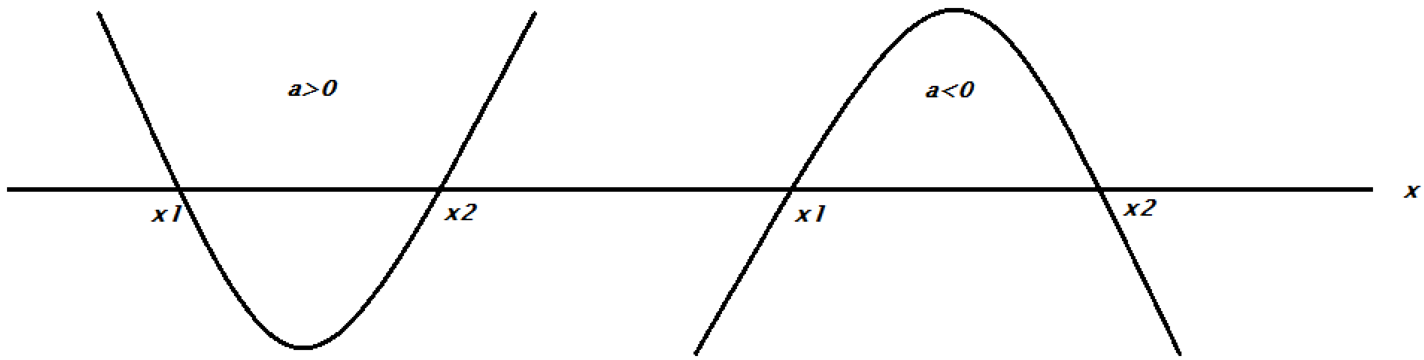
Економске функције - функције трошкова, прихода и добити

С обзиром да ће нам приликом решавања задатака бити потребан график квадратне функције, најпре ћемо поновити основне особине везане за тај тип функција:
Квадратна функција је функција облика $f(x) = ax^2 + bx + c$, при чему за коефицијент a важи $a \neq 0$. У зависности од знака коефицијента, график се може појавити у два облика:



Пресечне тачке графика квадратне функције и x-осе добијају се решавајући квадратну једначину

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

до чијих решења, x_1 и x_2, се долази применом формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Задаци:

1. Дате су функција укупног прихода $P(p) = 15p - \frac{1}{4}p^2$ и функција укупних трошкова $C(q) = 3q^2 - 80q + 672$. Одредити:

   a) функцију тражње $q = q(p)$,
   b) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
   c) функцију добити $D = D(q)$,
   d) интервал рентабилне производње,
   e) оптималан обим производње и максималну добит.

Решење:

a) Знајући да за функцију прихода $P(p)$ важи формула $P(p) = pq$, као и да се дата функција може приказати у облику $P(p) = p(15 - \frac{1}{4}p)$, поредећи претходне две формуле закључујемо да важи $q(p) = 15 - \frac{1}{4}p$.

b) Да бисмо одредили функцију *прихода* $P(q) = pq$ неопходно је изразити цену p у зависности од тражње q. У ту сврху, множећи $q = 15 - \frac{1}{4}p$ са 4, најпре добијамо

$4q = 60 - p$ а затим и $p = 60 - 4q$. Увршатавајући претходни израз у формулу $P(q) = pq$ добијамо

$$P(q) = (60 - 4q)q = 60q - 4q^2.$$

c) Као што је опште познато из економске теорије, функција *добити* (*профита*) се добија умањењем прихода за укупне трошкове, односно,

$$D(q) = P(q) - C(q) = 60q - 4q^2 - (3q^2 - 80q + 672) =$$
$$60q - 4q^2 - 3q^2 + 80q - 672 = -7q^2 + 140q - 672.$$

d) Производња је рентабилна (исплатива) у случају позитивне добити, односно, уколико је испуњено $D(q) > 0$. С обзиром да је у нашем случају добит изражена преко квадратне функције, потребно је решити квадратну неједначину

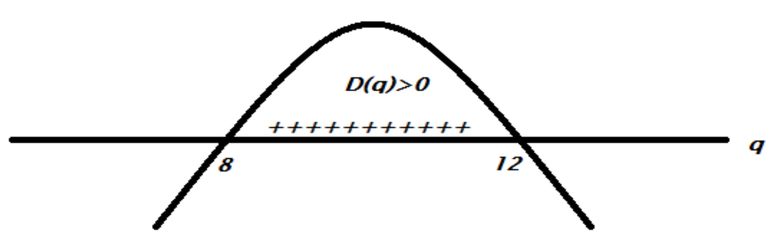
$$-7q^2 + 140q - 672 > 0.$$

Израчунајмо најпре решења квадратне једначине $-7q^2 + 140q - 672 = 0$, која представљају пресек графика функције добити и q-осе. Дељењем претходне једначине са 7 добија се еквивалентна једначина $-q^2 + 20q - 96 = 0$, чија су решења

$$q_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-96)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-20 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-20 \pm 4}{-2} = 10 \pm 2,$$

то јест, $q_1 = 8$, $q_2 = 12$.

Како је коефицијент уз q^2 негативан ($a = -7 < 0$), график функције добити $D(q)$ (парабола) је усмерен на горе, као на слици:



На основу графика, добијамо интервал рентабилне производње:

$$q_{rent} \in (8,12).$$

e) Оптималан обим производње q_{opt}, то јест, производња при којој се постиже максимална добит, добија се преко формуле:

$$q_{opt} = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{8 + 12}{2} = 10.$$

На крају, максимална добит D_{max} је добит која одговара оптималном обиму производње и рачуна се уврштавањем вредности за q_{opt} у функцију добити:

$$D_{max} = D(q_{opt}) = D(10) = -7 \cdot 10^2 + 140 \cdot 10 - 672 = -700 + 1400 - 672 = 28.$$

2. Дате су функција укупног прихода $P(p) = 16p - \frac{1}{4}p^2$ и функција просечних трошкова $\bar{C}(q) = q - 36 + \frac{420}{q}$. Одредити:

a) функцију укупних трошкова $C = C(q)$,
b) функцију тражње $q = q(p)$,
c) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
d) функцију добити $D = D(q)$,
e) интервал рентабилне производње,
f) оптималан обим производње и максималну добит.

Решење:

a) Веза између укупних трошкова $C(q)$ и просечних трошкова $\bar{C}(q)$ дата је формулом

$$\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q},$$

на основу које добијамо

$$C(q) = q \cdot \bar{C}(q) = q \cdot \left(q - 36 + \frac{420}{q}\right) = q^2 - 36q + 420q.$$

Остатак задатка се ради на потпуно исти начин као што је детаљно описано у поступку решавања претходног задатка.

b) $q(p) = 16 - \frac{1}{4}p$,
c) $P(q) = 64q - 4q^2$,
d) $D(q) = -5q^2 + 100q - 420$,
e) $q_{rent} \in (6,14)$,
f) $q_{opt} = 10$, $D_{max} = 80$.

3. Дате су функција укупног прихода $P(p) = 50p - \frac{1}{2}p^2$ и функција укупних трошкова $C(q) = q^2 - 140q + 2100$. Одредити:

a) функцију тражње $q = q(p)$,
b) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
c) функцију добити $D = D(q)$,
d) интервал рентабилне производње,
e) оптималан обим производње и максималну добит.

Решење:

a) $q(p) = 50 - \frac{1}{2}p$,
b) $P(q) = 100q - 2q^2$,
c) $D(q) = -3q^2 + 240q - 2100$,
d) $q_{rent} \in (10,70)$,
e) $q_{opt} = 40$, $D_{max} = 2700$.