УДК 519.48

ВОСТОКОВ С. В.

# ЯВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ КЛАССОВ МНОГОМЕРНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

## Введение

1°. Пусть $k$ — локальное поле (конечное расширение поля $p$-адических чисел $\mathbf{Q}_p$) и $k^{\mathrm{ab}}$ — максимальное абелево расширение поля $k$. Локальная теорема полей классов дает следующее описание группы Галуа $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$. Существует канонический гомоморфизм

$$\psi\colon k^* \mapsto \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k),$$

который становится изоморфизмом после пополнения мультипликативной группы $k^*$ относительно подгрупп конечного индекса.

Если поле $k$ содержит группу $\mu_m$ корней степени $m$ из 1, то абелевы расширения показателя $m$ описываются теорией Куммера. Именно, пусть $B$ — подгруппа $k^*$, содержащая $k^{*m}$, и $k_B = k(\sqrt[m]{B})$, тогда $k_B/k$ — абелево расширение показателя $m$ и все абелевы расширения поля $k$ показателя $m$ получаются такой конструкцией.

Согласно теории полей классов, полю $k_B$ соответствует подгруппа $N$ конечного индекса в $k^*$, которая будет норменной для расширения $k_B$ и при этом $N = \psi^{-1}(\mathrm{Gal}(k_B/k))$. Связь между подгруппами $B$ и $N$ осуществляется при помощи символа норменного вычета Гильберта

$$(\ ,\ )_m\colon k^*/k^{*m} \times k^*/k^{*m} \mapsto \mu_m,$$
$$(\alpha, \beta)_m = (\sqrt[m]{\beta})^{\psi(\alpha)-1}.$$

Символ Гильберта является невырожденным отображением и фактор-группа $N/k^{*m}$ есть ортогональное дополнение относительно символа Гильберта к $B/k^{*m}$.

2°. А. Н. Паршин (см. [7], [6]) и Като К. (см. [14]) обобщили локальную теорию полей классов на многомерные локальные поля, связав ее с алгебраической $K$-теорией. Напомним, что под $n$-мерным локальным полем $F$ понимаем последовательность полей $k_0, k_1, \ldots, k_n = F$, удовлетворяющих условиям:

а) $k_0$ — конечное поле,

б) для $i = 1, 2, \ldots, n$ поле $k_i$ является полным дискретно нормированным полем, для которого $k_{i-1}$ есть поле вычетов.

Пусть $F$ — $n$-мерное локальное поле, $F^{\mathrm{ab}}$ — максимальное абелево расширение поля $F$ и $K_n^M(F)$ — $K$-функтор Милнора (см. [5], [11]). Тогда существует канонический гомоморфизм

$$\psi\colon K_n^M(F) \to \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F),$$

который становится изоморфизмом после пополнения $K_n^M(F)$ относительно некоторой топологии (см. [14], [8]).

Если поле $F$ содержит группу $\mu_m$ корней степени $m$ из 1, то абелевы расширения поля $F$ также описываются при помощи теории Куммера (см. выше п. 1°). Связь между теорией Куммера и локальной теорией полей классов задается, как и в одномерном случае, с помощью норменного вычета Гильберта

$$(\ ,\ )_m\colon k_m^M(F)\times F^*/F^{*m}\to\mu_m,$$
$$(\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\},\beta)_m=\sqrt[m]{\beta}^{\,\psi(\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\})-1},\tag{1}$$

где $k_m^M(F)=K_n^M(F)/K_n^M(F)^m$. Символ Гильберта при этом является невырожденным отображением, а подгруппы $B$ и $N$ в $F^*$ будут аннуляторами друг друга относительно символа Гильберта (здесь, как и выше, подгруппа $B$ задает абелево расширение показателя $m$ поля $F$ по теории Куммера, а подгруппа $N$ соответствует этому абелеву расширению как норменная подгруппа согласно теории полей классов). Поэтому, как и в одномерном случае, явная конструкция символа Гильберта и доказательство норменного свойства приводит к явному и независимому построению теории полей классов многомерного локального поля.

3°. В случае $n$-мерного локального поля $F$ положительной характеристики арифметическое построение теории полей классов, которое использует двойственность Куммера, Артина — Шрайера — Витта, а также задание символа норменного вычета, было предложено А. Н. Паршиным [7], [8], который, кроме прочего, получил полное описание группы Галуа максимального абелева расширения поля $F$.

Мы занимаемся случаем разных характеристик поля $F$ и его поля вычетов и арифметически строим теорию полей классов. Моделью такого поля служит поле рядов Лорана $k\{\{t\}\}$, где $k$ — конечное расширение поля $\mathbf{Q}_p$, а коэффициенты $a_i$ ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_i t^i$ ограничены в совокупности по норме поля $k$ и $a_i\to 0$, когда $i\to-\infty$. Каждое $n$-мерное разнохарактеристическое локальное поле является конечным расширением поля типа $k\{\{t_1\}\}\cdots\{\{t_{n-1}\}\}$ и, с другой стороны, оно содержится в качестве конечного подрасширения в некотором поле указанного типа (см. [7]).

Перейдем к формулировке основных результатов работы. Предположим, что поле $F$ содержит группу $\mu$ корней степени $q=p^m$ из 1 с образующей $\zeta$ и при этом $p\neq 2$.

Будет построено в явном виде отображение

$$\Gamma\colon F^*\times\ldots\times F^*\mapsto\mu,$$
$$\Gamma(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n+1})=\zeta^{\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi/s},\tag{2}$$

где tr — оператор следа в подполе инерции поля $F$, ряд $s(t)$ определен в $F$ разложёнием корня $\zeta$ в ряд по униформизующим элементам поля $F$, а ряд $\Phi(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n+1})$ задается аналогичными разложениями элементов $\alpha_i$ в поле $F$ (см. ниже (6)).

ТЕОРЕМА 1. *Отображение* $\Gamma$ *обладает следующими свойствами*:

а) *мультипликативность по всем аргументам*;

б) *кососимметричность, т. е.* $\Gamma(\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots) = \Gamma(\ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots)^{-1}$;

в) *пропорциональность, т. е.* $\Gamma(\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots) = 1$, *если* $\alpha_i + \alpha_{i+1} = 0$;

г) $\Gamma(\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots) = 1$, *если* $\alpha_i + \alpha_{i+1} = 1$

(*последнее свойство будем называть фундаментальным*).

Пусть $K_m^M(F)$ — $K$-функтор Милнора ($m \geqslant 0$) (см. [5], [11]), который, как известно, можно интерпретировать как абелеву группу с образующими $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\alpha_i \in F^*$, и соотношениями

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i'\alpha_i'', \ldots, \alpha_m\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_m\} \cdot \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i'', \ldots, \alpha_m\},$$
$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, 1-\alpha_i, \ldots, \alpha_m\} = 1, \quad \alpha_i \neq 1.$$

Первое соотношение назовем мультипликативностью по всем аргументам, а второе — фундаментальным соотношением. Сами же образующие $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ будем называть символами.

Поскольку мультипликативная группа $F^*$ имеет топологию, естественно рассматривать символы, удовлетворяющие условию непрерывности, и наделить группу $K_m^M(F)$ соответствующей топологией, как это было сделано, например, в [8], [14].

А именно, пусть $A$ — некоторое кольцо и $f$ — произвольная $m$-линейная функция из $F^* \times \ldots \times F^*$ в $A$, переводящая тривиальные символы из определения $K_m^M(F)$ в нуль. Имеется каноническое отображение $\varphi$: $F^* \times \ldots \times F^* \mapsto K_m^M(F)$, которое однозначно представляет функцию $f$ в виде $f = f_0 \circ \varphi$, где $f_0$: $K_m^M(F) \mapsto A$ — гомоморфизм.

Рассмотрим топологии $\tau$ на $K_m^M(F)$, удовлетворяющие условиям:

1. $\varphi$ непрерывно по каждому аргументу относительно $\tau$ и топологии на $F^*$.

2. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в топологии $\tau$, то $x_n y_n \to xy$ и $x_n^{-1} \to x^{-1}$.

Можно проверить, что множество таких топологий непусто и верхняя грань всех топологий из этого множества снова принадлежит ему (см. [8, § 2, лемма 2]).

Из второго условия следует, что пересечение всех окрестностей единицы есть подгруппа в $K_m^M(F)$.

Определение 1. *Пусть группа $F^*$ снабжена топологией. Наделим $K_m^M(F)$ сильнейшей топологией, удовлетворяющей условиям* 1 *и* 2, *и положим*

$$K_m^{\mathrm{top}}(F) = K_m^M(F)/\Lambda,$$

*где $\Lambda$ — пересечение всех окрестностей единицы.*

Будем символы $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ из группы Милнора $K_m^M(F)$ отождествлять с их образами в $K_m^{\mathrm{top}}(F)$.

Распространим по непрерывности отображение $\Gamma$, заданное на символах $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$ (см. (2)) на всю группу $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)$. Будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\Gamma$ корректно определено, т. е. оно инвариантно относительно замены переменных и независимо от способа разложения элементов $\alpha_i$, $\zeta$ в ряды. Тем самым отображение $\Gamma$ задает гомоморфизм из группы $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)$ в группу $\mu$ корней $q$-ой степени из единицы.*

4°. Обозначим через $k_n(F)$ фактор-группу $K_n^{\mathrm{top}}(F)/K_n^{\mathrm{top}}(F)^q$.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $\Gamma$ определяет непрерывное и невырожденное спаривание*

$$\langle\, ,\rangle_\Gamma\colon k_n(F)\times F^*/F^{*q}\to\mu,$$

*которое для любого символа* $x=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ *и элемента* $y$ *из* $F^*$ *задается в виде*

$$\langle x, y\rangle_\Gamma=\Gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n, y)=\zeta^{\mathrm{tr}\,\mathrm{res}\,\Phi/s}. \tag{2a}$$

Связь между отображением $\Gamma$ и символом Гильберта $(\, ,)_q$ выясняется с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Спаривание* $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ *совпадает с символом Гильберта* $(\, ,)_q$ *и тем самым задает последний в явном виде.*

Мы проверим также, что спаривание $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ обладает норменным свойством, т. е. для любого элемента $x$ из $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ и элемента $y\in F^*$

$$\langle x, y\rangle_\Gamma=1\Leftrightarrow x \text{ -- норма из } K_n^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[q]{y})).$$

В полном объеме норменность $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ будет проверена в одномерном локальном поле, а также для $q=p\neq 2$ в двумерном поле. Из норменного свойства уже непосредственно вытекает основная теорема теории полей классов для куммеровых расширений.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $N$ — *открытая подгруппа конечного* $p$-*индекса в* $K_n^{\mathrm{top}}(F)$. *Тогда* $F(\sqrt[q]{N^\perp})$ — *поле классов для подгруппы* $N$, *где* $N^\perp\subset F^*$ — *аннулятор* $N$ *относительно спаривания* $\langle\, ,\rangle_\Gamma$.

Замечание 1. Свойства отображения $\Gamma$ (теорема 1) будут доказаны в § 2; корректность определения $\Gamma$ (теорема 2) доказывается в § 3; проверке невырожденности спаривания $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ (теорема 3) посвящен § 4, а следующий § 5 — доказательству совпадения спаривания $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ с символом Гильберта $(\, ,)_q$ (теорема 4). Наконец, в §§ 6, 7 доказывается норменное свойство.

5°. Опишем более подробно введенные в п. 3° ряды $\Phi$ из $s$ (см. (2)). Поле $F$ содержит в качестве изоморфного подполя поле отношений кольца векторов Витта $W(k_0)$, которое мы называем подполем инерции и обозначаем через $T$ (а его кольцо целых — через $\mathfrak{o}$). Пусть $t_1,\ldots,t_{n-1}$ — локальные униформизующие поля $F$ (вычет $t_i$ в поле $k_i$ является простым элементом в нем). Возьмем кольцо $A=\mathfrak{o}\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$ и рассмотрим в кольце $A\{\{t_n\}\}$ оператор Фробениуса $\Delta$, который на переменные $t_1,\ldots$ $\ldots,t_{n-1}, t_n$ действует как возведение в степень $p$, а на коэффициенты — как обычный автоморфизм Фробениуса в подполе инерции $T$.

