

# Предел числовой последовательности

Определение. Число  $A \in \mathbb{R}$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если для любой окрестности  $V(A)$  точки  $A$  существует такой номер  $N$  (выбираемый в зависимости от  $V(A)$ ), что все члены последовательности, номера которых больше  $N$ , содержатся в указанной окрестности точки  $A$ .

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A\right) := \forall V(A) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in V(A))$$

и соответственно

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A\right) := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n - A| < \varepsilon).$$

## Предел функции

Определение. Итак, число  $A$  называется пределом функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  при  $x$ , стремящемся по множеству  $E$  к точке  $a$  (предельной для  $E$ ), если для любой окрестности точки  $A$  найдется проколота окрестность точки  $a$  в множестве  $E$ , образ которой при отображении  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  содержится в заданной окрестности точки  $A$ .

$$(\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = A) := \forall V_{\mathbb{R}}(A) \exists \dot{U}_E(a) (f(\dot{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A))$$

## Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

## Разложение функции в ряд Тейлора

$$P_n(x_0; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1)$$

Определение. Алгебраический полином, заданный соотношением (1), называется полиномом Тейлора<sup>1</sup> порядка  $n$  функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0; x) = r_n(x_0; x)$$

уклонение полинома  $P_n(x)$  от функции  $f(x)$ , называется часто остатком, точнее,  $n$ -м остатком или  $n$ -м остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x) \quad (2)$$

Также давайте разложим наиболее часто используемые функции по формуле (2):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

---

<sup>1</sup>Б. Тейлор (1685 - 1731) – английский математик

## Интеграл Римана

Определение. Функция  $f$  называется интегрируемой по Риману на отрезке  $[a, b]$ , если для нее существует указанный в пункте (3) предел интегральных сумм при  $\lambda(P) \rightarrow 0$  (т.е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ , будет обозначаться через  $\mathfrak{R}[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

## Формула Тейлора

Теорема. Если функция  $f : U(x) \rightarrow \mathbb{R}$  определена и принадлежит классу  $C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$  в окрестности  $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ , а отрезок  $[x, x+h]$  полностью содержится в  $U(x)$ , то имеет место равенство

$$\begin{aligned} & f(x^1 + h^1, \dots, x^m + h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (h^1 \delta_1 + \dots + h^m \delta_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h), \end{aligned}$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} (h^1 \delta_1 + \dots + h^m \delta_m)^n f(x + th) dt$$

## Интеграл по гладкой поверхности

Определение. (интеграла от  $k$ -формы  $\omega$  по заданной картой  $\varphi : I \rightarrow S$  гладкой  $k$ -мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i \omega(x_i)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i (\varphi * \omega)(\tau_i)(\tau_1, \dots, \tau_k). \quad (4)$$

Если применить это определение к  $k$ -форме  $f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$  на  $I$  (когда  $\varphi$  – тождественное отображение), то очевидно, получим, что:

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 \dots dt^k. \quad (5)$$

Таким образом, из (4) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi * \omega,$$

а последний интеграл, как видно из равенства (5), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме  $\varphi * \omega$  функции  $f$  на промежутке  $I$ .

## Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$

Утверждение. Пусть  $S$  – ориентированная кусочно гладкая компактная двумерная поверхность с краем  $\delta S$ , лежащая в области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , в которой задана гладкая 1-форма  $\omega = P dx + Q dy + R dz$ . Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

где ориентация края  $\delta S$  берется согласованной с ориентацией поверхности  $S$ .



## Алгебра форм

Пусть  $X$  - линейное пространство, а  $F^k : X^k \rightarrow \mathbb{R}$  - вещественнозначная  $k$ -форма на  $X$ . Если  $e_1, \dots, e_n$  - базис в  $X$ , а  $x_1 = x^{i_1}e_{i_1}, \dots, x_k = x^{i_k}e_{i_k}$  - разложение векторов  $x_1, \dots, x_k \in X$  по этому базису, то в силу линейности  $F_k$  по каждому аргументу

$$F^k(x_1, \dots, x_k) = F^k(x_1^{i_1}e_{i_1}, \dots, x_k^{i_k}e_{i_k}) = \quad (6)$$

$$= F^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})x^{i_1} \cdot \dots \cdot x^{i_k} = a_{i_1 \dots i_k} x^{i_1} \cdot x^{i_k}. \quad (7)$$

