И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2000, том 272, 186–196

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

И. Б. Жуков, А. И. Мадунц

АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Большое значение в теории многомерных локальных полей имеют вопросы разложения элементов этих полей в степенные ряды или бесконечные произведения. Сформулированные в [2] теоремы о разложении в бесконечные произведения (теоремы 2.1 и 2.2) неверны, если не наложить определенные ограничивающие условия на наборы элементов мультипликативной группы, играющие роль топологических образующих (см. замечание в конце этой статьи). Данная работа содержит один из возможных вариантов таких условий. Таким образом, она призвана частично заменить §2 статьи [2]. Попутно мы доказываем усиленную теорему об аддитивном разложении.

Отметим, что случай двумерного локального поля (с произвольным совершенным последним полем вычетов) рассмотрен также в [1].

Первый автор выражает благодарность Max-Planck-Institut für Mathematik в г. Бонне, где была выполнена часть работы. Он также благодарит РФФИ за финансовую поддержку (проект 00-01-00140).

Терминология и обозначения. Зафиксируем следующие обозначения. (Подробнее о понятиях, связанных с многомерными локальными полями, см. в статье [2].)

- K – n-мерное локальное поле, т. е. поле, для которого задана последовательность полных дискретно нормированных полей $K_n = K, K_{n-1}, \dots, K_0$, где каждое последующее поле является полем вычетов предыдущего, причем K_0 конечно.
- $(t_1, \dots, t_n)$ – система локальных параметров поля K.
- $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ – нормирование ранга n, связанное с этой системой локальных параметров.
- $\mathcal{O}$ – кольцо целых поля K относительно $\mathbf{v}$.
- $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}$.

• $\mathfrak{p}(i) = \{\alpha \in K : v_n(\alpha) \geqslant i\}$ для произвольного целого числа i.

Для элемента $a \in \mathfrak{p}(0)$ через $\overline{a}$ будет обозначаться его класс в K_{n-1}.

Заметим, что множество

$$\mathbb{Z}^n = \{\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \mid r_s \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant s \leqslant n\}$$

предполагается лексикографически упорядоченным в следующем смысле:

$$\mathbf{r}^{(1)} = (r_1^{(1)}, \dots, r_n^{(1)}) < \mathbf{r}^{(2)} = (r_1^{(2)}, \dots, r_n^{(2)})$$

означает, что $r_m^{(1)} < r_m^{(2)}$, $r_{m+1}^{(1)} = r_{m+1}^{(2)}$, ..., $r_n^{(1)} = r_n^{(2)}$, где $m \leqslant n$.

Под $\mathbb{Z}_+^n$ будем подразумевать $\{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{r} \geqslant (0, \dots, 0)\}$.

Полное определение топологии многомерного локального поля см. в [2] или [3]. Напомним лишь, что такая топология определяется индуктивно и в качестве базы окрестностей нуля в K можно взять множества вида

$$U_{\{U_i\}} = \Big\{ \sum_{i \gg -\infty} h(a_i) t_n^i \mid a_i \in U_i \Big\},$$

где $\{U_i\}$ – набор окрестностей нуля в K_{n-1}, причем такой, что $U_i = K_{n-1}$ при достаточно больших i, а $h = h_{t_1,\dots,t_{n-1}} : K_{n-1} \to K$ – канонический подъем, связанный с данной системой локальных параметров.

Определение. *$\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым набором, если для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ при каждом наборе целых $j_{l+1}, \dots, j_n$ существует целое $i = i(j_{l+1}, \dots, j_n)$ такое, что*

$$(i_1, \dots, i_n) \in \Omega, i_{l+1} = j_{l+1}, \dots, i_n = j_n \Rightarrow i_l \geqslant i.$$

1. Аддитивные разложения.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ – допустимый набор, U – окрестность нуля в K. Тогда при почти всех $\mathbf{s} \in \Omega$ имеем $t_1^{s_1} \dots t_n^{s_n} \in U$.*

Доказательство. Заметим, что при некотором r_0 имеем $s_n \geqslant r_0$ для всех $\mathbf{s} \in \Omega$. Доказательство проведем индукцией по размерности поля. При $n = 1$ утверждение очевидно, так как топология в этом случае является топологией дискретного нормирования.

