САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МАДУНЦ АЛЕКСАНДРА ИГОРЕВНА

Сходимость последовательностей и рядов в многомерных полных полях

01.01.06. — <Математическая логика, алгебра и теория чисел>

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Востоков С. В.

Санкт-Петербург — 1995

Оглавление

Введение

В данной работе рассматривается круг вопросов, связанных со сходимостью последовательностей элементов многомерного полного поля и рядов над многомерными полными полями.

1. Понятие локального поля (p-адического поля $\mathbb{Q}_p$ и его конечных расширений для простого p) было впервые введено Хензелем в серии работ 1897 года. Эти поля обладают свойствами, схожими со свойствами полей формальных степенных рядов $F_q((X))$ над конечным полем $F_q, q = p^f, f \geqslant 1$ (см. [29]). Хотя имеются существенные отличия, общие особенности позволяют доказывать разнообразные утверждения сразу для обоих видов полей, поэтому в настоящее время локальным полем обычно называют и конечные расширения p-адического поля $\mathbb{Q}_p$ (локальное поле характеристики 0), и поля формальных степенных рядов $F_q((X))$ (локальное поле характеристики p).

Вообще говоря, класс полных дискретно нормированных полей следующий по важности и простоте после класса конечных полей. Он тесно связан с глобальными полями — полями алгебраических чисел и дробно-рациональных функций.

Одной из высших точек развития классической алгебраической теории чисел является локальная теория полей классов. Она устанавливает взаимно-однозначное соответствие между абелевыми расширениями полного дискретно нормированного поля F с конечным полем вычетов и подгруппами мультипликативной группы F^*. Исторически эта теория возникла как следствие глобальной теории полей классов в 1930-х в работах Х. Хассе. Позже Ф. К. Шмидт и С. Шевалле провели доказательство, не зависящее от глобальной теории. В послевоенный период развитие локальной теории полей классов шло с использованием метода когомологий. Современные утверждения теории полей классов тоже нередко опираются на вычисление групп когомологий и носят во многом технический характер. Книги Т. Артина и Д. Тэйта и Ж. -П. Серра (см. [30], [46]) предлагают именно этот подход.

Однако сейчас существует другое направление в развитии теории полей классов, не опирающееся на когомологии. Первая работа в этом направлении принадлежит В. Дворку (см. [31]). Она посвящена явному (некогомологическому) определению отображения взаимности (взаимно-однозначного соответствия между абелевыми расширениями поля и замкнутыми подгруппами мультипликативной группы поля). Это направление было продолжено М. Хазевинкелем, который осуществил построение теории полей классов без использования когомологических групп (см. [36], [37]). В 1984 году Ю. Нойкирх выводит теорию полей классов не только для локальных, но и для глобальных полей, пользуясь простыми теоретико-групповыми конструкциями обратного отображения к отображению взаимности (см. [43], [44]). Некогомологический подход демонстрирует также книга С. В. Востокова и И. Б. Фесенко [34].

С другой стороны, с середины 70-х годов стала активно развиваться теория многомерных локальных и полных полей. По определению, n-мерное полное поле представляет собой поле, полное относительно дискретного нормирования, поле вычетов которого — $(n-1)$-мерное полное поле. При этом за 0-мерное полное поле принимается некоторое совершенное поле. Понятие многомерного полного поля обобщает понятие многомерного локального поля (отличие в том, что 0-мерное локальное поле — это некоторое конечное поле). Можно также определить многомерное полное поле как поле, снабженное дискретным нормированием ранга n (см. [15]), имеющее совершенное поле вычетов и удовлетворяющее определенным условиям полноты.

Впервые роль многомерных полных полей была понята А. Н. Паршиным, который рассмотрел их как результат процесса пополнения n-мерной схемы в точке (см. [22]). Тем самым выявилось их значение в алгебраической геометрии. С другой стороны, большой класс дискретно нормированных полей может быть "приближен" многомерными локальными и многомерными полными полями. Это создает возможность широкого обобщения теории полей классов, терии ветвления и т. д., см., например, [39], [45], и делает эти поля хорошим инструментом для исследования различных видов дискретно нормированных полей. Удобство использования многомерных локальных полей в качестве такого инструмента связано с тем, что для этих полей построена теория полей классов, основные теоремы которой были сформулированы А. Н. Паршиным (см. [23]) и доказаны А. Н. Паршиным для случая полей характеристики p и К. Като (см. [40], [41]) для случая полей характеристики 0. Некогомологический подход к этой теории продемонстрирован в работах И. Б. Фесенко (см. [25—28], [33]). В последнее время большое внимание уделяется также теории полей классов многомерных полных полей (см. [32]). Описание абелевых расширений полного многомерного поля положительной характеристики с квазиконечным полем вычетов дано в [2], [3].

Одним из центральных направлений теории полей классов является создание явных конструкций этой теории. В случае расширений Артина-Шрайера-Витта эта задача была решена А. Н. Паршиным (см. [23]), а в случае куммеровых расширений С. В. Востоковым (см. [9], [11]).

А. Н. Паршиным сформулирована и И. Б. Жуковым доказана структурная теорема для многомерных полных полей (см. [21], [23], [12]). Она позволяет классифицировать многомерные полные поля, а также сопоставить любому многомерному полному полю (вообще говоря, не канонически) некоторое стандартное многомерное полное поле. Таким образом, определенные вопросы, связанные с многомерными полными полями, можно свести к подобным вопросам для стандартных полей.

А. Н. Паршиным на многомерных полных полях введена топология, отличная от обычной топологии дискретного нормирования и учитывающая топологии полей вычетов. Проверка сходимости последовательностей и рядов в этой топологии является нетривиальной. В то же время вопрос сходимости весьма существенен для решения ряда задач. Даже в случае классического одномерного локального поля нередко требуется обосновать существование некоторых элементов, формально определенных в виде ряда, в котором вместо переменной подставлен заданный элемент поля. Например, примарные элементы классического локального поля нулевой характеристики (см. [10]) представлены именно таким образом. Эти элементы играют важную роль в задании символа Гильберта. Явная формула для символа Гильберта дала толчок к получению явных формул в различных полях и для различных объектов (например, связанных с формальными группами, см. [5], [7], [9]). По мере развития теории полей классов расширялась область полей, к которым применимы методы [10]. В работе [8] получена явная формула для спаривания Гильберта в многомерных полных полях нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики. В этой формуле тоже фигурируют элементы, формально определенные как ряды, в которых вместо переменной подставлен заданный элемент поля. Таким образом, вопрос сходимости рядов актуален и в многомерном случае.

2. В первой главе данной работы выводятся критерии сходимости последовательностей элементов многомерного полного поля K и рядов над K.

§1 содержит обзор основных понятий теории многомерных полных полей, а также вводит основные обозначения.

В §2 рассматривается случай, когда характеристика n-мерного полного поля K совпадает с характеристикой его последнего поля вычетов. В этом случае $K = F((t_1))\dots((t_n))$, где F — совершенное поле (здесь под $L((t))$ подразумевается поле формальных степенных рядов Лорана над L). В теореме 2.1 для поля $L((t))$, где на поле L определена некоторая топология, выводится критерий сходимости последовательности к нулю в топологии поля $L((t))$, а в теореме 2.2 подобный критерий выводится для поля K, причем он сформулирован в терминах нормирований, а не открытых подгрупп.

На протяжении третьего параграфа $K = k\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$, где k — полное дискретно нормированное поле с нормированием v. Здесь под $L\{\{t\}\}$ подразумевается поле

$$L\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r t^r : c_r \in L,\ v(c_r) \geqslant c > -\infty,\ v(c_r) \stackrel{r\to-\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}.$$

В теореме 3.1 выводится критерий сходимости последовательности к нулю для этого случая в терминах нормирования поля k. Теорема 3.2 переформулирует его в терминах введенных в работе псевдонормирований (некоторых функций элемента поля, обладающих свойствами, схожими со свойствами нормирований).

В §4 осуществляется переход к общему случаю. Здесь K — многомерное полное поле. С учетом структурной теоремы для многомерных полных полей (см. теорему §1) можно считать, что его топология индуцирована топологией некоторого стандартного многомерного полного поля. Для общего случая тоже вводятся понятия псевдонормирований и в теореме 4.1 в терминах псевдонормирований дается критерий сходимости последовательности к нулю, а в теореме 4.2 в терминах псевдонормирований выводится признак сходимости суперпозиции рядов.

В §5 рассматриваются признаки сходимости бесконечного произведения элементов поля K, а также бесконечного произведения рядов над полем K.

§6 посвящен формальным группам над некоторыми кольцами, содержащимися в кольце нормирования поля K. Заметим, что, в отличие от одномерного случая, в n-мерном полном поле при $n \geqslant 2$ кольцо нормирования O, вообще говоря, не обладает тем свойством, что все ряды $a(X) \in O[[X]]$ сходятся при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\mathfrak{M}$. Поэтому формальные группы над кольцом нормирования оказываются неудобны, и естественно ввести такие кольца, что все ряды над этими кольцами сходятся при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\mathfrak{M}$, и рассмотреть формальные группы над ними. Основной результат данного параграфа — формулировка и доказательство признаков сходимости конечных и бесконечных формальных сумм рядов над полем K для формальных групп над такими кольцами.

В §7 вновь рассматривается случай, когда

$$K = k\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\},$$

и признаки сходимости суперпозиций рядов, бесконечных произведений и бесконечных формальных сумм рядов, выведенные в общем случае в терминах псевдонормирований, формулируются в терминах нормирования поля k.

Во второй главе работы с помощью полученных в первой главе результатов обоснована корректность определения примарных элементов $\omega(a)$ и $H(a)$ классического локального поля и многомерного полного поля.

В §1 некоторые теоремы о сходимости из первой главы переформулируются для случая полного дискретно нормированного поля.

В §2 рассматривается k — локальное поле нулевой характеристики (конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$), причем $q = p^{f_0}$ — порядок его поля вычетов, $\mathfrak{O}_0$ — кольцо целых, π_0 — униформизующая, v — нормирование, $F(X,Y)$ — формальная группа Любина-Тейта над $\mathfrak{O}_0$, $X +_F Y = F(X,Y)$.

Известно, что для $F(X,Y)$ существует ряд $\log_F X \in k[[X]]$, обладающий тем свойством, что $\log_F(X +_F Y) = \log_F X + \log_F Y$ и называемый формальным логарифмом, причем

$$\log_F X = \sum_{r\geqslant 1} c_r X^r, \quad c_1 = 1, \text{ для всех } r > 1 \quad v(c_r) \geqslant -\log_q r.$$

Пусть K — конечное расширение поля k, содержащее все корни изогении $[\pi_0^{m_0}](X)$, где m_0 — фиксированное натуральное число.

Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля K, π — униформизующая K, ζ_{m_0} — первообразный корень $[\pi_0^{m_0}](X)$, Δ — продолжение на K автоморфизма Фробениуса T/K, где T — поле инерции K/k. Определим действие Δ на $K[[X]]$ следующим образом:

$$\text{если } a(X) = \sum_r a_r X^r, \text{ то } a^\Delta = \sum_r a_r^\Delta X^{qr}.$$

Мы можем выбрать ряд

$$z(X) = \sum_r z_r X^r, \quad z_r \in \mathfrak{O},$$

такой, что $z(\pi) = \zeta_{m_0}$. Пусть $s(X) = [\pi_0^{m_0}](z(X))$.

Далее, пусть $l_F(X) = (1 - \frac{\Delta}{\pi_0}) \log_F X$, $E_F(X)$ — ряд, обратный к $l_F(X)$ в смысле суперпозиции, a принадлежит кольцу целых T, A принадлежит максимальному неразветвленному расширению T и $\Delta A - A = a$.

Тогда

$$\omega(a) = E_F(as(X))|_{X=\pi}, H(a) = E_F(\pi_0^{m_0}\Delta A l_F(z(X)))|_{X=\pi} -$$

$\pi_0^{m_0}$–примарные элементы, играющие важную роль в задании символа Гильберта (см. [5—7], [10]).

Напомним, что элемент $\alpha \in k$ называется $\pi_0^{m_0}$–примарным, если расширение, полученное присоединением корней уравнения $[\pi_0^{m_0}](X) = \alpha$, неразветвлено.

Цель этого параграфа — доказать, что $\omega(a)$ и $H(a)$ — корректно определенные элементы поля K, причем

$$H(a) = \omega(a) +_F [\pi_0^{m_0}]\left(\sum\nolimits_{F\,m=2}^{+\infty} \sum\nolimits_{F\,j=0}^{+\infty} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^{m\Delta^i}(\pi)}{\pi_0^{m_0+i}}\right).$$

В §3 схожее утверждение доказывается для случая многомерного полного поля нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики.

Пусть K — n-мерное полное поле нулевой характеристики; F — первое поле вычетов K, т.е., $F = k^{(n-1)}$; π — простой элемент из K относительно дискретного нормирования ранга 1; $\mathcal{O}$ — кольцо нормирования ранга n; ζ_{m_0} — фиксированный корень степени p^{m_0} из 1, содержащийся в K; F_0 — максимальное совершенное подполе в поле вычетов F поля K, которое предполагается не алгебраически замкнутым; $\tilde{\mathfrak{O}}$ — кольцо векторов Витта над F_0; k_0 — поле частных $\tilde{\mathfrak{O}}$; $\mathcal{O} = \tilde{\mathfrak{O}}\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$; Δ — автоморфизм Фробениуса в k_0; $\wp(\alpha) = \alpha^{\Delta} - \alpha$ — оператор Картье на пополнении максимального неразветвленного расширения кольца $\tilde{\mathfrak{O}}$.

