

# 1 Используемые обозначения

Мы будем использовать следующие обозначения.

$q = p^f$ , где  $p \neq 2$  — простое число.

$K$  — многомерное локальное поле такое, что существует цепочка полей

$$K = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q,$$

где  $k^{(i)}$  при  $1 \leq i \leq n$  является полным дискретно нормированным полем с полем вычетов  $k^{(i-1)}$ .

Набор  $t_n, \dots, t_1$  — система локальных параметров поля  $K$ , то есть  $t_i$  является единицей в полях  $K, k^{(n-1)}, \dots, k^{(i+1)}$  и при этом в поле  $k^{(i)}$  является простым элементом. Таким образом,  $t_n = \pi$  — простой элемент локального поля  $K$ .

$\bar{\mathbf{v}}_K = \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) : K^* \rightarrow \mathbb{Z}^n$  — нормирование ранга  $n$  в  $K$ . Здесь  $\mathbf{v}_n(a) = \mathbf{v}_{k^{(n)}}(a)$ , а для  $1 \leq i < n$

$$v_i(a) = \mathbf{v}_{k^{(i)}} \left( \frac{a}{t_n^{\mathbf{v}_n(a)} \dots t_{i+1}^{\mathbf{v}_{i+1}(a)}} \right),$$

$$v_n(a) = \mathbf{v}_{k^{(n)}}(a).$$

$\mathfrak{O}_K = \{a \in K^* \mid \bar{\mathbf{v}}(a) \geq 0\}$  — кольцо нормирования, которое не зависит от выбора системы локальных параметров.

$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M} = \{a \in \mathfrak{O}_K \mid \bar{\mathbf{v}}(a) > 0\}$  — максимальный идеал кольца нормирования.

$e_K$  — индекс ветвления поля  $K$  относительно нормирования  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ , то есть  $\mathbf{v}(p) = e_K$ .

$\bar{e}_K$  — индекс ветвления поля  $K$  относительно нормирования  $\bar{\mathbf{v}}$ .

Введём обозначение:  $\mathfrak{p}_K(r_1, \dots, r_n) = \{a \in K \mid (v_1(a), \dots, v_n(a)) \geq (r_1, \dots, r_n)\}$ . Мы считаем, что группа  $\mathbb{Z}^n$  лексикографически упорядоченна:  $(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n)$ , если для наибольшего индекса  $l$ , для которого  $i_l \neq j_l$ , выполняется  $i_l < j_l$ . Если  $(r_1, \dots, r_n) > (0, \dots, 0)$ , то  $\mathfrak{p}_K(r_1, \dots, r_n)$  — идеал в  $\mathfrak{O}_K$ . Более того, любой идеал в  $\mathfrak{O}_K$  может быть представлен в виде  $\mathfrak{p}_K(r_1, \dots, r)n$ .

Рассмотрим теперь набор мультииндексов  $I \subset \mathbb{Z}^n$ , будем называть набор  $I$  допустимым, если для любых  $i_n, \dots, i_{l+1}$   $1 \leq l \leq n$  найдётся целое число  $i$  такое, что из того, что  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_l, i_{l+1}, \dots, i_n) \in I$  следует  $r_l \geq i$ . Согласно работе [?], если мы зафиксируем  $B$  — произвольную систему представителей  $\mathbb{F}_q$  в  $K$ , то

$$\forall s \in K \quad s = \sum_{\bar{r} \in I} \alpha_{\bar{r}} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1},$$

где  $I$  — допустимый набор, а  $\alpha_{\bar{r}} \in B$ .

Рассмотрим многомерное локальное поле  $K = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q$ , в случае, когда  $k^{(1)} = k$  — одномерное локальное поле характеристики ноль (конечное расширение  $\mathbb{Q}_p$ ). В этом случае  $K = k((t_2)) \dots ((t_n))$ .

Пусть  $L$  — конечное расширение поля  $K$  без высшего ветвления, тогда  $L = L^{(1)}((T_2)) \dots ((T_n))$ , где  $L_1$  — конечное расширение поля  $k$ . При этом  $(\pi = t_1, t_2, \dots, t_n)$  и  $(\Pi = T_1, T_2, \dots, T_n)$  — суть системы локальных параметров в полях  $K$  и  $L$  соответственно. И Пусть  $\mathfrak{R}_L$  — набор представителей Тейхмюллера в поле  $L$ .

Одномерная формальная группа  $F(X, Y) \in \mathfrak{O}_K[[X, Y]]$  высоты  $h$  определяет фильтрацию Лютьца на модуле  $F(\mathfrak{M}_L)$ .

В одномерном случае в предложении 4 мы получили образующие модуля  $F(\mathfrak{M}_L)$ . В случае многомерных полей  $L/K$  этот результат получается аналогичным образом. Действительно, результаты работы [2] могут быть применены и к многомерным локальным полям  $L/K$  при условии малости абсолютного индекса ветвления поля  $K$ :  $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$ . Тогда очевидно, что рассуждения об образующих модуля  $F(\mathfrak{M}_L)$  могут быть повторены для многомерного случая. Таким образом, мы получим, что, если поле  $L$  не содержит нетривиальных корней изогении  $[p]_F$ , а  $e_0 < p$ , то любой элемент  $\alpha \in (\mathfrak{M}_L)$  единственным образом записывается в виде суммы  $\alpha = \sum_{(F)}^* [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r})$ . Откуда, с учётом предложения 2, следует предложение 4 для многомерного случая.

С помощью предложения 5, взятого из работы [3] мы получили обобщённую функцию Артина-Хассе. В работе [3] рассматриваются обобщённые локальные поля, то есть этот результат применим и для случая многомерных локальных полей  $L/K$ . При этом поле  $k^{(1)} = k$  не обязательно должно быть конечным расширением  $\mathbb{Q}_p$ , рассуждения верны для полных дискретно нормированных полей с совершенным полем вычетов полей. Тогда для многомерного случая будет верно и предложение 6 о свойствах обобщённой функции Артина-Хассе.

Теорема 1 основывается на предложениях 4 и 6, эти предложения верны для случая многомерного локального поля, а значит верным будет и утверждение Теоремы 1.

Пусть  $L/K$  — нормальное расширение поля  $K$ , а  $\mathfrak{O}_L, \mathfrak{M}_L$  — кольцо целых поля  $L$  и его максимальный идеал. Через  $\pi$  обозначим простой элемент поля  $L$ , а  $e = e(L/\mathbb{Q}_p)$  абсолютный индекс ветвления поля  $L$  относительно нормирования  $\mathfrak{v}_L$ , полученного продолжением нормирования  $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_n$  с поля  $K$  на поле  $L$ .  
 $G$  — группа Галуа расширения  $L/K$ .

## 2 Формальный групповой закон

Будем рассматривать  $F(X, Y) \in \mathfrak{O}_K[[X, Y]]$  — формальный групповой закон высоты для одномерной формальной группы конечной высоты  $h$ , заданный над кольцом целых многомерного локального поля  $K$ .

Пусть  $L/K$  — нормальное расширение поля  $K$ , а  $\mathfrak{O}_L, \mathfrak{M}_L$  — кольцо целых поля  $L$  и его максимальный идеал. Через  $\pi$  обозначим простой элемент поля  $L$ , а  $e = e(L/\mathbb{Q}_p)$  абсолютный индекс ветвления поля  $L$  относительно нормирования  $\mathfrak{v}_L$ , полученного продолжением нормирования  $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_n$  с поля  $K$  на поле  $L$ .  
 $G$  — группа Галуа расширения  $L/K$ .

$[p]_F(X) \in pX + \mathfrak{O}_K[[X]]X^2$  — эндоморфизм умножения на  $p$  формальной группы  $F$ .

Рассмотрим максимальный идеал кольца целых поля  $L$  и его степени  $\mathfrak{M}_L \supset \mathfrak{M}_L^2 \supset \dots$ , с помощью группового закона  $F(X, Y)$  на этих идеалах можно задать структуру формальных  $\mathbb{Z}_p$ -модулей:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_L^i : \alpha +_F \beta &= F(\alpha, \beta), \\ \forall a \in \mathbb{Z}_p, \forall \alpha \in \mathfrak{M}_L^i : a\alpha &= [a]_F(\alpha). \end{aligned}$$

## 3 Обозначения

В данной работе нам потребуются следующие обозначения.

