Сложени каматни рачун

У случају сложеног каматног рачуна, у првом оobрачунском периоду камата (интерес) се обрачунава (капиталише) у односу на главницу (као и код простог интересног рачуна). У наредним обрачунским периодима, камата се рачуна на главницу увећану за интерес у претходним обрачунским периодима. Зато се сложени каматни рачун назива још и интерес на интерес.

Разликујемо две врсте уплата:

1. *антиципативна уплата* (уплата на *почетку* обрачунског периода)
2. *декурзивна уплата* (уплата на *крају* обрачунског периода)

Интересни чинилац r, на основу којег се рачуна одговарајућа камата, дат је формулом

$$r = 1 + \frac{p}{m \cdot 100},$$

при чему је m број обрачунских периода у току једне године, док је p (годишњи) проценат камате.

У задацима ћемо често користити формулу за суму геометријске прогресије:

$$r^k + r^{k-1} + \cdots + r + 1 = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}.$$

На пример:

$$r^{30} + r^{29} + \cdots + r + 1 = \frac{r^{31} - 1}{r - 1}.$$

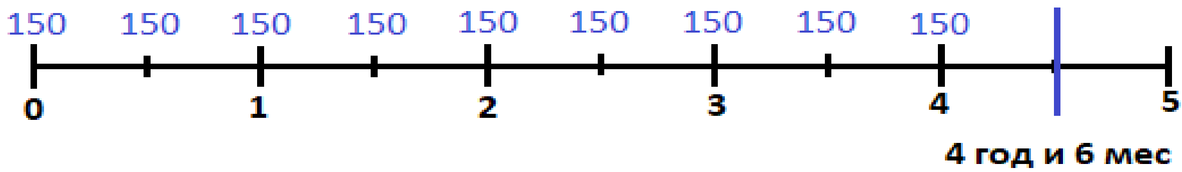
Задаци:

1. Клијент банке штеди новац тако што сваких 6 месеци антиципативно уплаћује по 150 €. Колика ће бити његова уштеђевина након 4 године и 6 месеци, ако је капиталисање шестомесечно а годишњи проценат камате 5,6%?

   Решење:
   Израчунајмо најпре број обрачунских периода у току једне године, то јест, m. С обзиром на то да се камата обрачунава (капиталише) сваких 6 месеци, значи да се капиталисање врши два пута годишње, па следи да је $m = 2$. На основу тога израчунаћемо интересни чинилац:

$$r = 1 + \frac{p}{m \cdot 100} = 1 + \frac{5{,}6}{2 \cdot 100} = 1 + \frac{5{,}6}{200} = 1{,}028 \text{ (до 4 децимале).}$$

Како се сваких 6 месеци уплаћује по 150 €, укупан број уплата за период од 4 године и 6 месеци је $4 \cdot 2 + 1 = 9$. Приликом решавања задатака као помоћно средство послужиће нам временска оса:



Сваки подеок на оси представља један период уплате, односно, обрачунски период, у овом случају 6 месеци. Будући да су уплате антиципативне, прва уплата од 150 € је на *почетку* првог обрачунског периода (првих 6 месеци), док је последња уплата на почетку последњег (деветог) обрачунског периода. За сваку од 9 уплата обрачунава се камата након уплате, све до 4 године и 6 месеци. Па тако, првих 150 € након 4 године и 6 месеци вредеће $150 \cdot r^9$, јер је камата обрачунавана 9 пута. Друга уплата од 150 € након 4 године и 6 месеци вредеће $150 \cdot r^8$, јер је сада камата обрачунавана 8 пута. На сличан начин се рачуна камата на преостале уплате, при чему је за последњу уплату $150 \cdot r$, будући да је камата обрачуната само једном.

Сумирајући претходне камате, добија се израз за израчунавање уштеђевине U након 4 године и 6 месеци:

$$U = 150 \cdot r^9 + 150 \cdot r^8 + \cdots + 150 \cdot r.$$

Факторисањем последњег израза, односно извлачећи заједнички фактор $150 \cdot r$ испред заграде, добија се:

$$U = 150r \cdot (r^8 + r^7 + \cdots + 1).$$

Како узраз у загради представља суму геометријске прогресије, користећи одговарајућу формулу, добија се

$$r^8 + r^7 + \cdots + 1 = \frac{r^9 - 1}{r - 1},$$

па израз за уштеђевину поприма коначан облик

$$U = 150r \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1}.$$

Након уврштавања израчунате вредности интересног чиниоца r у претходну формулу, добија се