Теперь полагаем, что в K_{n-1} для любой окрестности нуля и любого допустимого набора $\Omega_{n-1} \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ элемент $\overline{t_1^{s_1} \dots t_n^{s_{n-1}}}$ для почти всех индексов $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \Omega_{n-1}$ попадает в заданную окрестность, и перейдем к K. Пусть $U = U_{\{U_i\}}$, где $U_i = K_{n-1}$ при $i \geqslant i_0$. Учитывая допустимость Ω и тот факт, что

$$h_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(\overline{t_1^{s_1} \ldots t_n^{s_{n-1}}}) = t_1^{s_1} \ldots t_n^{s_{n-1}},$$

сводим доказываемое утверждение к следующему: при $r_0 \leqslant s_n < i_0$, $\mathbf{s} \in \Omega$, почти все $\overline{t_1^{s_1} \ldots t_n^{s_{n-1}}}$ попадают в U_{s_n}. Это так по индукционному предположению, поскольку набор индексов $\{(s_1, \ldots, s_{n-1}) : r_0 \leqslant s_n < i_0, \mathbf{s} \in \Omega\}$ допустим. •

Лемма 2. *Пусть s – сечение канонического отображения $\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{M}$ такое, что $s(0) = 0$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ – допустимый набор. Тогда ряд*

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Omega} b_{i_1,\ldots,i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} \text{ сходится } \quad (b_{i_1,\ldots,i_n} \in s(\mathcal{O}/\mathfrak{M}))$$

и любой элемент K может быть единственным образом записан в виде суммы такого ряда при подходящем Ω.

Замечание 1. Здесь и далее единственность разложения в ряд (произведение) следует понимать как единственность с точностью до включения нулевых (соответственно единичных) слагаемых (сомножителей).

Замечание 2. Для данной формулировки леммы существенно, что последнее поле вычетов конечно. В более общей ситуации следует требовать, чтобы сечение было "достаточно хорошим". Например, для поля

$$K = k\{\{T_1\}\} \ldots \{\{T_m\}\}((T_{m+2})) \ldots ((T_n)),$$

где k – конечное расширение поля частных $W(K_0)$, а K_0 – совершенное поле простой характеристики, можно взять композицию сечения Тейхмюллера $K_0 \to K_m = k\{\{T_1\}\} \ldots \{\{T_m\}\}$ с очевидным вложением $K_m \hookrightarrow K$.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Omega} b_{i_1,\ldots,i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} = \sum_{b\in s(\mathcal{O}/\mathfrak{M})} \left(b \cdot \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Omega_b} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} \right),$$

где $\Omega_b = \{(i_1,\ldots,i_n) \in \Omega | b_{i_1,\ldots,i_n} = b\}$. Поскольку умножение на b является непрерывным отображением K на себя, достаточно доказать, что внутреннние суммы сходятся. Но это непосредственно вытекает из леммы 1.

Для доказательства существования разложения вновь применим индукцию по n. Пусть $r = v_n(\alpha)$, где α – данный элемент поля K. Тогда по индукционному предположению

$$\overline{t_n^{-r}\alpha} = \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\Omega_r} \overline{b_{i_1,\ldots,i_n}}(\overline{t_1})^{i_1}\ldots(\overline{t_{n-1}})^{i_{n-1}},$$

где $\Omega_r \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ – некоторый допустимый набор. Отсюда следует

$$\alpha = \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})\in\Omega_r} b_{i_1,\ldots,i_n} t_1^{i_1}\ldots t_{n-1}^{i_{n-1}} t_n^r + \alpha',$$

где $v_n(\alpha') > r$. Продолжая действовать таким образом, мы получим требуемое разложение в сумму по допустимому набору мультииндексов $\Omega = (\Omega_r \times \{r\}) \cup (\Omega_{r+1} \times \{r+1\}) \cup \ldots$

Единственность вытекает из непрерывности отображения вычета $\mathfrak{p}(0) \to K_{n-1}$. $\bullet$

Определение. *Множество допустимых наборов* $\{\Omega_i : i \in I\}$ *будем называть допустимым, если оно обладает следующими свойствами:*

(i) $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ *– допустимый набор,*

(ii) $\bigcap_{j\in J}\Omega_j = \emptyset$, *где* J *– любое бесконечное подмножество* I.