Пусть в поле $F$ выбран простой элемент $\pi$. Тогда разложению первообразного корня $\zeta$ степени $q$ из 1 в ряд по $\pi$ с коэффициентами из кольца $A$ будет соответствовать некоторый ряд $z(t_n)$ из кольца $A((t_n))$, для которого $z(\pi)=\zeta$.

Обозначим, далее, через $s(t_n)$ ряд

$$s(t_n)=z(t_n)^q-1 \tag{3}$$

(см. также [1, § 3]). Очевидно, что для ряда $s(t_n)$ выполнены сравнения

$$\frac{\partial s^{\Delta^r}}{\partial t_i}\equiv 0 \mod q,\quad r\geqslant 0,\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\,(1/s)}{\partial t_i}\equiv 0 \mod q,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{4a}$$

Из легко проверяемого сравнения $\alpha^p\equiv\alpha^\Delta \mod p$, которое выполняется для любого ряда $\alpha$ из кольца $A\{\{t_n\}\}$, вытекает корректность введения следующей функции:

$$l(\alpha) = \frac{1}{p}\log\alpha^{p-\Delta}, \tag{5}$$

определяющей снова ряд из кольца $A\{\{t_n\}\}$ (в одномерном случае см. [1, § 1]).

Приступим теперь к заданию ряда $\Phi$ из (2). Для этого разложим каждый элемент $\alpha_i$ из группы $F^*$ в ряд по простому элементу $\pi$ поля $F$ с коэффициентами из кольца $A$. Заменив в этих разложениях простой элемент $\pi$ на переменную $t_n$, мы получим ряды в кольце $A\{\{t_n\}\}$, обозначаемые для простоты теми же буквами $\alpha_i$ (см. [1, § 3, для $n=1$]). Для ряда $\alpha$ из кольца $A\{\{t_n\}\}$ обозначим логарифмическую производную $\alpha^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial t_i}$ через $\delta_i(\alpha)$, а разность $\delta_i(\alpha) - \frac{\partial}{\partial t_i}l(\alpha)$ — через $\eta_i(\alpha)$.

При этих обозначениях ряд $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ из (2) задается следующим образом:

$$\Phi = l(\alpha_{n+1})D_{n+1} - l(\alpha_n)D_n + \ldots + (-1)^n l(\alpha_1)D_1, \tag{6}$$

где определитель $n$-го порядка $D_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, имеет вид

$$D_i = \begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \ldots & \delta_n(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \ldots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \eta_1(\alpha_{i+1}) & \ldots & \eta_n(\alpha_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1(\alpha_{n+1}) & \ldots & \eta_n(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Замечание 2. К ряду $1/s$ в (2) надо добавлять $(-^1/_2)$, если не заботиться о том, чтобы разложение каждого элемента $\alpha_i$ группы $F^*$ начиналось бы с коэффициента из мультипликативной системы представителей $\mathfrak{R}$ поля вычетов поля $F$ (см. [12]).

Замечание 3. В одномерном случае ряд $\Phi(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$\Phi = l(\beta)\delta(\alpha) - l(\alpha)\eta(\beta) = l(\beta)\delta(\alpha) - l(\alpha)\delta(\beta) + l(\alpha)\frac{\partial}{\partial t}l(\beta) \tag{8}$$

(для сравнения см. также [1, § 2]).

## § 1

В этом предварительном параграфе мы сформулируем ряд утверждений, относящихся к арифметике $n$-мерного локального поля, которые несложным образом переносятся из соответствующих фактов одномерного локального поля.

1°. Обозначим через $A_i$ кольцо $\mathfrak{o}\{\{t_1\}\}\cdots\{\{t_{i-1}\}\}\{\{t_{i+1}\}\}\cdots\{\{t_n\}\}$. Так же как и в одномерном случае (см. [1, лемма 3] или [2, лемма 4]) для любого ряда $\alpha$ из идеала $t_iA_i[[t_i]]$ корректно определена функция

$$E(\alpha) = \exp\left(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \ldots\right)(\alpha) \tag{9}$$

и она задает ряд с коэффициентами из кольца $A_i$. При этом функция $E$

связана с введенной выше (см. (5)) функцией $l$ следующим соотношением:

$$l(E(\alpha))=\alpha. \tag{10}$$

Из определения функции $l$ легко получить равенство

$$-l(1-\alpha)=\sum_{\substack{(r,p)=1\\ r\geqslant 1}}\frac{\alpha^r}{r}+\sum_{r\geqslant 1}\varkappa_r, \tag{11}$$

где $\varkappa_r=(\alpha^{pr}-\alpha^{\Delta r})/pr$, а ряд $\alpha$ берется из идеала $t_iA_i[[t_i]]$, при этом ряды $\varkappa_r$ имеют целые коэффициенты.

2°. Примарные элементы. Напомним, что элемент поля $F$ называется $q$-примарным, если присоединение $\sqrt[q]{\omega}$ к полю $F$ дает единственное неразветвленное расширение поля $F$.

Без проблем переносится метод построения $q$-примарных элементов, который был дан в одномерном случае в работе [1, § 4] (см. также [2, § 2]). Именно, элемент

$$\omega(a)=E(as(t_n))\big|_{t_n=\pi},\quad a\in\mathfrak{o},$$

является $q$-примарным в поле $F$ и при этом

$$\sqrt[q]{\omega}^{\Delta'-1}=\zeta^{\operatorname{tr} a},$$

где $\Delta'$ — автоморфизм Фробениуса максимального неразветвленного над $T$ расширения (относительно ряда $s(t_n)$ см. (3)).

Далее, так же как в предложении 1 работы [2] проверяется, что примарный элемент $\omega$ не зависит от выбора переменных $t_1,\ldots,t_{n-1}$ и простого элемента $\pi$ в поле $F$, а также от способа разложения корня $\zeta$ в ряд по $t_1,\ldots,t_{n-1},\pi$, т. е. при разных переменных и простых $\pi$, а также различных способах разложения корня $\zeta$ примарные элементы отличаются друг от друга на $q$-ю степень некоторого элемента из $F$. Таким образом, примарный элемент $\omega$ зависит лишь от первообразного корня $\zeta$ и элемента $a$ из кольца $\mathfrak{o}$.

3°. Образующие мультипликативные группы $F^*$. Назовем единицу $\varepsilon$ поля $F$ главной, если ее образ в поле вычетов $k_0$ равен 1. Множество всех главных единиц образует группу, которую мы обозначим через $U_1$. Фиксируем простой элемент $\pi$ поля $F$. Тогда любой элемент $a$ из $F^*$ можно представить в виде ряда по униформизующим $t_1,\ldots,t_{n-1},\pi$ с коэффициентами из мультипликативной системы $\mathfrak{R}$ поля вычетов $k_0$ поля $F$ (вычет $t_i$ в поле $k_i$ будет простым элементом в нем). Из определения сходимости в поле $F$ следует, что в таком разложении всегда найдется член $\theta t_1^{i_1}\ldots t_{n-1}^{i_{n-1}}\pi^{i_n}$, $\theta\in\mathfrak{R}$, с наименьшим в лексикографическом упорядочивании набором степеней $(i_1,\ldots,i_{n-1},i_n)$. Этот факт будем записывать в виде сравнения:

$$a\equiv\theta t_1^{i_1}\ldots t_{n-1}^{i_{n-1}}\pi^{i_n}\bmod\deg(i_1,\ldots,i_n). \tag{12}$$

В частности, для простого числа $p$ будет выполнено сравнение

$$p\equiv\theta_p t_1^{e_1}\ldots t_{n-1}^{e_{n-1}}\pi^{e_n}\bmod\deg(e_1,\ldots,e_n).$$

Обозначим через $e_i'$ числа $e_i/(p-1)$.

Любой элемент $\alpha$ из $F^*$ можно представить в виде

$$\alpha = t_1^{a_1} \ldots t_{n-1}^{a_{n-1}} \pi^{a_n} \theta\varepsilon, \quad a_i,\ a_n \in \mathbf{Z}, \quad \theta \in \mathfrak{R},$$

где $\varepsilon$ — главная единица, которую можно записать следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - a t_1^{i_1} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}} \pi^{i_n}, \quad a \in A, \quad i_n \geqslant 0, \quad i_r \in \mathbf{Z},$$

при этом если $i_n = 0$, то последний отличный от нуля индекс $i_r$ должен быть положителен (относительно кольца $A$ см. введение, п. 5).

Заметим, что если

$$\varepsilon \equiv 1 + \theta t_1^{i_1} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}} \pi^{i_n} \operatorname{mod} \deg (i_1, \ \ldots, \ i_n), \quad \theta \in \mathfrak{R},$$

и при этом набор $(i_1, \ldots, i_n)$ меньше набора $(e_1', \ldots, e_n')$, то

$$\varepsilon^p \equiv 1 + \theta^p t_1^{pi_1} \ldots t_{n-1}^{pi_{n-1}} \pi^{pi_n} \operatorname{mod} \deg (pi_1, \ \ldots, \ pi_n). \tag{12а}$$

Если же набор $(i_1, \ldots, i_n) > (e_1', \ldots, e_n')$, то

$$\varepsilon^p \equiv 1 + \theta_p \theta t_1^{i_1+e_1} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}+e_{n-1}} \pi^{i_n+e_n} \operatorname{mod} \deg (i_1 + e_1, \ \ldots, \ i_n + e_n). \tag{12б}$$

Наконец, если $(i_1, \ldots, i_n) = (e_1', \ldots, e_n')$, то

$$\varepsilon^p \equiv 1 + (\theta_p \theta + \theta^p)\, t_1^{pe_1'} \ldots t_{n-1}^{pe_{n-1}'} \pi^{pe_n'} \operatorname{mod} \deg (pe_1', \ \ldots, \ pe_n'). \tag{12в}$$

Из этих сравнений, в частности, следует, что если поле $F$ содержит первообразный корень $\zeta$ степени $p$ из 1, то все индексы $e_1', \ldots, e_n'$ являются целыми числами (надо исследовать возведение в степень $p$ разложения (12) для корня $\zeta$).

Далее, из сравнений (12а), (12б), (12в) стандартным методом (в одномерном случае см. [10], [13]) в группе главных единиц получаем следующий набор образующих над $\mathbf{Z}_p$:

$$\varepsilon_{c,i} = 1 - c\pi^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant pe_n', \tag{13}$$

где через $c$ обозначено произведение $\theta t_1^{i_1} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}}$, $\theta \in \mathfrak{R}$. При этом индексы $i_1, \ldots, i_{n-1}$ пробегают множество целых чисел и удовлетворяют условиям:

а) хоть один из индексов $i_1, \ldots, i_{n-1}, i$ взаимно прост с $p$,

б) последний отличный от нуля индекс $i_r$ перед $i$ должен быть положителен, если $i = 0$, и меньше $pe_r'$, если $i = pe_n'$.

К набору образующих (13) надо присоединить еще $q$-примарный элемент

$$\omega_* = E(\xi s(X))\,|_{X=\pi}, \quad \operatorname{tr} \xi \equiv 1 \operatorname{mod} q. \tag{14}$$

Таким образом, группа $U_1$ имеет следующий набор образующих:

$$\{\varepsilon_{c,i},\ \omega_*\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant pe_n'. \tag{15}$$

Из определения функции $E$ (см. (9)) следует, что для элементов $\rho_{c,i} = E(c\pi^i)$ выполнено сравнение

$$\rho_{c,i} \equiv 1 - c\pi^i \operatorname{mod} (c\pi^i)^2.$$

Поэтому образующие (15) группы главных единиц $U_1$ можно заменить на систему

$$\{\rho_{c,i},\ \omega_*\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant pe_1, \tag{16}$$

при тех же условиях на индексы. Отметим, что система (16) является канонической по mod $F^{*q}$, т. е. если

$$\varepsilon \equiv \omega_*^a \prod \rho_{c,i}^{a_{c,i}} \equiv \omega_*^b \prod \rho_{c,i}^{b_{c,i}} \bmod F^{*q},$$

то $a \equiv b \bmod q$, $a_{c,i} \equiv b_{c,i} \bmod q$. Доказательство проводится аналогично одномерному случаю (см. [10, § 1]).

## § 2

Целью параграфа является проверка свойств отображения Г, сформулированных в теореме 1 введения.