$K$  — локальное поле (конечное расширение поля  $\mathbb{Q}_p$ ).

$e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$  — абсолютный индекс ветвления поля  $K$ .

$\pi$  — простой элемент поля  $K$ .

$\mathfrak{O}_K$  — кольцо целых поля  $K$ .

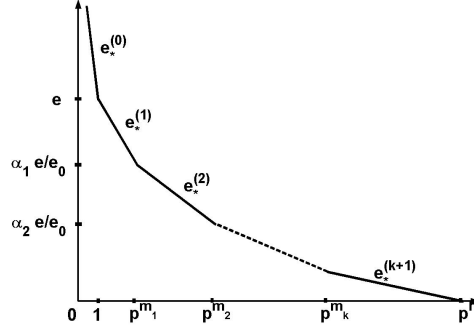
$F(X, Y)$  — одномерная формальная группа высоты  $h$ , заданная над  $\mathfrak{O}_K$ .

$[p]_F(X) \in pX + \mathfrak{O}_K[[X]]X^2$  — эндоморфизм умножения на  $p$  формальной группы  $F$ . В соответствии с работой [2]  $[p]_F(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$  можно записать в виде

$$[p]_F(X) = pc_0(X)X + \pi^{\alpha_1} c_1(X)X^{p^{m_1}} + \dots + \pi^{\alpha_k} c_k(X)X^{p^{m_k}} + c_h(X)X^{p^h},$$

где  $c_i(X) \in \mathfrak{O}_K[[X]]^*$ ,  $c_0(X) \equiv 1 \pmod{X}$ ,  $\alpha_0 := e_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > \alpha_{k+1} := 0$ ,  $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1} := h$ .

Для изогении  $[p]_F(X)$  можно построить многоугольник Ньютона. В области  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  отметим точки  $(i, \mathfrak{v}(a_i))$ , где  $1 \leq i \leq p^h$ . Из всех ломаных с вершинами в отмеченных точках и соединяющих точки  $(1, \mathfrak{v}(a_1))$  и  $(p^h, \mathfrak{v}(a_{p^h}))$  выберем наиболее близкую к границе области  $M$ . Эта ломаная является нижней границей выпуклой оболочки множества  $\{i, \mathfrak{v}(a_i) \mid 1 \leq i \leq p^h\}$ . Построенная ломаная называется многоугольником Ньютона изогении  $[p]_F(X)$ . В нашем случае многоугольник Ньютона будет выглядеть примерно так:



Обозначим через  $e_*^{(i)}$  тангенс угла наклона прямой, соединяющей точки  $(p^{m_i}, \mathfrak{v}(a_{p^{m_i}}))$  и  $(p^{m_{i-1}}, \mathfrak{v}(a_{p^{m_{i-1}}}))$ :

$$e_*^{(i)} := \frac{e}{e_0} \frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{p^{m_i} - p^{m_{i-1}}}.$$

Числа  $p^{m_i}$  и  $e_*^{(i)}$  являются важными инвариантами формальной группы  $F$  (см. [4]).

В работе [2] доказано, что, если  $e_0 < p$ , то  $e_*^{(1)} > e_*^{(2)} > \dots > e_*^{(k+1)}$ . Более того, верно следующее утверждение (см. лемму 2 в [2]).

**Предложение 1.** Пусть  $z$  — ненулевой корень изогении  $[p]_F(X)$  в поле  $L$ . Тогда

$$\mathfrak{v}(z) = e_*^{(i)}$$

при некотором  $i : 1 \leq i \leq k+1$ , если  $h \geq 2$ . Если же  $h = 1$ , то

$$\mathfrak{v}(z) = \frac{e}{p-1}.$$

Аналогичные обозначения будут для других полей:

$T_K$  — подполе инерции поля  $K$  (максимальное неразветвлённое подполе в расширении  $K/\mathbb{Q}_p$ ), простым элементом в  $T_K$  будет  $p$ .

$\mathfrak{O}_{T_K}$  — его кольцо целых.

$L$  — нормальное расширение поля  $K$ .

$\mathfrak{O}_L, \mathfrak{M}_L$  — кольцо целых поля  $L$  и его максимальный идеал.

$\Pi$  — простой элемент поля  $L$ .

$e = e(L/\mathbb{Q}_p)$  — абсолютный индекс ветвления поля  $L$ . Мы считаем, что  $L/K$  не имеет высшего ветвления, то есть  $(e, p) = 1$ .

$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$  — нормирование в поле  $L$ .

$T_L, \mathfrak{O}_{T_L}$  — подполе инерции поля  $L$  и его кольцо целых.

$\mathfrak{R}_L$  — представители Тейхмюллера в поле  $L$ .

$G = \text{Gal}(L/K)$  — группа Галуа расширения  $L/K$ .

Пусть  $L/K$  — нормальное расширение без высшего ветвления с группой Галуа  $G = \text{Gal}(L/K)$ . Тогда так же, как в работе [1], сделаем  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модуль из  $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$ . В поле  $L$  всегда можно выбрать такой простой элемент  $\Pi$ , что элемент

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\Pi^\sigma}{\Pi} \in \mathfrak{R}_L$$

является корнем из единицы степени взаимно простой с  $p$  для любого автоморфизма  $\sigma \in G$ .

Теперь в кольце многочленов  $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$  можно задать действие операторов из группы  $G$ , положив

$$X^\sigma = \varepsilon_\sigma X, \sigma \in G.$$

Тем самым кольцо  $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$  становится модулем над групповым кольцом  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ .

Рассмотрим  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -подмодуль  $A_I$  из  $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$  с  $\mathfrak{O}_{T_K}$ -образующими  $X^i$ , где  $I$  — некоторая полная система вычетов по модулю  $\frac{e}{e_0}$ . Тогда, в соответствии с леммой 3 работы [1] имеем следующее предложение.

**Предложение 2.** Пусть  $L/K$  — нормальное расширение без высшего ветвления. Тогда  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модуль  $A_I$  является свободным  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модулем ранга 1.

## 4 Образующие модуля $F(\mathfrak{M}_L)$

Рассмотрим формальный  $\mathbb{Z}_p$ -модуль  $F(\mathfrak{M}_L)$ , который как множество совпадает с максимальным идеалом  $\mathfrak{M}_L$  кольца целых поля  $L$ . Структуру  $\mathbb{Z}_p$ -модуля на  $F(\mathfrak{M}_L)$  зададим с помощью формального группового закона  $F$ :

$$\forall \alpha, \beta \in F(\mathfrak{M}_L) \quad \alpha +_F \beta := F(\alpha, \beta),$$

$$\forall \alpha \in F(\mathfrak{M}_L), a \in \mathbb{Z}_p \quad a\alpha := [a]_F(\alpha).$$

Тогда, если  $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$ , то, согласно работе [2], получим следующие сравнения для элемента  $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$ .

$$[p]_F(\alpha) \equiv \begin{cases} c_h(0)\alpha^{p^h} \mod \Pi^{p^h v(\alpha)+1}, & 1 \leq v(\alpha) < e_*^{(k+1)} \\ \pi^{\alpha_i} c_i(0)\alpha^{p^{m_i}} \mod \Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} v(\alpha)+1}, & e_*^{(i+1)} < v(\alpha) < e_*^{(i)} \\ & 1 \leq i \leq k \\ pc_0(0)\alpha \mod \Pi^{e+v(\alpha)+1}, & e_*^{(1)} < v(\alpha) \\ \pi^{\alpha_{i-1}} c_{i-1}(0)\alpha^{p^{m_{i-1}}} + \pi^{\alpha_i} c_i(0)\alpha^{p^{m_i}} \mod \Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + e_*^{(i)} p^{m_i} + 1}, & v(\alpha) = e_*^{(i)} \\ & 1 \leq i \leq k+1 \end{cases}$$

С помощью этих сравнений можно получить образующие для формального модуля  $F(\mathfrak{M}_L)$ . Пусть  $\theta$  из  $\mathfrak{R}_L$ , тогда с помощью  $\varepsilon_s(\theta)$  сопоставим  $\theta$  некий элемент из  $F(\mathfrak{M}_L)$  такой, что  $\varepsilon_s(\theta) \equiv \theta \Pi^s \mod \Pi^{s+1}$ .

