LINEARNO PROGRAMIRANJE – PROBLEM MINIMIZACIJE TROŠKOVA

Zadatak.

Za naredni period od mesec dana u studentskom restoranu planirano je dominantno korišćenje junećeg i svinjskog mesa, pri čemu ukupna mesečna potrošnja obe vrste mesa mora iznositi najmanje 2000 kg. Sadržaj hranljivih materija H_1 i H_2 u 1 kg mesa, minimalna propisana količina hranljivih sastojaka u toku tog meseca, kao i nabavna cena za obe vrste mesa dati su u tabeli ispod.

Hranljivi sastojci	**Sadržaj hranljivih materija u 1 kg mesa**		**Propisana mesečna količina**
	juneće	**svinjsko**	
H_1	**4 jed.**	**1 jed.**	**min 4100 jed.**
H_2	**1 jed.**	**3 jed.**	**min 3000 jed.**
Cena	**6 N.J. / kg**	**5 N.J. / kg**	

Odrediti optimalan plan nabavke mesa za koji će biti ostvareni minimalni troškovi nabavke i zadovoljeni standardi kvaliteta ishrane studenata?

Rešenje:

Obeležimo sa x_1 količinu junećeg mesa (u kg) , a sa x_2 količinu svinjskog mesa (u kg). Ako sa z obeležimo funkciju troškova, očigledno je da ona ima oblik: $z = 6x_1 + 5x_2$.

Kako ukupna mesečna potrošnja obe vrste mesa mora iznositi najmanje 2000 kg, sledi:

$$x_1 + x_2 \geq 2000 .$$

S obzirom na to da svaki kilogram junećeg mesa sadrži 4 jedinice hranljive materije H_1, a svaki kilogram svinjskog mesa sadrži jednu jedinicu hranljive materije H_1, ukupna količina hranljive materije H_1 je $4x_1 + x_2$.

Kako je minimalna propisana količina hranljivog sastojka H_1 u toku tog meseca 4100 jedinica, jasno je da mora važiti:

$$4x_1 + x_2 \geq 4100 .$$

Potpuno analogno se dobija ograničenje vezano minimalnu propisanu količinu hranljivog sastojka H_2:

$$x_1 + 3x_2 \geq 3000 .$$

S obzirom na to da naručena količina obe vrste mesa ne može biti negativna, jasno je da mora važiti:

$$x_1 \geq 0 ,\ x_2 \geq 0 .$$

Dakle, linearni program ima oblik:

Funkcija profita: $z = 6x_1 + 5x_2$

Ograničenja:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq 2000 \\ &4x_1 + x_2 \geq 4100 \\ &x_1 + 3x_2 \geq 3000 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

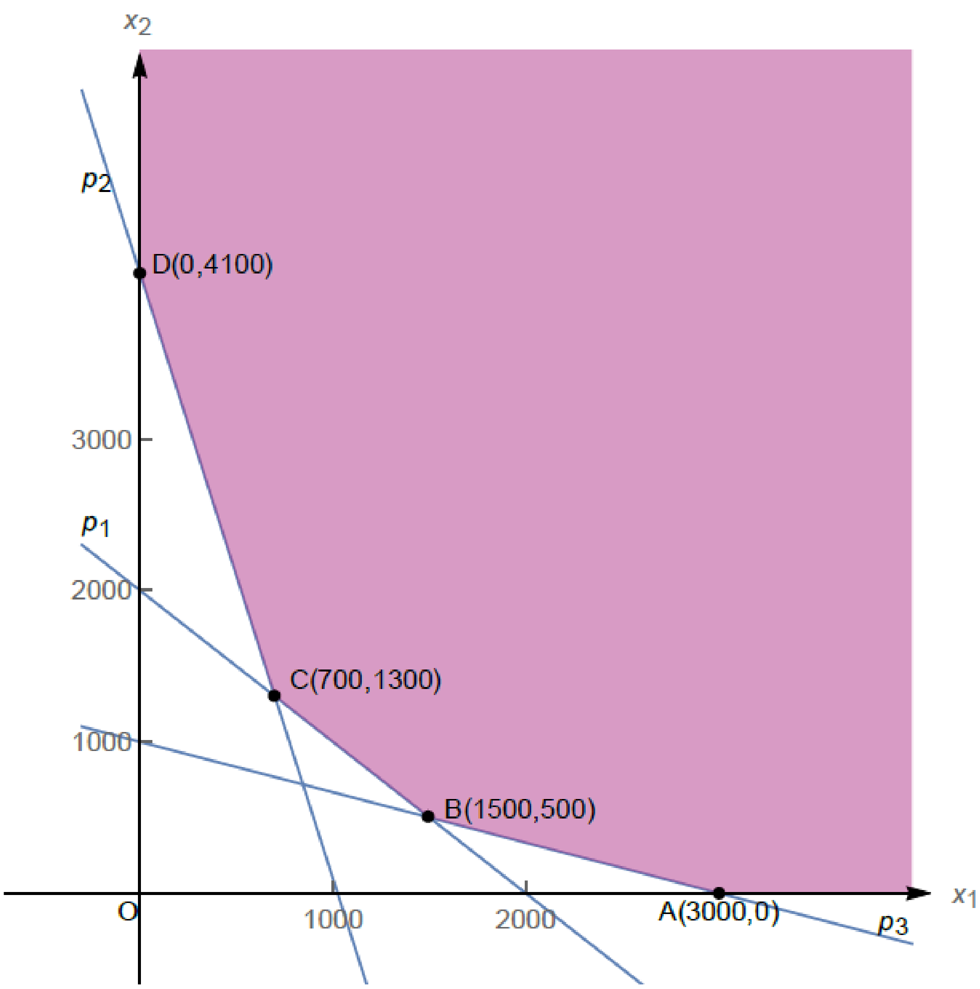
Obeležimo sa $p_1 :\ x_1 + x_2 = 2000$ graničnu pravu poluravni $x_1 + x_2 \geq 2000$, sa $p_2 :\ 4x_1 + x_2 = 4100$ graničnu pravu poluravni $4x_1 + x_2 \geq 4100$ i sa $p_3 :\ x_1 + 3x_2 = 3000$ graničnu pravu poluravni $x_1 + 3x_2 \geq 3000$.