1°. Прежде чем перейти к доказательствам, сделаем несколько замечаний. Очевидно, что для функций $\delta_i(\alpha)$ и $\eta_i(\alpha)$ (см. § 0, п. 6°) имеют место равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\delta_j(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t_j}\delta_i(\alpha); \quad \frac{\partial}{\partial t_i}\eta_j(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t_j}\eta_i(\alpha).$$

Далее, легко проверяется следующее тождество:

$$\delta_i(1-\alpha) = -\left(\sum_{r\geqslant 1}\alpha^r\right)\delta_i(\alpha). \tag{17}$$

Если разложить все определители (кроме первого), входящие в задание ряда Ф (см. (6)), по элементам последней строки, то получим равенство:

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = l(\alpha_{n+1})D_{n+1} + (-1)^n\eta_1(\alpha_{n+1})\Phi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+i-1}\eta_i(\alpha_{n+1})\Phi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \cdots + (-1)^{2n}\eta_n(\alpha_{n+1})\Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{18}$$

При этом ряды $\Phi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ являются рядами от $(n-1)$-ой переменной $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ с коэффициентами из кольца $\mathfrak{o}\{\{t_i\}\}$ и эти ряды определяются также формулой (6).

То обстоятельство, что ряд Ф является суммой частных производных некоторых целых рядов из кольца $A\{\{t_n\}\}$, будем записывать в виде следующего сравнения:

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \equiv 0 \bmod \partial. \tag{19}$$

ЛЕММА 1. *Пусть ряд Ф удовлетворяет сравнению* (19). *Тогда* $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = 1$.

Доказательство. По условию $\Phi = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}$, где $\varphi_i$ — некоторые ряды из кольца $A\{\{t_n\}\}$. Из сравнения (4a) получаем:

$$\operatorname{res}\Phi/s = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_i}\Big/s \equiv \sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}\frac{\partial}{\partial t_i}(\varphi/s) = 0 \bmod q.$$

Отсюда и из определения (2) следует равенство леммы.

2°. После этих предварительных замечаний мы можем приступить к проверке свойств отображения Г, сформулированных в теореме 1. Отметим прежде всего, что функции $\delta(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$ (см. § 0, п. 6°) задают гомоморфизмы из мультипликативной группы $F^*$ в аддитивную группу кольца $A\{\{t_n\}\}$, т. е. $\delta(\alpha\beta) = \delta(\alpha) + \delta(\beta)$, $\eta(\alpha\beta) = \eta(\alpha) + \eta(\beta)$. Отсюда немедленно вытекает мультипликативность отображения Г.

Проверка свойств кососимметричности и пропорциональности будет производиться индукцией по $n$.

Пусть $n=1$. Тогда, согласно лемме 1, нам достаточно проверить следующие сравнения:

$$\Phi(\alpha, \beta)+\Phi(\beta, \alpha)\equiv 0 \bmod \partial, \tag{20}$$

$$\Phi(\alpha, -\alpha)\equiv 0 \bmod \partial. \tag{21}$$

Из определения ряда $\Phi$ в одномерном случае (см. (8)) вытекает сравнение (20):

$$\Phi(\alpha, \beta)+\Phi(\beta, \alpha)=\frac{\partial}{\partial t}(l(\alpha)\, l(\beta))\equiv 0 \bmod \partial.$$

Тем самым кососимметричность отображения $\Gamma$ при $n=1$ доказана.

Аналогично при $p\neq 2$ имеем:

$$\Phi(\alpha, -\alpha)=l(-\alpha)\,\delta(\alpha)-l(\alpha)\,\eta(-\alpha)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{l(\alpha)^2}{2}\equiv 0 \bmod \partial,$$

что означает пропорциональность отображения $\Gamma$.

Индукционный переход будем осуществлять для простоты изложения лишь для первой пары элементов. Мы немедленно получим требуемые сравнения:

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1})+\Phi(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1})\equiv 0 \bmod \partial,$$
$$\Phi(\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1})\equiv 0 \bmod \partial,$$

если воспользуемся формулой (18), индукционным предположением для рядов $\Phi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и, наконец, свойствами кососимметричности и пропорциональности определителя $D_n$ (в котором, в частности, перемена элементов $\alpha_1$ и $\alpha_2$ означает перестановку первых двух строк).

3°. Фундаментальное свойство отображения $\Gamma$ мы будем проверять сперва в следующем случае.

Предложение 1. *Пусть $\alpha$ — целый элемент поля $F$, для которого $1-\alpha$ является главной единицей. Тогда*

$$\Gamma(\alpha, 1-\alpha, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1})=1. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $n=1$. Мы получим равенство (22), если докажем сравнение

$$\Phi(\alpha, 1-\alpha)\equiv 0 \bmod \partial. \tag{23}$$

Из определения функции $\eta(1-\alpha)$ (см. § 0, п. 6°) следует:

$$\eta(1-\alpha)=\delta(1-\alpha)-\frac{\partial}{\partial t}l(1-\alpha)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\log(1-\alpha)-\left(1-\frac{\Delta}{p}\right)\log(1-\alpha)\right)=-\sum_{i\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha^{\Delta i}}{pi}.$$

Поэтому формула (8) для ряда $\Phi(\alpha, 1-\alpha)$, с учетом (11), преобразуется к виду:

$$\Phi(\alpha, 1-\alpha)=l(1-\alpha)\,\delta(\alpha)-l(\alpha)\,\eta(1-\alpha)=$$
$$=-\delta(\alpha)\sum_{(i,p)=1}\frac{\alpha^i}{i}-\left(\sum_{i\geqslant 1}\varkappa_i\right)\delta(\alpha)+l(\alpha)\sum_{i\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha^{\Delta i}}{pi}=$$
$$=-\delta(\alpha)\sum_{(i,p)=1}\frac{\alpha^i}{i}-\sum_{i\geqslant 1}\left(\varkappa_i\delta(\alpha)-l(\alpha)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha^{\Delta i}}{pi}\right).$$

В работе [1, (11)] (см. также [3, с. 997]) было показано, что

$$\varkappa_i \delta(\alpha) - l(\alpha) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\alpha^{\Delta i}}{pi} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i,$$

где $\varphi_i = \frac{\varkappa_i}{pi} - l(\alpha) \frac{\alpha^{\Delta i}}{pi}$ является рядом с целыми коэффициентами, когда $p \neq 2$. Кроме того, очевидно, что

$$\delta(\alpha) \sum_{(i,p)=1} \frac{\alpha^i}{i} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{(i,p)=1} \frac{\alpha^i}{i^2}$$

и при этом сумма, стоящая в правой части, является рядом с целыми коэффициентами. Из последних двух равенств немедленно следует сравнение (23), что дает базу индукции для фундаментального свойства отображения Г.

При проверке индукционного перехода опять воспользуемся формулой (18) и индукционным предположением для рядов $\Phi_i(\alpha, 1-\alpha, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, чтобы получить сравнение

$$\Phi(\alpha, 1-\alpha, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \equiv l(\alpha_{n+1}) D_{n+1} \bmod \partial. \qquad (24)$$

Заметим, что из равенства (17) следует, что вторая строка определителя $D_{n+1}$ (см. (7)) получается умножением первой на $\left(-\sum_{i \geqslant 1} \alpha^i\right)$, т. е. определитель $D_{n+1}$ имеет пропорциональные строки и, значит, равен нулю.

Это замечание, а также сравнение (24) дают нужное нам сравнение $\Phi(\alpha, 1-\alpha, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \equiv 0 \bmod \partial$, из которого, согласно лемме 1, следует фундаментальное свойство отображения Г. Предложение доказано.

4°. Фундаментальное свойство для главной единицы $\alpha$ с помощью кососимметричности отображения Г непосредственно сводится к только что доказанному.

Если же $\alpha$ не является целым элементом, то $1-\alpha^{-1}$ будет уже главной единицей в поле $F$, а тогда кососимметричность и пропорциональность отображения Г дадут:

$$\Gamma(\alpha, 1-\alpha, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) =$$
$$= \Gamma(\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \Gamma(\alpha^{-1}, 1-\alpha^{-1}, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1})^{-1} = 1.$$

Наконец, если $\alpha$ — единица поля $F$, не являющаяся главной, то доказательство фундаментального свойства технически сложнее. Мы опускаем подробности, так как в дальнейшем этот случай у нас не используется.

Отметим, наконец, что фундаментальное свойство отображения Г для пары элементов, стоящих в произвольных местах, сводится к паре первых элементов с помощью кососимметричности и пропорциональности отображения Г. Итак, теорема 1 доказана.

## § 3

1°. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2 введения, отметим, что, повторяя почти дословно доказательство предложения 1, § 2, работы [8], мы можем получить описание $K_m^{\text{top}}(F)$ для $n$-мерного локального поля $F$, характеристика которого отлична от характеристики его поля вычетов.

Пусть $t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n=\pi$ — система локальных униформизующих $n$-мерного поля $F$ ($\pi$ — простой элемент $F$).

ЛЕММА 2. *Любой элемент $x$ группы $K_{m+1}^{\mathrm{top}}(F)$, $m\geqslant 0$, является произведением символов вида*

(а) $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_{m+1}}\}$, $i_1<\ldots<i_{m+1}$,

(б) $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}, \theta\}$, $i_1<\ldots<i_m$, $\theta\in\mathfrak{R}$,

(в) $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}, \varepsilon\}$, $i_1<\ldots<i_m$,

*где $\varepsilon$ — главная единица поля $F$.*

Следствие. *Любой элемент группы $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)$, рассматриваемый по* $\operatorname{mod} K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)^q$, *является произведением символов $\{t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi, \varepsilon\}$, где $\varepsilon$ — главная единица поля $F$.*

2°. Независимость $\Gamma$ равносильна следующему утверждению. Пусть какой-либо элемент $\alpha_i$ из $F^*$ двумя способами разложен в ряд по переменным $t_1, \ldots, t_{n-1}$ и простому элементу $\pi$, и пусть ряд $\varepsilon$ получен как частное этих разложений после замены простого элемента $\pi$ на переменную $t_n$ (отметим, что ряд $\varepsilon$ имеет в точке $t_n=\pi$ значение, равное 1). Тогда

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi(\alpha_1, \ldots, \varepsilon, \ldots, \alpha_{n+1})/s\equiv 0 \operatorname{mod} q$$

при любых рядах $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n+1}$ из $A\{\{t_n\}\}^*$.

В силу следствия леммы 2 нам достаточно проверить, таким образом, следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Пусть $\varepsilon$ — главная единица поля $F$, тогда значение отображения $\mathbf{\Gamma}(t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi, \varepsilon)$ не зависит от способа разложения $\varepsilon$ в ряд по переменным $t_1, \ldots, t_{n-1}$ и простому элементу $\pi$ поля $F$.*

Доказательство. Обозначим через $s_{m-1}$ ряд $z^{q/p}-1$ и через $u$ — ряд $s/s_{m-1}$ в кольце $A\{\{t_n\}\}$ (относительно рядов $z$ и $s$ см. выше (3)). Практически без изменения, так же как в лемме 6, § 2, работы [2], доказывается, что любой ряд $\varphi(t_n)$ из кольца $A[[t_n]]$, обращающийся в нуль в точке $t_n=\pi$, нацело делится на ряд $u(t_n)$ в этом кольце.

Поэтому если у нас имеется ряд $\varepsilon(t_n)\in 1+t_nA[[t_n]]$, который обращается в 1 в точке $t_n=\pi$, то найдется ряд $\psi(t_n)$ без свободного члена в кольце $A[[t_n]]$ такой, что $\varepsilon=1+u\psi$. Это дает нам возможность практически полностью использовать метод доказательства лемм 3 и 4 работы [2], чтобы проверить следующие утверждения: ряд $\log\varepsilon/s$, рассматриваемый по $\operatorname{mod}\deg 1$, принадлежит кольцу $A\{\{t_n\}\}$, т. е. имеет целые коэффициенты при нулевой и отрицательных степенях, а для ряда $\varepsilon(t_n)$ при $p\neq 2$ выполнено сравнение

$$l(\varepsilon)/s\equiv(1-\Delta)(\log\varepsilon/s)\operatorname{mod}(q, \deg 1) \tag{25}$$

(относительно функции $l$ и оператора Фробениуса $\Delta$ см. (5)).

