

Предел числовой последовательности

Определение. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от $V(A)$), что все члены последовательности, номера которых больше N , содержатся в указанной окрестности точки A .

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A\right) := \forall V(A) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in V(A))$$

и соответственно

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A\right) := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n - A| < \varepsilon).$$

Предел функции

Определение. Итак, число A называется пределом функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ при x , стремящемся по множеству E к точке a (предельной для E), если для любой окрестности точки A найдется проколота окрестность точки a в множестве E , образ которой при отображении $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки A .

$$(\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = A) := \forall V_{\mathbb{R}}(A) \exists \dot{U}_E(a) (f(\dot{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A))$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Разложение функции в ряд Тейлора

$$P_n(x_0; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1)$$

Определение. Алгебраический полином, заданный соотношением (1), называется полиномом Тейлора¹ порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 .

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0; x) = r_n(x_0; x)$$

уклонение полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называется часто остатком, точнее, n -м остатком или n -м остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x) \quad (2)$$

Также давайте разложим наиболее часто используемые функции по формуле (2):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O(x^{2k+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

¹Б. Тейлор (1685 - 1731) – английский математик

Интеграл Римана

Определение. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в пункте (3) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \rightarrow 0$ (т.е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\mathfrak{R}[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

Формула Тейлора

Теорема. Если функция $f : U(x) \rightarrow \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} & f(x^1 + h^1, \dots, x^m + h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (h^1 \delta_1 + \dots + h^m \delta_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h), \end{aligned}$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} (h^1 \delta_1 + \dots + h^m \delta_m)^n f(x + th) dt$$

Интеграл по гладкой поверхности

Определение. (интеграла от k -формы ω по заданной картой $\varphi : I \rightarrow S$ гладкой k -мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i \omega(x_i)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i (\varphi * \omega)(\tau_i)(\tau_1, \dots, \tau_k). \quad (4)$$

Если применить это определение к k -форме $f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$ на I (когда φ – тождественное отображение), то очевидно, получим, что:

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 \dots dt^k. \quad (5)$$

Таким образом, из (4) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi * \omega,$$

а последний интеграл, как видно из равенства (5), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi * \omega$ функции f на промежутке I .

Формула Стокса в \mathbb{R}^3

Утверждение. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая компактная двумерная поверхность с краем δS , лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^3$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega = P dx + Q dy + R dz$. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

где ориентация края δS берется согласованной с ориентацией поверхности S .

Алгебра форм

Пусть X - линейное пространство, а $F^k : X^k \rightarrow \mathbb{R}$ - вещественнозначная k -форма на X . Если e_1, \dots, e_n - базис в X , а $x_1 = x^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_k = x^{i_k} e_{i_k}$ - разложение векторов $x_1, \dots, x_k \in X$ по этому базису, то в силу линейности F_k по каждому аргументу

$$F^k(x_1, \dots, x_k) = F^k(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_k^{i_k} e_{i_k}) = \quad (6)$$

$$= F^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) x^{i_1} \cdot \dots \cdot x^{i_k} = a_{i_1 \dots i_k} x^{i_1} \cdot x^{i_k}. \quad (7)$$

График функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

Определение. Множество \mathbb{R} называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения. Определено отображение (операции сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из \mathbb{R} некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y . При этом выполнены следующие условия:

1₊. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем):

$$\exists 0 \forall x : x + 0 = x.$$

2₊. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к x , такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3₊. Операция $+$ ассоциативна, т.е. для любых элементов $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4₊. Операция $+$ коммутативна, т.е. для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + x$$

(II) Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y , причем так, что выполнены следующие условия:

1_•. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемый в случае умножения единицей) такой, что

$$\exists 1 \forall x : x \cdot 1 = x.$$

2_•. Для любого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3_•. Операция \bullet ассоциативна, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4_•. Операция \bullet коммутативна, т.е. для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, как можно проверить, является (мультипликативной) группой.

Умножение матриц

Теорема 1. Произведение $\varphi A \varphi B$ двух линейных отображений с матрицами A и B является линейным отображением с матрицей $C = AB$. Другими словами

$$\varphi A \varphi B = \varphi AB. \quad (8)$$

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение AB двух произвольных матриц A, B , имея в виду, однако, что символ AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице A совпадает с числом строк в матрице B . Именно при этом условии выполняется правило умножения i -й строки $A_{(i)}$ на j -й столбец $B^{(j)}$, согласно которому

$$A_{(i)} B^{(j)} = (a_{i1}, \dots, a_{is}) [b_{1j}, \dots, b_{sj}] \quad (9)$$

Следствие. Умножение матриц ассоциативно:

$$A(BC) = (AB)C$$

Действительно, произведение матриц соответствует произведению линейных отображений (теорема 1 и соотношение 8). К тому же результату можно прийти вычислительным путём, используя непосредственно соотношение (9). \square

Обратим ещё внимание на так называемые законы дистрибутивности:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad D(A + B) = DA + DB \quad (10)$$

где A, B, C, D – произвольные матрицы размеров соответственно $m \times s, m \times s, s \times n, n \times m$.

Действительно, полагая $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$, мы получим для любых i, j равенство (используя дистрибутивность в \mathbb{R})

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj},$$

левая часть которого дает элемент g_{ij} матрицы $(A + B)C$, а правая – элементы h_{ij} и h'_{ij} матриц AC и соответственно BC . Второй закон дистрибутивности (10) проверяется совершенно аналогично.

Транспонирование матриц

Будем говорить, что матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad {}^t A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно получаются друг из друга транспонированием – заменой строк на столбцы, а столбцов на строки.

Инварианты линейных групп

Линейной группой степени n мы, как обычно, называем любую подгруппу в $GL(n, P)$, где P – некоторое поле. В дальнейшем можно считать $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$. Если G – абстрактная группа и $\Phi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ – её линейное представление, то пару (G, Φ) мы тоже будем называть линейной группой. Линейные преобразования Φ_g действуют на столбцы переменных x_1, \dots, x_n :

$$\begin{pmatrix} \Phi_g(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_g(x_n) \end{pmatrix} = \Phi_g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Они переводят любую форму (однородный многочлен) f степени m снова в форму степени m :

$$(\widetilde{\Phi_g} f)(x_1, \dots, x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x_1), \dots, \Phi_{g^{-1}}(x_n)).$$

Определение. Форма $f \in P_m$, остающаяся неподвижной при действии $\widetilde{\Phi_g}$ (т.е. $\widetilde{\Phi_g} f = f \ \forall g \in G$), называется (целым) инвариантом степени m линейной группы (G, Φ) .