbb{R}$ при x, стемящемся по множеству E к точке a (предельной для E), если для любой окрестности точки A найдется проколотая окрестность точки a в множестве E, образ которой при отображении $f : E -> \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки A.

$$(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A) := \forall V_{\mathbb{R}}(A)\ \exists \dot{U}_E(a)\ (f(\dot{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A)) \tag{3}$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5}$$

Разложение фукнции в ряд Тейлора

$$P_n(x_0;x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

Определение. Алгебраический полином, заданный соотношением (6), называется полиномом Тейлора[1] порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0;x) = r_n(x_0;x) \tag{7}$$

уклонение полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называется часто остатком, точнее, n-м остатком или n-м остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x) \tag{8}$$

Также давайте разложим наиболее часто используемые функции по формуле (8):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + O(x^n+1) \tag{9}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2}) \tag{10}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3}) \tag{11}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1}) \tag{12}$$

[1] Б. Тейлор (1685 - 1731) – английский математик

Интеграл Римана

Определение. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в пункте () предел интегральных сумм при $\lambda(P) \to 0$ (т.е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\Re[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Формула Тейлора

Теорема. Если функция $f : U(x) \to \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}\ (U(x); \mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство

$$f(x^1 + h^1, ..., x^m + h^m) - f(x^1, ..., x^m) =$$
$$= \sum^{n-1} k = 1 \frac{1}{k!}(h^1\delta_1 + ... + h^m\delta_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h),$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h^1\delta_1 + ... + h^m\delta_m)^n f(x + th)dt \tag{13}$$

Интеграл по гладкой поверхности

Определение. (интеграла от k-формы ω по заданной картой $\varphi : I \to S$ гладкой k-мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i \omega(x_i)(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k) = \lim_{\lambda\to 01} \sum_i (\varphi * \omega)(\tau_i)(\tau_1, ..., \tau_k).$$

Если применить это определение к k-форме $f(t)dt^1 \wedge ... \wedge dt^k$ на I (когда φ – тождественное отображение), то очевидно, получим, что:

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge ... \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 ... \, dt^k.$$

Таким образом, из () следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi * \omega, \tag{14}$$

а последний интеграл, как видно из равенства (), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi * \omega$ функции f на промежутке I.

Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$

Утверждение. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая компатная двумерная поверхность с краем δS, лежаща в области $G \subset \mathbb{R}^{\nVdash}$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega = P\ dx + Q\ dy + R\ dz$. Тогда имеет место соотношение

$$\int_{\delta S} P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \iint_S \left(\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z}\right)\ dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right) dx \wedge dy,$$

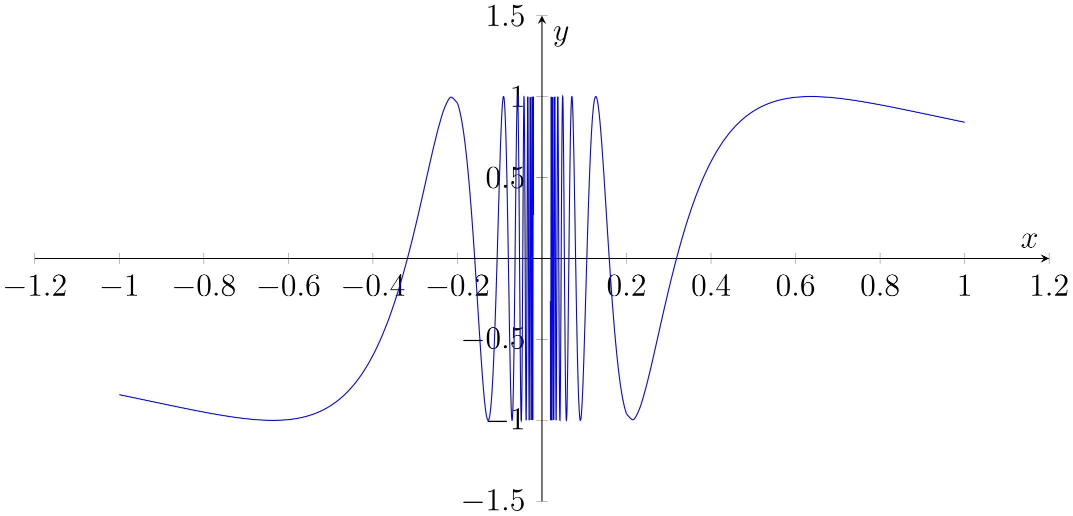
где ориентация края δS берется согласованной с ориентаией поверхности S.