Для проверки независимости достаточно доказать, что для любого ряда $\varepsilon\in 1+t_nA[[t_n]]$, который обращается в 1 в точке $t_n=\pi$, т. е. $\varepsilon(\pi)=1$, выполнено сравнение

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi(t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi, \varepsilon)/s\equiv 0\operatorname{mod} q. \tag{26}$$

Согласно определению функции $l$ (см. (5)) имеем: $l(t_i)=0$, $l(\pi)=0$, $1\leqslant i\leqslant n-1$. Поэтому в формуле (6) для ряда $\Phi(t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi, \varepsilon)$ остается лишь последнее слагаемое $l(\varepsilon)D_{n+1}$. Далее, из определения функции

$\eta(\alpha)$ следует:

$$\eta_i(t_j)=\begin{cases}t_i^{-1}, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j;\end{cases}\quad \eta_i(\pi)=\begin{cases}t_n^{-1}, & \text{если } i=n,\\ 0, & \text{если } i\neq n.\end{cases}$$

Поэтому в определителе $D_{n+1}$ все элементы вне диагонали равны нулю, а по главной диагонали стоят $t_1^{-1}, t_2^{-1}, \ldots, t_n^{-1}$. Значит, $D_{n+1}=t_1^{-1}\ldots t_n^{-1}$, откуда ряд $\Phi/s$ в нашем случае принимает вид $\Phi/s=t_1^{-1}\ldots t_n^{-1}l(\varepsilon)/s$. Учитывая последнее равенство, а также сравнение (25), имеем:

$$\Phi/s\equiv t_1^{-1}\ldots t_n^{-1}(1-\Delta)(\log\varepsilon/s)\bmod(q, \deg 1) \tag{27}$$

в кольце $A\{\{t_n\}\}$. Осталось сослаться на еще одно очевидное равенство:

$$\operatorname{tr}\operatorname{res} t_1^{-1}\ldots t_n^{-1}\varphi=\operatorname{tr}\operatorname{res} t_1^{-1}\ldots t_n^{-1}\varphi^{\Delta}, \tag{28}$$

выполненное для любого ряда $\varphi$ из кольца $A\{\{t_n\}\}$, чтобы из (27) получить (26). Лемма доказана.

3°. Используя доказанную независимость $\Gamma$, а также предложение 2, проверим инвариантность $\Gamma$ относительно выбора переменных. Обозначим через $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}]_{(t_i)}$ элемент $\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi/s$, вычисленный в наборе переменных $(t_i)=(t_1, \ldots, t_n)$. Инвариантность $\Gamma$ в этих терминах будет означать выполнение следующего сравнения:

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}]_{(t_i)}\equiv[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}]_{(\tau_i)}\bmod q,$$

где $t_i=f_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

В силу следствия леммы 2 нам достаточно проверить инвариантность $\Gamma(t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi, \varepsilon)$ для главной единицы $\varepsilon$. При этом можно рассматривать в качестве $\varepsilon$ образующие группы главных единиц, а именно:

а) $\varepsilon=\omega_*$,

б) $\varepsilon=1-\theta t_1^{i_1}\ldots t_{n-1}^{i_{n-1}}\pi^{i_n}$,

где $\omega_*$ — $q$-примарный элемент, $\theta\in\mathfrak{R}$ и среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ имеется хоть один, взаимно простой с $p$ (см. (15)).

В первом случае инвариантность следует из независимости построения примарных элементов от выбора переменных (см. § 1, п. 2°).

Во втором случае будем считать для простоты, что уже первый индекс $i_1$ взаимно прост с $p$. Обозначим тогда через $x$ произведение $\theta t_2^{i_2}\ldots t_{n-1}^{i_{n-1}}\pi^{i_n}$; таким образом,

$$\alpha=1-t_1^{i_1}x. \tag{29}$$

Отметим, что для любого $\theta$ из мультипликативной системы $\mathfrak{R}$ при любых элементах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $F^*$ мы из тривиальных соображений ($\delta_i(\theta)$ и $\eta_i(\theta)$ равны нулю) получим равенство $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \theta)=1$. Кососимметричность $\Gamma$ дает нам при этом право переставлять $\theta$ на любое место.

Если мы будем теперь вычислять отображение $\Gamma$ по набору переменных $(t_i)$, заменяя простой элемент $\pi$ на переменную $t_n$, то получим:

$$i_1[t_1, \ldots, t_n, \alpha]_{(t_i)}=[1-\alpha, t_2, \ldots, t_n, \alpha]_{(t_i)}-$$
$$-[x, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n, \alpha]_{(t_i)}\equiv 0\bmod q.$$

Первое слагаемое при этом делится на $q$ согласно предложению 1, а делимость на $q$ второго следует из вида элемента $x$ (см. (29)) и пропорциональности отображения $\Gamma$.

Используя те же рассуждения при замене переменных $t_i=f_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, мы придем к аналогичному сравнению:

$$[f_1, \ldots, f_n, \alpha]_{(\tau_i)} \equiv 0 \bmod q$$

в новых переменных, и инвариантность $\Gamma$ доказана.

Итак, мы проверили корректность определения отображения $\Gamma$ (см. теорему 2 введения). Отсюда следует, если учесть также теорему 1, что мы получили корректно определенный гомоморфизм из группы $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)/K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)^q$ в группу $\mu$ корней $q$-ой степени из 1. Таким образом, теорема 2 доказана.

## § 4

1°. Приступим в этом параграфе к проверке невырожденности спаривания $\langle\,,\rangle_\Gamma$ (см. теорему 3 введения). Невырожденность спаривания означает, что при фиксированном элементе $\beta$ из $F^*$, который не является $p$-ой степенью, найдется элемент $x$ в группе $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ такой, что $\langle x, \beta\rangle_\Gamma=\zeta$. Аналогично для элемента $x$ группы $K_n^{\mathrm{top}}(F)$, который не является $p$-ой степенью, должен найтись элемент $\beta$ из $F^*$ такой, что $\langle x, \beta\rangle_\Gamma=\zeta$ (здесь $\zeta$ — первообразный корень $q$-ой степени из 1).

Чтобы не перегружать текст техническими деталями, доказательство будем проводить для двумерного локального поля. Тем более, что принципиальные трудности возникают как раз при переходе от одномерного к двумерному локальному полю.

2°. Пусть $F=(k_0, k_1, k_2)$. Фиксируем простой элемент $\pi$ поля $F$ и униформизующую $t$. Пусть в поле $F$ содержатся все корни $q$-ой степени из 1. Тогда в мультипликативной группе $F^*$ по $\bmod F^{*q}$ для любого элемента $\alpha$ выполнено каноническое разложение (зависящее от выбора $t$, $\pi$)

$$\alpha = \pi^a t^b \varepsilon \omega_*^c, \tag{30}$$

где $\omega_*$ — примарный элемент (14), а главная единица $\varepsilon$ в разложении по образующим системы (16) не имеет примарной части. При этом степени $a$, $b$, $c$ определены однозначно по $\bmod q$.

Из леммы 2 следует, что любой элемент $x$ группы $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ представим в виде

$$x=\{t, \pi\}^c\cdot\{t, v\}\cdot\{u, \pi\}, \tag{31}$$

где $u$, $v$ — главные единицы поля $F$. Мы это разложение часто будем использовать либо в виде

$$x=\{\alpha, \pi\}\cdot\{t, v\}, \quad \alpha\in F^*, \tag{32}$$

либо, раскладывая единицу $v$ в каноническое произведение (30), в виде

$$x=\{t, \varepsilon\}\cdot\{\alpha, \pi\}\cdot\{t, \omega_*^a\}, \quad v=\varepsilon\omega_*^a, \tag{33}$$

где в каноническом разложении единицы $\varepsilon$ отсутствует примарная часть (по модулю $q$-ых степеней).

Символы $\{t, \omega_*\}$, $\{t, \varepsilon\}$ и $\{\alpha, \pi\}$ будем в дальнейшем обозначать через $x_*$, $x_\varepsilon$ и $x_\alpha'$ соответственно. Таким образом, для $x\in K_2^{\mathrm{top}}(F)$ имеем:

$$x=x_\varepsilon x_\alpha' x_*.$$

3°. Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Из независимости примарного элемента $\omega$ (а значит, и ряда $s$) от способа разложения корня $\zeta$ по униформизующим $t$, $\pi$ (см. § 1, п. 2°) следует, что мы можем брать разложение корня, начинающееся с члена $\theta t^{e_1'/q}\pi^{e_2'/q}$. Тогда, заменив простой элемент $\pi$ на переменную $X$, получим для ряда $s(X)$ (см. (3)) сравнение:

$$1/s \equiv \theta_0 t^{-pe_1'} X^{-pe_2'} \bmod \deg(-pe_1', -pe_2'). \tag{34}$$

Заметим, что при замене простого элемента $\pi$ на $\tau=\pi t^{\varkappa}$ (если поменять при этом переменную $X$ на $Y=Xt^{\varkappa}$), сравнение (34) переходит в следующее сравнение:

$$1/s \equiv \theta_0 t^{-pe_1'-pe_2'\varkappa} Y^{-pe_2'} \bmod \deg(-pe_1' - pe_2'\varkappa, -pe_2'). \tag{35}$$

Определение 2. *Элемент $x$ группы $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ будем называть ортогональным элементу $y$ из $F^*$, если $\langle x, y\rangle_\Gamma=1$.*

Из определения спаривания $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ и кососимметричности отображения $\Gamma$ вытекает следующая

ЛЕММА 4. *Символ $\{\alpha, \beta\}$ из группы $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ ортогонален элементу $\gamma$ из $F^*$ тогда и только тогда, когда $\{\alpha, \gamma\}$ ортогонален $\beta$.*

ЛЕММА 5. *Пусть $\omega_*$ — примарный элемент поля $F$ (см. (14)). Тогда символ $x_*=\{t, \omega_*\}$ ортогонален любой (необязательно главной) единице поля $F$. Кроме того, для любого простого элемента $\tau$ поля $F$ имеем $\langle x_*, \tau\rangle_\Gamma=\zeta^{-1}$.*

Доказательство. Отметим сперва, что для любых $\alpha$ и $\beta$ из $F^*$ из определения отображения $\Gamma$ легко получить:

$$[t, \alpha, \beta] = \mathrm{tr}\,\mathrm{res}\, t^{-1}\varphi_2(\alpha, \beta)/s, \tag{36}$$

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = l(\alpha)\frac{\partial}{\partial t_2} l(\beta) - l(\alpha)\delta_2(\beta) + l(\beta)\delta_2(\alpha).$$

Подставим вместо $\alpha$ примарный элемент $\omega_*$, а вместо $\beta$ — главную единицу $\varepsilon$. Тогда из вида $\omega_*$ (см. (14)), а также (10), (4) имеем:

$$l(\omega_*) = \xi s, \quad \delta_2(\omega_*) \equiv 0 \bmod q. \tag{37}$$

Далее, для главной единицы $\varepsilon$ ряд $\delta_2(\varepsilon)$ будет степенным относительно переменной $t_2$. Поэтому из сравнений (37) будет следовать, что ряд $\varphi_2(\omega_*, \varepsilon)/s$, рассматриваемый по $\bmod q$, будет степенным рядом от $t_2$, т. е.

$$\mathrm{res}_{t_2}\varphi_2(\omega_*, \varepsilon)/s \equiv 0 \bmod q.$$

Отсюда и из (36) сразу получаем: $[t, \omega_*, \varepsilon] \equiv 0 \bmod q$, и ортогональность $x_*$ группе главных единиц доказана.

Ортогональность символа $x_*$ произвольной единице $\beta=t^b\varepsilon$, где $\varepsilon$ — главная единица, следует теперь из пропорциональности отображения $\Gamma$ (см. теорему 1).

Для доказательства последнего утверждения леммы заметим, что инвариантность отображения $\Gamma$ дает возможность в качестве переменной $t_2$ в формуле (36) рассматривать замену простого элемента $\tau$ (а не $\pi$). Тогда

$$\varphi_2(\omega_*, \tau)/s = -l(\omega_*)\delta_2(\tau)/s = -t_2^{-1}\xi s/s = -\xi t_2^{-1}$$

и поэтому $[t, \omega_*, \tau] = -\mathrm{tr}\,\xi \equiv -1 \bmod q$ (см. (14)), что означает: $\langle x_*, \tau\rangle_\Gamma=\zeta^{-1}$, и лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\pi$ — *простой элемент поля* $F$. *Символ* $x_*'=\{\omega_*, \pi\}$ *ортогонален любой главной единице поля* $F$ *и простому элементу* $\pi$. *Кроме того*, $\langle x_*', t\rangle_\Gamma=\zeta^{-1}$.