**Предложение 3.** Любой элемент  $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$  представим в виде суммы

$$\alpha = \sum_{(F)}^* [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r}),$$

где символ  $\sum_{(F)}^*$  обозначает суммирование по всем неотрицательным  $r$  и по индексам  $s$  из некоторого специального индексного множества  $I$ . При этом, если поле  $L$  не содержит нетривиальных корней изогении  $[p]_F$ , то такое представление однозначно.

В частности, в множестве  $I$  не будут встречаться индексы, большие  $e_*^{(1)} + e$ . Запишем  $I$  в виде  $I = \{1 \leq s \leq e_*^{(1)} + e \mid \star\}$ , где  $\star$  — некое условие, которое мы получим ниже.

*Доказательство.* Для начала индукцией проверим, что любой элемент  $\alpha$  из  $F(\mathfrak{M}_L)$  можно представить в виде суммы следующего вида:  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$ , где  $\theta_s \in \mathfrak{R}_L$ ,  $\varepsilon_s(\theta_s) \in F(\mathfrak{M}_L)$  такие, что  $\varepsilon_s(\theta_s) \equiv \theta \Pi^s \pmod{\Pi^{s+1}}$ .

База индукции очевидна, так как любой элемент из  $F(\mathfrak{M}_L)$  имеет вид  $\alpha = \theta_1 \Pi + \dots \Rightarrow \alpha \equiv \theta_1 \Pi \pmod{\Pi^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Пусть теперь } \alpha &\equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) \pmod{\Pi^{t+1}} \Rightarrow \alpha = \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) + \\ + \theta_{t+1} \Pi^{t+1} + \dots &\equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) + \theta_{s+1} \Pi^{t+1} \pmod{\Pi^{t+2}} \equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) +_F \\ +_F \theta_{s+1} \Pi^{t+1} &\pmod{\Pi^{t+2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что для каждого  $t > 0$   $\alpha \equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) \pmod{\Pi^{t+1}}$ , а значит  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$ .

Далее, пользуясь сравнениями, уберём лишние индексы в этой сумме. Будем считать, что  $\beta \equiv \theta \Pi^{\mathfrak{v}(\beta)} + \dots \in F(\mathfrak{M}_L)$ ,  $c_i(0) = c_i + \dots$ ,  $\pi = \xi \Pi^{\frac{e}{e_0}} + \dots$ ,  $p = \zeta \Pi^e + \dots$ , где  $\theta, c_i, \xi, \zeta \in \mathfrak{R}_L$ .

1. Если  $s = \mathfrak{v}(\beta) > e_*^{(1)}$ , то  $[p]_F(\beta) = p c_0(0) \beta + \dots \equiv \zeta c_0 \theta \Pi^{s+e} \pmod{\Pi^{s+e+1}}$ , следовательно, если в качестве  $\theta$  взять  $\theta = \theta_{s+e} (\zeta c_0)^{-1} \in \mathfrak{R}_L$ , то  $\beta \equiv \theta \Pi^s \pmod{\Pi^{s+1}} \equiv \varepsilon_s(\theta) \pmod{\Pi^{s+1}}$ , а для слагаемого с индексом  $s + e$  получим следующее сравнение:

$$\varepsilon_{s+e}(\theta_{s+e}) \equiv [p]_F(\beta) \pmod{\Pi^{s+e+1}} \equiv [p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \pmod{\Pi^{s+e+1}}.$$

Это сравнение означает, что в сумме  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$  любое слагаемое  $\varepsilon_j(\theta_j)$  индекса  $j > e_*^{(1)} + e$  можно заменить на слагаемое вида  $[p]_F(\varepsilon_{j-e}(\theta_{j-e,1}))$ , то есть в индексном множестве  $I$  нет индексов, больших  $e_*^{(1)} + e$ .

2. Если  $1 \leq s = \mathfrak{v}(\beta) < e_*^{(k+1)}$ , то  $[p]_F(\beta) \equiv c_h \theta p^h \Pi^{p^h s} \pmod{\Pi^{p^h s+1}}$ . Представители Тейхмюллера  $\mathfrak{R}_L$   $p$ -делимы, значит  $\theta = (c_h^{-1} \theta_{p^h s})^{\frac{1}{p^h}}$  будет лежать в  $\mathfrak{R}_L$ . При таком  $\theta$  получим, что

$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \pmod{\Pi^{p^h s+1}} \equiv \theta_{p^h s} p^h \Pi^{p^h s} \pmod{\Pi^{p^h s+1}}.$$

А это означает, что в сумме  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$  будут отсутствовать слагаемые вида  $\varepsilon_{p^h s}(\theta_{p^h s})$ , где  $1 \leq s < e_*^{(k+1)}$ .

3. Если  $e_*^{(i+1)} < s = \mathfrak{v}(\beta) < e_*^{(i)}$  для некоторого  $1 \leq i \leq k$ , то

$$\begin{aligned} [p]_F(\varepsilon_s(\theta)) &\equiv [p]_F(\beta) \pmod{\Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s + 1}} \equiv \\ &\equiv \xi^{\alpha_i} c_i \theta p^{m_i s} \Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s} \pmod{\Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s + 1}}. \end{aligned}$$

$\xi^{\alpha_i} c_i \theta p^{m_i s} \in \mathfrak{R}_L$ , поэтому мы можем рассмотреть  $\theta = (\xi^{-\alpha_i} c_i^{-1} \theta_{\alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s})^{\frac{1}{p^{m_i}}} \in \mathfrak{R}_L$ . Тогда получим, что для любого индекса  $j = \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s$  при некотором  $1 \leq i \leq k$  и  $e_*^{(i+1)} < s < e_*^{(i)}$  будет выполняться сравнение

$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv \varepsilon_j(\theta_j) \pmod{\Pi^{j+1}},$$

а значит из индексного множества  $I$  можно убрать все такие индексы  $j$ .

4. В случае, если  $s = \mathbf{v}(\beta) = e_*^{(i)}$  для некоторого  $1 \leq i \leq k+1$ , рассмотрим  $j = \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s$ , тогда

$$\begin{aligned} [p]_F(\varepsilon_s(\theta)) &\equiv [p]_F(\beta) \pmod{\Pi^{j+1}} \equiv \\ &\equiv (\xi^{\alpha_{i-1} c_{i-1}} \theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i c_i} \theta^{p^{m_i}}) \Pi^j \pmod{\Pi^{j+1}}. \end{aligned}$$

Будем считать, что сравнения

$$\theta_j \equiv \xi^{\alpha_{i-1} c_{i-1}} \theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i c_i} \theta^{p^{m_i}} \pmod{\Pi}$$

имеют решения  $\theta$  в  $\mathfrak{R}_L$  для любого  $\theta_j$  из  $\mathfrak{R}_L$ , тогда индексы вида  $e_*^{(i)}$ , где  $1 \leq i \leq k+1$ , можно выкинуть из множества  $I$ .

Таким образом, условие  $\star$  состоит из четырёх пунктов:

1.  $s \leq e + e_*^{(1)} = \alpha_0 \frac{e}{e_0} + p^{m_0} e_*^{(1)}$ ,
2.  $s \neq p^h j = \alpha_{k+1} \frac{e}{e_0} + p^{m_{k+1}} j$  ни для какого  $1 \leq j < e_*^{(k+1)}$ ,
3.  $s \neq \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} j$  ни для каких  $1 \leq i \leq k$  и  $e_*^{(i+1)} < j < e_*^{(i)}$ ,
4.  $s \neq \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} e_*^{(i)}$  ни для какого  $1 \leq i \leq k+1$ .