Алгебра форм

Пусть X - линейное пространство, а $F^k : X^k \to \mathbb{R}$ – вещественнозначная k-форма на X. Если $e_1, ..., e_n$ – базис в X, а $x_1 = x^{i_1} e_{i_1}, ..., x_k = x^{i_k} e_{i_k}$ – разложение векторов $x_1, ..., x_k \in X$ по этому базису, то в силу линейности F_k по каждому аргументу

$$F^k(x_1, ..., x_k) = F^k(x_1^i e_{i_1}, ..., x_k^i e_{i_k}) = F^k(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) x^{i_1} \cdot ... \cdot x^{i_k} = a_{i_1 ... i_k} x^{i_1} \cdot x^{i_k}. \tag{15}$$

График функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$



Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения. Определено отображение (операции сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1_+. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем):

$$\exists 0 \ \forall x : x + 0 = x.$$

2_+. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к x, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. Операция $+$ ассоциативна, т.е. для любых элементов $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4_+. Операция $+$ коммутативна, т.е. для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + z$$

(II) Аксиомы умножения. Определено отражение (операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

$1_\bullet$. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}\backslash 0$ (называемый в случае умножения единицей) такой, что

$$\exists 1 \ \forall x : x \cdot 1 = x.$$

$2_\bullet$. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}\backslash 0$ имеется элемент $x^-1 \in \mathbb{R}$, называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^-1 = x^-1 \cdot *x = 1.$$

$3_\bullet$. Операция $\bullet$ ассоциативна, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$4_\bullet$. Операция $\bullet$ коммутативна, т.е. для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R}\backslash 0$, как можно проверить, является (мультипликативной) группой.

Умножение матриц

Теорема 1. Произведение $\varphi A \varphi B$ двух линейных отображений с матрицами A и B является линейным отображением с матрицей $C = AB$. Другими словами

$$\varphi A \varphi B = \varphi AB. \tag{16}$$

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение AB двух произвольных матриц A, B, имея в виду, однако, что символ AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице A совпадает с числом строк в матрице B. Именно при этом условии выполняется правило умножения $i-$й строки $A_{(i)}$ на $j-$й столбец $B^{(j)}$, согласно которому

$$A_{(i)}B^{(j)} = (a_{i1}, ..., a_{is})[b_{1j}, ..., b_{sj}] \tag{17}$$

Следствие. Умножение матриц ассоциативно:

$$A(BC) = (AB)C \tag{18}$$

Действительно, произведение матриц соответствует произведению линейных отображений (теорема 1 и соотношение 16). К тому же результату можно прийти вычислительным путём, используя непосредственно соотношение (17). $\square$

Обратим ещё внимание на так называемые законы дистрибутивности:

$$(A + B)C = AC + BC, \qquad D(A + B) = DA + DB \tag{19}$$

где A, B, C, D – произвольные матрицы размеров соответственно $m \times s, m \times s, s \times n, n \times m$.

Действительно, пологая $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$, мы получим для любых i, j равенство (используя дистрибутивность в $\mathbb{R}$)

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}, \tag{20}$$

левая часть которого дает элемент g_{ij} матрицы $(A + B)C$, а правая – элементы h_{ij} и h'_{ij} матриц AC и соответственно BC. Второй закон дистрибутивности (19) проверяется совершенно аналогично.

Транспонирование матриц

Будем говорить, что матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad A^T = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{21}$$

размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно получаются друг из друга транспонированием – заменой строк на столбцы, а столбцов на строки.

Инварианты линейных групп

Линейной группой степени n мы, как обычно, называем любую подгруппу в $GL(n, P)$, где P – некоторое поле. В дальнейшем можно считать $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$. Если G – абстрактная группа и $\Phi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ – её линейное представление, то пару (G, Φ) мы тоже будем называть линейной группой. Линейные преобразования Φ_g действуют на столбцы переменных $x_1, ..., x_n$:

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_g(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_g(x_n) \end{matrix} \right\| = \Phi_g \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n. \end{matrix} \right\| \tag{22}$$

Они переводят любую форму (однородный многочлен) f степени m снова в форму степени m:

$$(\widetilde{\Phi_g} f)(x_1, ..., x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x1), ..., \Phi_{g^{-1}}(x_n)). \tag{23}$$

Определение. Форма $f \in P_m$, остающаяся неподвижной при действии $\widetilde{\Phi_g}$ (т.е. $\widetilde{\Phi_g} f = f \ \forall g \in G$), называется (целым) инвариантом степени m линейной группы (G, Φ).