$$U = 150 \cdot 1{,}028 \cdot \frac{1{,}028^9 - 1}{1{,}028 - 1}$$

односно, тражена уштеђевина

$$U = 1553{,}82\ € .$$

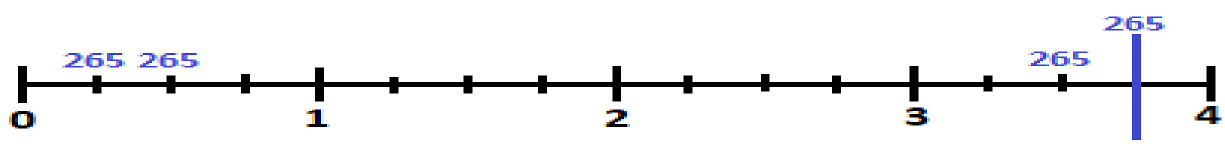
2. Клијент банке штеди новац тако што квартално декурзивно уплаћује по 265 €. Колика ће бити његова уштеђевина након 3 године и 9 месеци, ако је капиталисање квартално а годишњи проценат камате 6,2%?

Решење:

Како се камата обрачунава (капиталише) квартално (свака 3 месеца), значи да се капиталисање врши четири пута годишње, па следи да је m = 4. На основу тога израчунаћемо интересни чинилац:

$$r = 1 + \frac{p}{m \cdot 100} = 1 + \frac{6{,}2}{4 \cdot 100} = 1 + \frac{6{,}2}{400} = 1{,}0155 \text{ (до 4 децимале).}$$

С обзиром на то да се свака 3 месеца уплаћује по 265 €, укупан број уплата за период од 3 године и 9 месеци је $3 \cdot 4 + 3 = 15$. Наношењем датих података на временску осу, добија се



Будући да су уплате *декурзивне*, прва уплата од 265 € је на *крају* првог обрачунског периода (прва 3 месеца), док је последња уплата на крају последњег (петнаестог) обрачунског периода. За сваку од 15 уплата обрачунава се камата након уплате, све до 3 године и 9 месеци. Па тако, првих 265 € након 3 године и 9 месеци вредеће $265 \cdot r^{14}$, јер се камата обрачунава 14 пута. Друга уплата од 265 € након 3 године и 9 месеци вредеће $150 \cdot r^{13}$, јер је сада камата обрачунавана 13 пута. На сличан начин се рачуна камата на преостале уплате, при чему се за последњу уплату камата не обрачунава.

Сумирајући претходне камате, добија се израз за израчунавање уштеђевине U након 3 године и 9 месеци:

$$U = 265 \cdot r^{14} + 265 \cdot r^{13} + \cdots + 265.$$

Факторисањем последњег израза, односно извлачећи заједнички фактор 265 испред заграде, добија се:

$$U = 265 \cdot (r^{14} + r^{13} + \cdots + 1).$$

Како узраз у загради представља суму геометријске прогресије, користећи одговарајућу формулу, добија се

$$r^{14} + r^{13} + \cdots + 1 = \frac{r^{15} - 1}{r - 1},$$

па израз за уштеђевину поприма коначан облик

$$U = 265 \cdot \frac{r^{15} - 1}{r - 1}.$$

Након увршртавања израчунате вредности интересног чиниоца r у претходну формулу, добија се

$$U = 265 \cdot \frac{1{,}0155^{15} - 1}{1{,}0155 - 1}$$

односно, тражена уштеђевина

$$U = 4436{,}64\ €\,.$$

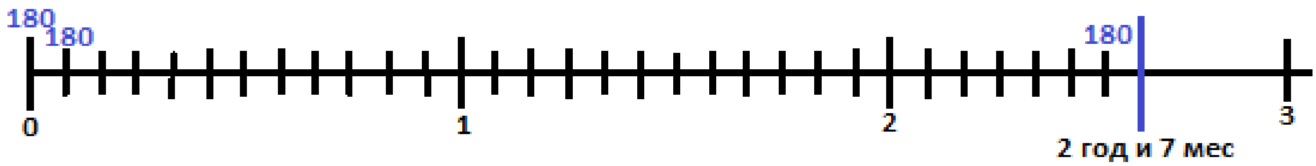
3. Клијент банке штеди новац тако што сваки месец антиципативно уплаћује по 180 €. Колика ће бити његова уштеђевина након 2 године и 7 месеци, ако је капиталисање месечно а годишњи проценат камате 5,3%?