Оператор Фробениуса Δ в кольце $\mathcal{O}[[X]]$ рядов Лорана над $\mathcal{O}$ действует следующим образом:

$$\left(\sum_{\bar{r}} a_{\bar{r}} t_1^{r_1}\dots t_{n-1}^{r_{n-1}} X^{r_n}\right)^{\Delta} = \sum a_{\bar{r}}^{\Delta} t_1^{pr_1}\dots t_{n-1}^{pr_{n-1}} X^{pr_n}, \qquad a_{\bar{r}} \in \tilde{\mathfrak{O}}.$$

Легко видеть, что для любого элемента α из поля K существует ряд $\underline{\alpha}(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ такой, что $\underline{\alpha}(X)|_{X=\pi} = \alpha$.

Пусть $s(X) = \underline{\zeta}(X)^{p^{m_0}} - 1$, $z(X) = \underline{\zeta}(X)$, а также пусть $l(X) = (1 - \frac{\Delta}{p})\log(X)$, $E(X)$ — ряд, обратный к $l(X)$ в смысле суперпозиции.

Пусть T_K — максимальное абелево чисто неразветвленное p-расширение поля K, $\tilde{\mathfrak{O}} = W(F_0)$ — кольцо векторов Витта поля F_0 и $\tilde{\mathfrak{O}}^{\mathrm{nr}}$ — кольцо целых пополнения максимального неразветвленного расширения k_0.

Пусть $a \in \tilde{\mathfrak{O}}$, $A \in \tilde{\mathfrak{O}}^{\mathrm{nr}}$ и $\wp(A) = A^{\Delta} - A = a$.

Известно (см. [8]), что

$$\omega(a) = E(as(X))|_{X=\pi}, H(a) = E(p^{m_0}\Delta Al(z(X))|_{X=\pi} -$$

p^{m_0}- примарные элементы (элемент называется p^{m_0}-примарным, если расширение, полученное присоединением корней степени p^{m_0} из этого элемента, чисто неразветвленное).

Цель этого параграфа — доказать, что $\omega(a)$ и $H(a)$ — корректно определенные элементы поля K, причем

$$H(a) = \omega(a)\left(\prod_{m=2}^{+\infty}\prod_{j=0}^{+\infty}\exp\frac{a^{\Delta^i}c_m s^{m\Delta^i}(\pi)}{p^{m_0+i}}\right)^{p^{m_0}}$$

(здесь c_m — коэффициенты при X^m в разложении логарифма в ряд Тейлора).

Таким образом, работа проясняет топологическую структуру многомерного полного поля, доказывает различные признаки сходимости последовательностей и рядов над этим полем, позволяет в дальнейшем использовать формальные группы над введенными кольцами, обосновывает возможность рассматривать примарные элементы специального вида классического локального поля и многомерного полного поля, а также предоставляет инструмент для решения задач, подобных последней, в других случаях.

Результаты работы для случая классического локального поля были опубликованы в [16], [17], для двумерного полного поля — в [13], [18], [19]. В данной работе рассматривается общий многомерный случай.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. В. Востокову за постановку задачи и ценные советы, а также И. Б. Жукову за его неоценимую помощь в подготовке диссертации.

Глава 1

Признаки сходимости последовательностей, рядов, суперпозиций рядов, бесконечных произведений рядов и бесконечных формальных сумм рядов над многомерными полными полями

§1. Основные понятия и обозначения

Говорят, что на поле K задана структура n-мерного полного поля, если K полно относительно заданного дискретного нормирования и на поле вычетов определена структура $(n-1)$-мерного полного поля; при этом под 0-мерным подразумевается некоторое совершенное поле. Иными словами, структура n-мерного полного поля на K — это цепочка полей $K^{(n)} = K$, $K^{(n-1)}$, $\dots$, $K^{(1)}$, $K^{(0)}$, где $K^{(i)}$ — полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $K^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n-1$; $K^{(0)}$ — совершенное поле.

Поле $K^{(n-1)}$, обозначаемое также $\overline{K}$, будем называть первым полем вычетов поля K, а $K^{(0)}$ — последним полем вычетов. При этом через $\overline{a}$ будет обозначаться образ в $K^{(n-1)}$ элемента a, целого в $K^{(n)}$.

Говорят, что K — равнохарактеристическое, если $\operatorname{char} K = \operatorname{char} \overline{K}$, и разнохарактеристическое, если это не так, т. е., $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p > 0$.

Пусть t_n — простой элемент относительно дискретного нормирования в поле $K = K^{(n)}$; t_{n-1} — единица в $K^{(n)}$, класс вычетов которой является простым элементом в $K^{(n-1)}$; $\dots$; t_1 — единица в $K^{(n)}$, $K^{(n-1)}$, $\dots$, $K^{(2)}$, которая при переходе к предпоследнему полю вычетов $K^{(1)}$ становится простым элементом. Набор $(t_1, \dots, t_n)$ называется системой локальных параметров поля K. Эта система определяет в K нормирование ранга n

$$\overline{v}_K = \overline{v} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})\; K \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\},$$

где $\overline{v}(0) = \infty$, а при $a \neq 0$

$$v^{(i)}(a) = v_{K^{(i)}} \left(\overline{a t_n^{-v^{(n)}(a)} \dots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(a)}} \right) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant n-1;$$
$$v^{(n)}(a) = v_{K^{(n)}}(a).$$

(Здесь надчеркивание обозначает образ в $K^{(i)}$.)

При этом множество $\mathbb{Z}^n = \{\overline{r} = (r_1, \ldots, r_n) : r_s \in \mathbb{Z}\}$ предполагается лексикографически упорядоченным в нестандартном смысле:

$$\overline{r}^{(1)} = (r_1^{(1)}, \ldots, r_n^{(1)}) < \overline{r}^{(2)} = (r_1^{(2)}, \ldots, r_n^{(2)})$$

означает, что $r_m^{(1)} < r_m^{(2)}$, $r_{m+1}^{(1)} = r_{m+1}^{(2)}$, ..., $r_n^{(1)} = r_n^{(2)}$, где $m \leqslant n$.

Нормирование $\overline{v}'$ ранга n, соответствующее другой системе локальных параметров $t_1', \ldots, t_n'$, связано с $\overline{v}$ формулой

$$\overline{v}'(a) = \overline{v}(a)T \tag{1}$$

для всех $a \in K$, где $T = (v'^{(j)}(t_i))_{i,j}$ — нижнетреугольная матрица $n \times n$ с единицами по главной диагонали.

Пусть теперь на некотором поле K определено нормирование $\overline{v}$ с группой значений $\mathbb{Z}^n$. Тогда последние r компонент $\overline{v}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ задают нормирование ранга r, поле вычетов которого обозначим $K^{(n-r)}$. Поля $K^{(n)} = K$, $K^{(n-1)}$, ..., $K^{(1)}$ обладают дискретными нормированиями, индуцированными соответствующими компонентами $\overline{v}$. Если все эти поля полны, а поле вычетов $\overline{v}$ совершенно, на K возникает структура n-мерного полного поля. При этом образующаяся цепочка полей и дискретных нормирований на них не изменяется при замене нормирования $\overline{v}$ на эквивалентное, т. е. связанное с $\overline{v}$ соотношением (1).

Построим примеры n-мерных полных полей. Если F — $(n-1)$-мерное полное поле, то поле рядов Лорана $F((X))$ — полное n-мерное поле. Напомним (см. [4]), что произвольное равнохарактеристическое полное дискретно нормированное поле с полем вычетов F изоморфно $F((X))$.

Пусть теперь F — произвольное полное поле с дискретным нормированием $w\ F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Положим

$$F\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i : c_i \in F,\ w(c_i) \geqslant c > -\infty,\ w(c_i) \xrightarrow{i \to -\infty} \infty \right\}.$$

Степенные ряды из $F\{\{t\}\}$ можно складывать и перемножать, и $F\{\{t\}\}$ превращается в поле. Пусть

$$v\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i\right) = \min_i w(c_i).$$

Тогда v — дискретное нормирование на $F\{\{t\}\}$, и $F\{\{t\}\}$ превращается в полное поле с полем вычетов $\overline{F}((\bar{t}))$. Таким образом, если F — $(n-1)$-мерное полное поле, то $F\{\{t\}\}$ — n-мерное полное поле.

Отметим, что если F — равнохарактеристическое поле, т. е. $F = F_0((X))$, то $F\{\{t\}\}$ канонически изоморфно $F_0((t))((X))$. Таким образом, $F\{\{t\}\}$ вызывает интерес только для разнохарактеристического поля F.

В разнохарактеристическом случае поля $F\{\{t\}\}$ играют важную роль ввиду наличия структурной теоремы (см. далее).

Совокупность элементов $a \in K$, удовлетворяющих условию $\overline{v}(a) \geqslant 0$, образует не зависящее от выбора локальных параметров кольцо нормирования $O_K = O$. Единственным максимальным идеалом этого кольца является

$$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M} = \{\, a \in O_K : \overline{v}(a) > 0 \,\}.$$

Пусть $1 \leqslant l \leqslant n$; $r_l, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$. Через $\mathfrak{P}_K(r_l, \ldots, r_n) = \mathfrak{P}(r_l, \ldots, r_n)$ обозначаем множество элементов $a \in K$, для которых $(v^{(l)}(a), \ldots, v^{(n)}(a)) \geqslant (r_l, \ldots, r_n)$. Если $r_l, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ и $(r_l, \ldots, r_n) > 0$ в $\mathbb{Z}^{n-l+1}$, то это множество является идеалом O_K. Все ненулевые идеалы O_K имеют такой вид.

Через $\mathcal{R}_K$ (или $\mathcal{R}$) будем обозначать подгруппу в K^*, состоящую из представителей Тейхмюллера ненулевых элементов последнего поля вычетов в K. Полагаем $U_K = O_K^*$ — группа единиц; $V_K = 1 + \mathfrak{M}_K$ — группа главных единиц; $U_K(\overline{r}) = 1 + \mathfrak{P}_K(\overline{r})$, где $\overline{r} \in \mathbb{Z}^l$, $1 \leqslant l \leqslant n$, $\overline{r} > 0$. При этом

$$K^* = \mathbb{Z}t_n \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}t_1 \oplus U_K; \qquad U_K = \mathcal{R}_K \oplus V_K.$$

Перейдем к рассмотрению расширений n-мерных полных полей. Пусть L/K — конечное расширение. Структура n-мерного полного поля на K однозначно определяет согласованную структуру на L. Если $t_{1,K}, \ldots, t_{n,K}; t_{1,L}, \ldots, t_{n,L}$ — соответствующие системы локальных параметров, $\overline{v}_K$ и $\overline{v}_L$ — определяемые ими нормирования, то для любого $a \in K$

$$\overline{v}_L(a) = \overline{v}_K(a) T(L/K),$$

где

$$T(L/K) = T(L/K;\, t_{1,K}, \ldots, t_{n,K};\, t_{1,L}, \ldots, t_{n,L}) = (v_L^{(j)}(t_{i,K}))_{i,j}$$

— нижнетреугольная матрица $n \times n$. В частности, в (1)

$$T = T(K/K;\, t_1, \ldots, t_n;\, t'_1, \ldots, t'_n).$$

Диагональные элементы в $T(L/K)$ не зависят от выбора локальных параметров и обозначаются $e_1(L/K)$, …, $e_n(L/K)$.

Пусть $K = K^{(n)}, K^{(n-1)}, \ldots, K^{(0)}$; $L = L^{(n)}, L^{(n-1)}, \ldots, L^{(0)}$ — цепочки полей вычетов для K и L. Пусть $f(L/K) = [L^{(0)}{:}K^{(0)}]$. Тогда легко видеть, что $[L^{(i)}{:}K^{(i)}] = f(L/K)e_1(L/K) \ldots e_i(L/K)$, $e(L^{(i)}/K^{(i)}) = e_i(L/K)$, $i = 1, \ldots, n$. В случае $[L{:}K] = f(L/K)$ будем говорить, что расширение L/K чисто неразветвленное. Расширение L/K вполне разветвленное, если $K^{(n-1)} = L^{(n-1)}$.

Сформулируем структурную теорему для n-мерных полных полей, которая развивает теорему А. Н. Паршина (см. [23]) и полностью доказана И. Б. Жуковым (см. [12]).

Теорема. *Пусть* $K = K^{(n)}$ *—* n*-мерное полное поле,* $K^{(n-1)}, \ldots, K^{(0)} = F$ *— поля вычетов. В случае* $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} F = p$ *обозначим через* $k_0 \hookrightarrow K$ *поле частных* $W(F)$.

1. Если $\operatorname{char} K = \operatorname{char} F$, *то* $K \approx F((t_1)) \ldots ((t_n))$.

2. Если $\operatorname{char} K^{(m)} = p$, $\operatorname{char} K^{(m+1)} = 0$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, *то* K *является конечным вполне разветвленным расширением стандартного поля вида* $k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_m\}\}((t_{m+2}))\dots((t_n))$, *где* k *— конечное расширение* k_0. *Кроме того, есть конечное расширение* K'/K *такое, что* K' *— стандартное и получается присоединением элемента, алгебраического над* k_0. *Более того, можно считать* $K' = K_1K_2$, *где* K_1/K *— круговое, а* K_2/K *— полуразветвленное, т.е.* $[K_2{:}K] = [K_2^{(m)}{:}K^{(m)}]^{sep}$.
3. Если $\operatorname{char} K^{(1)} = 0$, $\operatorname{char} K^{(0)} = p$, *то* $K \approx k((t_2))\dots((t_n))$, *где* $k = K^{(1)}$ *— конечное расширение* k_0.

