Економске функције - функције тражње, понуде и прихода

У оквиру ове лекције неопходно је знати:
Решења квадратне једначине
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
x_1 и x_2, добијају се применом формуле
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
Биномна формула: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
p-цена производа
q-тражња
r-понуда
$\left.\begin{matrix} P=P(p) \\ P=P(q) \end{matrix}\right\}$ функције укупног прихода

Задаци:

1. За функције тражње и понуде $q = -\frac{1}{2}p + 4$, односно, $r = \sqrt{2p - 4}$, одредити равнотежну цену.

Решење:

Одредимо најпре услове под којима су дате функције дефинисане. За функцију *тражње* мора важити:
$$q > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}p + 4 > 0.$$
Множењем последње неједнакости са 2 добија се $-p + 8 > 0$, односно, $p < 8$.
За функцију *понуде* услов дефинисаности је $2p - 4 > 0$, одакле добијамо $2p > 4$, односно, $p > 2$.
Узимајући у обзир претходна два ограничења закључујемо да мора важити
$$p \in (2,8).$$
Равнотежна цена се добија из услова $q = r$, односно, у овом случају решавајући једначину $-\frac{1}{2}p + 4 = \sqrt{2p - 4}$. У циљу ослобађања од разломка, претходну једначину помножимо са 2, па имамо $-p + 8 = 2\sqrt{2p - 4}$. Након квадрирања, применом биномне формуле добијамо:

$$(-p + 8)^2 = \left(2\sqrt{2p - 4}\right)^2 \Leftrightarrow (-p)^2 + 2\cdot(-p)\cdot 8 + 8^2 = 4(2p - 4)$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 16p + 64 = 8p - 16 \Leftrightarrow p^2 - 24p + 80 = 0.$$

Добијена квадратна једначина има решења:

$$p_{1,2} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}80}}{2{\cdot}1} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{24 \pm 16}{2}$$
$$= 12 \pm 8,$$

односно,

$$p_1 = 4, p_2 = 20.$$

Будући да $p_1 = 4 \in (2{,}8)$, док са друге стране важи $p_2 = 20 \notin (2{,}8)$, равнотежна цена одређена је са $p_r = 4$.

2. За функције тражње и понуде $q = -\frac{1}{2}p + 6$, односно, $r = \sqrt{p+3}$, одредити равнотежну цену.

Решење:

За поступак решавања погледати претходни задатак, наводимо само међурезултате:
услов дефинисаности: $p \in (0{,}12)$,
квадратна једначина: $p^2 - 28p + 132 = 0$,
решење: $p_r = 6$.

У наредним задацима, дата је једна од функција: функција тражње $q(p)$, функција укупног прихода $P(p)$ или $P(q)$, док је потребно одредити преостале две.

3. Дата је функција укупног прихода $P(p) = 60p - \frac{1}{3}p^2$. Одредити:

a) функцију тражње $q = q(p)$,
b) функцију укупног прихода $P = P(q)$.

Решење:

a) Знајући да за функцију прихода $P(p)$ важи формула $P(p) = pq$, као и да се након факторизације може приказати у облику $P(p) = p(60 - \frac{1}{3}p)$, поредећи претходне две формуле закључујемо да важи $q(p) = 60 - \frac{1}{3}p$.

b) Да бисмо одредили функцију *прихода* $P(q) = pq$ неопходно је изразити цену p у зависности од тражње q. У ту сврху, множећи $q = 60 - \frac{1}{3}p$ са 3, најпре добијамо $3q = 180 - p$ а затим и $p = 180 - 3q$. Уврштавајући претходни израз за p у формулу $P(q) = pq$ коначно добијамо

$$P(q) = (180 - 3q)q = 180q - 3q^2.$$

4. Дата је функција тражње $q = 40 - \frac{1}{2}p$. Одредити:

a) функцију укупног прихода $P = P(p)$,

b) функцију укупног прихода $P = P(q)$.

Решење:

a) Функција укупног прихода $P(p)$ се добија директно, уврштавајући у формули $P(p) = pq$ дати израз за q:

$$P(p) = p\left(40 - \frac{1}{2}p\right) = 40p - \frac{1}{2}p^2.$$

b) погледати претходни задатак под b).

5. Дата је функција укупног прихода $P(q) = 80q - \frac{1}{4}q^2$. Одредити:

a) функцију тражње $q = q(p)$,

b) функцију укупног прихода $P = P(p)$.

Решење:

a) На сличан начин, као и у случају функције прихода $P(p)$ (задатак 3*a*)), знамо да важи формула $P(q) = pq$, као и да се након факторизације дата функција укупног прихода може приказати у облику $P(q) = q(80 - \frac{1}{4}q)$. Опет, поредећи претходне две формуле закључујемо да важи $p = 80 - \frac{1}{4}q$. Одатле даље, множењем са 4 произилази $4p = 320 - q$ и на крају: $q(p) = 320 - 4p$.

b) погледати задатак 4*a*).