В итоге любой элемент  $\alpha$  из  $F(\mathfrak{M}_L)$  можно представить в виде суммы  $\alpha = \sum_{(F)}^* [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r})$ , где символ  $\sum_{(F)}^*$  означает, что суммирование ведётся по всем неотрицательным  $r$ , а  $s$  берутся из индексного множества  $I = \{1 \leq s \leq e + e_*^{(1)} \mid \star\}$ .

Ясно, что, если  $L$  не содержит нетривиальных корней изогении  $[p]_F$ , то такое представление будет однозначным.  $\square$

Разобьём индексное множество  $I$  на непересекающиеся подмножества так, чтобы в каждом из них было по  $\frac{e}{e_0}$  различных представителей вычетов по модулю  $\frac{e}{e_0}$ . Рассмотрим числа  $i_j := \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} e_*^{(j+1)}$ ,  $0 \leq j \leq k+1$  (здесь и в дальнейшем будем считать, что  $e_*^{(k+2)} = 0$ ), тогда  $I$  представляется в виде объединения непересекающихся множеств  $I_j := \{i_j \leq s < i_{j+1} \mid \star\}$ :  $I = \bigcup_{j=1}^{k+1} I_j$ . Заметим, что для каждого  $j$  все индексы  $s = \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} l$ , где  $e_*^{(j+1)} < l < e_*^{(j)}$ , лежат в интервале  $I_j$ . Действительно:

$$\begin{aligned} s &= \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} l > \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} e_*^{(j+1)} = i_j, \\ s &= \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} l < \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} e_*^{(j)} = \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} \frac{e}{e_0} \frac{\alpha_{j-1} - \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \\ &= \frac{e}{e_0} \frac{p^{m_j} \alpha_j - p^{m_{j-1}} \alpha_j + p^{m_j} \alpha_{j-1} - p^{m_j} \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \frac{e}{e_0} \frac{p^{m_j} \alpha_{j-1} - p^{m_{j-1}} \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \\ &= \frac{e}{e_0} \frac{p^{m_j} \alpha_{j-1} - p^{m_{j-1}} \alpha_{j-1} + p^{m_{j-1}} \alpha_{j-1} - p^{m_{j-1}} \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \\ &= \alpha_{j-1} \frac{e}{e_0} + p^{m_{j-1}} \frac{e}{e_0} \frac{\alpha_{j-1} - \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \alpha_{j-1} \frac{e}{e_0} + p^{m_{j-1}} e_*^{(j)} = i_{j-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие  $\star$  в каждом из множеств  $I_j$  будет равномерно «выкалывать» индексы с шагом  $p^{m_j}$ . Из каждого  $I_j$  будет «выколото» ровно  $e_*^{(j)} - e_*^{(j+1)}$  индексов, а значит из всех  $e + e_*^{(1)}$  индексов в множестве  $I$  будет «выколото» ровно  $(e_*^{(k+1)} - e_*^{(k+2)}) + (e_*^{(k)} -$

$-e_*^{(k+1)}) + \dots + (e_*^{(1)} - e_*^{(2)}) = e_*^{(1)}$  индексов, а значит в  $I$  останется  $e$  индексов. Разобьём их на  $e_0$  групп по  $\frac{e}{e_0}$  в каждой. Ясно, что если для любого  $j$   $\frac{e}{e_0}$  делит  $(p^{m_j} - 1)$ :  $t_j \frac{e}{e_0} = p^{m_j} - 1$ , то каждое из множеств  $I_j$  разбивается в объединение  $t_j(e_*^{(j)} - e_*^{(j+1)})$  множеств по  $\frac{e}{e_0}$  представителей вычетов по модулю  $\frac{e}{e_0}$ . Следовательно можно будет наше множество  $I$  представить в виде объединения  $I = \bigcup_{i=1}^{e_0} I_{\frac{e}{e_0}}^i$ , где множества  $I_{\frac{e}{e_0}}^i$  имеют такой вид, как требуется в предложении 1.

Используя результаты этого параграфа, получим, что  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модуль  $A_I$ , построенный на  $\mathfrak{O}_{T_K}[X]$  образующих  $X^s$ , где  $s$  из нашего индексного множества  $I = \{1 \leq s \leq e + e_*^{(1)} \mid \star\}$  будет представляться в виде прямой суммы модулей  $A_{I_{\frac{e}{e_0}}^i}$ :  $A_I = \bigoplus_{i=1}^{e_0} A_{I_{\frac{e}{e_0}}^i}$ . В предложении 2 говорится, что каждый модуль  $A_{I_{\frac{e}{e_0}}^i}$  является свободным  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модулем ранга 1, а значит будет верным следующее предложение.

**Предложение 4.** Пусть  $I = \{1 \leq s \leq e + e_*^{(1)} \mid \star\}$ . Рассмотрим  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модуль  $A_I$ , с  $\mathfrak{O}_{T_K}$ -образующими  $X^s$ , где  $s \in I$ . Тогда  $A_I$  является свободным  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модулем ранга  $e_0$ .

## 5 Функция Артина-Хассе

Теперь займёмся построением аналога функции Артина-Хассе

$$E(X) = \exp \left( X + \frac{X^p}{p} + \frac{X^{p^2}}{p^2} + \dots \right)$$

для нашего случая. Для этого мы воспользуемся результатами работы [3].

$F(X, Y)$  —  $p$ -типическая одномерная формальная группа, определённая над  $\mathfrak{O}_K$ . Тогда её логарифм имеет вид:

$$\lambda_F(X) = X + c_1 X^p + c_2 X^{p^2} + \dots = \Lambda_F(\Delta)(X),$$

где  $\Delta$  действует на переменную  $X$  как возведение в степень  $p$ , а на коэффициенты, как автоморфизм Фробениуса в расширении  $K/\mathbb{Q}_p$ . В работе [3] доказано, следующее.

**Предложение 5.**

1. Существуют ряд  $v_F(\Delta) = p + \pi \sum_{i \geq 1} b_i \Delta^i$  и ряд  $u_F(\Delta) = p + \sum u_j \Delta^j$ , где  $b_i \in \mathfrak{O}_K$ , а  $u_j$  лежат в  $\mathfrak{O}_{T_K}$ , такие, что  $\Lambda_F(\Delta) = \frac{v_F(\Delta)}{u_F(\Delta)}$ . При этом, если  $h = htF < \infty$  — высота формальной группы  $F$ , то  $p \mid u_1, u_2, \dots, u_{h-1}$ ;  $u_h \in \mathfrak{O}_{T_K}^*$ .
2. В классе изоморфных над  $\mathfrak{O}_K$  формальных групп существует единственная формальная группа  $F_{ah}$  с логарифмом

$$\lambda_{ah}(X) = \Lambda_{ah}(\Delta)(X) = \frac{v(\Delta)}{u(\Delta)}(X), \text{ где}$$

$$v(\Delta) = p + \pi b_1 \Delta + \dots + \pi b_h \Delta^h,$$

$$u(\Delta) = p + p u_1 \Delta + \dots + p u_{h-1} \Delta^{h-1} + u_h \Delta^h.$$

При этом  $tr_{K/T_K} b_i = 0$ .



Ряд  $E_F(X) = (\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{ah})(X)$  будет задавать строгий изоморфизм формальных групп над  $\mathfrak{O}_K$   $E_F : F_{ah} \rightarrow F$ . Рассмотрим функцию  $E_F(\varphi) := (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(\varphi)$ . Она будет действовать из  $\mathfrak{O}_L[[X]]$  в  $F(\mathfrak{O}_L[[X]])$  и будет обладать следующими свойствами.