Множество мультииндексов $I \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым набором, если для любого фиксированного множества целых $i_{s+1},\dots,i_n, 1 \leqslant s \leqslant n$ в множестве мультииндексов $\overline{r} = (r_1,\dots,r_s,r_{s+1},\dots,r_n)$ из I, для которых индексы $r_{s+1},\dots,r_n$ совпадают с индексами $i_{s+1},\dots,i_n$ соответственно, индекс r_s ограничен снизу, т.е. существует целое i такое, что $r_s \geqslant i$ для любого $\overline{r} = (r_1,\dots,r_s,i_{s+1},\dots,i_n)$ из I.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что на множестве $\mathbb{Z}^n$ задано не лексикографическое упорядочивание, а покомпонентное частичное упорядочивание, а также что на $\mathbb{Z}^n$ определены покомпонентные сложение и умножение на целое число.

Введем следующие обозначения : для $1 \leqslant s \leqslant n$ пусть $\overline{r}_s = (r_s,\dots,r_n)$, а для $1 \leqslant s \leqslant n$ пусть $\tilde{r}_s = (r_s,\dots,r_{n-1})$. Кроме того, мы будем писать $T^{\overline{r}_s}$ вместо $t_s^{r_s}\dots t_n^{r_n}$ и $T^{\tilde{r}_s}$ вместо $t_s^{r_s}\dots t_{n-1}^{r_{n-1}}$ для заданных переменных $t_1,\dots,t_n$ и мультииндекса $\overline{r}$ (причем $\overline{r}_1 = \overline{r}; \tilde{r}_1 = \tilde{r}$). Для элемента a, формально заданного как

$$a = \sum_{\overline{r}} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}},$$

при фиксированном $\overline{r}_s$ под $a^{(\overline{r}_s)}$ будем подразумевать коэффициент при $T^{\tilde{r}_s}$, а для

$$a = \sum_{\tilde{r}} a_{\tilde{r}} T^{\tilde{r}}$$

при фиксированном $\tilde{r}_s$ под $a_{\tilde{r}_s}$ будем подразумевать коэффициент при $T^{\tilde{r}_s}$.

§2. Сходимость последовательностей в поле $K = F((t_1))\dots((t_n))$

На протяжении этого параграфа мы считаем, что $K = F((t_1))\dots((t_n))$, где F — совершенное поле.

Пусть L — некоторое поле. Известно, что поле $L((t))$ рядов Лорана над L является дискретно нормированным полем, причем нормирование на нем задается формулой:

$$v\left(\sum_{r \geqslant r_0} a^r\right) = r_0, \text{ если } a^{r_0} \neq 0.$$

Если на поле L определена топология, то на поле $L((t))$ можно ввести топологию следующим образом: база окрестностей нуля есть множество всех подгрупп вида

$$U = \left\{ \sum_r a^{(r)} t^r : a^{(r)} \in U_r \right\},$$

где U_r — открытые подгруппы поля L, причем $U_r = L$ при достаточно больших r.

Теорема (2.1). *Пусть L — поле с заданной топологией, для которой выполнена первая аксиома отделимости. Пусть на $L((t))$ топология и нормирование заданы описанным выше способом. Рассмотрим последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ элементов поля $L((t))$, то есть элементов вида $a_m = \sum_{r\geqslant v(a_m)} a_m^{(r)} t^r$.*

Тогда следующая совокупность условий является необходимой и достаточной для сходимости a_m к 0:
1. $\inf_m v(a_m) = r_0 > -\infty$;
2. для любого $r \geqslant r_0$ имеем $a_m^{(r)} \xrightarrow{m\to+\infty} 0$.

Доказательство. Очевидно, что второе условие нашей теоремы является необходимым, так как мы можем выбрать произвольное U_r для каждого r.

Необходимость первого условия в общем виде доказана в [13], но мы проведем непосредственное доказательство для нашего случая.

Пусть первое условие не выполняется и $\inf_m v(a_m) = -\infty$. Тогда для каждого r_0 существует m такое, что $v(a_m) < r_0$. Можно выбрать m_1 такое, что $v(a_{m_1}) = q_1 < -1$; $m_2 > m_1$ такое, что $v(a_{m_2}) = q_2 < q_1$; …; $m_l > m_{l-1}$ такое, что $v(a_{m_l}) = q_l < q_{l-1}$, …

Значит, элементы $a_{m_l}^{(q_l)}$ отличны от нуля. Тогда по первой аксиоме отделимости эти элементы в поле L отделены от нуля некоторыми открытыми подгруппами $U_1, U_2, \dots$, и потому при всех l имеем $a_{m_l}^{(q_l)} \notin U_l$.

Построим в поле L следующую окрестность нуля U: при $r = q_l$ открытая подгруппа в L, соответствующая r, будет U_r, а иначе все поле L. Тогда ни одно $a_{m_l}^{(q_l)}$ не лежит в L. Следовательно, $a_m \overset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Необходимость первого условия доказана.

Теперь мы должны доказать достаточность условий.

Пусть U — окрестность нуля из нашей базы. Требуется показать, что при достаточно больших m все a_m лежат в U.

По первому условию $a_m^{(r)} = 0$ для всех m, если $r < r_0$. Но по определению топологии поля $L((t))$ существует r_1 такое, что $U_r = L$ для $r > r_1$. Итак, осталось проверить, что при достаточно больших m имеем $a_m^{(r)} \in U_r$ для $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$. Но для любого фиксированного r это верно по второму условию, а таких r конечное число. □

Вернемся к полю K. Топология многомерного полного поля отличается от обычной топологии дискретного нормирования и учитывает топологии полей вычетов. В нашем случае топология определяется рекуррентно, причем топология поля $L((t))$ задается описанным выше способом, а под топологией поля $F((t))$, где F — совершенное поле, подразумевается обычная топология дискретного нормирования на $F((t))$.

Легко видеть, что любой элемент поля K может быть представлен следующим образом :

$$a = \sum_{\overline{r}\in I} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}} =$$

$$= \sum_{r_n \geqslant v_n(a)} \sum_{r_{n-1}\geqslant v_{n-1}(a^{(r_n)})} \cdots \sum_{r_1\geqslant v_1(a^{(\overline{r}_2)})} a^{(r_1\dots r_n)} t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n},$$

где v_s есть нормирования поля $K_s = F((t_s))\dots((t_n))$, а I — некий допустимый набор мультииндексов.

Теорема (2.2). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ элементов поля K.*

Тогда следующая совокупность условий является необходимой и достаточной для сходимости a_m к 0:
1. $R_n = \inf_m v_n(a_m) > -\infty$;
2. для любого $s = n,\dots,3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m v_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s)}) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2, m) = v_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности поля.

При $n = 1$ условия теоремы сводятся к одному условию:

$$v_1(a_m) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

которое равносильно условию сходимости последовательности a_m к 0 в топологии дискретного нормирования.

Индукционный переход легко осуществляется с помощью теоремы 2.1. $\square$

Замечание. *Коэффициент $a^{(\overline{r}_s)}$ отличен от нуля не при всех $\overline{r}_s$, и потому в формулировке теоремы 2.2 можно ограничиться рассмотрением индексов, удовлетворяющих неравенствам:*
1.$r_n \geqslant R_n$,
2. для $s = n,\dots,2$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$r_{s-1} \geqslant R_{s-1}(\overline{r}_s).$$

§3. Сходимость последовательностей в поле $K = k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$

На протяжении этого параграфа мы считаем, что $K = k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$, где k — полное дискретно нормированное поле с нормированием v.

Очевидно, что любой элемент a, принадлежащий полю K, может быть представлен в виде ряда

$$a = \sum_{\tilde{r}} a_{\tilde{r}} T^{\tilde{r}}, \tag{2}$$

где $a_{\tilde{r}} \in k$.

Предложение (3.1). *Ряд (2) представляет элемент поля K в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*
1. существует l_0 такое, что при всех $\tilde{r}$ имеем

$$v(a_{\tilde{r}}) \geqslant l_0;$$

2. для $s = n, \dots, 2$ при всех $\tilde{r}_s$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{s-2}} v(a_{\tilde{r}}) \overset{r_{s-1}\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Доказательство проводится несложной индукцией по размерности поля с использованием определения поля $L\{\{t\}\}$. □

Существует еще один вариант представления элемента поля K в виде ряда.

Пусть π — униформизующая дискретно нормированного поля k. Тогда любой элемент α, принадлежащий полю k, может быть представлен в виде ряда

$$\alpha = \sum_{r \geqslant v(\alpha)} \alpha^{(r)} \pi^r,$$

где $\alpha^{(r)} \in B$ — некоторой системе представителей поля F в поле k. В частности, для любого элемента $a \in K$ при всех $\tilde{r}$ имеем

$$a_{\tilde{r}} = \sum_{r_n \geqslant v(a_{\tilde{r}})} a^{(\overline{r})} \pi^{r_n}.$$

Введем обозначение $t_n = \pi$. Тогда $t_1, \dots, t_n$ — локальные параметры поля K и

$$a = \sum_{\overline{r}} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}}.$$

По условию предложения 3.1 существует l_0 такое, что при всех $\tilde{r}$ имеем

$$v(a_{\tilde{r}}) \geqslant l_0.$$

Наибольшее из возможных значений l_0 есть $v_n(a)$. Итак, $r_n \geqslant v_n(a)$. Для удобства дальнейших выкладок переобозначим $v_n(a)$ через $w_n(a)$.

Теперь фиксируем некое значение $r_n \geqslant w_n(a)$. По условию предложения 3.1 существует $M(r_n)$ такое, что при всех $r_{n-1} < M(r_n)$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{n-2}} v(a_{\tilde r}) > r_n.$$

Наибольшее из возможных значений $M(r_n)$ обозначим $w_{n-1}(a^{(\overline{r}_n)})$. Но в нашем разложении $r_n \geqslant v(a_{\tilde r})$, и потому $r_{n-1} \geqslant w_{n-1}(a^{(\overline{r}_n)})$.

Аналогично для $s = n-2,\dots,1$ при всех $r_n \geqslant w_n(a)$, $r_{n-1} \geqslant w_{n-1}(a^{(\overline{r}_n)})$,..., $r_{s+1} \geqslant w_{s+1}(a^{(\overline{r}_{s+2})})$ видим, что при $r_s < M(r_{s+1},\dots,r_n)$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{s-1}} v(a_{\tilde r}) > r_n.$$

Обозначая наибольшее из возможных значений $M(r_{s+1},\dots,r_n)$ через $w_s(a^{(\overline{r}_{s+1})})$, получаем , что любой элемент поля K может быть представлен следующим образом:

$$a = \sum_{\overline{r}\in I} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}} =$$

$$= \sum_{r_n \geqslant w_n(a)} \sum_{r_{n-1}\geqslant w_{n-1}(a^{(r_n)})} \cdots \sum_{r_1 \geqslant w_1(a^{(\overline{r}_2)})} a^{(r_1\dots r_n)} t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n},$$

где I — некоторый допустимый набор мультииндексов, $a^{(\overline{r})} \in B$.

Итак, для любого $a \in K$ определены $w_n(a),\dots,w_1(a^{(\overline{r}_2)})$.

Предложение (3.2). *Пусть $a, b \in K$ и*

$$a = \sum_{\overline{r}\in I} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}} =$$

$$= \sum_{r_n \geqslant w_n(a)} \sum_{r_{n-1}\geqslant w_{n-1}(a^{(r_n)})} \cdots \sum_{r_1 \geqslant w_1(a^{(\overline{r}_2)})} a^{(r_1\dots r_n)} t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n},$$

$$b = \sum_{\overline{r}\in I} b^{(\overline{r})} T^{\overline{r}} =$$

$$= \sum_{r_n \geqslant w_n(b)} \sum_{r_{n-1}\geqslant w_{n-1}(b^{(r_n)})} \cdots \sum_{r_1 \geqslant w_1(b^{(\overline{r}_2)})} b^{(r_1\dots r_n)} t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n}.$$

Тогда для $s = n,\dots,1$ при всех $\overline{r}_{s+1}$ имеем

$$w_s((a+b)^{(\overline{r}_{s+1})}) \geqslant \inf(w_s(a^{(\overline{r}_{s+1})}), w_s(b^{(\overline{r}_{s+1})})),$$

$$w_s((ab)^{(\overline{r}_{s+1})})) \geqslant \inf_{\overline{i}_{s+1}+\overline{j}_{s+1}=\overline{r}_{s+1}} (w_s(a^{(\overline{i}_{s+1})}) + w_s(b^{(\overline{j}_{s+1})})).$$

Доказательство. По свойствам нормирования

$$w_n(a+b) \geqslant \inf(w_n(a), w_n(b)).$$

Кроме того, для $s = n-1,\dots,1$ при всех $\overline{r}_{s+1}$ выполнены следующие соотношения:

1.для $r_s < w_s(a^{(\overline{r}_{s+1})})$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{s-1}} v(a_{\tilde{r}}) > r_n,$$

2.для $r_s < w_s(b^{(\overline{r}_{s+1})})$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{s-1}} v(b_{\tilde{r}}) > r_n.$$

Следовательно, для $r_s < \inf(w_s(a^{(\overline{r}_{s+1})}), w_s(b^{(\overline{r}_{s+1})}))$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{s-1}} v((a+b)_{\tilde{r}}) > r_n.$$

Поэтому

$$w_s((a+b)^{(\overline{r}_{s+1})}) \geqslant \inf(w_s(a^{(\overline{r}_{s+1})}), w_s(b^{(\overline{r}_{s+1})})).$$

Далее, по свойствам нормирования $w_n(ab) \geqslant w_n(a)+w_n(b)$, а по построению w_s при всех $\overline{r}_s$ выполнены следующие соотношения:

для $r_s < \inf_{\overline{i}_{s+1}+\overline{j}_{s+1}=\overline{r}_{s+1}}(w_s(a^{(\overline{i}_{s+1})}) + w_s(b^{(\overline{j}_{s+1})}))$ имеем

$$\inf_{r_1,\dots,r_{s-1}} v((ab)_{\tilde{r}}) > r_n.$$

Предложение доказано. □

Поскольку функции $w_s(a^{(\overline{r}_s)})$ обладают свойствами нормирования, мы в дальнейшем будем называть их псевдонормированиями.