Доказательство. Из кососимметричности и мультипликативности Г получим для главной единицы $\varepsilon$ поля $F$:

$$[\omega_*, \pi, \varepsilon]=[\varepsilon, \omega_*, \pi]=[t, \omega_*, \pi]-[t\varepsilon, \omega_*, \pi].$$

Заменим униформизующую $t$ в последнем слагаемом на $u=t\varepsilon$ и воспользуемся инвариантностью Г. Тогда из леммы 4 получим:

$$[t, \omega_*, \pi]\equiv -1 \bmod q, \quad [u, \omega_*, \pi]\equiv -1 \bmod q$$

и поэтому $[\omega_*, \pi, \varepsilon]\equiv 0 \bmod q$, что доказывает ортогональность символа $x_*'$ главной единице $\varepsilon$.

Ортогональность символа $x_*'$ простому элементу $\pi$ следует из пропорциональности Г, а последнее равенство леммы вытекает из соответствующего равенства в предыдущей лемме.

ЛЕММА 7. *Пусть у главной единицы* $\varepsilon$ *в каноническом разложении* (16) *отсутствует примарная часть. Символ* $x_\varepsilon=\{t, \varepsilon\}$ *ортогонален простому элементу* $\pi$ *поля* $F$, *т. е.* $\langle x_\varepsilon, \pi\rangle_\Gamma=1$.

Доказательство. В качестве $\varepsilon$ достаточно рассматривать лишь образующие $\rho_{i,j}=E(\theta t^i\pi^j)$ системы (16) (мультипликативность Г). Тогда, заменив простой элемент $\pi$ на переменную $t_2$ для ряда $\varphi_2(\rho_{i,j}, \pi)/s$ (см. (36)), будем иметь:

$$\varphi_2(\rho_{i,j}, \pi)/s=-l(\rho_{i,j})\,\delta_2(\pi)/s=-(t_2^{-1}\theta t_1^i t_2^j)/s$$

(мы воспользовались еще равенством (10)). Ряд $1/s$, согласно (34), не имеет по $\bmod q$ степеней переменных $t_1$, $t_2$, взаимно простых с $p$. Один индекс $i$ или $j$ должен быть взаимно прост с $p$. Поэтому из (38) следует сравнение

$$[t_1, \rho_{i,j}, \pi]\equiv 0 \bmod q$$

и, значит, $\langle x_\varepsilon, \pi\rangle_\Gamma=1$ для $\varepsilon=\rho_{i,j}$. Лемма доказана.

Пусть единица $\varepsilon$ удовлетворяет условию леммы 7.

ЛЕММА 8. *Символ* $\{t, \pi\}$ *ортогонален* $\varepsilon$. *Кроме того, для примарной единицы* $\omega_*$ *имеем равенство* $\langle\{t, \pi\}, \omega_*\rangle_\Gamma=\zeta$.

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 7 и 4, а второе — из определения спаривания $\langle\,,\rangle_\Gamma$ и равенства (51) (см. ниже, § 5). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Пусть элемент* $x$ *группы* $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ *представлен в виде произведения* (31). *Тогда*

$$\langle x, \omega_*\rangle_\Gamma=\langle\{t, \pi\}^c, \omega_*\rangle_\Gamma=\zeta^c.$$

Доказательство. Символы $x_v$ и $x_u'$ ортогональны $\omega_*$ (следствие лемм 5 и 6 и кососимметричности Г). Значит, $\langle x, \omega_*\rangle_\Gamma=\langle\{t, \pi\}^c, \omega_*\rangle$. Для окончания доказательства осталось применить равенство $\langle\{t, \pi\}, \omega_*\rangle_\Gamma=\zeta$ (см. лемму 5).

4°. Пусть $f(t_1, t_2)$ и $g(t_1, t_2)$ — два ряда из кольца $A=\mathfrak{o}\{\{t_1\}\}\{\{t_2\}\}$.

Определение 3. *Будем писать*

$$f\equiv g \bmod \deg(i, j),$$

*если* $f$ *и* $g$ *имеют одинаковые коэффициенты при одночленах, у которых* *набор степеней не превосходит (в лексикографическом упорядочивании) набора* $(i, j)$.

Пусть $\varepsilon$ — главная единица поля $F$. Представим ее в виде ряда по униформизующим $t$, $\pi$ поля $F$ с коэффициентами из кольца $\mathfrak{o}$. Из определения сходимости в поле $F$ следует, что в разложении единицы $\varepsilon$ найдется одночлен $at^{\alpha_1}\pi^{\alpha_2}$ с наименьшим набором степеней $(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда имеем сравнение

$$\varepsilon \equiv 1 + at^{\alpha_1}\pi^{\alpha_2} \bmod \deg (\alpha_1, \alpha_2). \tag{38}$$

Из этого сравнения и определения функции $l$ (см. (5)), а также логарифмической производной $\delta_r$ (см. введение, п. 6°) легко получить следующие сравнения:

$$l(\varepsilon) \equiv at_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2} \bmod \deg (\alpha_1, \alpha_2), \tag{39}$$

$$t_r\delta_r(\varepsilon) \equiv \alpha_r a t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2} \bmod \deg (\alpha_1, \alpha_2), \quad r = 1, 2, \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_r} l(\varepsilon) \equiv \delta_r(\varepsilon) \bmod \deg (\alpha_1, \alpha_2), \quad r = 1, 2 \tag{41}$$

(мы заменили при этом простой элемент $\pi$ на переменную $t_2$, а униформизующую $t$ снабдили индексом — $t_1$).

Обозначим, далее, через $\varepsilon^{\perp}$ следующую единицу:

$$\varepsilon^{\perp} \equiv 1 + a' t^{\alpha_1'}\pi^{\alpha_2'} \bmod \deg (\alpha_1', \alpha_2'),$$

где $\alpha_r' = pe_r' - \alpha_r$, $r = 1, 2$, а элемент $a'$ из кольца $\mathfrak{o}$ выбран так, что $\operatorname{tr} aa'a_0 \equiv 1 \bmod p$ (здесь $a_0$ — первый коэффициент сравнения (34)). Заметим, что в наших обозначениях в качестве $\varepsilon^{\perp\perp}$ можно взять саму единицу $\varepsilon$.

Нетрудно видеть, что при замене униформизующих $t$, $\pi$ на $t$, $\tau = \pi t^{\varkappa}$ сравнение (38) примет вид:

$$\varepsilon \equiv 1 + at^{\alpha_1 - \varkappa\alpha_2}\tau^{\alpha_2} \bmod \deg (\alpha_1 - \varkappa\alpha_2, \alpha_2)$$

и соответственно в этих новых униформизующих будем рассматривать единицу

$$\varepsilon_1^{\perp} \equiv 1 + a' t^{\alpha_1''}\tau^{\alpha_2''} \bmod \deg (\alpha_1'', \alpha_2''), \tag{42}$$

где $\alpha_1'' = pe_1' - \alpha_1 + (pe_2' + \alpha_2)\varkappa$, $\alpha_2'' = pe_2' - \alpha_2$.

ЛЕММА 10. *Символы* $x_\varepsilon$, $x_\varepsilon'$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\langle x_\varepsilon, \varepsilon^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv \zeta^{\alpha_2} \bmod F^{*p}, \qquad \langle x_\varepsilon', \varepsilon^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv \zeta^{\alpha_1} \bmod F^{*p}. \tag{43}$$

*Кроме того, для любой единицы* $\eta \equiv 1 \bmod \deg (\alpha_1', \alpha_2')$, *где* $\alpha_1' = pe_1' - \alpha_1$, $\alpha_2' = pe_2' - \alpha_2$, *символы* $x_\eta'$ *и* $x_\eta$ *ортогональны (по* $\bmod F^{*p}$*) единице* $\varepsilon^{\perp}$, *т. е.*

$$\langle x_\eta, \varepsilon^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv \langle x_\eta', \varepsilon^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv 1 \bmod F^{*p}. \tag{44}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд $\varphi_r(\varepsilon, \varepsilon^{\perp})/s$, $r = 1, 2$ (см. (36)). Тогда из сравнений (39), (40), (41), (34) и условия на индексы: $(\alpha_1 + \alpha_1', \alpha_2 + \alpha_2') = (pe_1', pe_2')$ получаем:

$$t_r\varphi_r(\varepsilon, \varepsilon^{\perp})/s \equiv \alpha_r(aa'a_0) \bmod (p, \deg (0, 0)).$$

Отсюда и из определения спаривания $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ легко следуют сравнения (43).

Аналогично для единицы $\eta$ получим сравнение

$$t_r\varphi_r(\eta, \varepsilon^{\perp})/s \equiv 0 \bmod (p, \deg (0, 0)), \quad r = 1, 2,$$

откуда следует (44). Лемма доказана.

Произведем замену униформизующих $t$, $\pi$ на $t$, $\tau=\pi t^{\varkappa}$. Выкладки леммы 10 останутся в силе (только вместо (34) нужно использовать (35)) и мы приходим к следующей лемме.

ЛЕММА 11. *Символы $x_\varepsilon$ и $x_\varepsilon'$ в новых униформизующих $t$, $\tau=\pi t^{\varkappa}$ удовлетворяют соотношениям*:

$$\langle x_\varepsilon, \varepsilon_1^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv \zeta^{\alpha_2} \bmod F^{*p}, \quad \langle x_\varepsilon', \varepsilon_1^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv \zeta^{\alpha_1-\varkappa\alpha_2} \bmod F^{*p}.$$

*Кроме того, для любой единицы* $\eta\equiv 1 \bmod \deg(\alpha_1'', \alpha_2'')$ *символы* $x_\eta$ *и* $x_\eta'$ *ортогональны* (*по* $\bmod F^{*p}$) *единице* $\varepsilon_1^{\perp}$,

$$\langle x_\eta, \varepsilon_1^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv \langle x_\eta', \varepsilon_1^{\perp}\rangle_\Gamma \equiv 1 \bmod F^{*p}$$

(относительно $\varepsilon_1$ и условий на индексы $\alpha_1''$, $\alpha_2''$ см. (42)).

5°. После этих предварительных соображений мы можем начать непосредственную проверку невырожденности спаривания $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$.

Предложение 2. *Спаривание $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ невырожденно по второму аргументу.*

Доказательство. Нам надо для произвольного элемента $\beta$ из $F^*$, не являющегося $p$-ой степенью, найти элемент $x$ из $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ такой, что $\langle x, \beta\rangle_\Gamma$ порождает группу корней $\mu$.

Если элемент $\beta$ по $\bmod F^{*p}$ является простым (или его порядок относительно простого элемента $\pi$ взаимно прост с $p$), то требуемым элементом для $\beta$ будет $x_*$ леммы 4.

Если элемент является единицей по $\bmod F^{*p}$, причем его порядок относительно униформизующей $t$ взаимно прост с $p$, то в группе $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ возьмем символ $x_*'$ из леммы 5.

Пусть, наконец, элемент $\beta$ является главной единицей по $\bmod F^{*p}$. Если при этом элемент $\beta$ является примарной единицей $\omega_*^a$, $(a, p)=1$, то в группе $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ надо взять символ $\{t, \pi\}$ и применить лемму 8.

Если же $\beta$ является главной, но не примарной единицей по $\bmod F^{*p}$, то, отбрасывая $p$-ые степени, можно считать, что разложение $\beta$ в ряд по униформизующим $t$, $\pi$ поля $F$ с коэффициентами из кольца $\mathfrak{o}$ начинается с $at^i\pi^j$, где элемент $a$ из $\mathfrak{o}$ не делится на $p$. Таким образом,

$$\beta\equiv 1+at^i\pi^j \bmod \deg(i, j), \quad a\in\mathfrak{o},$$

и при этом один из индексов $i$ или $j$ взаимно прост с $p$. Если индекс $i$ взаимно прост с $p$, то в группе $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ берем символ $\{\beta^{\perp}, \pi\}$, а если $(j, p)=1$, то возьмем символ $\{t, \beta^{\perp}\}$ и применим лемму 10. Предложение доказано.

