

# Ein Löser für die Navier-Stokes Gleichungen basierend auf FFT

Sven Klein



08.10.2021

- 1 Verhalten von Gasen und Flüssigkeiten simulieren
- 2 schnell
- 3 stabil
- 4 interaktiv
- 5 visuelle Korrektheit wichtiger als physikalische Korrektheit
- 6 einfach zu implementieren

# Naiver-Stokes-Gleichungen

## Voraussetzungen

- Dichte und Temperatur des Fluids sind überall fast konstant
- Geschwindigkeit und Druck ist zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt

## Naiver-Stokes-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

$\mathbf{u}$  : Geschwindigkeitsfeld

$p$  : Druckfeld

$\rho$  : Dichte

$\mathbf{f}$  : Kraft

$t$  : Zeit

$\nu$  : Viskosität

# Die Helmholtz Zerlegung

## Die Helmholtz Zerlegung

Ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{w}$  lässt sich stets eindeutig in folgende Form zerlegen

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla q$$

wobei  $\mathbf{u}$  ein Vektorfeld mit  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  und  $q$  ein Skalarfeld ist.

## Die Helmholtzprojektion

Sei  $P$  der Operator, der jedes Vektorfeld  $\mathbf{w}$  auf seinen divergenzfreien Teil  $\mathbf{u}$  abbildet. Dann gilt:

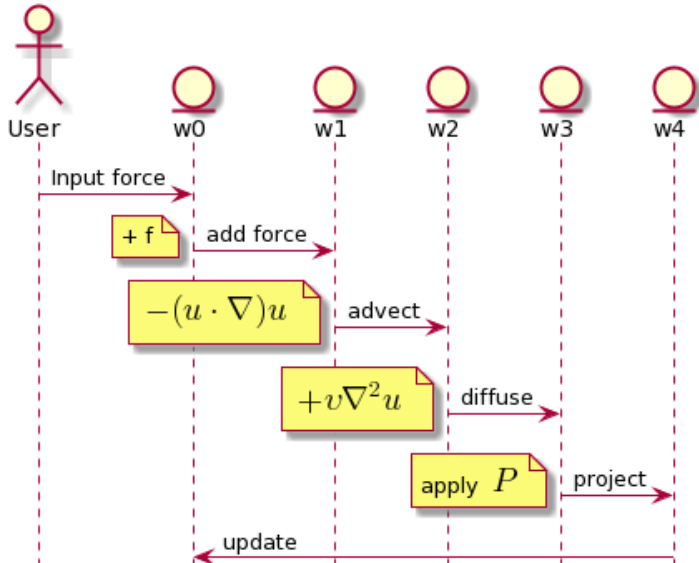
- 1  $P$  ist linear
- 2 Für  $\mathbf{u}$  aus den Navier Stokes Gleichungen gilt  $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$
- 3 Für  $p$  aus den Navier Stokes Gleichungen gilt  $P(\nabla p) = 0$

Durch Anwenden von  $P$  auf beide Seiten von (2) erhält man somit

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = P(-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f})$$

Das Vektorfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sei zu einem Zeitpunkt  $t$  bekannt. Wir wollen nun  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  berechnen. Wir setzen dazu  $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und approximieren  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  in 4 Schritten.

## Ablauf eines Zyklus

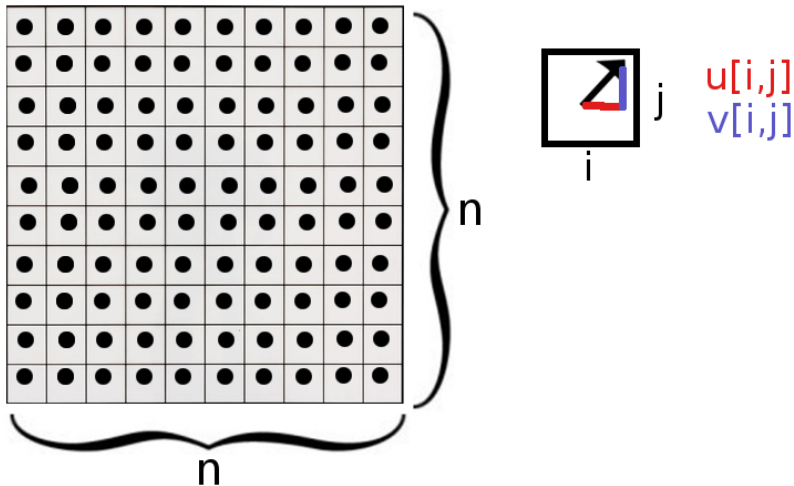


Wir haben also folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t} = \mathbf{f}$$

