LINEARNO PROGRAMIRANJE – problem maksimizacije profita

Linearno programiranje

Veliki broj složenih ekonomskih problema može se uspešno rešiti upotrebom linearnog programiranja. Linearno programiranje je matematička metoda koja omogućava da se od mnoštva rešenja izabere optimalno rešenje (maksimalno ili minimalno). U ekonomskom smislu, linearno programiranje omogućava da se od više ekonomskih odluka izabere ona koja će imati najveću efikasnost.

U matematičkom smislu, uopšte, problem programiranja se može predstaviti u obliku: odrediti $x_1, x_2, ..., x_n$ tako da funkcija

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

postiže svoj optimum (maksimum ili minimum) uz m - nejednačina ili jednačina ograničenja, tj.

$$\begin{aligned} &g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ &h_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ &r_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \ (i = 1, 2, ..., n) \end{aligned} \tag{2}$$

Funkciju $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazivamo *funkcijom cilja*.

U zavisnosti od funkcije cilja, koja može biti linearna, kvadratna, ili drugog oblika, kao i ograničenja koja mogu biti linearna i nelinearna, razlikujemo različite oblike programiranja:

- Linearno programiranje
- Kvadratno programiranje
- Opšti slučaj nelinearnog programiranja.

U istorijskom smislu linearno programiranje je relativno novijeg datuma. Naime, mnogi naučnici kao prvi rad iz ove oblasti uzimaju rad ruskog naučnika L. V. Kantorovića, *Matematičke metode u organizaciji* iz 1939. godine. U ovom radu prvi put se formulišu osnovni principi transportnog problema i daju metode za njegovo rešavanje. Dalji napredak u ovoj oblasti načinio je američki naučnik Frenk Hičkok

(Frenk L. Hitchcock) u svom radu *Distribucija jednog proizvoda iz više izvora do većeg broja lokaliteta*, iz 1941. godine.

Međutim, fundamentalne osnove linearnog programiranja postavio je američki naučnik Dancing (George B. Dantzing) u svom radu *Maksimiziranje linearne forme podvrgnute ograničenjima u vidu linearnih jednačina* (*nejednačina*), iz 1947. godine. Naime, u tom radu je postavljen opšti problem linearnog programiranja i date su algebarske metode za njihovo rešavanje (simpleks metoda).

Primena linearnog programiranja na rešavanje problema maksimizacije profita ilustrovana je u sledećem primeru:

➢ Primer 1

Pretpostavimo da jedno preduzeće proizvodi dva proizvoda P_1 i P_2 pomoću mašina M_1, M_2 i M_3. Za proizvodnju jedne jedinice proizvoda P_1 potrebno je dva časa rada mašine M_1, jedan čas mašine M_2 i dva časa rada mašine M_3, a za proizvodnju jedne jedinice proizvoda P_2 potreban je jedan čas rada mašine M_1, tri časa rada mašine M_2 i dva časa rada mašine M_3. Kapaciteti mašina iskazani su raspoloživim fondom časova svake mašine u posmatranom periodu i oni iznose: 100 časova za mašinu M_1, 120 časova za mašinu M_2 i 120 časova za mašinu M_3. Po jedinici proizvoda P_1 preduzeće ostvaruje profit od 6 dinara po jedinici proizvoda , a po jedinici proizvoda P_2 od 4 dinara. U kojim količinama treba proizvoditi proizvode P_1 i P_2 da se pri datim ograničenjima postigne maksimalan profit.

Rešenje. Prethodne podatke prikažimo preko tabele:

Mašine	Potrebno vreme za jedinicu proizvoda		Kapacitet (fond časova)
	P_1	P_2	
M_1	2	1	100
M_2	1	3	120
M_3	2	2	120
Profit	6	4	

Označimo sa x_1 količinu proizvoda P_1, a sa x_2 količinu proizvoda P_2. Tada profit možemo prikazati pomoću funkcije

$$z = 6x_1 + 4x_2 .$$

Ograničavajuće uslove možemo prikazati pomoću nejednačina

$$
\begin{aligned}
2x_1 + \ \ x_2 &\le 100 \\
x_1 + 3x_2 &\le 120 \\
2x_1 + 2x_2 &\le 120
\end{aligned}
$$

Prema prirodi zadatka je $x_1 \ge 0$ i $x_2 \ge 0$. Prema tome matematički model formulisanog problema može se predstaviti u obliku