6°. Пусть $\varepsilon$ — главная единица поля $F$. Символы $x_\varepsilon=\{t, \varepsilon\}$ и $x_\varepsilon'=\{\varepsilon, \pi\}$ всегда можно по $\bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$ привести к виду

$$x_\varepsilon \equiv \begin{cases} 1 \\ x_*^a \\ x_\eta \end{cases}; \quad x_\varepsilon' \equiv \begin{cases} 1 \\ x_*'^{a'} \\ x_\eta' \end{cases} \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p, \tag{45}$$

где $x_*=\{t, \omega_*\}$, $x_\varepsilon'=\{\omega_*, \pi\}$, а для главных единиц $\eta$ и $\eta'$ выполнены сравнения

$$\eta\equiv 1+at^{\alpha}\pi^{\beta} \bmod \deg(\alpha, \beta), \quad \eta'\equiv 1+a't^{\alpha'}\pi^{\beta'} \bmod \deg(\alpha', \beta');$$

при этом индексы $\alpha'$ и $\beta$ взаимно просты с $p$.

Проверим сравнения (45) для символа $x_\varepsilon$. Пусть единица $\varepsilon$ не является примарной по модулю $p$-ых степеней. Тогда ее можно представить в виде

$$\varepsilon \equiv 1 + a t^i \pi^j \bmod \deg (i, j), \quad a \in \mathfrak{o}, \quad (a, p) = 1.$$

Если при этом индекс $j$ взаимно прост с $p$, то сравнение (45) выполнено. В противном случае индекс $i$ должен быть взаимно прост с $p$ (см. (15)). Представим единицу $\varepsilon$ в виде

$$\varepsilon = (1 - \theta t^i \pi^j)\, \varepsilon_1, \quad \theta \in \mathfrak{R},$$

где $\theta + a \equiv 0 \bmod p$, а для главной единицы $\varepsilon_1$ выполнено сравнение $\varepsilon_1 \equiv \equiv 1 \bmod \deg (i, j)$. Из свойств символов следует:

$$x_\varepsilon^i = \{t,\ 1 - \theta t^i \pi^j\}^i\, x_{\varepsilon_1}^i = \{\pi,\ 1 - \theta t^i \pi^j\}^{-j}\, x_{\varepsilon_1}^i \equiv x_{\varepsilon_1}^i \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p.$$

Отсюда, вспоминая, что $(i, p) = 1$, получаем:

$$x_\varepsilon \equiv x_{\varepsilon_1} \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p.$$

Продолжая процесс с единицей $\varepsilon_1$, мы придем к сравнению (45). Сравнение (45) для $x_\varepsilon'$ доказывается аналогично.

7°. Предложение 3. *Спаривание $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ невырожденно по первому аргументу.*

Доказательство. Пусть $x$ — произвольный элемент из $K_2^{\mathrm{top}}(F)$, не являющийся $p$-ой степенью. Надо найти $y \in F^*$ такой, что $\langle x, y\rangle_\Gamma$ порождает группу корней $\mu$.

Рассмотрим разложение элемента $x$ в произведение (31):

$$x = \{t, \pi\}^c \{t, u\} \cdot \{v, \pi\}.$$

Будем считать, что символы $x_v'$ и $x_u$ уже приведены к соответствующим символам сравнения (45) по $\bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$. Если при этом $(c, p) = 1$, то в группе $F^*$ достаточно взять примарный элемент $\omega_*$ (см. лемму 9).

Если $c$ делится на $p$, а одна из главных единиц $u$ или $v$ является примарной (по модулю $p$-ых степеней), то в первом случае в качестве $y$ берем элемент $\pi$, а во втором — простой элемент $t$ и используем леммы 5 и 4.

Пусть теперь $x \equiv x_u \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$ и при этом

$$u \equiv 1 + a t^\alpha \pi^\beta \bmod \deg (\alpha, \beta), \quad a \in \mathfrak{o}, \tag{46}$$

где индекс $\beta$ взаимно прост с $p$ (см. (45)). Тогда в качестве $y$ из $F^*$ надо взять единицу $u^\perp$ и воспользоваться леммой 10. Аналогично для $x \equiv \equiv x_v' \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$, где

$$v \equiv 1 + b t^i \pi^j \bmod \deg (i, j), \quad b \in \mathfrak{o}, \tag{47}$$

и индекс $(i, p) = 1$, надо брать $y = v^\perp$ и использовать ту же лемму 10.

Пусть, наконец, $x \equiv x_u \cdot x_v' \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$ и единицы $u$, $v$ удовлетворяют сравнениям (46) и (47) соответственно. Если при этом набор $(\alpha, \beta)$ меньше набора $(i, j)$, то в качестве $y$ выбираем $u^\perp$ и применяем леммы 8 и 10. Аналогично, если $(i, j) < (\alpha, \beta)$, то возьмем $y = v^\perp$ и далее используем те же леммы.

Осталось разобрать последний случай: набор $(\alpha, \beta) = (i, j)$ и все индексы взаимно просты с $p$. В этом случае заменим униформизующую $\pi$

на $\tau=\pi t^{\varkappa}$, где целое число $\varkappa$ взято из сравнения $\alpha+\beta\varkappa\equiv 0 \mod p$. Тогда в новых униформизующих $t$, $\tau$ имеем:

$$u\equiv 1+\theta t^{\alpha+\beta\varkappa}\tau^{\beta} \mod \deg(\alpha+\beta\varkappa, \beta),$$
$$v\equiv 1+\theta' t^{\alpha+\beta\varkappa}\tau^{\beta} \mod \deg(\alpha+\beta\varkappa, \beta).$$

К символу $x_v'$ применяем процесс приведения к сравнениям (45), согласно которым $x_v'\equiv x'_{v'} \mod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$ и при этом единица $v'\equiv 1 \mod \deg(\alpha+\beta\varkappa, \beta)$. После этого мы можем воспользоваться леммой 11, взяв в качестве $y$ единицу $u^{\perp}$. Предложение доказано.

## § 5

Символ норменного вычета $(\ ,\ )_q$, как было уже сказано, осуществляет связь между теорией Куммера и локальной теорией полей классов поля $F$. С помощью отображения $\Gamma$, построенного в предыдущих параграфах, мы сможем в явном виде задать и символ Гильберта $(\ ,\ )_q$.

Из определения символа Гильберта следует, что он (так же как и отображение $\Gamma$) задает гомоморфизм из фактор-группы $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)/K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F)^q$ в группу $\mu$ корней $q$-ой степени из 1. Тем самым, в частности, символ Гильберта удовлетворяет тем же свойствам, что и отображение $\Gamma$, которые были указаны в теореме 1 введения.

Чтобы доказать совпадение символа Гильберта со спариванием $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ (см. теорему 4 введения), достаточно проверить в силу следствия леммы 2 совпадение следующих значений:

$$(x_\pi,\ \varepsilon)_q=\langle x_\pi,\ \varepsilon\rangle_\Gamma, \tag{48}$$

где через $x_\pi$ обозначен символ $\{t_1,\ \dots,\ t_{n-1},\ \pi\}$, а $\varepsilon$ — главная единица поля $F$.

Мы можем ограничиться при этом образующими группы главных единиц поля $F$, т. е. рассмотреть следующие случаи: а) $\varepsilon=\omega_*$, б) $\varepsilon=\varepsilon_{c,i}=1-c\pi^i$, где $\omega_*$—$q$-примарный элемент (см. (14)), а образующая $\varepsilon_{c,i}$ взята из системы (13).

Из определения символа Гильберта следует равенство

$$(x_\pi,\ \omega_*)_q=\zeta. \tag{49}$$

Далее, для образующих $\varepsilon_{c,i}$ имеем:

$$(x_\pi,\ \varepsilon_{c,i})_q=1. \tag{50}$$

Действительно, $c\pi^i=\theta t_1^{i_1}\dots t_{n-1}^{i_{n-1}}\pi^i$, где $\theta\in\mathfrak{R}$, а среди индексов $i_1,\ \dots,\ i_{n-1}$, $i$ должен иметься хотя бы один взаимно простой с $p$. Если таковым будет индекс $i$, то $(x_\pi,\ \varepsilon_{c,i})_q^{\,i}=(x_i,\ c\pi^i)_q\cdot(x_c,\ c)_q^{-1}$, где символы $x_i$ и $x_c$ получены из $x_\pi$ заменой $n$-ой компоненты на $c\pi^i$ и $c$ соответственно. В последнем равенстве первый множитель правой части тривиален из-за фундаментального свойства символа Гильберта, а второй — из-за его мультипликативности и пропорциональности. Поэтому $(x_\pi,\ \varepsilon_{c,i})_q=1$. Аналогичная проверка происходит для взаимно простого с $p$ индекса $i_r$, $1\leqslant r\leqslant n-1$.

Из определения спаривания $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ (см. (2а)) и задания $q$-примарного элемента $\omega_*$ (см. (14)) следует равенство

$$\langle x_\pi,\ \omega_*\rangle_\Gamma=\zeta. \tag{51}$$

Спаривание $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ обладает теми же свойствами, что и символ Гильберта (см. теорему 1), поэтому для образующих $\varepsilon_{c,i}$ системы (13), как и выше, получаем:

$$\langle x_\pi, \varepsilon_{c,i}\rangle_\Gamma = 1. \tag{52}$$

Из доказанных равенств (49), (50), (51) и (52) следует (48), а значит, теорема 4 полностью доказана.

## § 6

В этом параграфе мы проверяем норменное свойство спаривания $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ для двумерного локального поля.

Определение 4. *Будем говорить, что элементы $x$ из группы $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ и $\beta$ из $F^*$ удовлетворяют норменному свойству, если выполнено следующее условие*:

$$\langle x, \beta\rangle_\Gamma = 1 \Leftrightarrow x \text{ — норма из } K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[q]{\beta})). \tag{53}$$

Норменность спаривания $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ означает, что условие (53) выполняется для любой пары $x\in K_2^{\mathrm{top}}(F)$, $\beta\in F^*$. При доказательстве норменного свойства мы будем использовать следующую лемму, справедливую для произвольного поля $E$, которое содержит все корни $m$-ой степени из 1 и при этом $m$ не делится на квадрат целого числа.

ЛЕММА 12. *Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma\in E^*$. Символ $\{\alpha, \beta\}$ является нормой из группы Милнора $K_2^M(E(\sqrt[m]{\gamma}))$ тогда и только тогда, когда символ $\{\alpha, \gamma\}$ — норма из $K_2^M(E(\sqrt[m]{\beta}))$. Если $\{\alpha, \beta\}$ — норма из групп $K_2^M(E(\sqrt[m]{\gamma_i}))$, $i=1, 2$, то $\{\alpha, \beta\}$ будет нормой и из $K_2^M(E(\sqrt[m]{\gamma_1\gamma_2}))$* (см. [9], следствие 24.7).

Пусть $t$, $\pi$ — униформизующие элементы поля $F$.

ЛЕММА 13. *Образ группы $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[q]{\omega_*}))$ при норменном отображении порожден группой $K_2^{\mathrm{top}}(F)^q$ и символами $\{\varepsilon, \pi\}$, $\{t, \eta\}$, где $\varepsilon$, $\eta$ — произвольные главные единицы поля $F$.*

Доказательство. Расширение $F' = F(\sqrt[q]{\omega_*})$ неразветвлено, так как $\omega_*$—примарный элемент. Поэтому униформизующие $t, \pi$ поля остаются ими и в расширении $F'$. Тогда любой элемент $X$ из группы $K_2^{\mathrm{top}}(F')$ представляется в виде

$$X=\{t, \pi\}^c\{u, \pi\}\cdot\{t, v\}, \quad c\in\mathbf{Z},$$

где $u$, $v$ — главные единицы поля $F'$ (см. (31)). Поскольку $t, \pi\in F$, то

$$\mathrm{Nm}\, X=\{t, \pi\}^{pc}\cdot\{\mathrm{Nm}_{F'/F}(u), \pi\}\cdot\{t, \mathrm{Nm}_{F'/F}(v)\}, \tag{54}$$

где $\mathrm{Nm}_{F'/F}$ — обычное отображение нормы в расширении $F'/F$. Как и в одномерном случае (см. [4]), легко проверить, что образ группы главных единиц в неразветвленном расширении при норменном отображении совпадает с группой главных единиц поля $F$. Отсюда и из (54) следует утверждение леммы 13.