Wenn wir annehmen, dass  $\mathbf{f}$  sich über den Zeitraum  $\Delta t$  nicht stark verändert, so erhalten wir eine Lösung durch:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + \Delta t \cdot \mathbf{f}$$





## Variablen

- $u$ : 2d array der Größe  $n \times n$  welches die x Komponente des Geschwindigkeitsfeldes diskretisiert.
- $v$ : 2d array der Größe  $n \times n$  welches die y Komponente des Geschwindigkeitsfeldes diskretisiert.
- $uF$ : Kraft in x Richtung
- $vF$ : Kraft in y Richtung
- $visc$ : Viskosität
- $dt$ : Länge des zu simulierenden Zeitabschnitts

## Code

```
u+=dt*uF  
v+=dt*vF
```

### Definition

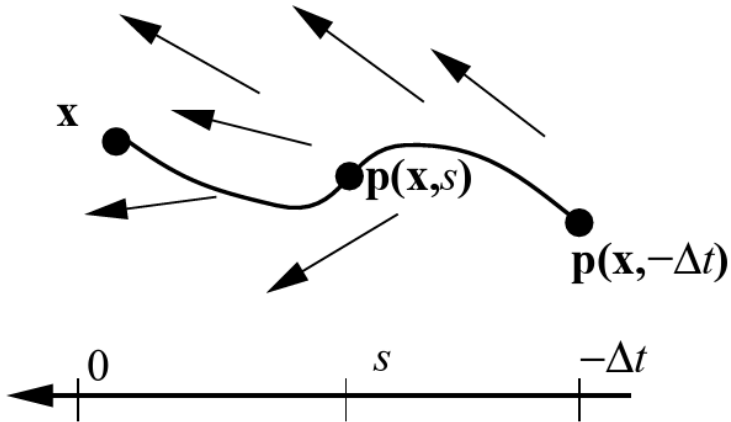
Ein Fluid hat die Eigenschaft, dass es Substanzen von einem Ort zum anderen transportieren kann. Da ein Fluid aus Teilchen besteht, werden diese Teilchen ebenfalls transportiert. Dies führt dazu, dass die Geschwindigkeit des Fluids ebenfalls transportiert wird.

### Intuitiver Ansatz

In jedem Zeitintervall  $\Delta t$  werden die Teilchen durch die Geschwindigkeit des Fluids bewegt. Um die Geschwindigkeit am Punkt  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  zu ermitteln müssen wir also nur den Weg  $p(\mathbf{x}, s)$  der Teilchen durch  $\mathbf{w}_1$  über den Zeitraum  $\Delta t$  zurückverfolgen. Wir erhalten somit:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1(p(\mathbf{x}, -\Delta t))$$

## Schritt 2: Advektion



# Methode der Charakteristiken

Sei  $a(\mathbf{x}, t)$  eine beliebige Komponente von  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Dann haben wir also folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial a(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla a(\mathbf{x}, t) \text{ und } a(\mathbf{x}, 0) = a_0(\mathbf{x})$$

Für  $p$  gilt weiterhin:

$$\frac{d}{dt}p(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{u}(p(\mathbf{x}_0, t)) \text{ und } p(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$$

Wir definieren nun  $\bar{a}(x_0, t) = a(p(x_0, t), t)$ . Wir berechnen nun die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla a = 0$$

Daraus folgt nun also:

$$a(p(x_0, t), t) = \bar{a}(x_0, t) = \bar{a}(x_0, 0) = a_0(x_0)$$

```
u0 = u.copy()
v0 = v.copy()
for x in range(n):
    for y in range(n):
        x0 = x-n*dt*u0[x,y]; y0 = y-n*dt*v0[x,y]
        i0 = int(np.floor(x0)); j0 = int(np.floor(y0))
        s = x0-i0; t = y0-j0
        i0 %= n; j0 %= n
        i1 = (i0+1)%n; j1 = (j0+1)%n
        u[x,y] = (1-s)*((1-t)*u0[i0,j0]+t*u0[i0,j1])+\\
                s*((1-t)*u0[i1,j0]+t*u0[i1,j1])
        v[x,y] = (1-s)*((1-t)*v0[i0,j0]+t*v0[i0,j1])+\\
                s*((1-t)*v0[i1,j0]+t*v0[i1,j1])
```

# Die Fourier Transformation

Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall, den wir in Numerik II bereits kennengelernt haben. Sei dazu  $f \in L^1(\mathbb{R})$

Fourier Transformation  $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$

Inverse  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{+ikx} dk$

Diskrete Fourier Transformation  $\hat{f}([x_0, \dots, x_{n-1}]) = [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{n-1}]$

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot jk} x_j$$

Inverse  $x_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \hat{y}_j$

Hansen, *Fourier transforms : principles and applications*

Die Fourier Transformation lässt sich auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern, indem man die eindimensionale Fourier Transformation nacheinander auf jede Dimension anwendet. So ergibt sich zum Beispiel im zweidimensionalen für  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