Топология поля K вводится рекуррентным способом, а именно для поля $L\{\{t\}\}$, где на поле L определена топология, база окрестностей нуля есть множество всех подгрупп вида

$$U = \Big\{ \sum_r a_r t^r : a_r \in U_r \Big\},$$

где U_r — открытые подгруппы в L и

1. существует l_0, такое, что для любого r имеет место $\mathfrak{P}_L(l_0) \subseteq U_r$,

2. любое $\mathfrak{P}_L(l)$ лежит в U_r при $r \geqslant r(l)$, где

$$\mathfrak{P}_L(l) = \{\, a \in L : v(a) \geqslant l \,\}.$$

Лемма (3.1). *U — открытая подгруппа в K из определенной выше базы окрестностей нуля тогда и только тогда, когда существует набор чисел $l_{\boldsymbol{r}}$ такой, что выполнена следующая совокупнсть условий:*

1. для любого $a \in U$ при всех $\boldsymbol{r}$ имеем $v(a_{\boldsymbol{r}}) \geqslant l_{\boldsymbol{r}}$,

2. существует l_0 такое, что для любого $\boldsymbol{r}$ имеет место $l_{\boldsymbol{r}} \leqslant l_0$,

3. для $s = n-1, \dots, 1$ при всех $\boldsymbol{r}_{s+1}$ имеем

$$\sup_{r_1,\dots,r_{s-1}} l_{\boldsymbol{r}} \xrightarrow{r_s \to +\infty} -\infty.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по размерности n поля K.

При $n = 2$ условия леммы принимают вид:

1. при всех r имеем $v(a_r) \geqslant l_r$,

2. существует l_0 такое, что для любого r имеет место $\mathfrak{P}_k(l_0) \subseteq \mathfrak{P}_k(l_r)$,

3. $l_r \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Но в поле k открытые подгруппы совпадают с идеалами, и потому, обозначая $\mathfrak{P}_k(l_r)$ через U_r, имеем в точности определение базы окрестностей нуля в $k\{\{t\}\}$.

Теперь считаем, что утверждение леммы доказано для поля $K_{n-1} = k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-2}\}\}$. Тогда открытые подгруппы поля K из нашей базы окрестнстей нуля состоят из тех и только тех элементов a, которые имеют вид $a = \sum_{r_{n-1}} a_{r_{n-1}} t_{n-1}^{r_{n-1}}$, где $a_{r_{n-1}} \in U_{r_{n-1}}$, и для которых выполнена следующая совокупность условий:

1. при всех $\mathtt{r}$ имеем $v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant l_{\mathtt{r}}$,

2. для любого r_{n-1} существует $l_0(r_{n-1})$ такое, что при всех $r_1, \dots, r_{n-2}$ имеет место $l_{\mathtt{r}} \leqslant l_0(r_{n-1})$,

3. для любого r_{n-1} для $s = n-2, \dots, 1$ при всех $r_{s+1}, \dots, r_{n-2}$ имеем

$$\sup_{r_2,\dots,r_{s-1}} l_{\mathtt{r}} \overset{r_s\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

4. существует l_0 такое, что для любого r_{n-1} имеет место $\mathfrak{P}_{K_{n-1}}(l_0) \subseteq U_{r_{n-1}}$,

5. для любого l существует $r_{n-1}(l)$ такое, что при $r_{n-1} \geqslant r_{n-1}(l)$ имеет место $\mathfrak{P}_{K_{n-1}}(l) \subseteq U_{r_{n-1}}$.

Объединение этих условий и дает требуемое утверждение. □

Теорема (3.1). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ элементов поля K.*

Тогда следующая совокупность условий является необходимой и достаточной для сходимости a_m к 0:

1. $\tilde{R}_n = \inf_m v_n(a_m) > -\infty$;

2. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\tilde{R}_1(I, m) = \inf_{-\boldsymbol{r}\in I} v(a_{m\boldsymbol{r}}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Замечание. *Используя определение допустимого набора, второе условие теоремы можно переформулировать таким образом:*

для произвольно выбранных целого числа I_{n-1} и целочисленных функций целого аргумента $I_s(\tilde{i}_{s+1}), s = n-2, \dots, 1,$ имеем:

$$\inf_{r_{n-1}\leqslant I_{n-1}} \dots \inf_{r_1\leqslant I_1(r_2,\dots,r_{n-1})} v(a_{m\boldsymbol{r}}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. По лемме 3.1 получаем, что $a_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ в том и только в том случае, когда для любого множества $l_{\mathtt{r}}$, удовлетворяющего условиям 2 и 3 леммы, при достаточно больших m для всех $\mathtt{r}$ имеем

$$v(a_{m\mathbf{r}}) \geqslant l_{\mathbf{r}}.$$

Необходимость второго условия теоремы очевидна, ибо для любого допустимого набора I мы можем выбрать такое множество $l_{\mathbf{r}}$, что $l_{\mathbf{r}} = l$, если $-\mathbf{r} \in I$, и при этом множество $l_{\mathbf{r}}$ будет удовлетворять требуемым условиям.

Докажем необходимость первого условия.

Пусть первое условие не выполняется и $\inf_m v_n(a_m) = -\infty$. Тогда для каждого r_0 существует m такое, что $v_n(a_m) < r_0$. Можно выбрать m_1 такое, что $v(a_{m_1\mathbf{r}(m_1)}) = q_1 < -1$; $m_2 > m_1$ такое, что $v(a_{m_2\mathbf{r}(m_2)}) = q_2 < q_1$; $\dots$; $m_l > m_{l-1}$ такое, что $v(a_{m_l\mathbf{r}(m_l)}) = q_l < q_{l-1}$, $\dots$

Для простоты последовательность $\{a_{m_l}\}_{l\geqslant 1}$ обозначим снова $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$. Тогда $v(a_{m\mathbf{r}(m)})$ строго убывает по m.

Если существует допустимый набор I такой, что все $-\mathbf{r}(m) \in I$, то для любого m имеем

$$\inf_{-\mathbf{r}\in I} v(a_{m\mathbf{r}}) > -1,$$

что противоречит второму условию теоремы. Следовательно, хотя бы одна компонента векторов $-\mathbf{r}(m)$ не ограничена сверху. Поэтому мы можем выбрать подпоследовательность нашей последовательности (обозначаемую снова $\{a_m\}$) такую, что все $\mathbf{r}(m)$ различны.

Теперь построим множество $l_{\mathbf{r}}$ следующим образом: $l_{\mathbf{r}(m)} = v(a_{m\mathbf{r}(m)})$ и $l_{\mathbf{r}}$ удовлетворяет условиям 2 и 3 леммы 3.1. Очевидно, что для этого множества требование того, что при всех $\mathbf{r}$ и достаточно больших m имеем

$$v(a_{m\mathbf{r}(m)}) \geqslant l_{\mathbf{r}},$$

выполнено не будет, и потому мы придем к противоречию.

Осталось проверить, что описанное множество действительно может быть построено, то есть что наложенные нами на $l_{\mathbf{r}}$ ограничения согласованы с условиями 2 и 3 леммы 3.1.

Так как

$$v(a_{m\mathbf{r}}) < -1,$$

то $l_{\mathbf{r}(m)} < -1$ и второе условие не нарушено.

Если последовательность $r_{n-1}(m)$ ограничена сверху по m, то противоречия с условием

$$\sup_{r_1,\dots,r_{n-2}} l_{\mathbf{r}} \overset{r_{n-1}\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

быть не может. Если же последовательность $r_{n-1}(m)$ не ограничена сверху по m, то можно выбрать подпоследовательность последовательности $\{a_m\}$ (опять обозначаемую $\{a_m\}$) такую, что $r_{n-1}(m)$ строго возрастает по m и при всех m имеем $r_{n-1}(m) \geqslant 1$. Поэтому $m > M$ тогда и только тогда, когда $r_{n-1}(m) > R$ (при соответствующем выборе M и R). Но по выбору $\mathbf{r}(m)$ имеем

$$l_{\mathbf{r}(m)} = v(a_{m\mathbf{r}(m)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{r_1,\dots,r_{n-2}} l_{\mathtt{r}(m)} \overset{r_{n-1}(m)\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Далее, при $s = n-2,\dots,1$, фиксируя $\mathtt{r}_{s+1}$ и в точности повторяя предыдущие рассуждения для компоненты r_s, получаем, что действительно можно построить множество $l_{\mathtt{r}}$ требуемого вида.

Необходимость доказана. Теперь докажем достаточность условий нашей теоремы.

Фиксируем множество $l_{\mathtt{r}}$ соответствующего вида. Тогда по третьему условию леммы 3.1 для при всех $\mathtt{r}_{s+1}$ можно выбрать $I_s(\mathtt{r}_{s+1})$ такое, что при $r_s > I_s(\mathtt{r}_{s+1})$ имеем $l_{\mathtt{r}} < \tilde{R}_n$, где $\tilde{R}_n$ определено в первом условии теоремы. Значит, при всех значениях $\mathtt{r}$ для любого m выполняется неравенство

$$l_{\mathtt{r}} \leqslant \tilde{R}_n \leqslant v_n(a_m) \leqslant v(a_{m\mathtt{r}}).$$

Но по второму условию леммы 3.1 при всех $\mathtt{r}$ верно, что $l_{\mathtt{r}} \leqslant l_0$, а по второму условию теоремы можно выбрать M такое, что при $m > M$ имеем

$$\inf_{r_{n-1}\leqslant I_{n-1}} \dots \inf_{r_1 \leqslant I_1(r_2,\dots,r_{n-1})} v(a_{m\mathtt{r}}) > l_0.$$

Это завершает доказательство. □

Теорема (3.2). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ элементов поля K.*

Тогда следующая совокупность условий является необходимой и достаточной для сходимости a_m к 0:
1. $R_n = \inf_m w_n(a_m) > -\infty$;
2. для любого $s = n,\dots,3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s)}) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2, m) = w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Проверим, что условия теорем 3.1 и 3.2 эквивалентны.

Прежде всего, поскольку $w_n(a) = v_n(a)$, очевидно, что $R_n = \tilde{R}_n$, то есть что эквивалентны первые условия наших теорем.

Докажем, что из выполнения условий теоремы 3.2 следует выполнение условий теоремы 3.1.

Итак, пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда по определению псевдонормирований w_s верно следующее:

1. при всех $\mathtt{r}$ имеем

$$v(a_{m\mathtt{r}}) \geqslant R_n;$$

2. для $s = n,\dots,3$ при всех $\overline{r}_s$ и m для $r_{s-1} < R_{s-1}(\overline{r}_s)$ имеем

$$v(a_{m\mathtt{r}}) > r_n;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ и M для $m > m_0(\overline{r}_2, M)$ и $r_1 \leqslant M$ имеем

$$v(a_{m\mathtt{r}}) > r_n.$$

Зададим произвольные $r_n, I_{n-1}, \dots, I_1(\tilde{i}_2)$. Требуется показать, что для $r_{n-1} \leqslant I_{n-1}, \dots, r_1 \leqslant I_1(\tilde{i}_2)$ и $m > m_1(I_1, \dots, I_n, r_n)$ имеем

$$v(a_{m\mathtt{r}}) > r_n.$$

По второму условию теоремы достаточно рассмотреть случай, когда $r_{n-1} \geqslant R_{n-1}(\overline{r}_n), \dots, r_2 \geqslant R_2(\overline{r}_3)$.

Следовательно, можно считать, что верны соотношения:

$$\begin{aligned} R_{n-1}(\overline{r}_n) \leqslant r_{n-1} &\leqslant I_{n-1} \\ &\dots \\ R_2(\overline{r}_3) \leqslant r_2 &\leqslant I_2(\tilde{r}_3). \end{aligned}$$

Поэтому при фиксированном r_n подходящих наборов $\mathtt{r}$ имеется лишь конечное число.

Возьмем

$$M = \sup_{\substack{R_{n-1}(\overline{r}_n) \leqslant r_{n-1} \leqslant I_{n-1} \\ \dots \\ R_2(\overline{r}_3) \leqslant r_2 \leqslant I_2(\tilde{r}_3)}} I_1(\mathtt{r}_2) = M(I_1, \dots, I_n, r_n).$$

По третьему условию при всех $\overline{r}_2$ для $m > m_0(\overline{r}_2, M) = m_0(I_1, \dots, I_{n-1}, \overline{r}_2)$ и $r_1 \leqslant M$ имеем $v(a_{m\mathtt{r}}) > r_n$.