Решење:

Како се камата обрачунава сваки месец, значи да се капиталисање врши дванаест пута годишње, па следи да је m = 12. На основу тога израчунаћемо интересни чинилац:

$$r = 1 + \frac{p}{m \cdot 100} = 1 + \frac{5{,}3}{12 \cdot 100} = 1 + \frac{5{,}3}{1200} = 1{,}0044 \text{ (до 4 децимале).}$$

С обзиром на то да се сваки месец уплаћује по 180 €, укупан број уплата за период од 2 године и 7 месеци је $2 \cdot 12 + 7 = 31$. Наношењем датих података на временску осу, добија се



Сумирајући камате на претходне уплате, добија се израз за израчунавање уштеђевине U након 2 године и 7 месеци:

$$U = 180 \cdot r^{31} + 180 \cdot r^{30} + \cdots + 180 \cdot r.$$

Факторисањем последњег израза, односно извлачећи заједнички фактор $150 \cdot r$ испред заграде, добија се:

$$U = 180r \cdot (r^{30} + r^{29} + \cdots + 1).$$

Како узраз у загради представља суму геометријске прогресије, користећи одговарајућу формулу, добија се

$$r^{30} + r^{29} + \cdots + 1 = \frac{r^{31} - 1}{r - 1},$$

па израз за уштеђевину поприма коначан облик

$$U = 180r \cdot \frac{r^{31} - 1}{r - 1}.$$

Након уврштавања израчунате вредности интересног чиниоца r у претходну формулу, добија се

$$U = 180 \cdot 1{,}0044 \cdot \frac{1{,}0044^{31} - 1}{1{,}0044 - 1}$$

односно, тражена уштеђевина

$$U = 5990{,}68 \text{ €}.$$

4. Клијент банке штеди новац тако што сваких 6 месеци декурзивно уплаћује по 175 €. Колика ће бити његова уштеђевина након 3 године и 6 месеци, ако је капиталисање шестомесечно а годишњи проценат камате 6,9%?

Решење:

интересни чинилац: $r = 1{,}0345$

израз за уштеђевину: $U = 175 \cdot \frac{r^7 - 1}{r - 1}$

износ уштеђевине: $U = 1359{,}33$ €.

5. Клијент банке штеди новац тако што сваки месец антиципативно уплаћује по 120 €. Колика ће бити његова уштеђевина након 2 године и 3 месеца, ако је капиталисање месечно а годишњи проценат камате 5,5%?

Решење:

интересни чинилац: $r = 1{,}0045$

израз за уштеђевину: $U = 120r\cdot \frac{r^{27}-1}{r-1}$

износ уштеђевине: $U = 3452{,}30€$.

6. Клијент банке је узео кредит од 22000 €. Отплаћује га декурзивним кварталним ратама наредних 7 година и 9 месеци. Колика је рата ако је капиталисање квартално а годишњи проценат камате 4,7%?

Решење:

Како се камата обрачунава квартално, значи да се капиталисање врши 4 пута годишње, па следи да је $m = 4$. На основу тога израчунаћемо интересни чинилац:

$$r = 1 + \frac{p}{m\cdot 100} = 1 + \frac{4{,}7}{4\cdot 100} = 1 + \frac{4{,}7}{400} = 1{,}0117 \text{ (до 4 децимале).}$$

Уколико износ тражене рате обележимо са R, на основу временске осе даље имамо

$$22000\cdot r^{31} = R\cdot r^{30} + R\cdot r^{29} + \cdots + Rr + R,$$

односно, издвајањем заједничког фактора R испред заграде

$$22000\cdot r^{31} = R\cdot (r^{30} + r^{29} + \cdots + r + 1).$$

Користећи формулу за суму геометријске прогресије, претходна формула постаје

$$22000\cdot r^{31} = R\cdot \frac{r^{31}-1}{r-1}.$$

Након уврштавања израчунате вредности интересног чиниоца r у претходну формулу, добија се

$$31552{,}0027 = R\cdot 37{,}1095$$

те је износ тражене рате $R = 850{,}24$ €.

7. Клијент банке је узео кредит од 18000 €. Отплаћује га антиципативним четворомесечним ратама наредних 8 година и 8 месеци. Колика је рата ако је капиталисање четворомесечно а годишњи проценат камате 5,4%?

Решење:

С обзиром да се камата обрачунава четворомесечно, следи да је m = 3. На основу тога израчунаћемо интересни чинилац:

$$r = 1 + \frac{p}{m \cdot 100} = 1 + \frac{5{,}4}{3 \cdot 100} = 1 + \frac{5{,}4}{300} = 1{,}018 \text{ (до 4 децимале).}$$

Уколико износ тражене рате обележимо са R, на основу временске осе даље имамо

$$18000 \cdot r^{26} = R \cdot r^{26} + R \cdot r^{25} + \cdots + R \cdot r^{2} + R \cdot r,$$

односно, издвајањем заједничког фактора $R \cdot r$ испред заграде

$$18000 \cdot r^{26} = R \cdot r \cdot (r^{25} + r^{24} + \cdots + r + 1).$$

Користећи формулу за суму геометријске прогресије, претходна формула постаје

$$18000 \cdot r^{26} = R \cdot r \cdot \frac{r^{26} - 1}{r - 1}.$$

Након уврштавања израчунате вредности интересног чиниоца r у претходну формулу, добија се

$$28622{,}9724 = R \cdot 33{,}3771$$

те је износ тражене рате $R = 857{,}56$ €.