График функции  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



# Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

Определение. Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения. Определено отображение (операции сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  элементов  $x, y$  из  $\mathbb{R}$  некоторый элемент  $x + y \in \mathbb{R}$ , называемый суммой  $x$  и  $y$ . При этом выполнены следующие условия:

1<sub>+</sub>. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем):

$$\exists 0 \forall x : x + 0 = x.$$

2<sub>+</sub>. Для любого элемента  $x \in \mathbb{R}$  имеется элемент  $-x \in \mathbb{R}$ , называемый противоположным к  $x$ , такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3<sub>+</sub>. Операция  $+$  ассоциативна, т.е. для любых элементов  $x, y, z \in \mathbb{R}$  выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4<sub>+</sub>. Операция  $+$  коммутативна, т.е. для любых элементов  $x, y \in \mathbb{R}$  выполнено

$$x + y = y + x$$

(II) Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  элементов  $x, y \in \mathbb{R}$  некоторый элемент  $x \cdot y \in \mathbb{R}$ , называемый произведением  $x$  и  $y$ , причем так, что выполнены следующие условия:

1<sub>•</sub>. Существует нейтральный элемент  $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$  (называемый в случае умножения единицей) такой, что

$$\exists 1 \forall x : x \cdot 1 = x.$$

2<sub>•</sub>. Для любого элемента  $x \in \mathbb{R} \setminus 0$  имеется элемент  $x^{-1} \in \mathbb{R}$ , называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3<sub>•</sub>. Операция  $\bullet$  ассоциативна, т.е. для любых  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4<sub>•</sub>. Операция  $\bullet$  коммутативна, т.е. для любых  $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество  $\mathbb{R} \setminus 0$ , как можно проверить, является (мультипликативной) группой.

## Умножение матриц

Теорема 1. Произведение  $\varphi A \varphi B$  двух линейных отображений с матрицами  $A$  и  $B$  является линейным отображением с матрицей  $C = AB$ . Другими словами

$$\varphi A \varphi B = \varphi AB. \quad (8)$$

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение  $AB$  двух произвольных матриц  $A, B$ , имея в виду, однако, что символ  $AB$  имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице  $A$  совпадает с числом строк в матрице  $B$ . Именно при этом условии выполняется правило умножения  $i$ -й строки  $A_{(i)}$  на  $j$ -й столбец  $B^{(j)}$ , согласно которому

$$A_{(i)} B^{(j)} = (a_{i1}, \dots, a_{is}) [b_{1j}, \dots, b_{sj}] \quad (9)$$

Следствие. Умножение матриц ассоциативно:

$$A(BC) = (AB)C$$

Действительно, произведение матриц соответствует произведению линейных отображений (теорема 1 и соотношение 8). К тому же результату можно прийти вычислительным путём, используя непосредственно соотношение (9).  $\square$

Обратим ещё внимание на так называемые законы дистрибутивности:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad D(A + B) = DA + DB \quad (10)$$

где  $A, B, C, D$  – произвольные матрицы размеров соответственно  $m \times s, m \times s, s \times n, n \times m$ .

Действительно, полагая  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ , мы получим для любых  $i, j$  равенство (используя дистрибутивность в  $\mathbb{R}$ )

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj},$$

левая часть которого дает элемент  $g_{ij}$  матрицы  $(A + B)C$ , а правая – элементы  $h_{ij}$  и  $h'_{ij}$  матриц  $AC$  и соответственно  $BC$ . Второй закон дистрибутивности (10) проверяется совершенно аналогично.

# Транспонирование матриц

Будем говорить, что матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad {}^t A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

размеров  $m \times n$  и  $n \times m$  соответственно получаются друг из друга транспонированием – заменой строк на столбцы, а столбцов на строки.