Presečna tačka prave p_1 sa x_1-osom se dobija za uslov $x_2 = 0$, odnosno $x_1 = 2000$. Presečna tačka prave p_1 sa x_2-osom se dobija za uslov $x_1 = 0$, odnosno $x_2 = 2000$. Potpuno analogno se određuju presečne tačke prave p_2 sa koordinatnim osama ($x_1 = 1025$ i $x_2 = 4100$) i prave p_3 sa koordinatnim osama ($x_1 = 3000$ i $x_2 = 1000$).

Očigledno je da koordinatni početak $O(0,0)$ ne pripada pravoj p_1 koja je granična prava poluravni $x_1 + x_2 \geq 2000$. S obzirom na to da ne važi $0+0 \geq 2000$, sledi da tačka $O(0,0)$ ne pripada poluravni $x_1 + x_2 \geq 2000$, tako da je poluravan $x_1 + x_2 \geq 2000$ oblast iznad prave p_1 (uključujući i samu pravu). Potpuno analogno zaključujemo za oblasti $4x_1 + x_2 \geq 4100$ i $x_1 + 3x_2 \geq 3000$.

Uslovi $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$ u geometrijskom smislu znače da se posmatraju tačke samo u prvom kvadrantu.

U preseku poluravni definisanih ograničenjima linearnog programa nalazi se skup mogućih rešenja prikazan na slici ispod.



Kako je tačka B presečna tačka pravih p_1 i p_3, njene koordinate koordinate se dobijaju rešavanjem sistema linearnih jednačina koji definišu jednačine pravih p_1 i p_3:

$$p_1:\ x_1 + x_2 = 2000,$$

$$p_3:\ x_1 + 3x_2 = 3000.$$

Množenjem prve jednačine sa (-1) i dodavanjem drugoj dobijamo ekvivalentan sistem:

$$x_1 + x_2 = 2000,$$

$$2x_2 = 1000 \Rightarrow x_2 = 500.$$

Zamenom $x_2 = 500$ u $x_1 + x_2 = 2000$ dobijamo da je $x_1 = 1500$. Dakle, tačka B ima koordinate $B(1500, 500)$.

Kako je tačka C presečna tačka pravih p_1 i p_2, njene koordinate koordinate se dobijaju rešavanjem sistema linearnih jednačina koji definišu jednačine pravih p_1 i p_2:

$$p_1: \ x_1 + x_2 = 2000,$$

$$p_2: \ 4x_1 + x_2 = 4100.$$

Množenjem prve jednačine sa (-1) i dodavanjem drugoj dobijamo ekvivalentan sistem:

$$x_1 + x_2 = 2000,$$

$$3x_1 = 2100 \Rightarrow x_1 = 700.$$

Zamenom $x_1 = 700$ u $x_1 + x_2 = 2000$ dobijamo da je $x_2 = 1300$. Dakle, tačka C ima koordinate $C(700, 1300)$.

S obzirom na to da funkcija troškova $z = 6x_1 + 5x_2$ dostiže minimum u nekom od temena donje granice skupa mogućih rešenja, izračunajmo vrednost funkcije troškova u temenima donje granice skupa mogućih rešenja:

$A(3000, 0) \quad z_A = 6 \cdot 3000 + 5 \cdot 0 = 18000,$

$B(1500, 500) \quad z_B = 6 \cdot 1500 + 5 \cdot 500 = 9000 + 2500 = 11500,$

$C(700, 1300) \quad z_C = 6 \cdot 700 + 5 \cdot 1300 = 4200 + 6500 = 10700,$

$D(0, 4100) \quad z_D = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 4100 = 20500.$

Dakle, uvažavajući propisane standarde kvaliteta ishrane studenata, minimalni troškovi se postižu nabavkom proizvodnjom 700 kilograma junećeg mesa i 1300 kilograma svinjskog mesa i oni iznose 10700 novčanih jedinica.

Zadatak.

Za naredni period od mesec dana u studentskom restoranu planirano je dominantno korišćenje junećeg i svinjskog mesa, pri čemu ukupna mesečna potrošnja obe vrste mesa mora iznositi najmanje 2800 kg. Sadržaj hranljivih materija H_1 i H_2 u 1 kg mesa, minimalna propisana količina hranljivih sastojaka u toku tog meseca, kao i nabavna cena za obe vrste mesa dati su u tabeli ispod.

Hranljivi sastojci	**Sadržaj hranljivih materija u 1 kg mesa**		**Propisana mesečna količina**
	juneće	**svinjsko**	
H_1	**1 jed.**	**3 jed.**	**min 4500 jed.**
H_2	**3 jed.**	**1 jed.**	**min 6000 jed.**
Cena	**3 N.J. / kg**	**2 N.J. / kg**	

Odrediti optimalan plan nabavke mesa za koji će biti ostvareni minimalni troškovi nabavke i zadovoljeni standardi kvaliteta ishrane studenata?

Rešenje: Minimalni troškovi se postižu nabavkom proizvodnjom 1600 kilograma junećeg mesa i 1200 kilograma svinjskog mesa i oni iznose 7200 novčanih jedinica.