**Предложение 6.**

$$E_F(\varphi) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(\varphi) : \mathfrak{O}_L[[X]] \rightarrow F(\mathfrak{O}_L[[X]]), \text{ тогда}$$

$$1. \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{O}_L[[X]] \quad E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi).$$

$$2. E_F(pX^m) = [p]_F E_F(X^m).$$

$$3. \forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) \quad E_F(X^\sigma) = (E_F(X))^\sigma.$$

$$4. \forall a \in \mathfrak{O}_L \quad E_F(aX^m) \equiv aX^m \pmod{X^{m+1}}.$$

*Доказательство.*  $E_F$  задаёт изоморфизм формальных групп  $F$  и  $F_{ah}$ , то есть  $E_F(F_{ah}(X, Y)) = F(E_F(X), E_F(Y))$ .  $\Lambda_{ah}(\Delta)$  — линейный оператор, поэтому  $\Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi + \psi) = \Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi) + \Lambda_{ah}(\Delta)(\psi)$ . Отсюда очевидно следует, что

$$\begin{aligned} E_F(\Delta)(\varphi + \psi) &= \Lambda_F^{-1}(\Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi + \psi)) = \\ &= \Lambda_F^{-1}(\Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi) + \Lambda_{ah}(\Delta)(\psi)) = \\ &= \Lambda_F^{-1}(\Lambda_F \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi) + \Lambda_F \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah}(\Delta)(\psi)) = \\ &= \Lambda_F^{-1}(\Lambda_F(E_F(\varphi)) + \Lambda_F(E_F(\psi))) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi). \end{aligned}$$

Свойство 1 доказано.

Из свойства 1 по определению эндоморфизма  $[p]_F$  сразу же вытекает свойство 2.

Для доказательства свойства 3 рассмотрим  $\sigma$  из группы Галуа  $G$ , тогда  $X^\sigma = \varepsilon_\sigma X$ , где  $\varepsilon_\sigma \in \mathfrak{K}_L$ . Следовательно,  $\Delta(X^\sigma) = \Delta(\varepsilon_\sigma X) = \varepsilon_\sigma^p \Delta(X) = \varepsilon_\sigma^p X^p$ . С другой стороны,  $(\Delta(X))^\sigma = (X^p)^\sigma = \varepsilon_\sigma^p X^p$ . Отсюда следует, что  $\Delta(X^\sigma) = (\Delta(X))^\sigma$  и

$$E_F(X^\sigma) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(X^\sigma) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(X)^\sigma = (E_F(X))^\sigma.$$

Так как  $(\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{ah})(X)$  задаёт строгий изоморфизм формальных групп  $F$  и  $F_{ah}$ , то  $(\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta) \equiv 1 \pmod{(\Delta)}$ , а значит выполнено свойство 4:  $E_F(aX^m) \equiv aX^m \pmod{X^{m+1}}$ .  $\square$

## 6 Итоговый результат

Рассмотрим  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модуль  $A_I$ , который по предложению 4 является свободным  $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$ -модулем ранга  $e_0$ . Пусть  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{e_0}$  образуют нормальный базис модуля  $A_I$ , то есть элементы

$\{\beta_l^\sigma \mid 1 \leq l \leq e_0, \sigma \in G\}$  образуют базис модуля  $A_I$  над  $\mathfrak{O}_{T_K}$ . Тогда, если  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathfrak{O}_{T_K}$  образуют базис кольца  $\mathfrak{O}_{T_K}$  над  $\mathbb{Z}_p$ , то множество  $\{b_j \beta_l \mid 1 \leq l \leq e_0, 1 \leq j \leq n\}$  является нормальным базисом модуля  $A_I$  как  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модуля, а это означает, что  $A_I$  является свободным  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модулем ранга  $ne_0$ , где  $n = (\mathfrak{O}_{T_K} : \mathbb{Z}_p)$ .

В предложении 3 говорилось, что любой  $\alpha$  из  $F(\mathfrak{M}_L)$  представим в виде  $\alpha = \sum_{(F)}^* [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r})$ , где  $\varepsilon_s(\theta_{s,r}) \equiv \theta_{s,r} \Pi^s \pmod{\Pi^{s+1}}$ . Из свойств функции  $E_F$  ясно, что  $\varepsilon_s(\theta_{s,r}) \equiv E_F(\theta_{s,r} X^s)|_{X=\Pi} \pmod{\Pi^{s+1}}$ , а значит

$$\forall \alpha \in F(\mathfrak{M}_L) \quad \alpha = E_F\left(\sum_{s \in I} \sum_{r \geq 0} p^r \theta_{s,r} X^s\right)|_{X=\Pi} = E_F(\varphi)|_{X=\Pi},$$

где  $\varphi$  из  $A_I$ . Так как  $E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi)$ , то получаем, что функция  $E_F$  задаёт гомоморфизм  $\mathbb{Z}_p$ -модулей  $A_I$  и  $F(\mathfrak{M}_L)$ . Если поле  $L$  не содержит нетривиальных корней изогении  $[p]_F$ , то  $E_F$ , по предложению 3, будет  $\mathbb{Z}_p$ -изоморфизмом. Более того, по свойству 3,  $E_F(X^\sigma) = (E_F(X))^\sigma$  для любого  $\sigma$  из группы Галуа  $G$ , а значит  $E_F$  задаёт изоморфизм  $A_I$  и  $F(\mathfrak{M}_L)$  как  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модулей.

Рассмотрим образующие  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модуля  $A_I$  :

$$\{b_j\beta_l \mid 1 \leq l \leq e_0, 1 \leq j \leq n\}.$$

Отображение  $E_F$  будет переводить их в образующие  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модуля  $F(\mathfrak{M}_L)$ , а это значит, что  $F(\mathfrak{M}_L)$  является свободным  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модулем ранга  $ne_0$ .

Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных модулей  $F(\mathfrak{M}_L^i)$  фильтрации Лютц.

В итоге, мы получили следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $K$  — конечное расширение поля  $\mathbb{Q}_p$ , с индексом ветвления  $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$ , и пусть  $L/K$  — нормальное расширение без высшего ветвления с группой Галуа  $G = \text{Gal}(L/K)$ . Рассмотрим формальную группу  $F(X, Y)$  конечной высоты  $h$ , заданную над кольцом целых  $\mathfrak{O}_K$  поля  $K$ . Пусть  $[p]_F(X) = pc_0(X)X + \pi^{\alpha_1}c_1(X)X^{p_{m_1}} + \dots + \pi^{\alpha_k}c_k(X)X^{p_{m_k}} + c_h(X)X^{p^h}$  — эндоморфизм умножения на  $p$  формальной группы  $F$ . Тогда, если выполняются следующие условия:

1.  $L$  не содержит нетривиальных корней изогении  $[p]_F$ ,
2. Для любого  $i$  из  $\{1, 2, \dots, k+1\}$  сравнение  $\theta_* \equiv \xi^{\alpha_{i-1}}c_{i-1}\theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i}c_i\theta^{p^{m_i}} \pmod{\Pi}$  имеет решение  $\theta \in \mathfrak{R}_L$  для любого  $\theta_* \in \mathfrak{R}_L$ , где  $\pi = \xi\Pi^{\frac{e}{e_0}} + \dots$ ,

то  $F(\mathfrak{M}_L)$  является свободным  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модулем ранга  $ne_0$ , где  $n = (\mathfrak{O}_{T_K} : \mathbb{Z}_p)$ . Аналогичный результат верен и для  $F(\mathfrak{M}_L^i)$ .

## 7 Обозначения

В данной работе будем рассматривать многомерное локальное поле  $K = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q$ , в случае, когда  $k^{(1)} = k$  — одномерное локальное поле характеристики ноль (конечное расширение  $\mathbb{Q}_p$ ). В этом случае  $K = k((t_2)) \dots ((t_n))$ , где набор  $t_n, \dots, t_1$  — система локальных параметров поля  $K$ . Таким образом,  $t_i$  является единицей в полях  $K, k^{(n-1)}, \dots, k^{(i+1)}$  и при этом в поле  $k^{(i)}$  является простым элементом. Для всех  $0 \leq i < n$  поле  $k^{(i)}$  является полем вычетов для полного дискретно нормированного поля  $k^{(i+1)}$ . Через  $\pi = t_n$  будем обозначать простой элемент поля  $k^{(n)}$ , а  $\mathbf{v}_{k^{(i)}}$  — нормирование в поле  $k^{(i)}$ .  $\overline{\mathbf{v}}_K = \overline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) : K^* \rightarrow \mathbb{Z}^n$  — нормирование ранга  $n$  в  $K$ . Здесь  $\mathbf{v}_n(a) = \mathbf{v}_{k^{(n)}}(a)$ , а для  $1 \leq i < n$

$$v_i(a) = \mathbf{v}_{k^{(i)}} \left( \frac{a}{t_n^{\mathbf{v}_n(a)} \dots t_{i+1}^{\mathbf{v}_{i+1}(a)}} \right),$$

$\mathbb{Z}^n$  считается лексикографически упорядоченным.