Обозначим через B некоторую систему представителей ненулевых элементов K_0 – последнего поля вычетов K. Каждой паре $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$, $b \in B$ сопоставим фиксированный ряд

$$a_{\mathbf{r},b} = \sum_{\mathbf{s}\in\Omega_{\mathbf{r},b}} b_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r},b} t_1^{s_1}\ldots t_n^{s_n},$$

где $\Omega_{\mathbf{r},b}$ – допустимый набор, $b_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r},b} \in B$, причем $b_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r},b} = b$ и $b_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r},b} = 0$ при $\mathbf{s} < \mathbf{r}$. По лемме 2 все эти ряды сходятся. Заметим, что их можно записать как

$$a_{\mathbf{r},b} = bt_1^{r_1}\ldots t_n^{r_n} + \sum_{\mathbf{s}\in\Omega_{\mathbf{r},b},\mathbf{s}>\mathbf{r}} b_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r},b} t_1^{s_1}\ldots t_n^{s_n}.$$

Потребуем также, чтобы для любого допустимого набора Ω множество допустимых наборов $\{\Omega_{\mathbf{r},b} \mid \mathbf{r} \in \Omega, b \in B\}$ являлось допустимым.

Теорема 1. *Для любого допустимого набора Ω при любом выборе $b_{\mathbf{r}}$ ряд*

$$\sum_{\mathbf{r}\in\Omega} a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}$$

сходится, причем каждый элемент $\alpha \in K$ можно единственным образом представить в виде суммы такого ряда.

Доказательство. Сперва докажем утверждение, связанное со сходимостью. Очевидно, что имеет место формальное равенство

$$\sum_{\mathbf{r}\in\Omega} a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} = \sum_{b\in B} b \sum_{\mathbf{r}\in\Omega^b} \sum_{\mathbf{s}\in\Omega^b_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}} t_1^{s_1}\dots t_n^{s_n},$$

где

$$\Omega^b = \{\mathbf{r}\in\Omega \mid \exists \mathbf{s}\in\Omega_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} : b_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} = b\},$$

$$\Omega^b_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} = \{\mathbf{s}\in\Omega_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} \mid b_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} = b\}.$$

Поскольку B конечно и умножение на константу является гомеоморфизмом, достаточно показать, что для любой окрестности нуля U почти все слагаемые внутренних (двойных) сумм лежат в U.

Легко видеть, что Ω^b допустимо как подмножество допустимого Ω и что

$$\Omega^b_* = \bigcup_{\mathbf{r}\in\Omega^b} \Omega_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}$$

допустимо по (i). Кроме того, каждое слагаемое $t_1^{s_1}\dots t_n^{s_n}$ встречается в сумме не более, чем конечное число раз, поскольку по (ii) имеем

$$\bigcap_{\mathbf{r}\in J} \Omega_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} = \emptyset$$

для любого бесконечного множества $J \subset \Omega^b$. Осталось заметить, что по лемме 1 лишь для конечного количества индексов $\mathbf{s}\in\Omega^b_*$ элемент $t_1^{s_1}\dots t_n^{s_n}$ может не попасть в U. Итак, все ряды указанного вида сходятся.

Далее зададим $\alpha \in K$ и покажем, что этот элемент можно представить в виде суммы соответствующего ряда.

