REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA PREKO INVERZNE MATRICE

Zadatak. Sabrati matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Rešenje: Zbir nije definisan jer matrice nisu istog formata.

Zadatak. Sabrati matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.

Rešenje: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$.

Zadatak. Pomnožiti matricu: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ brojem 2.

Rešenje: $2\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Zadatak. Pomnožiti matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Rešenje: Proizvod nije definisan jer broj kolona prve matrice nije jednak broju vrsta druge matrice.

Zadatak. Pomnožiti matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rešenje: $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 30 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$.

Zadatak. Izračunati determinantu matrice: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Rešenje: $\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 22$.

Zadatak. Izračunati determinantu matrice: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešenje: $\det\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 20$.

Zadatak. Naći inverznu matricu matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Rešenje: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$

Zaista:

$$\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak.

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 5 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

a) matričnom metodom,
b) Gausovim metodom eliminacije.

Rešenje:

a) Matrica sistema A i vektor-kolona slobodnih članova B imaju oblik:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice A je $|A| = -1$. Kako je $|A| \neq 0$, matrica A ima inverznu matricu A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T}$$

Dalje je:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dakle, rešenje sistema je:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1,\ y = 2,\ z = 3$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 5 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

S obzirom na to da koeficijent uz x u prvoj jednačini ne deli koeficijente u ostale dve jednačine, zamenom mesta prve i druge jednačine dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x + y - z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa (-2) i dodavanjem drugoj jednačini, a zatim množenjem prve jednačine sa (-1) i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 3y - 5z &= -9 \\ 2y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

Množenjem druge jednačine sa (-2) i množenjem treće jednačine sa 3 dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ -6y + 10z &= 18 \\ 6y - 9z &= -15 \end{aligned}$$

Dodavanjem druge jednačine trećoj dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ -6y + 10z &= 18 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Zamenom $z = 3$ u $-6y + 10z = 18$ dobijamo:

$$-6y + 10 \cdot 3 = 18 \Rightarrow -6y + 30 = 18 \Rightarrow -6y = -12 \Rightarrow y = \frac{-12}{-6} \Rightarrow y = 2$$

Zamenom $z = 3$ i $y = 2$ u $x - y + 2z = 5$ dobijamo:

$$x - 2 + 2 \cdot 3 = 5 \Rightarrow x - 2 + 6 = 5 \Rightarrow x - 2 + 6 = 5 \Rightarrow x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1.$$

Zadatak.

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

a) matričnom metodom,
b) Gausovim metodom eliminacije.

Rešenje: $x = 1,\ y = 1,\ z = 1.$