Fourier Transformation  $\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} f(\mathbf{x}) d\lambda^2(\mathbf{x})$

DFT  $\hat{f}([x_{0,0}, \dots, x_{0,m-1}, x_{1,0}, \dots, x_{n-1,m-1}])$   
 $= [\hat{y}_{0,0}, \dots, \hat{y}_{0,m-1}, \hat{y}_{1,0}, \dots, \hat{y}_{n-1,m-1}]$

$$\hat{y}_{s,t} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot ks} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot lt} x_{k,l}$$

Hansen, *Fourier transforms : principles and applications*

## Satz

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$(\hat{\nabla} f)(\mathbf{k}) = i\mathbf{k}\hat{f}(\mathbf{k})$$

## Beweis

Wir zeigen dies nur für den eindimensionalen Fall.

$$\begin{aligned}(\hat{\nabla} f)(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \\&= \text{Partielle Integration} \left[ f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - (-ik) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\&= ik\hat{f}(k)\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da wegen  $f \in L^1(\mathbb{R})$  gilt  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .



Wir werden zur Berechnung der DFT den FFT Algorithmus nutzen den wir ebenfalls bereits kennengelernt haben. Um die Wellenzahl  $k$  zu jedem Eintrag zu erhalten können wir die Funktion `np.fft.fftfreq` nutzen.

```
u = fft2(u)
v = fft2(v)
freq = np.fft.fftfreq(n,1/n)
kx = np.zeros([n,n])
ky = np.zeros([n,n])
for i in range(n):
    for j in range(n):
        kx[i,j] = 2*np.pi*freq[i]
        ky[i,j] = 2*np.pi*freq[j]
```

## WICHTIG!

Damit wir die Funktion in den Fourier Raum transformieren können müssen wir periodische Randbedingungen annehmen.

Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{w}_2$$

Diese lösen wir mit Hilfe einer impliziten Methode:

$$(I - \nu \Delta t \nabla^2) \mathbf{w}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_2(\mathbf{x})$$

Führen wir vorher noch eine Fourier Transformation durch so vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\hat{\mathbf{w}}_3(\mathbf{k}) = \frac{\hat{\mathbf{w}}_2(\mathbf{k})}{1 + \nu \Delta t \kappa^2} \text{ wobei } \kappa = |\mathbf{k}|$$

```
for i in range(n):  
    for j in range(n):  
        x = kx[i,j]  
        y = ky[i,j]  
        kappa = x*x+y*y  
        f = 1/(1+visc*dt*kappa)  
        u[i,j] *= f  
        v[i,j] *= f
```

Sei  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla q$  mit  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Durch Multiplizieren beider Seiten mit  $\nabla$  erhält man folgende Gleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla^2 q$$

Löst man die Gleichung nach  $q$  auf so erhält man  $P\mathbf{w}$  folgendermaßen:

$$\mathbf{u} = P\mathbf{w} = \mathbf{w} - \nabla q$$

Führen wir vorher eine Fourier Transformation durch so ergibt sich schließlich:

$$\hat{P}\mathbf{w}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}) - \frac{1}{\kappa^2}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}))\mathbf{k}$$

```
for i in range(n):  
    for j in range(n):  
        x = kx[i,j]  
        y = ky[i,j]  
        kappa = x*x+y*y  
        if kappa==0.0:  
            continue  
        u[i,j] = ( (1-x*x/kappa)*u[i,j]-x*y/kappa *v[i,j] )  
        v[i,j] = ( -y*x/kappa *u[i,j] + (1-y*y/kappa)*v[i,j] )
```

Sei  $a$  eine skalare Größe welche sich durch das Fluid beschreibt. Dann wird das Verhalten von  $a$  durch folgendene Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \Delta a + \kappa_a \Delta^2 a - \alpha_a a + S_a$$

$\kappa_a$  : Diffusionskonstante

$\alpha_a$  : Dissipationskonstante

$S_a$  : Quellterm

Die Gleichung ähnelt der Navier-Stokes-Gleichung. Wir haben wieder einen Advektions-, einen Diffusions- und einen „Kraft“-Term. Mit diesen können wir analog verfahren.

## Herleitung

Wir haben also die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\alpha_a a$$

Diese lösen wir folgendermaßen:

$$(1 + \Delta t \alpha_a) a(\mathbf{x}, t + \Delta t) = a(\mathbf{x}, t)$$

## Code

```
s/= (1+dt*dissRate)
```

- Herleitung des Fluid Solvers: Stam, „Stable Fluids“
- Code: Stam, „A Simple Fluid Solver Based on the FFT“



<https://github.com/svkle100/FluidSolver>