Начала тензорного исчисления

1. Понятие то тензорах. Разумной общности можно достичь, ограничившись лишь полилинейными отображениями некоторого специального вида.

Определение. Пусть $\Re$ – поле, V – векторное пространство над $\Re, V^*$ – сопряженное к V пространство, p и q – целые числа ≥ 0,

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^*}_{q} \tag{24}$$

– декартово произведение p экземпляров пространства V и q экземпляров пространства V^*. Всякое $(p+q)$ – линейное отображение

$$f : V^p \times (V^*)^q \to \Re \tag{25}$$

называется тензором на V типа (p, q) и валентности (или ранга) $p + q$.

2. Произведение тензоров.Вначале пусть

$$f : V_1 \times ... \times V_r \to \Re \qquad g : W_1 \times ... \times W_s \to \Re \tag{26}$$

– произвольные полилинейные формы. Это значит, что V_i, W_j – никак не связанные друг с другом векторные пространства.

Определение. Под тензорным произведением f и g понимают отображение

$$f \otimes g : V_1 \times ...V_r \times W_1 \times ... \times W_s \to \Re, \tag{27}$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(v_1, ..., v_r; w_1, ..., w_s) = f(v_1, ..., v_r)g(w_1, ..., w_s). \tag{28}$$

Существенно подчеркнуть, что переменные V_i независимы от переменных W_j.

Резюмируем сказанное:

$1_\otimes$ операция умножения $\otimes$ определена для тензоров произвольных типов;

$2_\otimes$ валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей;

$3_\otimes$ тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно.

Дифференциальное исчисление. Основные теоремы.

Теорема. Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^{(2)}(U(x_0);\mathbb{R})$, определенная в окрестности $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^m) \in \mathbb{R}$, и пусть x_0 – критическая точка этой функции f.

Если в тейлоровском разложении

$$f(x_0^1 + h^1, ..., x_0^m + h^m) = f(x_0^1, ..., x_0^m) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0)h^i h^j + o(||h||^2) \qquad (29)$$

функции в точке x_0 квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0)h^i h^j \equiv \delta_{ij} f(x_0) h^i h^j \qquad (30)$$

a) знакоопределена, то в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма (30) положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена;

b) может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

◀ Пусть $h \neq 0$ и $x_0 + h \in U(x_0)$. Представим соотношение (29) в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2!}||h||^2 \left[\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0)\frac{h^i}{||h||}\frac{h^j}{||h||} + o(1)\right] \qquad (31)$$

где $o(1)$ есть величина, бесконечно малая при $h \to 0$

Из (31) видно, что знак разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$ полностью определяется знаком величины, стоящей в квадратных скобках. Этой величиной мы теперь и займемся.

Теорема о определителях квадратной матрицы

Теорема. Определители любой квадратной матрицы A и транспонированной к ней матрицы A^T совпадают:

$$\det A^T = \det A \tag{32}$$

Доказательство. Положив $A = (a_{ij}), A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ji}$, и заметив, что $k = \pi(\pi^-1k)$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и для любого номера $k \in \{1, 2, ..., n\}$, мы видим, что упорядочение множителей произведения $a'_{1,\pi 1}...a'_{n,\pi n}$ в соответствии с перестоновкой π^-1 дает

$$a'_{1,\pi 1}...a'_{n,\pi n} = a'_{\pi^{-1}1,\pi(\pi^{-1}1)}...a'_{\pi^{-1}n,\pi(\pi^{-1}n)} = a'_{\pi^{-1}1,1}...a'_{\pi^{-1}n,n} = a_{1,\pi^{-1}1}...a_{n,\pi^{-1}n}. \tag{33}$$