Обозначим через $x_*$ символ $\{t, \omega_*\}$.

ЛЕММА 14. *Следующие условия равносильны*:

а) $x_*^a$ *ортогонален* $\pi$, *т. е.* $\langle x_*^a, \pi\rangle_\Gamma=1$,

б) $a\equiv 0 \bmod p$,

в) $x_*^a$ — *норма из* $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$.

Доказательство. Равносильность первых двух условий следует из леммы 8. Отсюда, в частности, вытекает, что если $x_*^a$ ортогонален $\pi$, то $a \equiv 0(p)$ и, значит, $x_*^a$ является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$, т. е. из а) $\Rightarrow$ в).

Пусть теперь выполнено условие в), т. е. символ $\{t, \omega_*^a\}$ является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$. Тогда символ $\{t, \pi\}$ будет нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\omega_*^a}))$ (см. лемму 12), что возможно тогда и только тогда, когда $a \equiv 0 \bmod p$ (см. лемму 13), и мы получили б). Лемма доказана.

ЛЕММА 15. *Символ $x_* = \{t, \omega_*\}$ ортогонален любой (не обязательно главной) единице $\beta$ поля $F$ и является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\beta}))$.*

Доказательство. Символ $x_*$ ортогонален $\beta$ согласно лемме 5. Второе утверждение равносильно тому, что символ $\{t, \beta\}$ является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\omega_*}))$ (см. лемму 12). Пусть $\beta = t^b\varepsilon$, где $\varepsilon$ — главная единица. Очевидно, что $\{t, \beta\} = \{t, \varepsilon\}$. С другой стороны, поле $F' = F(\sqrt[p]{\omega_*})$ неразветвлено над $F$ и поэтому любая главная единица поля $F$ является нормой в расширении $F'/F$. Таким образом, в частности, $\varepsilon = N_{F'/F}\varepsilon'$ для $\varepsilon' \in F'$, а тогда $\mathrm{Nm}\{t, \varepsilon'\}_{F'} = \{t, N_{F'/F}\varepsilon'\} = \{t, \varepsilon\}$ и лемма доказана.

Пусть главная единица $\varepsilon$ в каноническом разложении (16) не имеет примарной части (по модулю $p$-ых степеней).

ЛЕММА 16. *Символ $x_\varepsilon = \{t, \varepsilon\}$ ортогонален $\pi$, т. е. $\langle x_\varepsilon, \pi\rangle_\Gamma = 1$, и является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$.*

Доказательство. Ортогональность $\langle x_\varepsilon, \pi\rangle_\Gamma = 1$ была доказана в лемме 7. Проверим второе утверждение. Пусть $\varepsilon = 1 - \theta t^i\pi^j$, $\theta \in \mathfrak{R}$. Если при этом $(j, p) = 1$, то единица $\varepsilon$ будет нормой в расширении $F(\sqrt[p]{\pi})$ и, значит, символ $\{t, 1-\theta t^i\pi^j\}$ будет нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$. Если же $j$ делится на $p$, но $(i, p) = 1$, то $x_\varepsilon^i = \{\theta t^i\pi^j, 1-\theta t^i\pi^j\} \cdot \{\theta\pi^j, 1-\theta t^i\pi^j\}^{-1} \in \in K_2^{\mathrm{top}}(F)^p$, так как $\theta\pi^j \in F^{*p}$. Значит, и в этом случае $x_\varepsilon^i$ будет нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$.

Для произвольной единицы $\varepsilon$, удовлетворяющей нашему условию, утверждение леммы следует теперь из разложения $\varepsilon$ по образующим (13). Лемма доказана.

Предложение 4. *Пусть $x$ — элемент из группы $K_2^{\mathrm{top}}(F)$, а $\pi$ — простой элемент поля $F$. Пара $x$, $\pi$ удовлетворяет норменному свойству.*

Доказательство. Представим элемент $x$ в виде произведения: $x = \{\alpha, \pi\} \cdot \{t, \varepsilon\}$, где $\alpha \in F^*$, а $\varepsilon$ — главная единица поля $F$ (см. (32)). Очевидно, что символ $\{\alpha, \pi\}$ — норма из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$ и при этом он ортогонален $\pi$, так как $\langle\{\alpha, \pi\}, \pi\rangle_\Gamma = \Gamma(\alpha, \pi, \pi) = 1$ (см. теорему 1).

Поэтому пара $x$, $\pi$ удовлетворяет норменному свойству тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет пара $\{t, \varepsilon\}$, $\pi$. Разложим единицу $\varepsilon$ в каноническом виде: $\varepsilon = \varepsilon'\omega_*^a$, где единица $\varepsilon'$ при выбранных униформизующих $t$, $\pi$ не имеет примарной части (см. (30)). Тогда символ $\{t, \varepsilon\}$ представляется в виде $\{t, \varepsilon\} = x' \cdot x_*^a$, где $x' = \{t, \varepsilon'\}$, $x_* = \{t, \omega_*\}$. Символ $x'$ ортогонален $\pi$ и является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$ (см. лемму 16).

А для символа $x_*^a$ это утверждение выполняется, согласно лемме 14 тогда и только тогда, когда $a \equiv 0 \bmod p$. Лемма доказана.

Предложение 5. *Пусть $x$ — элемент из группы $K_2^{\mathrm{top}}(F)$, и $\beta$ — главная единица поля $F$. Пара $x$, $\beta$ удовлетворяет норменному свойству.*

Доказательство. Фиксируем простой элемент $\pi$ поля $F$ и представим элемент $x$ в виде произведения символов (см. (33)):

$$x = \{\alpha, \pi\} \cdot \{t, \varepsilon\} \cdot \{t, \omega_*^a\}.$$

Обозначим через $x'$ произведение $\{\alpha, \pi\} \cdot \{t, \varepsilon\}$. Из леммы 15 следует, что норменное свойство выполнено для пары $x$, $\beta$ тогда и только тогда, когда оно верно для пары $x'$, $\beta$.

Пусть элемент $x'$ ортогонален $\beta$, т. е. $\langle x', \beta \rangle_\Gamma = 1$. Проверим, что тогда $x'$ — норма из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\beta}))$.

Элемент $x'$ ортогонален $\pi$ (см. лемму 16), значит, он ортогонален и простому элементу $\tau = \pi\beta$. Поэтому если мы будем раскладывать элемент $x'$ в произведение (33) при униформизующих $t$, $\tau$, то должны получить:

$$x' \equiv \{\alpha', \tau\} \cdot \{t, \varepsilon'\} \bmod K_2^{\mathrm{top}}(F)^p,$$

где $\alpha' \in F^*$, а у главной единицы $\varepsilon'$ в каноническом разложении (30) отсутствует примарная часть. Тогда по лемме 16 элемент $x'$ будет одновременно нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$ и из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\tau}))$, а значит, он будет нормой и из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\beta}))$ (см. лемму 12). Осталось проверить, что если $x'$ — норма из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\beta}))$, то он будет ортогонален $\beta$. Но элемент $x'$ всегда является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\pi}))$ (см. лемму 16), поэтому он будет нормой и из $K_2^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\tau}))$, где $\tau = \pi\beta$ (см. лемму 12). Значит, если мы представим $x'$ в виде (33) с униформизующими $t$, $\tau$, то согласно лемме 16 получим $x' = \{\alpha', \tau\} \cdot \{t, \varepsilon'\} \cdot \{t, \omega_*^a\}$ и при этом $a \equiv 0 \bmod p$. Отсюда следует ортогональность $x'$ как элементу $\pi$, так и элементу $\tau$ (см. лемму 16). Значит, $x'$ ортогонален и $\beta = \tau\pi^{-1}$. Предложение полностью доказано.

Пусть $\beta$ — произвольный элемент из $F^*$. Тогда по модулю $p$-ых степеней он является либо единицей, либо его порядок относительно простого элемента $\pi$ взаимно прост с $p$. В последнем случае элемент $\beta$ можно считать простым (по модулю $p$-ых степеней), возводя в случае необходимости в подходящую взаимно простую с $p$ степень. Применяя теперь в первом случае предложение 5, а во втором — предложение 4, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $F$ — двумерное локальное поле, содержащее все корни $p$-ой степени из 1. Тогда спаривание*

$$\langle\ ,\ \rangle_\Gamma \colon K_2^{\mathrm{top}}(F) \times F^* \to \mu$$

*удовлетворяет норменному свойству* (53).

Замечание. Метод доказательства (а значит, и формулировка) остается практически без изменений и в общем случае $n$-мерного локального поля $F$, если для $K$-функтора $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ предполагать справедливой лемму 12.

## § 7

1°. Рассмотрим одномерное локальное поле $k$ (конечное расширение $\mathbf{Q}_p$), содержащее все корни $p^n$-ой степени из 1, и докажем норменное свойство спаривания $\langle , \rangle_\Gamma$ для этого поля. Выберем простой элемент $\pi$ поля $k$ и примарную единицу $\omega_*$.

ЛЕММА 17. *Пусть* $K = k\left(\sqrt[p^n]{\omega_*}\right)$ *и* $K' = k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$. *Тогда простой элемент* $\pi$ *будет образующим фактор-группы* $k^*/\mathrm{Nm}\, K^*$, *а примарный элемент* $\omega_*$ *порождает фактор-группу* $k^*/\mathrm{Nm}\, K'^*$.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что группа норм в неразветвленном расширении совпадает с подгруппой единиц поля $k$ (см. [4]). Для расширения $K'/k$ группа норм порождена простым элементом $\pi$ и всеми единицами вида $1-\theta\pi^i$, $\theta \in \mathfrak{R}$, $(i, p)=1$. Но в фактор-группе $k^*/k^{*p}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbf{F}_p$, примарная единица $\omega_*$ линейно независима от этих образующих (см. [13, § 14]). Лемма доказана.

Известно, что в фактор-группе $k^*/k^{*p^n}$ для любого элемента $\alpha$ выполнено каноническое разложение Шафаревича (см. [10], [1]):

$$\alpha = \pi^a \varepsilon(\alpha)\, \omega_*^r, \quad a, r \in \mathbf{Z}, \tag{55}$$

где единица $\varepsilon$ однозначно представляется в виде

$$\varepsilon = \prod_{(i,p)=1} (1-\theta_i \pi^i)^{a_i}, \quad \theta_i \in \mathfrak{R} \cup \{0\}, \tag{56}$$

а степени $a$, $r$ однозначно определены по $\bmod\, p^n$.

Пусть элементы $\alpha$, $\beta$ из $k^*$ представлены в виде (55): $\alpha = \pi^a \varepsilon \omega_*^r$, $\beta = \pi^b \eta \omega_*^s$. Тогда

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\pi = \zeta^{as-br} \langle \varepsilon, \eta \rangle_\pi \tag{57}$$

(здесь $\langle , \rangle_\pi$ — спаривание (2а), вычисленное при фиксированном простом элементе $\pi$). Равенство (57) следует из ортогональности главных единиц поля $k$ примарной единице $\omega_*$ (см. [2], [3]) и вытекающего непосредственно из определения (2а), (8) равенства $\langle \pi, \omega_* \rangle_\pi = \zeta$.

Из равенства (57), в частности, следует

ЛЕММА 18. *Элемент* $\alpha$ *ортогонален простому элементу* $\pi$ *тогда и только тогда, когда в разложении* (55) *элемента* $\alpha$ *отсутствует примарная часть.*

ЛЕММА 19. *Элемент* $\alpha = \pi^a \omega_*^r$ *ортогонален* $\beta = \pi^b \omega_*^s$ *тогда и только тогда, когда* $as \equiv br \bmod p^n$.

ЛЕММА 20. *Пусть в разложении* (55) *элемента* $\alpha$ *отсутствует примарная часть. Тогда* $\langle \alpha, \pi \rangle_\pi = \langle \pi, \alpha \rangle_\pi^{-1} = 1$ *и* $\pi$ — *норма из* $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$, *а* $\alpha$ — *норма из* $k(\sqrt[p^n]{\pi})$.

Доказательство. Ортогональность элемента $\alpha$ простому элементу $\pi$ следует из леммы 18. Очевидно, что $\pi$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{1-\theta\pi^i})$, а $1-\theta\pi^i$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\pi})$ (здесь $\theta \in \mathfrak{R}$, $(i, p)=1$). Отсюда и из разложения единицы, в которой отсутствует примарная часть, в виде (56) следует второе утверждение.