Будем действовать индукцией по размерности поля. В одномерном случае утверждение является очевидным. Прежде, чем производить индукционный переход, заметим, что при заданном

r_n элементы $\overline{a_{\mathbf{r},\bar{b}} t_n^{-r_n}}$ обладают в K_{n-1} теми же свойствами, что $a_{\mathbf{r},b}$ в K. Пусть теперь $v_n(\alpha) = i$. Тогда

$$\overline{\alpha t_n^{-i}} = \sum_{(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_i, r_n=i} \overline{a_{\mathbf{r},\overline{b_{\mathbf{r}}}} t_n^{-i}},$$

где $\Omega_i \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ – допустимый набор, и $b_{\mathbf{r}}$ – некоторые элементы B. Следовательно,

$$\alpha = \sum_{\substack{(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_i\\ r_n=i}} a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}} + \alpha_1, \qquad \alpha_1 \in \mathfrak{p}(i+1).$$

Проделывая аналогичную процедуру с α_1 и продолжая процесс, получаем требуемое разложение в ряд, причем набор

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{j\geqslant i} (\Omega_j \times \{j\})$$

допустим.

Проверим единственность разложения. Пусть есть два разных разложения

$$a = \sum_{\mathbf{r}\in\Omega'} a_{\mathbf{r},b'_{\mathbf{r}}} = \sum_{\mathbf{r}\in\Omega''} a_{\mathbf{r},b''_{\mathbf{r}}}.$$

Полагая $b'_{\mathbf{r}} = 0$ при $\mathbf{r} \notin \Omega'$, $b''_{\mathbf{r}} = 0$ при $\mathbf{r} \notin \Omega''$, наконец, $a_{\mathbf{r},0} = 0$ при любом $\mathbf{r}$, мы можем написать

$$a = \sum_{\mathbf{r}\in\Omega} a_{\mathbf{r},b'_{\mathbf{r}}} = \sum_{\mathbf{r}\in\Omega} a_{\mathbf{r},b''_{\mathbf{r}}},$$

где $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$. Индекс $\mathbf{r}_0 = \min\{\mathbf{r} \mid b'_{\mathbf{r}} \neq b''_{\mathbf{r}}$ корректно определен, поскольку любое непустое подмножество допустимого набора имеет минимальный элемент. Получаем, что

$$0 = a - a = \sum_{\substack{\mathbf{r}\geqslant\mathbf{r}_0\\ \mathbf{r}\in\Omega}} (a_{\mathbf{r},b'_{\mathbf{r}}} - a_{\mathbf{r},b''_{\mathbf{r}}})$$

– элемент с нормированием $\mathbf{r}_0$, что невозможно.

Замечание. Из доказательства видно, что если $\mathbf{v}(\alpha) \geqslant \mathbf{s}$, то все слагаемые соответствующего ряда обладают тем же свойством.

2. Мультипликативные разложения.

В этом пункте мы сохраняем обозначения, введенные перед теоремой 1.

Лемма 3. *Пусть* $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ *– допустимое множество допустимых наборов, причем* $\Omega_i \subset \mathbb{Z}_+^n$, *и*

$$\alpha_i = \sum_{\mathbf{r}\in\Omega_i} b_{\mathbf{r}}^{(i)} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}, \tag{$*$}$$

где $b_{\mathbf{r}}^{(i)} \in B$. *Тогда* $\prod_{i\in I}(1+\alpha_i)$ *сходится.*

Доказательство. Зафиксируем окрестность 1 в $V_K = 1 + \mathfrak{M}_K$; по определению она имеет вид $(1+U)\cap V_K$, где U – окрестность нуля в K. Рассмотрим всевозможные произведения членов вида $b_{\mathbf{r}}^{(i)} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$, которые встречаются в $(*)$. Достаточно показать, что почти все такие произведения лежат в U.

Любое рассматриваемое произведение имеет вид

$$c = b_1^{k_1} \dots b_s^{k_s} t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n} \tag{$**$}$$

где $l_n > 0$ и $B = \{b_1, \dots, b_s\}$. Докажем индукцией по j следующее утверждение. При $0 \leqslant j \leqslant n$ почти всегда имеет место $c \in U$ при условии, что $l_{j+1}, \dots, l_n$ зафиксированы. (При этом в случае $j = n$ мы получим исходное утверждение, которое необходимо доказать.) Пусть

$$\hat{\Omega} = \{\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_t | t \geqslant 1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_t \in \Omega\}.$$

Поскольку $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^n$, легко видеть, что $\hat{\Omega}$ – допустимый набор, и любой элемент $\hat{\Omega}$ можно представить в виде суммы элементов Ω конечным числом способов. Отсюда и из условия (ii) в определении допустимого множества допустимых наборов мы получаем, что любой конкретный мультииндекс $(l_1, \dots, l_n)$ может встретиться в правой части $(**)$ лишь конечное число раз. Это доказывает базу индукции $(j = 0)$.