Пусть

$$m_1 = \sup_{\substack{R_{n-1}(\overline{r}_n) \leqslant r_{n-1} \leqslant I_{n-1} \\ \dots \\ R_2(\overline{r}_3) \leqslant r_2 \leqslant I_2(\tilde{r}_3)}} m_0(I_1, \dots, I_{n-1}, \overline{r}_2) = m_1(I_1, \dots, I_{n-1}, r_n).$$

Тогда для $r_{n-1} \leqslant I_{n-1}, \dots, r_1 \leqslant I_1(\tilde{i}_2)$ и $m > m_1(I_1, \dots, I_n, r_n)$ имеем

$$v(a_{m\mathtt{r}}) > r_n,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что из выполнения условий теоремы 3.1 следует выполнение второго условия теоремы 3.2.

Пусть это не так, т.е. для последовательности $\{a_m\}$ выполнено второе условие теоремы 3.1, но при этом для некоторого s, $(3 \leqslant s \leqslant n)$ существует $\overline{r}_s^{(0)}$ такое, что множество $w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s^{(0)})})$ не ограничено снизу. Тогда можно выбрать подпоследовательность последовательности $\{a_m\}$ (опять обозначаемую $\{a_m\}$) такую, что все $w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s^{(0)})}) \leqslant 0$ и $w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s^{(0)})})$ строго убывает как функция от m. Следовательно, для каждого значения i_{s-1} этой функции однозначно определено $m(i_{s-1})$. Но по свойствам псевдонормирований для любого m существуют $R_{s-2}^{(m)}(\overline{r}_s^{(0)}), \ldots, R_1^{(m)}(\overline{r}_s^{(0)})$ такие, что

$$v\big(a_{mR_1^{(m)}(\overline{r}_s^{(0)})\ldots R_{s-2}^{(m)}(\overline{r}_s^{(0)})w_{s-1}(a_m^{(r_s^{(0)})})r_s^{(0)}\ldots r_{n-1}^{(0)}}\big) \leqslant r_n^{(0)}.$$

Выберем $I_{n-1}, \ldots, I_1(\tilde{i}_2)$ следующим образом: $I_{n-1} = r_{n-1}^{(0)}, \ldots, I_s(\tilde{i}_{s+1}) = r_s^{(0)}$, $I_{s-1}(\tilde{i}_s) = 0$ для всех значений аргумента, $I_{s-2}(\tilde{i}_{s-1}) = R_{s-2}^{(m(i_{s-1}))}(\overline{r}_s^{(0)}), \ldots, I_1(\tilde{i}_2) = R_1^{(m(i_{s-1}))}(\overline{r}_s^{(0)})$ для таких значений аргумента, при которых определено $m(i_{s-1})$. Для остальных значений аргумента можно выбрать значения функций $I_{s-2}, \ldots, I_1$ произвольно.

Тогда по второму условию теоремы 3.1 для $r_{n-1} \leqslant I_{n-1}, \ldots, r_1 \leqslant I_1(\tilde{i}_2)$ и $m > m_1(I_1, \ldots, I_n, r_n^{(0)}) = m_1(\overline{r}_s^{(0)})$ имеем

$$v(a_{m\mathfrak{r}}) > r_n^{(0)},$$

что противоречит свойству псевдонормирования. Следовательно, наше допущение неверно и из выполнения условий теоремы 3.1 следует выполнение второго условия теоремы 3.2.

Осталось показать, что из выполнения условий теоремы 3.1 следует также выполнение третьего условия теоремы 3.2.

При заданных $\overline{r}_2$ и M пусть для всех значений аргумента $I_{n-1} = r_{n-1}, \ldots, I_2 = r_2, I_1 = M$. Тогда по второму условию теоремы 3.1 для $m > m_1(\overline{r}_2, M)$ и $r_1 \leqslant M$ имеем

$$v(a_{m\mathfrak{r}}) > r_n.$$

Следовательно, при $m > m_1(\overline{r}_2, M)$ верно, что $w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) > M$. Это в точности соответствует тому, что требовалось доказать. $\square$

§4. Сходимость последовательностей, рядов и суперпозиций рядов в многомерном полном поле

В этом параграфе K — многомерное полное поле общего вида. Топология этого поля отличается от топологии дискретного нормирования и учитывает топологии полей вычетов. Будем использовать рекурсию по размерности поля и введем на одномерных полях обычную топологию дискретного нормирования.

Пусть $\operatorname{char} K = \operatorname{char} \overline{K}$, т. е. $K = \overline{K}((X))$, и пусть топология $\overline{K}$ уже определена. Для последовательности окрестностей нуля $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ в $\overline{K}$, где $U_i = \overline{K}$ при всех достаточно больших i, положим

$$\mathcal{U} = \Big\{ \sum_{i \gg -\infty} a_i X^i \;\Big|\; a_i \in U_i \Big\}$$

Все множества вида $\mathcal{U}$ образуют базис окрестностей нуля в аддитивной топологической группе K.

Пусть теперь $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$, π — простой в K. Снова в качестве базиса окрестностей нуля в K берутся все множества вида $\mathcal{U}$, но теперь $\mathcal{U}$ состоит из всех сумм вида $\sum_{i \gg -\infty} h(a_i)\pi^i$, где $h\,\overline{K} \to K$ — подъем (т. е. отображение со свойством $\overline{h(a)} = a$). Подъем h должен быть достаточно хорошим, и в этом заключается основная трудность при построении топологии на K. Однако в случае стандартного поля $K = k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$, где k одномерно, имеем $\overline{K} = \overline{k}((\overline{t_1})) \dots ((\overline{t_{n-1}}))$, и можно положить

$$h\Big(\sum_{\overline{r}} \mathrm{th}_{\overline{r}}\, \overline{t_1}^{r_1} \dots \overline{t_{n-1}}^{r_{n-1}}\Big) = \sum_{\overline{r}} [\mathrm{th}_{\overline{r}}] t_1^{r_1} \dots t_{n-1}^{r_{n-1}}.$$

(Здесь $[\mathrm{th}_{\overline{r}}]$ означает представитель Тейхмюллера элемента $\mathrm{th}_{\overline{r}}$.) Отметим, что даже в случае стандартного поля <правильный> подъем зависит по крайней мере от $n-1$ первых локальных параметров. Чтобы определить <правильный> подъем в общем случае, необходимо ввести в рассмотрение обобщенные локальные параметры, которые фактически представляют собой $n-1$ первых локальных параметров некоторого подполя.

Для каждой системы обобщенных локальных параметров $t_1, \dots, t_{n-1}$ поля K можно превратить K в топологическое пространство $K\mathtt{t}$, причем соответствующая топология реально не будет зависеть от выбора $t_1, \dots, t_{n-1}$. Более того, для конечного расширения L/K топологии на L и K согласованы (см. [13]).

Используя структурную теорему для многомерных полных полей (см. теорему первого параграфа), получаем, что топологию поля K можно считать индуцированной топологией некоторого стандартного многомерного полного поля $\tilde{K} = k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_m\}\}((t_{m+2})) \dots ((t_n))$. Зафиксируем вложение $K \subseteq \tilde{K}$. Пусть t_{m+1} — униформизующая поля k. Тогда, используя результаты предыдущих параграфов, получаем, что

$$a = \sum_{\overline{r} \in I} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}} =$$

$$= \sum_{r_n \geqslant w_n(a)} \ \sum_{r_{n-1} \geqslant w_{n-1}(a^{(r_n)})} \cdots \sum_{r_1 \geqslant w_1(a^{(\overline{r}_2)})} a^{(r_1 \dots r_n)} t_1^{(r_1)} \dots t_n^{(r_n)},$$

где $a^{(\overline{r})} \in \mathcal{R}_{\tilde{K}} \cup \{0\}$, I — допустимый набор, а для псевдонормирований w_s имеют место те же свойства, что и для описанных в §3 (причем w_s могут совпадать с v_s — нормированиями полей $\tilde{K}_s$.)

Теорема (4.1). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m \geqslant 1}$ элементов поля K.*

Тогда следующая совокупность условий является необходимой и достаточной для сходимости a_m к 0:
1. $R_n = \inf_m w_n(a_m) > -\infty$;

2. для любого $s = n, \dots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s)}) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2, m) = w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Это очевидное следствие теорем 2.2 и 3.2.

Замечание. *Коэффициент $a^{(\overline{r}_s)}$ отличен от нуля не при всех $\overline{r}_s$, и потому в формулировке теоремы 2.2 можно ограничиться рассмотрением индексов, удовлетворяющих неравенствам:*
1.$r_n \geqslant R_n$,
2. для $s = n, \dots, 2$ при всех $\overline{r}_s$ имеем $r_{s-1} \geqslant R_{s-1}(\overline{r}_s)$.

Аналогичное утверждение верно и для последующих теорем.

Следствие. *Пусть $a(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_m X^m$ — ряд над K, $x \in K$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $a(X)$ при подстановке вместо X элемента x:*
1. $R_n = \inf_m (v_n(a_m) + m v_n(x)) > -\infty$;
2. для любого $s = n, \dots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m \inf_{\bar{l}_s + \bar{l}_s^{(1)} + \dots + \bar{l}_s^{(m)} \leqslant \overline{r}_s} \big(w_{s-1}(a_m^{(\bar{l}_s)}) +$$

$$+ w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(1)})}) + \dots + w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(m)})}) \big) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2, m) = \inf_{\bar{l}_2 + \bar{l}_2^{(1)} + \dots + \bar{l}_2^{(m)} \leqslant \overline{r}_2} \big(w_1(a_m^{(\bar{l}_2)}) +$$

$$+ w_1(x^{(\bar{l}_2^{(1)})}) + \dots + w_1(x^{(\bar{l}_2^{(m)})}) \big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Это утверждение очевидным образом следует из теоремы 4.1 и полноты поля K.

Теорема (4.2). *Пусть*

$$a(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_m X^n, \qquad b(X) = \sum_{m\geqslant 1} b_m X^m$$

— ряды над K,

$$c(X) = (a \circ b)(X) = \sum_{m\geqslant 1} c_m X^m$$

— суперпозиция $a(X)$ и $b(X)$, $x \in K$.

Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $c(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $a(b(x))$:
1. $R_n = \inf_m \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m}} (v_n(a_i b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_i}) + m v_n(x)) > -\infty$;

2. для любого $s = n, \dots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \\ = \inf_m \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m \\ \bar{l}_s+\bar{l}_s^{(1)}+\dots+\bar{l}_s^{(i)}+\overline{f}_s^{(1)}+\dots+\overline{f}_s^{(m)}\leqslant\overline{r}_s}} \big(w_{s-1}(a_m^{(\bar{l}_s)})+ \\ +w_{s-1}(b_{\lambda_1}^{(\bar{l}_s^{(1)})}) + \dots + w_{s-1}(b_{\lambda_i}^{(\bar{l}_s^{(i)})})+ \\ +w_{s-1}(x^{(\overline{f}_s^{(1)})}) + \dots + w_{s-1}(x^{(\overline{f}_s^{(m)})})\big) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2, m) = \\ = \inf_m \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m \\ \bar{l}_2+\bar{l}_2^{(1)}+\dots+\bar{l}_2^{(i)}+\overline{f}_s^{(1)}+\dots+\overline{f}_s^{(m)}\leqslant\overline{r}_2}} \big(w_1(a_m^{(\bar{l}_2)})+ \\ +w_1(b_{\lambda_1}^{(\bar{l}_2^{(1)})}) + \dots + w_1(b_{\lambda_i}^{(\bar{l}_2^{(i)})})+ \\ +w_1(x^{(\overline{f}_2^{(1)})}) + \dots + w_1(x^{(\overline{f}_2^{(m)})})\big) \xrightarrow{m\to+\infty} +\infty.$$

Доказательство.

$$c_m = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_i\bigg(\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m} b_{\lambda_1}\dots b_{\lambda_i}\bigg).$$

Следовательно,

$$w_{s-1}(c_m^{(\overline{r}_s)}) \geqslant \\ \geqslant \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m \\ \bar{l}_s+\bar{l}_s^{(1)}+\dots+\bar{l}_s^{(m)}=\overline{r}_s}} (w_{s-1}(a_m^{(\bar{l}_s)}) + w_{s-1}(b_{\lambda_1}^{(\bar{l}_s^{(1)})}) + \dots + w_{s-1}(b_{\lambda_i}^{(\bar{l}_s^{(i)})})).$$

Таким образом, $c(x)$ сходится по следствию теоремы 4.1. Надо показать, что $c(x) = a(b(x))$.

Положив в условии $i = 1$ и фиксировав некое $\mathtt{l}$, видим, что

1. $\inf_m(v_n(b_m) + mv_n(x)) > -\infty$;

2. для любого $s = n, \dots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m \inf_{\bar{l}_s+\bar{l}_s^{(1)}+\dots+\bar{l}_s^{(m)}\leqslant\overline{r}_s} \big(w_{s-1}(b_m^{(\bar{l}_s)})+ \\ +w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(1)})}) + \dots + w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(m)})})\big) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2, m) = \inf_{\bar{l}_2+\bar{l}_2^{(1)}+\dots+\bar{l}_2^{(m)}\leqslant\overline{r}_2} \big(w_1(b_m^{(\bar{l}_2)})+$$
$$+w_1(x^{(\bar{l}_2^{(1)})}) + \dots + w_1(x^{(\bar{l}_2^{(m)})})\big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Таким образом, $b(x)$ сходится по следствию теоремы 4.1. Далее,

$$a(b(x)) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{i=1}^{j} a_i(b(x))^i.$$

Введем ряды

$$d_j(X) = \sum_{m\geqslant 1} d_{jm}X^m = \sum_{i=1}^{j} a_i(b(X))^i.$$

Очевидно, что $d_{jm} = c_m$ при $j \geqslant m$ и что $d_j(x)$ конечно при наших условиях.