Если учесть ещё, что $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi^{-1}}(\varepsilon_\pi \varepsilon_{\pi^{-1}} = \varepsilon_{\pi\pi^{-1}} = \varepsilon_e = 1)$, а $\{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\} = \{\pi | \pi \in S_n\}$ (поскольку $\pi \mapsto \pi^{-1}$) – биективное отображение из S_n в S_n), то по формуле нахождения определителя матрицы имеем

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon_\pi a'_{1,\pi^{-1}1}...a'_{n,\pi^{-1}n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma 1}...a_{n,\sigma n} = \det A \tag{34}$$

Организация стандартной библиотеки C++

Средства стандартной библиотеки определены в пространстве имен ***std*** и расположены в некотором наборе заголовочных файлов, реализующих большую часть этих средств. Перечисление этих заголовочных файлов дает представление о стандартной библиотеке и поясняет направление ее рассмотрение.

Ниже в данном разделе мы приводим список заголовочных файлов стандартной библиотеки, сгруппированный по функциональности, и сопровождаемый краткими пояснениями.

Стандартный заголовочный файл, начинающийся на букву с, эквивалентен соответствующему заголовочному файлу стандартной библиотеки языка С. Для каждого файла <***X.h***>, определяющего часть стандартной библиотеки языка С в глобальном пространстве имен и в пространстве имен ***std***, имеется заголовочный файл <***cX***>, определяющий те же имена исключительно в пространстве имен ***std***.

Контейнеры	
`<array>`	одномерный массив элементов ***T***, в количестве ***N***
`<vector>`	одномерный динамический массив элементов ***T***
`<list>`	двусвязный список элементов ***T***
`<deque>`	двусторонняя очередь элементов ***T***
`<stack>`	стек элементов ***T***
`<map>`	упорядоченный ассоциативный контейнер элементов ***T***
`<set>`	множество элементов ***T***
`<bitset>`	множество булевских переменных

Ассоциативные контейнеры ***multimap*** и ***multiset*** находятся в файлах `<map>` и `<set>`, соответственно. Контейнер ***priority map*** объявляется в `<queue>`.

Компле́ксные числа

Подобно тому, как в области $\mathbb{Q}$ рациональных чисел алгебраическое уравнение $x^2 = 2$ не имело решений, уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в области действительных чисел R, и подобно тому, как вводя внешний по отношению $\mathbb{Q}$ символ в $\sqrt{2}$ в качестве решения уравнения $x^2 = 2$, мы увязываем его с операциями в $\mathbb{Q}$ и получаем новые числа вида $r_1 + \sqrt{2}r^2$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, можно ввести символ i в качестве решения уравнения $x^2 = -1$ и связать это внешнее по отношению к $\mathbb{R}$ число i с действительными числами и арифметическими операциями в $\mathbb{R}$.

Реализуем теперь намеченную программу.

a. Алгебраическое расширение поля $\mathbb{R}$. Итак, вводим (следуя обозначению Эйлера) новое число i – мнимую единицу, такое что $i^2 = -1$.

Взаимодействие i с действительными числами должно состоять в том, что можно умножать i на числа $y \in \mathbb{R}$, т.е необходимо появляются числа вида iy, и складывать такие числа с вещественными, т.е появляются числа вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Если мы хотим, чтобы на множестве объектов вида $x+iy$, которые мы вслед за Гауссом назовем *компле́ксными числами*, были определены привычные операции коммутативного сложения и коммутативного умножения, дистрибутивного относительно сложения, то необходимо положить по определению, что

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{35}$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{36}$$

Два комплексных числа $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2$ считаются равными в том и только в том случае, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Отождествим числа $x \in \mathbb{R}$ с числами вида $x + i \cdot 0$, а i – с числом $0 + i * 1$. Роль нуля в множестве комплексных чисел, как видно из (35), играет число $0 + i \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$, роль единицы, как видно из (36), – числа $1 + i \cdot 0 = 1 \in \mathbb{R}$.

Из свойства вещественных чисел и определений (35), (36) следует, что множество комплексных чисел является полем, содержащим $\mathbb{R}$ в качестве подполя.

b. Геометрическая интерпретация поля $\mathbb{C}$. Комплексное число $z = x + iy$ мы можем отождествить с упорядоченной парой (x, y) действительных чисел, называемых соответственно действительной частью и мнимой частью компле́ксного числа z (обозначения: $x = \text{Re } z, y = \text{Im } z$ [2])

Но тогда, считая пару (x, y) декартовыми координатами точки плоскости $\mathbb{R}^2 = R \times R$, можно отождествить комплексные числа с точками этой плоскости или с двумерными векторами с координатами (x, y).