При $j > 0$ мы видим, что l_j ограничено снизу, поскольку $(l_1, \dots, l_n) \in \hat{\Omega}$ и $l_{j+1}, \dots, l_n$ зафиксированы. С другой стороны, $c \in U$ при достаточно большом l_j и *произвольных* $k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_{j-1}$ ввиду Предложения 1.4 в [2], примененного к окрестности нуля $t_{j+1}^{-l_{j+1}} \dots t_n^{-l_n} U$ в K. Следовательно, мы должны рассмотреть лишь конечный диапазон значений $M \leqslant l_j \leqslant N$. При любом l_j в этом диапазоне применимо индукционное предположение. $\bullet$

Теорема 2. *Любой ненулевой элемент $\alpha \in K$ может быть единственным образом представлен в виде произведения*

$$\alpha = t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n} b_0 \prod_{\mathbf{r} \in \Omega_\alpha} (1 + a_{\mathbf{r}, b_{\mathbf{r}}}),$$

где b_0 и $b_{\mathbf{r}}$ суть некоторые элементы B, а $\Omega_\alpha \subset \mathbb{Z}_+^n$ – допустимый набор.

Доказательство. Прежде всего заметим, что по лемме 3 любое бесконечное произведение указанного в условии вида сходится.

Зафиксируем $\alpha \in K^*$. Пусть $\mathbf{v}(\alpha) = (l_1, \dots, l_n)$. Тогда

$$\alpha = t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n} b_0 (1 + u),$$

где $1 + u$ – главная единица, т. е. элемент $V_K = 1 + \mathfrak{M}$, и такое представление единственно.

Итак, осталось разложить в произведение элемент $\beta = 1 + u$, где $u \in \mathfrak{M}$. Дальнейшее доказательство проведем индукцией по размерности поля.

В одномерном случае утверждение выглядит следующим образом. K – локальное поле, B – система представителей ненулевых элементов его поля вычетов, t – униформизующая. Для каждой пары $r \in \mathbb{Z}, b \in B$ зафиксирован элемент

$$a_{r,b} = bt^r + \sum_{s > r} b_s^{r,b},$$

где $b_s^{r,b} \in B \cup \{0\}$ и $b_r^{r,b} = b$. Утверждается, что любая главная единица β единственным образом представляется в виде произведения

$$\beta = \prod_{r \in \Omega} (1 + a_{r, b_r}),$$

и Ω не содержит отрицательных индексов. Проверим, что это действительно так. Пусть $v(\beta - 1) = i_0 \geqslant 1$. Следовательно,

$$\beta = 1 + \sum_{i \geqslant i_0} b_i t^i,$$

где $b_{i_0} \in B, b_i \in B \cup \{0\}$. В качестве первого множителя искомого представления берем $1 + a_{i_0, b_{i_0}}$. Тогда

$$v(\alpha (1 + a_{i_0, b_{i_0}})^{-1} - 1) \geqslant i_0 + 1.$$

Продолжая процесс, получим требуемое разложение в произведение. Единственность легко выводится применением редукции по модулю $\mathfrak{p}(i)$ при $i \geqslant i_0$.

Теперь произведем индукционный переход. Возьмем главную единицу $\beta = 1+u \in K$, где K – n-мерное локальное поле. Элемент $\overline{\beta}$ является главной единицей поля K_{n-1}, и по индукционному предположению его можно представить в виде

$$\overline{\beta} = \prod_{\substack{\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_{n-1},0)\\(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_0}} (\overline{1 + a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}}),$$

причем $\Omega_0 \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$. Следовательно,

$$\beta = (1+u_1) \prod_{\substack{(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_0\\ r_n=0}} (1 + a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}),$$

где $u_1 \in \mathfrak{p}(1)$.