Пусть $c(x)-d_j(x) = g_j$. Мы должны доказать, что $g_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Легко видеть, что для любого $s = n, \dots, 2$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$g_j^{(\overline{r}_s)} = \sum_{\substack{m\geqslant j+1\\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m\\ \bar{l}_s+\bar{l}_s^{(1)}+\dots+\bar{l}_s^{(i)}+\overline{f}_s^{(1)}+\dots+\overline{f}_s^{(m)}=\overline{r}_s}} a_i^{(\bar{l}_s)} b_{\lambda_1}^{(\bar{l}_s^{(1)})} \dots b_{\lambda_i}^{(\bar{l}_s^{(i)})} \times$$
$$\times x^{(\overline{f}_s^{(1)})} \dots x^{(\overline{f}_s^{(m)})}.$$

Воспользуемся для последовательности $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ теоремой 4.1. Ограниченность снизу по j соответствующих значений псевдонормирований сразу следует из условий нашей теоремы и свойств псевдонормирований. Теперь фиксируем некое $\overline{r}_2$. По третьему условию теоремы для любого N существует m_0 такое, что при $m > m_0$ имеем $R_1(\overline{r}_2, m) > N$. Значит,

$$\inf_{m>m_0} R_1(\overline{r}_2, m) > N.$$

Но

$$w_1(g_j^{(\overline{r}_2)}) \geqslant \inf_{j>m_0} R_1(\overline{r}_2, m),$$

поэтому при $j > m_0$ выполнено неравенство $w_1(g_j^{(\overline{r}_2)}) > N$, что и завершает доказательство. □

§5. Сходимость бесконечных произведений элементов в многомерном полном поле

и бесконечных произведений рядов над многомерным полным полем

Предложение (5.1). *В терминах псевдонормирований имеем следующие определения кольца нормирования O и максимального идеала $\mathfrak{M}$ многомерного полного поля:*

$$O = \{a \in K : w_n(a) \geqslant 0, w_{n-1}(a^{(0)}) \geqslant 0, \ldots, w_1(a^{(\bar\zeta_2)}) \geqslant 0\};$$

$$\mathfrak{M} = \{a \in K : w_n(a) \geqslant 0, w_{n-1}(a^{(0)}) \geqslant 0, \ldots, w_1(a^{(\bar\zeta_2)}) \geqslant 1\}.$$

Доказательство. По определению кольца нормирования многомерного полного поля $a \in O$ в том и только в том случае, когда $\overline{v}(a) \geqslant \overline{0}$ в смысле лексикографического упорядочивания. Это значит, что либо все $v^{(s)}(a) = 0$, либо существует s такое, что

$$v^{(n)}(a) = \cdots = v^{(s+1)}(a) = 0, v^{(s)}(a) \geqslant 1.$$

Пусть $a \in O$.Если $v^{(n)}(a) \geqslant 1$, то $w_n(a) = v_n(a) \geqslant 1$ и потому $w_s(a^{(\bar\zeta_{s+1})}) = +\infty$. Если же $v^{(n)}(a) = 0$, то $w_n(a) = 0$. В таком случае пусть $v^{(n-1)}(a) \geqslant 1$. Это значит, что $v_{n-1}(\overline{a}) \geqslant 1$. Следовательно, $w_s(a^{(\bar\zeta_{s+1})}) = +\infty$ для $s = n-2, \ldots, 1$. Если же $v^{(n-1)}(a) = 0$, то $w_{n-1}(a^{(0)}) = 0$. Продолжая процесс, получаем, что если $a \in O$, то все $w_s(a^{(\bar\zeta_{s+1})}) \geqslant 0$.

Пусть теперь все $w_s(a^{(\bar\zeta_{s+1})}) \geqslant 0$. Если $w_n(a) = v_n(a) \geqslant 1$, то $a \in O$. Если же $w_n(a) = 0$, то $v^{(n-1)}(a) = v_{n-1}(\overline{a}) = w_{n-1}(a^{(0)}) \geqslant 0$. Продолжая процесс, получаем, что $a \in O$.

Аналогично доказывается утверждение, связанное с максимальным идеалом $\mathfrak{M}$. $\square$

Лемма (5.1). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ элементов поля K. Тогда $\prod_{m=1}^{+\infty}(1+a_m)$ сходится в K, если выполнены следующие условия:*
1. $P_n = \inf_m(w_n(1+a_1) + \cdots + w_n(1+a_m) + w_n(a_{m+1})) > -\infty$;
2. для любого $s = n, \ldots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$P_{s-1}(\overline{r}_s) = \\ = \inf_m \inf_{\bar l_s + \bar l_s^{(1)} + \cdots + \bar l_s^{(m)} \leqslant \overline{r}_s} \big(w_{s-1}((1+a_1)^{(\bar l_s^{(1)})}) + \cdots + \\ + w_{s-1}((1+a_m)^{(\bar l_s^{(m)})}) + w_{s-1}(a_{m+1}^{(\bar l_s)})\big) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ *имеем*

$$P_1(\overline{r}_2, m) = \\ = \inf_m \inf_{\bar{l}_2 + \bar{l}_2^{(1)} + \cdots + \bar{l}_2^{(m)} \leqslant \overline{r}_2} \big(w_1((1+a_1)^{(\bar{l}_2^{(1)})}) + \cdots + \\ + w_1((1+a_m)^{(\bar{l}_2^{(m)})}) + w_1(a_{m+1}^{(\bar{l}_2)})\big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Результат следует из теоремы 4.1 и полноты поля K.

Замечание. *В дальнейшем, приводя все формулировки для случая n-мерного полного поля, некоторые доказательства в целях уменьшения громоздкости формул будем проводить для случая $n = 3$. Общности это не нарушает.*

Теорема (5.1). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ элементов поля K. Тогда $\prod_{m=1}^{+\infty}(1+a_m)$ сходится в K, если выполнены следующие условия:*
1. при всех m имеем $w_n(a_m) \geqslant 0$;
2. для любого $s = n, \ldots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$M_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m \inf_{\bar{l}_s \leqslant \overline{r}_s} w_{s-1}(a_m^{(\bar{l}_s^{(m)})}) > -\infty;$$

$$M_{s-1}(\overline{0}_s) \geqslant 0;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ *имеем*

$$M_1(\overline{r}_2, m) = \inf_{\bar{l}_2 \leqslant \overline{r}_2} w_1(a_m^{(\bar{l}_2^{(m)})}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

$$M_1(\overline{0}_2) = \inf_m M_1(\overline{0}_2, m) \geqslant 0.$$

Доказательство. Заметим, что условия теоремы означают, что последовательность $\{a_m\}$ сходится к нулю и что все ее члены принадлежат кольцу нормирования поля K.

Доказательство проведем для случая $n = 3$.

Проверим выполнение для последовательности $\{a_m\}$ условий леммы 5.1.

Выполнение первого условия леммы сразу следует из первого условия теоремы. Рассмотрим второе условие леммы.Для этого фиксируем некое r_3. Имеем

$$P_2(r_3) = \inf_m \inf_{l_3 + l_3^{(1)} + \cdots + l_3^{(m)} \leqslant r_3} \big(w_2((1+a_1)^{(l_3^{(1)})}) + \\ + \cdots + w_2((1+a_m)^{(l_3^{(m)})}) + w_2(a_{m+1}^{(l_3)})\big).$$

Но из первого условия теоремы $l_3, l_3^{(1)}, \ldots, l_3^{(m)} \geqslant 0$. Следовательно, среди них количество положительных индексов не превышает r_3, причем значение каждого из этих индексов тоже не превышает r_3. Поэтому второе условие теоремы дает соотношение

$$P_2(r_3) = r_3 \inf(0, M_2(r_3)) > -\infty$$

(мы использовали еще и то, что $M_2(0) \geqslant 0$.)

Осталось показать, что при фиксированных r_3 и r_2 имеем

$$P_1(r_2, r_3, m) = \\ = \inf_{\substack{l_3 + l_3^{(1)} + \dots + l_3^{(m)} \leqslant r_3 \\ l_2 + l_2^{(1)} + \dots + l_2^{(m)} \leqslant r_2}} \big(w_1((1+a_1)^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) + \\ + \dots + w_2((1+a_m)^{(l_2^{(m)} l_3^{(m)})}) + w_2(a_{m+1}^{(l_2 l_3)})\big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

По второму условию теоремы получаем, что при тех значениях α, для которых $l_3^{(\alpha)} = 0$, имеем $l_2^{(\alpha)} \geqslant 0$. Следовательно, значение $l_2^{(\alpha)}$ может быть отрицательно не более, чем для r_3 индексов α. Но $l_2 \geqslant M_2(r_3)$ и $l_2^{(\alpha)} \geqslant \inf(0, M_2(r_3))$. Пусть имеется q_2 положительных индекса $l_2^{(\alpha)}$. Тогда

$$l_2 + l_2^{(1)} + \dots + l_2^{(m)} \geqslant q_2 + r_3 \inf(0, M_2(r_3)).$$

Используя условие

$$l_2 + l_2^{(1)} + \dots + l_2^{(m)} \leqslant r_2,$$

получаем, что q_2 ограничено сверху константой, зависящей от r_2, r_3. Значит, максимальное количество ненулевых индексов $l_2^{(\alpha)}$ тоже ограничено сверху некой константой q, а остальные индексы нулевые, причем соответствующие им индексы $l_3^{(\alpha)}$ тоже нулевые. Кроме того, $l_2, l_2^{(1)}, \dots, l_2^{(m)}$ ограничены сверху константой, зависящей от r_2, r_3. Тогда

$$P_1(r_2, r_3, m) \geqslant \\ \geqslant (m-q) \inf_{\alpha \geqslant 1} w_1((1+a_\alpha)^{(00)}) + \\ + q \inf_{\alpha \geqslant 1} \inf_{\substack{l_3 \leqslant r_3 \\ l_2 \leqslant r_2 + r_3 \sup(0, -M_2(r_3))}} w_1((1+a_\alpha)^{(l_2 l_3)}) + \\ + \inf_{\substack{l_3 \leqslant r_3 \\ l_2 \leqslant r_2 + r_3 \sup(0, -M_2(r_3))}} w_1(a_{m+1}^{(l_2 l_3)}).$$

По третьему условию теоремы первые два слагаемых ограничены снизу, а третье стремится к бесконечности при m, стремящемся к бесконечности. Теорема доказана. □

Замечание. *Из доказательства видно, что третий пункт условия теоремы можно заменить следующим:*

при всех $\overline{r}_2$ *имеем*

$$M_1(\overline{r}_2, m) = \inf_{\bar{l}_2 \leqslant \overline{r}_2} w_1((1+a_m)^{(\bar{l}_2^{(m)})}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

$$M_1(\overline{0}_2) = \inf_m M_1(\overline{0}_2, m) \geqslant 0$$

или следующим:

при всех $\overline{r}_2$ *имеем*

$$M_1(\overline{r}_2, m) = \inf_{\bar{l}_2 \leqslant \overline{r}_2} w_1(a_m^{(\bar{l}_2^{(m)})}) > -\infty;$$

$$\inf_m w_1((1+a_m)^{(\bar{\zeta}_2)}) \geqslant 1.$$

Теорема (5.2). *Пусть для всех натуральных* q *определены ряды над* K *вида*

$$h_q(X) = \sum_{m\geqslant 1} h_{qm} X^m$$

и пусть

$$1 + H(X) = 1 + \sum_{m\geqslant 1} H_m X^m = \prod_{q\geqslant 1}(1 + h_q(X)),$$

$x \in K$. *Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости* $H(X)$ *при подстановке вместо* X *элемента* x *к элементу* $\prod_{q\geqslant 1}(1+h_q(x)) - 1$*:*

1. для всех натуральных q *и* m *имеем*

$$w_n(h_{qm}) + m w_n(x) \geqslant 0;$$

2. для любого $s = n, \ldots, 3$ *при всех* $\overline{r}_s$ *имеем*

$$M_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_m \inf_q \inf_{\bar{l}_s + \bar{l}_s^{(1)} + \cdots + \bar{l}_s^{(m)} \leqslant \overline{r}_s} \big(w_{s-1}(h_{qm}^{(\bar{l}_s)}) +$$

$$+ w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(1)})}) + \cdots + w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(m)})})\big) > -\infty;$$

$$M_{s-1}(\overline{\zeta}_s) \geqslant 0;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ *и при всех натуральных* q *имеем*

$$M_1(\overline{r}_2, q, m) = \inf_{\bar{l}_2 + \bar{l}_2^{(1)} + \cdots + \bar{l}_2^{(m)} \leqslant \overline{r}_2} \big(w_1(h_{qm}^{(\bar{l}_2)}) +$$

$$+ w_1(x^{(\bar{l}_2^{(1)})}) + \cdots + w_1(x^{(\bar{l}_2^{(m)})})\big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

$$M_1(\overline{\zeta}_2) = \inf_q \inf_m M_1(\overline{\zeta}, q, m) \geqslant 0;$$

4. при всех $\overline{r}_2$ *имеем*

$$M_1(\overline{r}_2, q) = \inf_m M_1(\overline{r}_2, q, m) \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что из третьего условия теоремы следует, что при всех $\overline{r}_2$ и при всех натуральных q лишь конечное число $M_1(\overline{r}_2, q, m)$ отрицательно, и потому $M_1(\overline{r}_2, q) > -\infty$, а из четвертого, что $M_1(\overline{r}_2) = \inf_q M_1(\overline{r}_2, q) > -\infty$.