# Инварианты линейных групп

Линейной группой степени  $n$  мы, как обычно, называем любую подгруппу в  $GL(n, P)$ , где  $P$  – некоторое поле. В дальнейшем можно считать  $P = \mathbb{R}$  или  $P = \mathbb{C}$ . Если  $G$  – абстрактная группа и  $\Phi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  – её линейное представление, то пару  $(G, \Phi)$  мы тоже будем называть линейной группой. Линейные преобразования  $\Phi_g$  действуют на столбцы переменных  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{pmatrix} \Phi_g(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_g(x_n) \end{pmatrix} = \Phi_g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Они переводят любую форму (однородный многочлен)  $f$  степени  $m$  снова в форму степени  $m$ :

$$(\widetilde{\Phi_g} f)(x_1, \dots, x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x_1), \dots, \Phi_{g^{-1}}(x_n)).$$

Определение. Форма  $f \in P_m$ , остающаяся неподвижной при действии  $\widetilde{\Phi_g}$  (т.е.  $\widetilde{\Phi_g} f = f \ \forall g \in G$ ), называется (целым) инвариантом степени  $m$  линейной группы  $(G, \Phi)$ .

# Начала тензорного исчисления

**1. Понятие то тензорах.** Разумной общности можно достичь, ограничившись лишь полилинейными отображениями некоторого специального вида.

Определение. Пусть  $\mathfrak{R}$  – поле,  $V$  – векторное пространство над  $\mathfrak{R}$ ,  $V^*$  – сопряженное к  $V$  пространство,  $p$  и  $q$  – целые числа  $\geq 0$ ,

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q$$

– декартово произведение  $p$  экземпляров пространства  $V$  и  $q$  экземпляров пространства  $V^*$ . Всякое  $(p+q)$  – линейное отображение

$$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow \mathfrak{R}$$

называется тензором на  $V$  типа  $(p, q)$  и валентности (или ранга)  $p+q$ .

**2. Произведение тензоров.** Вначале пусть

$$f : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathfrak{R} \quad g : W_1 \times \dots \times W_s \rightarrow \mathfrak{R}$$

– произвольные полилинейные формы. Это значит, что  $V_i, W_j$  – никак не связанные друг с другом векторные пространства.

Определение. Под тензорным произведением  $f$  и  $g$  понимают отображение

$$f \otimes g : V_1 \times \dots \times V_r \times W_1 \times \dots \times W_s \rightarrow \mathfrak{R},$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_r; w_1, \dots, w_s) = f(v_1, \dots, v_r)g(w_1, \dots, w_s).$$

Существенно подчеркнуть, что переменные  $V_i$  независимы от переменных  $W_j$ .

Резюмируем сказанное:

- 1 $\otimes$  операция умножения  $\otimes$  определена для тензоров произвольных типов;
- 2 $\otimes$  валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей;
- 3 $\otimes$  тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно.

## Дифференциальное исчисление. Основные теоремы.

Теорема. Пусть  $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  – функция класса  $C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$ , определенная в окрестности  $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$  точки  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in \mathbb{R}$ , и пусть  $x_0$  – критическая точка этой функции  $f$ .

Если в тейлоровском разложении

$$f(x_0^1 + h^1, \dots, x_0^m + h^m) = f(x_0^1, \dots, x_0^m) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^m \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i h^j + o(\|h\|^2) \quad (11)$$

функции в точке  $x_0$  квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i h^j \equiv \delta_{ij} f(x_0) h^i h^j \quad (12)$$

- а) знакоопределена, то в точке  $x_0$  функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма (12) положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена;
- б) может принимать значения разных знаков, то в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.

◀ Пусть  $h \neq 0$  и  $x_0 + h \in U(x_0)$ . Представим соотношение (11) в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2!} \|h\|^2 \left[ \sum_{i,j=1}^m \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \frac{h^i}{\|h\|} \frac{h^j}{\|h\|} + o(1) \right] \quad (13)$$

где  $o(1)$  есть величина, бесконечно малая при  $h \rightarrow 0$

Из (13) видно, что знак разности  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  полностью определяется знаком величины, стоящей в квадратных скобках. Этой величиной мы теперь и займемся.