Далее, рассмотрим $\beta_1 = 1 + u_1$. По теореме 1 имеем

$$\overline{t_n^{-1}u_1} = \sum_{\substack{\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_{n-1},1)\\(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_1}} \overline{t_n^{-1}a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}}.$$

Легко видеть, что

$$\beta_1 \equiv \prod_{\substack{\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_{n-1},1)\\(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_1}} (1 + a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}) \mod \mathfrak{p}(2),$$

то есть

$$\beta_1 = (1+u_2) \prod_{\substack{\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_{n-1},1)\\(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_1}} (1 + a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}})$$

с $u_2 \in \mathfrak{p}(2)$. Аналогично поступаем с $\beta_2 = 1 + u_2$ и, продолжая процесс, получаем

$$\beta = \prod_{i\geqslant 0} \prod_{\substack{\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_{n-1},i)\\(r_1,\dots,r_{n-1})\in\Omega_i}} (1 + a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}).$$

Положим $\Omega_\alpha = \bigcup_{i\geqslant 0}(\Omega_i \times \{i\})$. Поскольку все Ω_i допустимы, Ω_α – тоже допустимый набор. Следовательно, β представляется в виде сходящегося бесконечного произведения

$$\beta = \prod_{\mathbf{r}\in\Omega_\alpha} (1 + a_{\mathbf{r},b_{\mathbf{r}}}).$$

Осталось доказать однозначность подобного разложения. Рассмотрим два разложения

$$\beta = \prod_{\mathbf{r}\in\Omega'_\alpha} (1 + a_{\mathbf{r},b'_{\mathbf{r}}}) = \prod_{\mathbf{r}\in\Omega''_\alpha} (1 + a_{\mathbf{r},b''_{\mathbf{r}}}). \qquad (***)$$

Как в доказательстве теоремы 1, мы можем, допуская нулевые значения $b'_{\mathbf{r}}$ и $b''_{\mathbf{r}}$, считать, что $\Omega' = \Omega'' = \Omega$ и положить $\mathbf{r}_0 = \min\{\mathbf{r} \mid b'_{\mathbf{r}} \neq b''_{\mathbf{r}}\}$. Сокращая равенство $(***)$ на (сходящееся!) произведение всех членов с $\mathbf{r} < \mathbf{r}_0$, получаем

$$\prod_{\substack{\mathbf{r}\in\Omega_\alpha \\ \mathbf{r}\geqslant\mathbf{r}_0}} (1 + a_{\mathbf{r},b'_{\mathbf{r}}}) = \prod_{\substack{\mathbf{r}\in\Omega_\alpha \\ \mathbf{r}\geqslant\mathbf{r}_0}} (1 + a_{\mathbf{r},b''_{\mathbf{r}}}).$$

Легко видеть, что разность левой и правой частей имеет нормирование $\mathbf{r}_0$, что невозможно. •

Замечание 1. Условие допустимости множества допустимых наборов является существенным. Например, бесконечные произведения $\prod_{i\geqslant1}(1 + t_1^i + t_1^{-i}t_2)$ и $\prod_{i\geqslant1}(1 + t_1^i + t_2)$ расходятся.

Замечание 2. Если последние поля вычетов не конечные, а произвольные совершенные, утверждения теоремы верны при условии, что система представителей B не является слишком патологической. Так, система представителей Тейхмюллера заведомо подходит. Приведенное доказательство сохраняет силу с единственной оговоркой: при доказательстве леммы 3 вместо использования Предложения 1.4 из [2] следует непосредственно применить определение топологии многомерного поля.

Литература

1. В. Г. Бойцов, *Мультипликативное разложение элемента из группы главных единиц в двумерных полных полях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 11–21.
2. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1994), 4–46.
3. I. Zhukov, *Higher dimensional local fields.* Invitation to higher local fields. pp. 3–13 (Conference in Munster, August-September 1999) (to appear).

Zhukov I. B., Madunts A. I. Additive and multiplicative decompositions in multidimensional local fields.

The paper is a continuation of a previous authors' paper on topology of higher local fields. A useful class of systems of topological generators for the additive and multiplicative groups is described here.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 августа 2000 г.