Доказательство проведем для случая $n = 3$.

Очевидно, что

$$H_m = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{q_1\geqslant 1} \sum_{\substack{q_2\geqslant 1\\ q_2>q_1}} \dots$$

$$\dots \sum_{\substack{q_i\geqslant i\\ q_i>q_{i-1}}} \sum_{m_1+\dots+m_i=m} h_{q_1m_1}h_{q_2m_2}\dots h_{q_im_i}.$$

Докажем, что многократные ряды, определяющие h_m, сходятся при всех m.

Легко показать обобщением теоремы 4.1, что ряд $\sum\limits_{q_1,\dots,q_i} a_{q_1\dots q_i}$ сходится, если выполнены следующие условия:

1. $R_n = \inf_{q_1,\dots,q_i} w_n(a_{q_1\dots q_i}) > -\infty$;
2. для любого $s = n,\dots,3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$R_{s-1}(\overline{r}_s) = \inf_{q_1,\dots,q_i} w_{s-1}(a^{(\overline{r}_s)}_{q_1\dots q_i}) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$R_1(\overline{r}_2) = w_1(a^{(\overline{r}_2)}_{q_1\dots q_i}) \overset{q_1+\dots+q_i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

По первому условию нашей теоремы для любого натурального m имеем

$$R_3 \geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{\substack{1\leqslant q_1<\dots<q_i\\ m_1+\dots+m_i=m}} \big(w_3(h_{q_1m_1}) + \dots + w_3(h_{q_im_i})\big) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{m_1+\dots+m_i=m} \big(\inf_{q_1\geqslant 1} w_3(h_{q_1m_1}) + \dots + \inf_{q_i\geqslant 1} w_3(h_{q_im_i})\big) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{m_1+\dots+m_i=m} (-m_1w_3(x) - \dots - m_iw_3(x)) =$$

$$= -mw_3(x) > -\infty.$$

Теперь фиксируем r_3. Тогда

$$R_2(r_3) \geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{\substack{1\leqslant q_1<\dots<q_i\\ m_1+\dots+m_i=m\\ l_3^{(1)}+\dots+l_3^{(i)}\leqslant r_3}} \big(w_2(h^{(l_3^{(1)})}_{q_1m_1}) + \dots + w_2(h^{(l_3^{(i)})}_{q_im_i})\big).$$

Выберем некое f_3 такое, что $x^{(f_3)}$ ненулевое (если $x = 0$, то теорема тривиальна). По второму условию получаем, что

$$w_2(h^{(l_3^{(\alpha)})}_{q_\alpha m_\alpha}) \geqslant M_2(l_3^{(\alpha)} + m_\alpha f_3) - m_\alpha w_2(x^{(f_3)})$$

при $\alpha = 1, \dots, i$. Следовательно,

$$R_2(r_3) \geqslant \inf_{1 \leqslant i \leqslant m} \inf_{\substack{1 \leqslant q_1 < \dots < q_i \\ m_1 + \dots + m_i = m \\ l_3^{(1)} + \dots + l_3^{(i)} \leqslant r_3}} \big(M_2(l_3^{(1)} + m_1 f_3) + \dots + \\ + M_2(l_3^{(i)} + m_i f_3) \big) - m w_2(x^{(f_3)}).$$

По первому условию теоремы при $\alpha = 1, \dots, i$ имеем

$$l_3^{(\alpha)} \geqslant -w_3(h_{q_\alpha m_\alpha}) \geqslant -m_\alpha w_3(x).$$

Поэтому при $\alpha = 1, \dots, i$ имеем

$$l_3^{(\alpha)} \leqslant r_3 + m \sup(0, w_3(x)).$$

Таким образом,

$$R_2(r_3) \geqslant m \inf\big(0, M_2(r_3 + m \sup(0, w_3(x)) + m \sup(0, f_3)\big) - \\ - m w_2(x^{(f_3)}) > -\infty.$$

Осталось проверить, что при фиксированных r_3 и r_2 верно, что

$$R_1(r_2, r_3) \xrightarrow{q_1 + \dots + q_i \to +\infty} +\infty.$$

Легко видеть, что

$$R_1(r_2, r_3) \geqslant \\ \geqslant \inf_{1 \leqslant i \leqslant m} \inf_{\substack{1 \leqslant q_1 < \dots < q_i \\ m_1 + \dots + m_i = m \\ l_3^{(1)} + \dots + l_3^{(i)} \leqslant r_3 \\ l_2^{(1)} + \dots + l_2^{(i)} \leqslant r_2}} \big(w_1(h_{q_1 m_1}^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) + \dots + w_1(h_{q_i m_i}^{(l_2^{(i)} l_3^{(i)})}) \big).$$

Как показано выше, индексы $l_2^{(\alpha)}$ ограничены сверху и снизу константами, зависящими от r_2, r_3 и m. Следовательно,

$$R_1(r_2, r_3) \geqslant \\ \geqslant \inf_{1 \leqslant i \leqslant m} \inf_{\substack{1 \leqslant q_1 < \dots < q_i \\ m_1 + \dots + m_i = m}} \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant i} \inf_{\substack{l_2^{(\alpha)} \leqslant L_2(m) \\ l_3^{(\alpha)} \leqslant L_3(m)}} w_1(h_{q_\alpha m_\alpha}^{(l_2^{(\alpha)} l_3^{(\alpha)})}).$$

Зафиксировав некие f_3 и f_2 в четвертом условии нашей теоремы, видим, что при фиксированных r_3, r_2 и m выполнено соотношение

$$\inf_{\substack{l_2 \leqslant r_2 \\ l_3 \leqslant r_3}} w_1(h_{qm}^{(l_2 l_3)}) \xrightarrow{q \to +\infty} +\infty.$$

Следовательно, $R_1(r_2, r_3)$ ограничено снизу суммой слагаемых, каждое из которых в свою очередь ограничено снизу как член стремящейся к бесконечности последовательности, а при достаточно большом $q_1 + \dots + q_i$ хотя бы одно из этих слагаемых превзойдет любую наперед заданную величину. Таким образом,

$$R_1(r_2, r_3) \overset{q_1+\cdots+q_i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

и все ряды, определяющие коэффициенты H_m ряда $H(X)$, сходятся, т.е. ряд $H(X)$ определен корректно.

Рассмотрим ряды

$$d_j(X) = \prod_{q=1}^{j}(1 + h_q(X)) - 1.$$

Корректность определения этих рядов доказывается так же, как корректность определения ряда $h(X)$.

Очевидно, что

$$edH_m - d_{jm} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{q_1\geqslant j+1} \sum_{q_2\geqslant 1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{q_i\geqslant 1} \sum_{m_1+\cdots+m_i=m} h_{q_1m_1}h_{q_2m_2}\ldots h_{q_im_i} \quad ed$$

Докажем, что $H(x)$ конечно и что $d_j(x) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} H(x)$.

Из первого условия теоремы вытекает, что для всех j и m выполняются следующие соотношения:

$$w_3(H_mx^m) \geqslant 0, w_3((H_m - d_{jm})x^m) \geqslant 0, w_3(d_{jm}x^m) \geqslant 0.$$

Фиксируем r_3. Тогда

$$w_2((H_mx^m)^{(r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{l_3+l_3^{(1)}+\ldots l_3^{(m)}\leqslant r_3} \big(w_2(H_m^{(l_3)}) + w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \cdots + w_2(x^{l_3^{(m)}})\big) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{r_3^{(1)}+\ldots r_3^{(m)}\leqslant r_3} \big(M_2(r_3^{(1)}) + \cdots + M_2(r_3^{(i)})\big).$$

Из первого условия теоремы вытекает, что все $r_3^{(\alpha)} \geqslant 0$. Значит, среди них количество ненулевых не превышает r_3 и значение каждого индекса тоже не превышает r_3. Но по второму условию теоремы $M_2(0) \geqslant 0$. Поэтому

$$w_2((H_mx^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, M_2(r_3)).$$

Аналогично доказывается, что

$$w_2(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, M_2(r_3))$$

и

$$w_2((d_{jm}x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, M_2(r_3)).$$

Теперь фиксируем r_2. Тогда для всех j и m имеем:

$$w_1(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{q_1\geqslant j+1} \inf_{q_2\geqslant 1} \dots \inf_{q_i\geqslant 1} \inf_{\substack{m_1+\dots+m_i=m \\ r_3^{(1)}+\dots r_3^{(i)}\leqslant r_3 \\ r_2^{(1)}+\dots r_2^{(i)}\leqslant r_2}} \big(M_1(r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, q_1, m_1)+$$
$$+\dots + +M_1(r_2^{(i)}, r_3^{(i)}, q_i, m_i)\big).$$

Аналогично доказательству теоремы 5.2 получаем, что число ненулевых пар $(r_2^{(\alpha)}, r_3^{(\alpha)})$ конечно, а значения $r_2^{(\alpha)}, r_3^{(\alpha)}$ ограничены сверху некими n_2, n_3. Пусть ненулевых пар f штук.Учитывая, что $M_1(0,0) \geqslant 0$, имеем:

$$w_1(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{q\geqslant j+1} M_1(n_2, n_3, q) + f\inf(0, M_1(n_2, n_3)).$$

Следовательно, по четвертому условию теоремы

$$\inf_m w_1(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Но

$$w_1((H_m)x^m)^{(r_2r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf\big(w_1(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}), w_1((d_{jm}x^m)^{(r_2r_3)})\big).$$

По третьему условию теоремы при всех r_2, r_3 и j имеем

$$w_1((d_{jm}x^m)^{(r_2r_3)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Зададим произвольное число A. При $j \geqslant j_0$ верно, что для всех m выполняется неравенство $w_1(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) > A$; при $m \geqslant m_0$ верно, что $w_1((d_{j_0m}x^m)^{(r_2r_3)}) > A$. Тогда при $m \geqslant m_0$ получаем, что $w_1((H_mx^m)^{(r_2r_3)}) > A$, т.е.

$$w_1((H_mx^m)^{(r_2r_3)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Следовательно, ряд $H(X)$ сходится при подстановке x вместо X по следствию теоремы 4.1.

Осталось показать, что $d_j(x) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} H(x)$. Проверим выполнение условий теоремы 4.1 для последовательности $H(x)-d_j(x)$. Уже доказано, что $w_3((H_m - d_{jm})x^m) \geqslant 0$ и что при фиксированном r_3 выполнено неравенство $w_2(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3\inf(0, M_2(r_3))$. Значит, $w_3(H(x) - d_j(x) \geqslant 0$ и $w_2((H(x) - d_j(x))^{(r_3)}) \geqslant r_3\inf(0, M_2(r_3))$. Кроме того, при всех r_2, r_3 верно, что

$$w_1((H(x) - d_j(x))^{(r_2r_3)}) \geqslant \inf_m w_1\big(((H_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}\big) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Таким образом,

$$H(x) - d_j(x) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

что и завершает доказательство. □

§6. Сходимость формальных сумм рядов над многомерными полными полями

Лемма (6.1). *Если условия следствия теоремы 4.1 выполняются для ряда $a(X)$ и элемента x, то они выполняются также и для ряда $a(X)$ и элемента $x\alpha$, где α — элемент из кольца нормирования O поля K.*

Доказательство. Считаем, что $n = 3$.
По предложению 5.1 для элемента α имеем

$$w_3(\alpha) \geqslant 0, w_2(\alpha^{(0)}) \geqslant 0, w_1(\alpha^{(00)}) \geqslant 0.$$

Очевидно, что

$$R_3^{(x\alpha)} = \inf_m (w_3(a_m) + m w_3(x\alpha)) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_m (w_3(a_m) + m w_3(x)) = R_3^{(x)} \geqslant -\infty.$$

Фиксируем $r_3 \geqslant R_3^{(x\alpha)}$. Тогда

$$R_2^{(x\alpha)}(r_3) =$$
$$= \inf_m \inf_{l_3 + l_3^{(1)} + \cdots + l_3^{(m)} \leqslant r_3} \big(w_2(a_m^{(l_3^{(1)})}) +$$
$$+ w_2((x\alpha)^{(l_3^{(1)})}) + \cdots + w_2((x\alpha)^{(l_3^{(m)})})\big) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_m \inf_{\substack{l_3 + l_3^{(1)} + \cdots + l_3^{(m)} + \\ + f_3^{(1)} + \cdots + f_3^{(m)} \leqslant r_3}} \big(w_2(a_m^{(l_3)}) + w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \cdots + w_2(x^{(l_3^{(m)})}) +$$
$$+ w_2(\alpha^{(f_3^{(1)})}) + \cdots + w_2(\alpha^{(f_3^{(m)})})\big).$$

Имеем следующие ограничения индексов:

$$f_3^{(1)}, \ldots, f_3^{(m)} \geqslant w_3(x) \geqslant 0;$$
$$l_3 \geqslant w_3(a_m);$$
$$l_3^{(1)}, \ldots, l_3^{(m)} \geqslant w_3(x).$$

Следовательно,

$$l_3 + l_3^{(1)} + \cdots + l_3^{(m)} \geqslant w_3(a_m) + m w_3(x) \geqslant R_3^{(x)}.$$

Поэтому

$$f_3^{(1)} + \cdots + f_3^{(m)} \leqslant r_3 - R_3^{(x)}.$$

Значит, среди индексов $f_3^{(1)}, \ldots, f_3^{(m)}$ ненулевых некоторое количество, не превышающее $r_3 - R_3^{(x)} = q_3$, а максимальное значение индекса не превышает q_3.