$\mathfrak{O}_K = \{a \in K^* \mid \overline{\mathbf{v}}(a) \geq 0\}$  — кольцо нормирования, которое не зависит от выбора системы локальных параметров.

$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M} = \{a \in \mathfrak{O}_K \mid \overline{\mathbf{v}}(a) > 0\}$  — максимальный идеал кольца нормирования.

$e_K$  — индекс ветвления поля  $K$  относительно нормирования  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ , то есть  $\mathbf{v}(p) = e_K$ .

$\overline{e}_K$  — индекс ветвления поля  $K$  относительно нормирования  $\overline{\mathbf{v}}$ .

Пусть  $L/K$  — нормальное расширение без высшего ветвления с группой Галуа  $G = \text{Gal}(L/K)$ , тогда  $L = L^{(1)}((T_2)) \dots ((T_n))$ , где  $L^{(1)}$  — конечное расширение поля  $k$ . При этом обозначим через  $(\Pi = T_1, T_2, \dots, T_n)$  — систему локальных параметров в поле  $L$ .  $\mathfrak{O}_L, \mathfrak{M}_L$  — кольцо целых поля  $L$  и его максимальный идеал, а  $\overline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  абсолютный индекс ветвления поля  $L$  относительно нормирования  $\overline{\mathbf{v}}_L = (\mathbf{v}_1^L, \dots, \mathbf{v}_n^L)$ , полученного продолжением нормирования  $\overline{\mathbf{v}}$  с поля  $K$  на поле  $L$ .  $\mathfrak{R}_L$  — мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля  $L^{(0)}$ , где  $L_0$  — подполе инерции в расширении  $L_1/\mathbb{Q}_p$ .

Также, нам могут понадобиться  $\mathfrak{O}_k$  и  $\mathfrak{O}_{L_1}$  — кольца целых одномерных локальных полей  $k$  и  $L^{(1)}$  соответственно, и их максимальные идеалы:  $\mathfrak{M}_k$  и  $\mathfrak{M}_{L_1}$ .

Возьмём  $F(X, Y) \in \mathfrak{O}_K[X, Y]$  — формальный групповой закон, определяющий одномерную формальную группу конечной высоты  $h$ .

Рассмотрим максимальный идеал кольца целых поля  $L$  и его степени  $\mathfrak{M}_L \supset \mathfrak{M}_L^2 \supset \dots$ , с помощью группового закона  $F(X, Y)$  на этих идеалах можно задать структуру формальных  $\mathbb{Z}_p$ -модулей.  $F(\mathfrak{M}_L^i)$  совпадает с  $\mathfrak{M}_L^i$  как множество. Определим на нём операцию сложения через  $F(X, Y)$ :  $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_L^i : \alpha +_F \beta = F(\alpha, \beta)$ . Кольцо  $\mathbb{Z}_p$  вкладывается в кольцо эндоморфизмов формальной группы  $F$  ([6, §2] — это вложение  $\text{End}(F)$  в  $\mathfrak{O}_K$ , но существует некое кольцо  $\mathfrak{O}_0$ , изоморфное образу  $\text{End}(F)$  в  $\mathfrak{O}_K$ ; а это  $\mathfrak{O}_0$  содержит  $\mathbb{Z}_p$  [6, §2.3]), поэтому для любого скаляра  $a \in \mathbb{Z}_p$  и любого  $\alpha \in \mathfrak{M}_L^i$  естественным образом определяется умножения на скаляр:  $a\alpha = [a]_F(\alpha)$ .

Коэффициенты группового закона  $F \in \mathfrak{O}_K[X, Y]$  неподвижны относительно действия группы  $G$ , поэтому модули  $F(\mathfrak{M}_L^i)$  можно рассматривать как  $\mathbb{Z}_p[G]$ -модули. Таким образом мы получили фильтрацию Лютьц модулей Галуа:  $F(\mathfrak{M}_L) \supset F(\mathfrak{M}_L^2) \supset F(\mathfrak{M}_L^3) \supset \dots$ , для которых в данной работе явным образом будут построены образующие.

## 8 Образующие модуля $F(\mathfrak{M}_L)$

Возьмём  $[p]_F(X) \in pX + \mathfrak{O}_K[[X]]X^2$  — эндоморфизм умножения на  $p$  формальной группы  $F$ . В работе [2, Арифметика формального модуля] получены образующие  $F(\mathfrak{M}_L)$  как  $\mathbb{Z}_p$ -модуля для случая одномерной формальной группы  $F$  конечной высоты  $h$ , заданной над кольцом целых локального поля с абсолютным индексом ветвления не большим  $p$ . Этот результат может быть применён в расширении многомерных полей  $L/K$ . Применим его в нашем случае.

Через  $e_K$  и  $e_L = e_n$  мы обозначаем абсолютные индексы ветвления поле  $K$  и  $L$  относительно нормирования  $\mathfrak{v}$ .

В соответствии с работой [2] эндоморфизм  $[p]_F(X)$  можно записать в виде

$$[p]_F(X) = pc_0(X)X + \pi^{\alpha_1}c_1(X)X^{p^{m_1}} + \cdots + \pi^{\alpha_k}c_k(X)X^{p^{m_k}} + c_h(X)X^{p^h},$$

где  $c_i(X) \in \mathfrak{O}_K[[X]]^*$ ,  $c_0(X) \equiv 1 \pmod{X}$ ,  $\alpha_0 := e_K > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > \alpha_{k+1} := 0$ ,  $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_k < m_{k+1} := h$ .

Для  $[p]_F(X)$  можно построить многоугольник Ньютона. В области  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  отметим точки  $(i, \mathfrak{v}(a_i))$ , где  $1 \leq i \leq p^h$ . Из всех ломаных с вершинами в отмеченных точках и соединяющих точки  $(1, \mathfrak{v}(a_1))$  и  $(p^h, \mathfrak{v}(a_{p^h}))$  выберем наиболее близкую к границе области  $M$ . Эта ломаная является нижней границей выпуклой оболочки множества  $\{i, \mathfrak{v}(a_i) \mid 1 \leq i \leq p^h\}$ . Построенная ломаная будет многоугольником

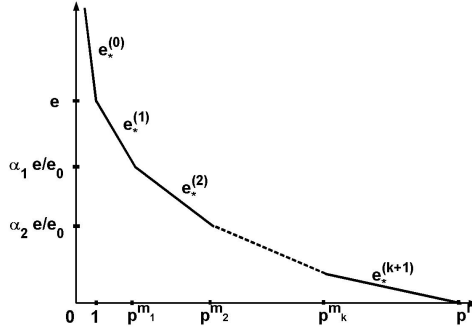


Рис. 1: Многоугольник Ньютона для  $[p]_F$

Обозначим через  $e_*^{(i)}$  тангенс угла наклона прямой, соединяющей точки  $(p^{m_i}, \mathfrak{v}(a_{p^{m_i}}))$  и  $(p^{m_{i-1}}, \mathfrak{v}(a_{p^{m_{i-1}}}))$ :

$$e_*^{(i)} := \frac{e_L}{e_K} \frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{p^{m_i} - p^{m_{i-1}}}.$$

Числа  $p^{m_i}$  и  $e_*^{(i)}$  являются важными инвариантами формальной группы  $F$  (см. [4]).

В работе [2] доказано, что, если  $e_K \leq p$ , то  $e_*^{(1)} > e_*^{(2)} > \cdots > e_*^{(k+1)}$ . Более того, верно следующее утверждение [2, Лемма 2]).