2°. Несложно проверяется следующая

ЛЕММА 21. *Пусть элемент* $\beta$ *группы* $k^*$ *не является нормой в расширении* $K=k(\sqrt[p^n]{\alpha})$ ($\beta$ *порождает* $k^*/\mathrm{Nm}\,K^*$). *Элемент* $\beta^b$ *будет нормой в* $k(\sqrt[p^n]{\alpha^a})$ *тогда и только тогда, когда* $ab\equiv 0 \bmod p^n$.

Из леммы 18 и 20 вытекает следующая

ЛЕММА 22. *Пара* $\alpha$, $\pi$ *удовлетворяет норменному свойству* (53).

ЛЕММА 23. *Пусть* $\alpha$ — *главная единица, а* $\beta=\pi^b\eta$, *причем в каноническом разложении* (55) *единицы* $\eta$ *отсутствует примарная часть. Тогда пара* $\alpha$, $\beta$ *удовлетворяет норменному свойству.*

Доказательство. При наших условиях простой элемент $\pi$ ортогонален $\beta$ (см. лемму 18). Значит, $\langle\alpha,\beta\rangle_\pi=\langle\pi\alpha,\beta\rangle_\pi=\langle\tau,\beta\rangle_\tau$, где $\tau=\pi\alpha$ — простой элемент, и мы пришли к лемме 22.

Аналогично проверяется следующая

ЛЕММА 24. *Пусть* $\alpha=\pi^a\varepsilon$ *и* $\beta=\pi^b\eta\omega_*^s$, *причем единицы* $\varepsilon$ *и* $\eta$ *в каноническом разложении* (55) *не имеют примарной части. Тогда пара* $\alpha$, $\beta$ *удовлетворяет норменному свойству.*

ЛЕММА 25. *Элементы* $\alpha=\pi^a\omega_*^r$ *и* $\beta=\pi^b\omega_*^s$ *удовлетворяют норменному свойству.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ ортогонален $\beta$. Тогда, согласно лемме 19, $as\equiv br \bmod p^n$. Можно считать, что один из элементов $\alpha$ или $\beta$ не является $p$-ой степенью, а значит, одна из степеней, например $a$, взаимно проста с $p$. Тогда из сравнения $as\equiv br \bmod p^n$ получаем $\alpha^b\equiv\beta^a \bmod k^{*p^n}$. Из последнего сравнения непосредственно следует, что $\beta^a$ и, значит, и $\beta$, является нормой из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$ и мы проверили: $\langle\alpha,\beta\rangle_\pi=1 \Rightarrow \beta$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$.

Пусть теперь $\beta$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$.

а) Предположим, что $a$ делится на $b$ в кольце $\mathbf{Z}_p$. Тогда разрешимо сравнение $bx\equiv a \bmod p^n$. Значит,

$$\alpha\equiv\pi^a\omega_*^r\equiv\pi^{bx}\omega_*^{sx}\omega_*^{r-sx}=\beta^x\omega_*^{r-sx} \bmod k^{*p^n}.$$

Отсюда и из условия следует, что $\beta$ — норма из неразветвленного расширения $k(\sqrt[p^n]{\omega_*^{r-sx}})$. Из вида элемента $\beta$ видно, что вместе с $\beta$ нормой будет и элемент $\pi^b$ в этом расширении. Из лемм 17 и 21 следует тогда сравнение $b(r-sx)\equiv 0 \bmod p^n$. Учитывая еще сравнение $bx\equiv a \bmod p^n$, получаем $br\equiv as \bmod p^n$, откуда следует ортогональность элементов $\alpha$, $\beta$ (см. лемму 20).

б) Если же $b$ делится на $a$ в кольце $\mathbf{Z}_p$, то будет разрешимо сравнение $ax\equiv b \bmod p^n$ и поэтому $\beta\equiv\alpha^x\omega_*^{s-rx} \bmod k^{*p^n}$. Отсюда и из условия следует, что $\omega_*^{s-rx}$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$, а значит, и из $k(\sqrt[p^n]{\pi^a})$, так как $\alpha=\pi^a\omega_*^r$. Из лемм 17 и 21 получаем тогда сравнение $(s-rx)a\equiv 0 \bmod p^n$, которое вместе с $ax\equiv b \bmod p^n$ дает сравнение $as\equiv br \bmod p^n$, откуда следует ортогональность $\alpha$ и $\beta$ (см. лемму 20). Лемма доказана.

ЛЕММА 26. *Пусть $u$ — главная единица. Тогда $\langle u, \omega_*\rangle_\Gamma=1$ и $\omega_*$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{u})$, а $u$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\omega_*})$.*

Доказательство. Относительно ортогональности $u$ и $\omega_*$ см. (57). Последнее утверждение — следствие неразветвленности расширения $k(\sqrt[p^n]{\omega_*})$. Осталось проверить, что $\omega_*$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{u})$.

Разложим единицу $u$ в каноническом виде: $u=\varepsilon\omega_*^r$ (см. (55)). Ясно, что наше утверждение достаточно проверить для пары $\omega_*$, $\varepsilon$. Единица $\varepsilon$ ортогональна $\pi$ (см. лемму 18), значит, $\varepsilon$ будет ортогональна и простому элементу $\tau=\pi\omega_*$, так как $\langle\varepsilon, \tau\rangle_\pi=\langle\varepsilon, \pi\rangle_\pi\cdot\langle\varepsilon, \omega_*\rangle_\pi=1$.

Из инвариантности спаривания $\langle,\rangle_\Gamma$ относительно замены простого элемента (см. теорему 2) следует тогда, что $\langle\varepsilon, \tau\rangle_\tau=1$. Поэтому единица $\varepsilon$ в каноническом разложении (55) относительно простого элемента $\tau$ также не имеет примарной части (см. лемму 18). Значит, $\tau$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\varepsilon})$ (см. лемму 20). Согласно той же лемме простой элемент $\pi$ также будет нормой из $k(\sqrt[p^n]{\varepsilon})$, а тогда и элемент $\omega_*=\tau\pi^{-1}$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\varepsilon})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 27. *Пусть $\alpha=\pi^a\omega_*^r$ и $\eta$ — главная единица, в каноническом разложении* (55) *которой отсутствует примарная часть. Тогда $\langle\alpha, \eta\rangle_\pi=1$ и $\eta$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$.*

Доказательство. Ортогональность $\alpha$ и $\eta$ есть следствие леммы 18 и ортогональности примарного элемента $\omega_*$ любой главной единице (см. лемму 26). Второе утверждение следует из лемм 20 и 26.

ЛЕММА 28. *Пусть канонические разложения* (55) *элементов $\alpha$ и $\beta$ имеют вид: $\alpha=\pi^a\omega_*^r$, $\beta=\pi^b\eta\omega_*^s$. Тогда пара $\alpha$, $\beta$ удовлетворяет норменному свойству.*

Доказательство. Из леммы 27 следует, что элемент $\alpha$ ортогонален единице $\eta$ и при этом $\eta$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$. Значит, $\langle\alpha, \beta\rangle_\pi=\langle\pi^a\omega_*^r, \pi^b\omega_*^s\rangle_\pi$ и при этом элемент $\beta$ является нормой из $k(\sqrt[p^n]{\alpha})$ тогда и только тогда, когда $\pi^b\omega_*^s$ — норма в этом расширении. Мы пришли тем самым к лемме 25.

3°. ТЕОРЕМА 7. *Пусть $k$ — одномерное локальное поле (конечное расширение $\mathbf{Q}_p$), содержащее все корни $p^n$-ой степени из 1. Тогда спаривание $\langle,\rangle_\Gamma$ удовлетворяет норменному свойству.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ и $\beta$ — произвольные элементы из $k^*$. Представим $\beta$ в каноническом виде (55): $\beta=\pi^b\eta\omega_*^s$.

Случай 1. Степень $s$ делится на $b$ в кольце $\mathbf{Z}_p$. Тогда разрешимо сравнение $bx\equiv s \bmod p^n$. Поэтому согласно (57) имеем:

$$\langle\omega_*^x, \beta\rangle_\pi=\zeta^{-bx}, \quad \langle\pi, \beta\rangle_\pi=\zeta^s.$$

Значит, простой элемент $\tau=\pi\omega_*^x$ ортогонален $\beta$. Таким образом, $\langle\tau, \beta\rangle_\tau=1$ и согласно лемме 18 в каноническом разложении $\beta$ при простом элементе $\tau$ отсутствует примарная часть, т. е. $\beta=\tau^b\eta'$ и при этом единица $\eta'$ не имеет примарной части. Пусть элемент $\alpha$ имеет каноническое разложение при простом $\tau$ следующего вида: $\alpha=\tau^a\varepsilon\omega_*^r$. Из инвариантности спаривания получим $\langle\alpha, \beta\rangle_\pi=\langle\alpha, \beta\rangle_\tau$. Согласно лемме 18, $\langle\tau^a, \beta\rangle_\tau=1$ и при этом $\beta$ — норма из $k(\sqrt[p^n]{\tau^a})$. Мы пришли тем самым к лемме 23.

Случай 2. Степень $b$ делится на $s$ в кольце $\mathbf{Z}_p$. Пусть $\alpha$ имеет следующее каноническое разложение при простом элементе $\pi: \alpha=\pi^a\varepsilon\omega_*^r$. Тогда

$$\langle\pi^a\omega_*^r, \beta\rangle_\pi=\zeta^{as-br}$$

(см. (57)). Поэтому элемент $\alpha$ ортогонален $\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\langle\varepsilon, \beta\rangle_\pi=\zeta^{br-as}.$$

При наших условиях разрешимо сравнение $sx\equiv as-br \bmod p^n$, а тогда $\langle\pi^x, \beta\rangle_\pi=\zeta^{sx}$ (см. (57)), значит, элемент $\pi^x\varepsilon$ ортогонален $\beta$, т. е. $\langle\pi^x\varepsilon, \beta\rangle_\pi=1$. Поэтому

$$\langle\alpha, \beta\rangle_\pi=\langle\alpha', \beta\rangle_\pi,$$

где $\alpha'=\alpha\pi^{-x}\varepsilon^{-1}=\pi^{a'}\omega_*^r$, $a'=a-x$. Применяя теперь лемму 24 для пары $\pi^x\varepsilon$, $\beta$ и лемму 28 для пары $\alpha'$, $\beta$, получаем утверждение теоремы в нашем случае. Теорема доказана.

Автор глубоко признателен И. Б. Фесенко за ряд ценных замечаний.

## Литература

1. *Востоков С. В.* Явная форма закона взаимности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 6, с. 1288—1321.
2. *Востоков С. В.* Символ Гильберта в дискретно нормированном поле.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1979, т. 94, с. 50—69.
3. *Востоков С. В.* Символы на формальных группах.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 5, с. 985—1014.
4. *Ивасава К.* Локальная теория полей классов. М.: Мир, 1983, 180 с.
5. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую $K$-теорию. М.: Мир, 1974, 196 с.
6. *Паршин А. Н.* К арифметике схем размерности 2.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1976, т. 40, № 4, с. 736—773.
7. *Паршин А. Н.* Поля классов и алгебраическая $K$-теория.— Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 1, с. 253—254.
8. *Паршин А. Н.* Локальная теория полей классов.— Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1984, т. 165, с. 143—170.
9. *Суслин А. А.* Алгебраическая $K$-теория и гомоморфизм норменного вычета.— Совр. проблемы матем., 1984, т. 25, с. 115—208.
10. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности.— Матем. сб., 1950, т. 26(68), № 1, с. 113—146.
11. *Bass H., Tate J.* The Milnor ring of a global field.— Lect. Notes Math., 1973, v. 342, p. 349—446.
12. *Henniart G.* Sur les lois de reciprocite explicites. I.— J. reine und angew. Math., 1981, Bd. 329, s. 177—202.
13. *Hasse H.* Zahlentheorie, Berlin, 1963, 611 s.
14. *Kato K.* A generalization of local class field theory by using $K$-groups. I.— J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 1979, v. 26, № 2, p. 303—376; II.— там же, 1980, v. 27, № 3, p. 603—683.

Поступила в редакцию
1.XII.1983