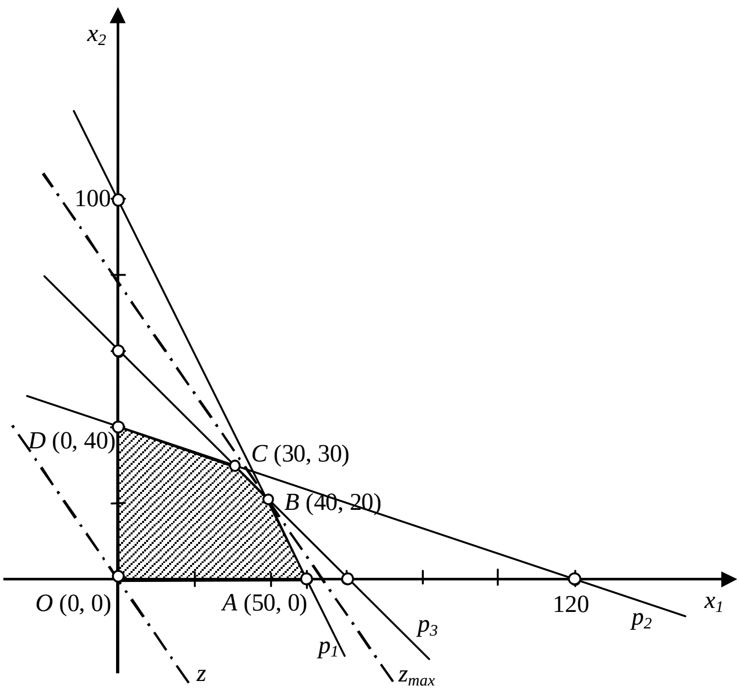
$$z = 6x_1 + 4x_2, \tag{3}$$

tj. funkcijom cilja ili funkcijom kriterijuma i pomoću sledećih ograničenja nejednačinama

$$
\begin{aligned}
2x_1 + \ \ x_2 &\le 100 \\
x_1 + 3x_2 &\le 120 \\
2x_1 + 2x_2 &\le 120 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

U matematičkom pogledu moramo odrediti maksimum funkcije (3) uz ograničenja (4). U pitanju su linearne funkcije i problem ćemo rešiti grafičkom metodom (slika 1). Nacrtajmo prave linije koje odgovaraju jednačinama (p_1) $2x_1 + x_2 = 100$, (p_2) $x_1 + 3x_2 = 120$, (p_3) $2x_1 + 2x_2 = 120$ i osenčimo poluravni koje određuju nejednačine (4).

Šrafirano područje *OABCD*, koje određuju zajedničke tačke ograničenja (4), predstavlja zajednička rešenja sistema (4). Taj skup predstavlja skup mogućih rešenja problema. Od svih mogućih rešenja treba odabrati ona za koje funkcija (3) ima maksimum.



Slika 1

Funkcija cilja će imati ekstremne vrednosti u tačkama *OABCD* petougla. Izračunajmo koordinate tih tačaka. Tačke *O*, *A* i *D* se lako računaju, tj. *O*(0, 0), *A*(50, 0) i *D*(0, 40). Koordinate tačke B dobijamo u preseku pravih p_1 i p_3, tj. $\{B\} = p_1 \cap p_3$. Imamo

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 100 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 120 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 100 \\ x_2 &= 20 \end{aligned}$$

odnosno B(40, 20). Analogno, presekom pravih p_2 i p_3 dobijamo tačku *C*, tj. $\{C\} = p_2 \cap p_3$. Imamo

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 120 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 120 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 120 \\ x_1 + x_2 &= 60 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 120 \\ x_2 &= 30 \end{aligned}$$

tj. *C*(30, 30). Vrednosti funkcije cilja u dobijenim tačkama su:

O(0, 0)	$z = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$
A(50, 0)	$z = 6 \cdot 50 + 4 \cdot 0 = 300$
B(40, 20)	$z = 6 \cdot 40 + 4 \cdot 20 = 240 + 80 = 320$
C(30, 30)	$z = 6 \cdot 30 + 4 \cdot 30 = 180 + 120 = 300$
D(0, 40)	$z = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 40 = 160$

Prema tome funkcija cilja postiže maksimum u tački $B(40,\ 20)$ i imamo $z_{\max} = 320$. U ekonomskom pogledu, da bi dobili optimalno rešenje tj. maksimalan profit, moramo proizvoditi 40 jedinica proizvoda P_1 i 20 jedinica proizvoda P_2. Takođe, do ovog rešenja smo mogli doći i grafičkim putem. Naime, potrebno je grafički predstaviti funkciju cilja u obliku

$$6x_1 + 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{2}x_1$$

i paralelno pomerati dobijenu pravu. Funkcija cilja će postići maksimum u tački mogućih rešenja koja je najudaljenija od koordinatnog početka. U ovom slučaju to je u tački $B(40,\ 20)$.