В такой векторной интерпретации покоординатное сложение (35) комплексных чисел соответствует правилу сложения векторов. Кроме того, такая интерпретация естественно приводит также к понятию модуля $|z|$ комплексного числа z как модуля или длины соответствующего ему вектора (x, y), т.е

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{37}$$

[2] От лат. realis (вещественный) и imaginarius (мнимый).

Таблица производных основных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Ограничения на область изменения аргумента $x \in \mathbb{R}$
1. C (const)	0	
2. x^a	ax^{a-1}	$x > 0$ при $a \in \mathbb{R}$ $\quad$ $x \in \mathbb{R}$ при $a \in \mathbb{N}$
3. a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}(a > 0, a \neq 1)$
4. $\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in \mathbb{R} \setminus 0 \ (a > 0, a \neq 1)$
5. $\sin x$	$\cos x$	
6. $\cos x$	$-\sin x$	
7. $\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
8. $\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Хранение одного из нескольких выбранных типов в контейнере или переменной

Объединения (union) C++03 могут содержать только очень простые типы под названием **простая структура данных (POD)**. Например в C++03 нельзя хранить `std::string` или `std::vector` в объединении.

Вы знаете о концепции **Неограниченных объединений (unrestricted unions)** в C++11? Позвольте мне кратко рассказать вам о них. C++11 ослабляет требования для объединений, но вы должны сами управлять созданием и уничтожением не-POD-типов. Вы должны вызывать конструирование или уничтожение по месту (in-place construction/destruction) и запомнить, какой тип хранится в объединении. Огромный объем работы, не так ли?

Можно ли в C++03 получить переменную, которая ведет себя как неограниченное объединение C++ и которая управляет временем жизни объекта, запоминает его тип?

Подготовка...

Мы будем работать с библиотекой header-only, которая проста в использовании. Все, что требуется для этого рецепта, - базовые знания C++.

Как это делается...

Позвольте представить вам библиотеку `Boost.Variant`.

1. Библиотека `Boost.Variant` может хранить любые типы, указанные во время компиляции. Она также управляет созданием или уничтожением по месту, и ей даже не требуется стандарт C++11:

```
#include <boost/variant.hpp>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>

int main() {
    typedef boost::variant<int, const char* std::string> my_var_t;
    std::vector<my_var_t> some_values;
    some_values.push_back(10);
    some_values.push_back("Hello, there!");
    some_values.push_back(std::string("Wow!"));

    std::string& s = boost::get<std::string>(some_values.back());
    s += " That is great\n";

    std::cout << s << '\n';
    return 0;
}
```

   Здорово, правда?

2. `Boost.Variant` не имеет пустого состояния, но у нее есть функция `empty()`, которая бесполезна и всегда возвращает значение `false`. Если вам нужно представить пустое состояние, просто добавьте простой тип первым шаблонным параметром

boost::variant. Если Boost.Variant содержит этот тип, интерпретируйте его как пустое состояние. Вот пример, в котором мы будем использовать тип boost:blank для представления пустого состояния:

```
void example1() {
    // The default constructor creates an instance of boost::blank.
    boost::variant<boost::blank, int, const char*, std::string> var;

    // The which() method returns the index of the type currently
    // contained in the variant.
    assert(var.which() == 0); // boost::blank

    var = "Hello, dear reader";
    assert(var.which() != 0);
}
```

3. Можно получить значение из boost::variant, используя два подхода:

```
void example2() {
    boost::variant<int, std::string> variable(0);

    //When using the method below, an exception may be thrown
    // boost::bad_get, if the actual value in variable is not int
    int s1 = boost::get<int>(variable);

    // If the actual value in the variable is not an int,
    // NULL will be returned
    int* s2 = boost::get<int>(&variable);
}
```

Как это работает...

Класс boost::variant содержит массив байтов и хранит значения в этом массиве. Размер массива определяется во время компиляции путем применения функции sizeof и функции для определения выравнивания (alignment) каждого из типов шаблонов. При присваивании или создании класса boost::variable предыдущее значение уничтожается по месту, а новое значение создается поверх массива байтов с использованием оператора placement new.