**Предложение 7.** Пусть  $z$  — ненулевой корень изогении  $[p]_F(X)$  в поле  $L$ . Если  $h \geq 2$ , тогда  $\mathfrak{v}(z) = e_*^{(i)}$  при некотором  $i: 1 \leq i \leq k+1$ . Если же  $h = 1$ , то  $\mathfrak{v}(z) = \frac{e_L}{p-1}$ .

Кроме того, из представления изогении через вышеприведённые инварианты получаем

сравнения для произвольного элемента  $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$ :

$$[p]_F(\alpha) \equiv \begin{cases} c_h \alpha^{p^h} \mod \Pi^{p^h \mathfrak{v}(\alpha)+1}, & 1 \leq \mathfrak{v}(\alpha) < e_*^{(k+1)} \\ \pi^{\alpha_i} c_i \alpha^{p^{m_i}} \mod \Pi^{\alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} \mathfrak{v}(\alpha)+1}, & e_*^{(i+1)} < \mathfrak{v}(\alpha) < e_*^{(i)}, 1 \leq i \leq k \\ pc_0 \alpha \mod \Pi^{e_L + \mathfrak{v}(\alpha)+1}, & e_*^{(1)} < \mathfrak{v}(\alpha) \\ \pi^{\alpha_{i-1}} c_{i-1} \alpha^{p^{m_{i-1}}} + \pi^{\alpha_i} c_i \alpha^{p^{m_i}} \mod \Pi^{\alpha_i \frac{e_L}{e_K} + e_*^{(i)} p^{m_i} + 1}, & \mathfrak{v}(\alpha) = e_*^{(i)}, 1 \leq i \leq k+1 \end{cases}$$

Под  $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$  понимается нормирование на  $n$ -ой компоненте многомерного поля  $L$ , а  $c_i = c_i(0)$  — значения соответствующих многочленов в нуле.

С помощью этих сравнений получим образующие для формального модуля  $F(\mathfrak{M}_L)$  как  $\mathbb{Z}_p$ -модуля. Пусть  $\theta$  из  $\mathfrak{R}_L$ , тогда с помощью  $\varepsilon_s(\theta)$  сопоставим  $\theta$  некий элемент из  $F(\mathfrak{M}_L)$  такой, что  $\varepsilon_s(\theta) \equiv \theta \Pi^s \mod \Pi^{s+1}$ . Для начала индукцией проверим, что любой элемент  $\alpha$  из  $F(\mathfrak{M}_L)$  можно представить в виде суммы следующего вида:  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$ , где  $\theta_s \in \mathfrak{R}_L$ ,

$\varepsilon_s(\theta_s) \in F(\mathfrak{M}_L)$  такие, что  $\varepsilon_s(\theta_s) \equiv \theta \Pi^s \mod \Pi^{s+1}$ .

База индукции очевидна, так как любой элемент из  $F(\mathfrak{M}_L)$  имеет вид  $\alpha = \theta_1 \Pi + \dots \Rightarrow \alpha \equiv \theta_1 \Pi \mod \Pi^2$ .

Пусть теперь  $\alpha \equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) \mod \Pi^{t+1}$ , тогда  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) + \theta_{t+1} \Pi^{t+1} + \dots \equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) + \theta_{s+1} \Pi^{t+1} \mod \Pi^{t+2} \equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) +_F \theta_{s+1} \Pi^{t+1} \mod \Pi^{t+2}$ . Таким образом, мы получили,

что для каждого  $t > 0$  выполняется сравнение  $\alpha \equiv \sum_{s=1(F)}^t \varepsilon_s(\theta_s) \mod \Pi^{t+1}$ , а значит  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$ .

Далее, пользуясь сравнениями, уберём лишние индексы в этой сумме. Будем считать, что  $\beta = \theta \Pi^{\mathfrak{v}(\beta)} + \dots \in F(\mathfrak{M}_L)$ ,  $c_i(0) = \gamma_i + \dots$ ,  $\pi = \xi \Pi^{\frac{e_L}{e_K}} + \dots$ ,  $p = \zeta \Pi^e + \dots$ , где  $\theta, \gamma_i, \xi, \zeta \in \mathfrak{R}_L$ .

1. Если  $s = \mathfrak{v}(\beta) > e_*^{(1)}$ , то  $[p]_F(\beta) = pc_0(0)\beta + \dots \equiv \zeta \gamma_0 \theta \Pi^{s+e_L} \mod \Pi^{s+e_L+1}$ , следовательно, если в качестве  $\theta$  взять  $\theta = \theta_{s+e_L} (\zeta \gamma_0)^{-1} \in \mathfrak{R}_L$ , то  $\beta \equiv \theta \Pi^s \mod \Pi^{s+1} \equiv \varepsilon_s(\theta) \mod \Pi^{s+1}$ , а для слагаемого с индексом  $s + e_L$  получим следующее сравнение:

$$\varepsilon_{s+e_L}(\theta_{s+e_L}) \equiv [p]_F(\beta) \mod \Pi^{s+e_L+1} \equiv [p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \mod \Pi^{s+e_L+1}.$$

Это сравнение означает, что в сумме  $\alpha = \sum_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$  любое слагаемое  $\varepsilon_j(\theta_j)$  индекса

$j > e_*^{(1)} + e_L$  можно заменить на слагаемое вида  $[p]_F(\varepsilon_{j-e_L}(\theta_{j-e_L,1}))$ , то есть в индексном множестве  $I$  нет индексов, больших  $e_*^{(1)} + e_L$ . А значит элемент  $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$  можно

представить в виде  $\alpha = \sum_{s=1}^{e_*^{(1)}+e_L} [p]_F^r(\varepsilon_s(\theta_{s,r}))$  по всем  $r \geq 0$ .

2. Если  $1 \leq s = \mathfrak{v}(\beta) < e_*^{(k+1)}$ , то  $[p]_F(\beta) \equiv \gamma_h \theta^{p^h} \Pi^{p^h s} \mod \Pi^{p^h s+1}$ . Представители Тейхмюллера  $\mathfrak{R}_L$   $p$ -делимы, значит  $\theta = (\gamma_h^{-1} \theta_{p^h s})^{\frac{1}{p^h}}$  будет лежать в  $\mathfrak{R}_L$ . При таком  $\theta$  получим, что

$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \mod \Pi^{p^h s+1} \equiv \theta_{p^h s} \Pi^{p^h s} \mod \Pi^{p^h s+1}.$$

А это означает, что в сумме  $\alpha = \sum_{s=1}^{e_*^{(1)}+e_L} [p]_F^r(\varepsilon_s(\theta_{s,r}))$  будут отсутствовать слагаемые вида

$\varepsilon_{p^h s}(\theta_{p^h s, r})$ , где  $1 \leq s < e_*^{(k+1)}$ .

3. Если  $e_*^{(i+1)} < s = \mathfrak{v}(\beta) < e_*^{(i)}$  для некоторого  $1 \leq i \leq k$ , то

$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \pmod{\Pi^{\alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} s + 1}} \equiv \xi^{\alpha_i} \gamma_i \theta^{p^{m_i}} \Pi^{\alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} s} \pmod{\Pi^{\alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} s + 1}}.$$

$\xi^{\alpha_i} \gamma_i \theta^{p^{m_i} s} \in \mathfrak{R}_L$ , поэтому мы можем рассмотреть  $\theta = (\xi^{-\alpha_i} \gamma_i^{-1} \theta_{\alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} s})^{\frac{1}{p^{m_i}}} \in \mathfrak{R}_L$ . Тогда получим, что для любого индекса  $j = \alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} s$  при некотором  $1 \leq i \leq k$  и  $e_*^{(i+1)} < s < e_*^{(i)}$  будет выполняться сравнение

$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv \varepsilon_j(\theta_j) \pmod{\Pi^{j+1}},$$

а значит из индексного множества  $I$  можно убрать все такие индексы  $j$ .