Дополнительно...

Boost.Variant обычно не выделяет память динамически и не требует RTTI. Это чрезвычайно быстрая библиотека, и она широко используется другими библиотеками Boost. Для достижения максимальной производительности убедитесь, что в шаблонном списке типов в первой позиции указан простой тип (POD), boost::variant использует rvalue-ссылки C++11, если они доступны в вашем компиляторе.

Библиотека Boost.Variant является частью стандартна с++17, std::variant имеет некоторые отличия от Boost.Variant

Вставка картинок

Рис. 1: Картинка из статьи про SSH

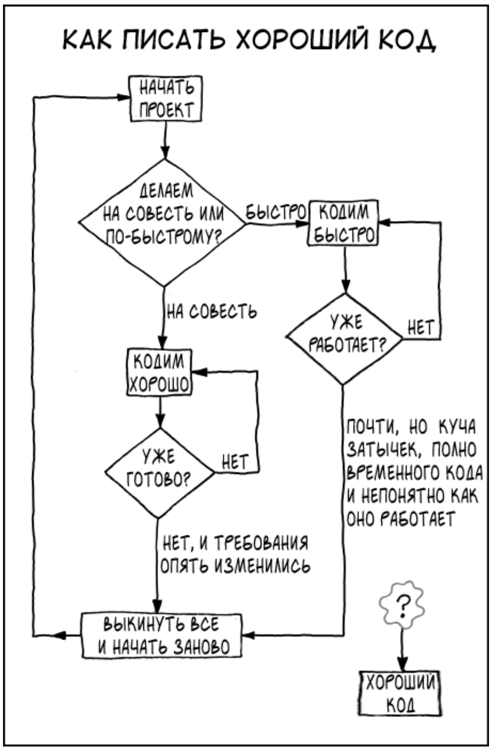


Рис. 2: Картинка о том, как писать хороший код :D

Прямоугольная матрица

Пусть есть два конечных множества:

- Номера строк: $M = \{1, 2, ..., m\}$;
- номера столбцов $N = \{1, 2, ..., n\}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Назовём матрицей A размера $m \times n$ (читается m на n) (m **- строк**, n **- столбцов**) с элементами из некоторого кольца или поля $\mathcal{K}$ отображение вида $A : M \times N \to \mathcal{K}$. Матрица записывается как

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где элемент матрицы $a_{ij} = a(i, j)$ находятся на пересечениии $i-$й *строки* и $j-$го *столбца*.

- i-я строка матрицы $A(i,) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$;
- $j-$й столбец матрицы $A(, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

При этом количество элементов матрицы равно $m \cdot n$.

- каждую строку матрицы можно интерпретировать как вектор в n-мерном координатном пространстве $\mathcal{K}^n$;
- каждый столбец матрицы – как вектор в m-мерном координатном пространстве $\mathcal{K}^m$.

Сама матрица естественным образом интерпретируется как вектор в пространстве $\mathcal{K}^{mn}$, имеющем размерность mn. Это позволяет ввести покомпонентное сложение матриц и умножение матрицы на число (см. ниже); что касается матричного умножения, то оно существенным образом опирается на прямоугольную структуру матрицы.

Обозначения

Если необходимо дать развёрнутое представление матрицы в виде таблицы, то используют запись вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Можно встретить как обозначения с круглыми скобками «(...)», так и обозначения с квадратными скобками «[...]». Реже можно встретить обозначения с двойными прямыми линиями «||...||»).

Список литературы

[1] Владимир Антонович Зорич. *Математический анализ. Часть I.* 2020, с. 564. ISBN: 978-5-4439-4030-4.

[2] Владимир Антонович Зорич. *Математический анализ. Часть II.* 2019, с. 675. ISBN: 978-5-4439-1303-2.

[3] Алексей Иванович Кострыкин. *Введение в алгебру. Основы Алгебры. Часть I.* 2020, с. 272. ISBN: 978-5-4439-4116-5.

[4] Антон А. Полухин. *Разработка приложений на C++ с использованием Boost. Рецепты, упрощающие разработку вашего приложения.* 2020, с. 346. ISBN: 987-5-97060-868-5.

[5] Бьерн Страуструп. *Язык программирования C++.* 2020, с. 1136. ISBN: 978-5-7989-0425-9.