4. В случае, если  $s = \mathfrak{v}(\beta) = e_*^{(i)}$  для некоторого  $1 \leq i \leq k+1$ , рассмотрим  $j = \alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} s$ , тогда

$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \pmod{\Pi^{j+1}} \equiv (\xi^{\alpha_{i-1}} \gamma_{i-1} \theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i} \gamma_i \theta^{p^{m_i}}) \Pi^j \pmod{\Pi^{j+1}}.$$

Будем считать, что сравнения

$$\theta_j \equiv \xi^{\alpha_{i-1}} \gamma_{i-1} \theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i} \gamma_i \theta^{p^{m_i}} \pmod{\Pi}$$

имеют решения  $\theta$  в  $\mathfrak{R}_L$  для любого  $\theta_j$  из  $\mathfrak{R}_L$ , тогда индексы вида  $e_*^{(i)}$ , где  $1 \leq i \leq k+1$ , можно выкинуть из множества  $I$ .

Таким образом, произвольный  $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$  можно представить в виде суммы:

$$\alpha = \sum_{s=1}^{e_*^{(1)} + e_L} [p]_F^r(\varepsilon_s(\theta_{s,r})) \pmod{(F)}$$

по всем  $r \geq 0$ . При этом, в этой сумме нет слагаемых с индексами  $s$  такими, что  $s = p^h j = \alpha_{k+1} \frac{e_L}{e_K} + p^{m_{k+1}} j$  ни для какого  $1 \leq j < e_*^{(k+1)}$ ,  $s = \alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} j$  ни для каких  $1 \leq i \leq k$  и  $e_*^{(i+1)} < j < e_*^{(i)}$  или  $s = \alpha_i \frac{e_L}{e_K} + p^{m_i} e_*^{(i)}$  ни для какого  $1 \leq i \leq k+1$ .

Если  $L$  не содержит нетривиальных корней изогении  $[p]_F(X)$ , то такое представление будет единственным.

## 9 Функция Артина-Хассе

Формальной группе  $F(X, Y)$  соответствует логарифм  $\lambda_F(X) = \Lambda_F(\Delta)(X)$ , где  $\Delta$  — линейный оператор, действующий на переменную  $X$  как возведение в степень  $p$ , а на коэффициенты, как автоморфизм Фробениуса в расширении  $K/\mathbb{Q}_p$ :  $\Delta(aX^b) = \sigma(a)X^{pb}$ .

Пусть  $N$  — подполе инерции в расширении  $K/\mathbb{Q}_p$ , тогда  $e_K = [K : N]$ . Через  $\mathfrak{O}_N$  обозначим кольцо целых подполя инерции,  $\sigma$  обозначает определённое на  $\mathfrak{O}_K$  отображение Фробениуса, а  $W = \mathfrak{O}_K[[\Delta]]'$ , как множество совпадающее с  $\mathfrak{O}_K[[\Delta]]$  и удовлетворяющее соотношению  $\Delta a = \sigma(a)\Delta$ .

В работе [3, Теорема 6.3.1] дана классификация формальных групп над локальным полем  $K$  для случая, когда  $e_K < p$ . Мы воспользуемся частью этого утверждения для случая одномерной формальной группы.

**Предложение 8.** Пусть  $F$  — формальная группа конечной высоты, соответствующая логарифму  $\Lambda$ . Тогда  $F$  строго изоморфна  $F_1$ , соответствующей  $\Lambda_1$ , если и только если  $\Lambda_1 = \Lambda\varepsilon + g$ , где  $\varepsilon \in 1 + W\Delta$ ,  $g \in \pi\mathfrak{O}_K[\Delta]\Delta$ .

Ряд  $E_F(X) = (\lambda_F^{-1} \circ \lambda_p)(X)$  будет задавать строгий изоморфизм формальных групп над  $\mathfrak{O}_K$   $E_F : F_p \rightarrow F$ . Рассмотрим функцию  $E_F(\varphi) := (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p)(\Delta)(\varphi)$ , действующую из  $\mathfrak{O}_L[[X]]$  в  $F(\mathfrak{O}_L[[X]])$ . Рассмотрим свойства этой функции.

**Предложение 9.**

$E_F(\varphi) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p)(\Delta)(\varphi) : \mathfrak{O}_L[[X]] \rightarrow F(\mathfrak{O}_L[[X]])$ , тогда

1.  $\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{O}_L[[X]] \quad E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi)$ .
2.  $E_F(pX^m) = [p]_F E_F(X^m)$ .
3.  $\forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) \quad E_F(X^\sigma) = (E_F(X))^\sigma$ .
4.  $\forall a \in \mathfrak{O}_L \quad E_F(aX^m) \equiv aX^m \pmod{X^{m+1}}$ .

*Доказательство.*  $E_F$  задаёт изоморфизм формальных групп  $F$  и  $F_p$ , то есть  $E_F(F_p(X, Y)) = F(E_F(X), E_F(Y))$ .  $\Lambda_p(\Delta)$  — линейный оператор, поэтому  $\Lambda_p(\Delta)(\varphi + \psi) = \Lambda_p(\Delta)(\varphi) + \Lambda_p(\Delta)(\psi)$ . Отсюда очевидно следует, что

$$\begin{aligned} E_F(\Delta)(\varphi + \psi) &= \Lambda_F^{-1}(\Lambda_p(\Delta)(\varphi + \psi)) = \Lambda_F^{-1}(\Lambda_p(\Delta)(\varphi) + \Lambda_p(\Delta)(\psi)) = \\ &= \Lambda_F^{-1}(\Lambda_F \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p(\Delta)(\varphi) + \Lambda_F \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p(\Delta)(\psi)) = \Lambda_F^{-1}(\Lambda_F(E_F(\varphi)) + \Lambda_F(E_F(\psi))) = \\ &= E_F(\varphi) +_F E_F(\psi). \end{aligned}$$

Свойство 1 доказано.

Из свойства 1 по определению эндоморфизма  $[p]_F$  сразу же вытекает свойство 2.

Для доказательства свойства 3 рассмотрим  $\sigma$  из группы Галуа  $G$ , тогда  $X^\sigma = \varepsilon_\sigma X$ , где  $\varepsilon_\sigma \in \mathfrak{K}_L$ . Следовательно,  $\Delta(X^\sigma) = \Delta(\varepsilon_\sigma X) = \varepsilon_\sigma^p X^p$ . С другой стороны,  $(\Delta(X))^\sigma = (X^p)^\sigma = \varepsilon_\sigma^p X^p$ . Отсюда следует, что  $\Delta(X^\sigma) = (\Delta(X))^\sigma$  и

$$E_F(X^\sigma) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p)(\Delta)(X^\sigma) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p)(\Delta)(X)^\sigma = (E_F(X))^\sigma.$$

Так как  $(\lambda_F^{-1} \circ \lambda_p)(X)$  задаёт строгий изоморфизм формальных групп  $F$  и  $F_p$ , то  $(\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_p)(\Delta) \equiv 1 \pmod{(\Delta)}$ , а значит выполнено свойство 4:  $E_F(aX^m) \equiv aX^m \pmod{X^{m+1}}$ .  $\square$

Полученная таким образом функция  $E_F(X)$  является аналогом функции Артина-Хассе для нашего случая.

## Список литературы

- [1] С. В. Востоков, «Фильтрация Лютиц как модуль Галуа в расширении без высшего ветвления», *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 8, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **160**, ЛОМИ, Ленинград, 1987, 182-192.
- [2] С. В. Востоков, А. Н. Зиновьев, «Арифметика модуля корней изогении формальной группы в малом ветвлении», *Вопросы теории представлений алгебр и групп*. 14, Зап. научн. сем. ПОМИ, **338**, ПОМИ, СПб., 2006, 125-136.
- [3] М. В. Бондарко, С. В. Востоков, «Явная классификация формальных групп над локальными полями», *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 43-67.
- [4] М. И. Башмаков, А. Н. Кириллов, «Фильтрация Лютиц формальных групп», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:6 (1975), 1227-1239.
- [5] С. В. Востоков, «Норменное спаривание в формальных модулях», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 765-794.
- [6] В. А. Колывагин, «Формальные группы и символ норменного вычета», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:5 (1979), 1054-1120