Но по выбору α для нулевых индексов $f_3^{(\beta)}$ верно неравенство $w_2(\alpha^{(f_3^{(\beta)})}) \geqslant 0$. Тогда

$$R_2^{(x\alpha)}(r_3) \geqslant R_2^{(x)}(r_3) + q_3 \inf_{0\leqslant f_3 \leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)}) > -\infty.$$

Теперь фиксируем $r_2 \geqslant R_2^{(x\alpha)}(r_3)$. В таком случае

$$R_1^{(x\alpha)}(r_2, r_3, m) = \inf_m \inf_{\substack{l_3 + l_3^{(1)} + \cdots + l_3^{(m)} \leqslant r_3 \\ l_2 + l_2^{(1)} + \cdots + l_2^{(m)} \leqslant r_2}} \big(w_1(a_m^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) +$$

$$+ w_2((x\alpha)^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) + \cdots + w_2((x\alpha)^{(l_2^{(m)} l_3^{(m)})})\big) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_m \inf_{\substack{l_3 + l_3^{(1)} + \cdots + l_3^{(m)} + \\ + f_3^{(1)} + \cdots + f_3^{(m)} \leqslant r_3 \\ l_2 + l_2^{(1)} + \cdots + l_2^{(m)} + \\ + f_2^{(1)} + \cdots + f_2^{(m)} \leqslant r_2}} \big(w_1(a_m^{(l_2 l_3)}) +$$

$$+ w_1(x^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) + \cdots + w_1(x^{(l_2^{(m)} l_3^{(m)})}) +$$

$$+ w_1(\alpha^{(f_2^{(1)} f_3^{(1)})}) + \cdots + w_1(\alpha^{(f_2^{(m)} f_3^{(m)})})\big).$$

По доказанному выше можно считать, что $f_3^{(\beta)} = 0$ при $\beta > q_3$. Из этого по выбору α следует, что $f_2^{(\beta)} \geqslant 0$ при $\beta > q_3$. Но

$$f_2^{(1)} + \cdots + f_2^{(q_3)} \geqslant q_3 \inf_{0\leqslant f_3 \leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)})$$

и

$$f_2^{(1)} + \cdots + f_2^{(m)} \leqslant r_2 - R_2^{(x)}(r_3).$$

Поэтому

$$f_2^{(q_3+1)} + \cdots + f_2^{(m)} \leqslant r_2 - R_2^{(x)}(r_3) - q_3 \inf_{0\leqslant f_3 \leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)}).$$

Значит, среди индексов $f_2^{(\beta)} (\beta > q_3)$ ненулевых некоторое количество, не превышающее $r_2 - R_2^{(x)}(r_3) - q_3 \inf_{0\leqslant f_3\leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)}) = q_2$, а максимальное значение индекса не превышает q_2. Учитывая, что $w_2(\alpha^{(00)}) \geqslant 0$, получаем, что

$$w_1(\alpha^{(f_2^{(q_3+1)} f_3^{(q_3+1)})}) + \cdots + w_1(\alpha^{(f_2^{(m)} f_3^{(m)})}) \geqslant q_2 \inf_{0\leqslant f_2 \leqslant q_2} w_1(\alpha^{(f_2 0)}).$$

Кроме того, $f_2^{(\beta)} \geqslant \inf_{0\leqslant f_3\leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)})$ при всех β и

$$f_2^{(1)} + \cdots + f_2^{(m)} \leqslant r_2 - R_2^{(x)}(r_3).$$

Следовательно, при $\beta \leqslant q_3$ получаем

$$f_2^{(\beta)} \leqslant r_2 - R_2^{(x)}(r_3) - (q_3 - 1) \inf_{0\leqslant f_3 \leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)}).$$

Поэтому

$$w_1(\alpha^{(f_2^{(1)} f_3^{(1)})}) + \dots + w_1(\alpha^{(f_2^{(q_3)} f_3^{(q_3)})}) \geqslant \\ \geqslant q_3 \inf_{\substack{0 \leqslant f_3 \leqslant q_3 \\ f_2}} w_1(\alpha^{(f_2 f_3)}),$$

причем

$$\inf_{0 \leqslant f_3 \leqslant q_3} w_2(\alpha^{f_3}) \leqslant f_2 \leqslant r_2 - \\ - R_2^{(x)}(r_3) - (q_3 - 1) \inf_{0 \leqslant f_3 \leqslant q_3} w_2(\alpha^{(f_3)}).$$

В итоге видим, что

$$R_1^{(x\alpha)}(r_2, r_3, m) \geqslant R_1^{(x)}(r_2, r_3, m) + C,$$

где C — некоторая величина, не зависящая от m. Значит,

$$R_1^{(x\alpha)}(r_2, r_3, m) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

что и завершает доказательство. □

Предложение (6.1). *Пусть G — некоторое подмножество поля K. Тогда все ряды $a(X) = \sum_{m \geqslant 1} a_m X^m$ с коэффициентами из G сходятся при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, когда выполнена следующая совокупность условий:*
1. $\inf_{a \in G} w_n(a) > -\infty$;
2. для любого $s = n, \dots, 2$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$\inf_{a \in G} w_{s-1}(a^{(\overline{r}_s)}) > -\infty.$$

Доказательство. Применим к фиксированному ряду $a(X)$ с коэффициентами из G и элементу t_1 следствие теоремы 4.1. Получаем, что ряд $a(X)$ сходится при подстановке вместо X элемента t_1 максимального идеала $\mathfrak{M}$, если выполнена следующая совокупность условий:

1. $\inf_m w_n(a_m) > -\infty$;
2. для любого $s = n, \dots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$\inf_m w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s)}) > -\infty;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) + m \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(мы использовали тот факт, что t_1 — один из локальных параметров). Но по лемме 6.1 получаем, что в таком случае $a(X)$ сходится при подстановке вместо X произвольного элемента x максимального идеала $\mathfrak{M}$.

Итак, для сходимости всех рядов с коэффициентами из G при подстановке вместо X произвольного элемента x максимального идеала $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы для всех последовательностей $\{a_m\}$ из G были выполнены сфрмулированные выше условия. Докажем, что это эквивалентно выполнению для всех последовательностей $\{a_m\}$ из G следующей совокупности условий:

1. $\inf_m w_n(a_m) > -\infty$;
2. для любого $s = n, \dots, 2$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$\inf_m w_{s-1}(a_m^{(\overline{r}_s)}) > -\infty.$$

То, что из ограниченности снизу по m значений $w_1(a_m^{(\overline{r}_2)})$ следует, что

$$w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) + m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

очевидно. Докажем теперь, что из последнего условия следует соответствующая ограниченность.

Пусть это не так, то есть существует последовательность $\{a_m\}$ такая, что

$$w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) + m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

но при некотором $\overline{r}_2$ значения $w_1(a_m^{(\overline{r}_2)})$ неограничены снизу. Тогда существует подпоследовательность данной последовательности (для простоты снова обозначаемая $\{a_m\}$) такая, что $w_1(a_m^{(\overline{r}_2)}) < -m$, что противоречит нашему допущению. Лемма доказана. $\square$

Предложение (6.2). *Пусть*

$$S = \{\sum_{r_n \geqslant 0} \sum_{r_{n-1} \geqslant J_{n-1}(\overline{r}_n)} \cdots \sum_{r_1 \geqslant J_1(\overline{r}_2)} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}}\},$$

где $a^{(\overline{r})} \in \mathcal{R}_{\tilde{K}} \cup \{0\}$ *и* $J_{n-1}(\overline{r}_n), \dots, J_1(\overline{r}_2)$ *— фиксированные целочисленные функции со свойствами* $J_s(\overline{i_{s+1}} + \overline{j}_{s+1}) = J_s(\overline{i}_{s+1}) + J_s(\overline{j}_{s+1}), s = n-1, \dots, 1$. *Тогда* S *— кольцо с единицей,* S *содержится в* O *и все ряды* $a(X)$ *из* $S[[X]]$ *сходятся при подстановке вместо* X *произвольного элемента максимального идеала* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Проверим, что S является кольцом, т.е. замкнуто относительно сложения и умножения.

Пусть $a, b \in S$. Тогда по свойствам псевдонормирований (см. предложение 3.2) для $s = n, \dots, 1$ при всех $\overline{r}_{s+1}$ имеем

$$w_s((a+b)^{(\overline{r}_{s+1})}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf(w_s(a^{(\overline{r}_{s+1})}), w_s(b^{(\overline{r}_{s+1})})) \geqslant J_s(\overline{r}_{s+1}),$$

$$w_s((ab)^{(\overline{r}_{s+1})})) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\overline{i}_{s+1}+\overline{j}_{s+1}=\overline{r}_{s+1}} (w_s(a^{(\overline{i}_{s+1})}) + w_s(b^{(\overline{j}_{s+1})})) \geqslant J_s(\overline{r}_{s+1}).$$

Следовательно, $a+b, ab \in S$. Кроме того, легко видеть, что если $a \in S$, то $-a \in S$, а также что S содержит единицу.

Включение S в O следует из определения обоих колец, а сходимость соответствующих рядов из предложения 6.1. Предложение доказано. $\square$

Замечание. *Вообще говоря, в n-мерном полном поле при $n \geqslant 2$ кольцо нормирования O не обладает тем свойством, что все ряды $a(X) \in O[[X]]$ сходятся при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\mathfrak{M}$. Например, в поле $F((t_1))((t_2))$ элементы $a_m = t_1^{-m} t_2$ являются целыми, но тем не менее $v_1(a_m^{(1)}) = -m$ и потому ряд $a((X)) = \sum_m a_m X^m$ расходится при $X = t_1$.*

Пусть $F(X,Y)$ — однопараметрическая формальная группа над S, причем

$$F(X,Y) = X + Y + \sum_{i,j \geqslant 1} f_{ij} X^i Y^j$$

(см. [1], [14], [35], [42]). Мы введем обозначение $X +_F Y = F(X,Y)$.

Аналогично доказательству предложения 6.2, легко видеть ,что если $x, y \in \mathfrak{M}$, то $x +_F y$ — конечный элемент, т.е. соответствующий ряд сходится.

Теорема (6.1). *Пусть $x \in K$, $a_1(X), a_2(X) \in K[[X]]$, причем $a_q(X) = \sum_{m \geqslant 1} a_{qm} X^m, q = 1, 2$; и пусть*

$$d(X) = a_1(X) +_F a_2(X) = \sum_{m \geqslant 1} d_m X^m.$$

Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $a_1(x) +_F a_2(x)$:

для $q = 1, 2$ верно, что

1. для всех натуральных m имеем

$$w_n(a_{qm}) + m w_n(x) \geqslant 0;$$

2. для любого $s = n, \ldots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$\Lambda_{s-1}(\overline{r}_s, q) = \inf_m \inf_{\overline{l}_s + \overline{l}_s^{(1)} + \cdots + \overline{l}_s^{(m)} \leqslant \overline{r}_s} \big(w_{s-1}(a_{qm}^{(\overline{l}_s)}) +$$
$$+ w_{s-1}(x^{(\overline{l}_s^{(1)})}) + \cdots + w_{s-1}(x^{(\overline{l}_s^{(m)})}) \big) > -\infty;$$
$$\Lambda_{s-1}(\overline{\zeta}, q) \geqslant 0;$$

3. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$\Lambda_1(\overline{r}_2, q, m) = \inf_{\overline{l}_2 + \overline{l}_2^{(1)} + \cdots + \overline{l}_2^{(m)} \leqslant \overline{r}_2} \big(w_1(a_{qm}^{(\overline{l}_2)}) +$$
$$+ w_1(x^{(\overline{l}_2^{(1)})}) + \cdots + w_1(x^{(\overline{l}_2^{(m)})}) \big) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

$$\Lambda_1(\overline{\zeta}, q) = \inf_m \Lambda_1(\overline{\zeta}, q, m) \geqslant 1.$$

Доказательство. Считаем, что $n = 3$. Кроме того, для упрощения технических выкладок будем считать, что $J_2(r_3) = -r_3, J_1(r_2, r_3) = -r_2 - r_3$ (общности это не нарушает).

Всюду в дальнейшем под $\Lambda_{s-1}(\overline{r}_s)$ будем подразумевать $\inf_{q=1,2} \Lambda_{s-1}(\overline{r}_s, q)$.

По следствию теоремы 4.1 видим, что ряды $a_1(X), a_2(X)$ сходятся в точке $X = x$. Чтобы доказать, что элемент $a_1(x) +_F a_2(x)$ конечен, достаточно проверить, что $a_1(x), a_2(x) \in \mathfrak{M}$, т.е. что для $q = 1, 2$ имеем

$$w_3(a_q(x)) \geqslant 0; w_2(a_q(x)^{(0)}) \geqslant 0; w_1(a_q(x)^{(00)}) \geqslant 1$$

(мы использовали предложение 5.1).

Легко видеть, что

$$w_3(a_q(x)) \geqslant \inf_m (w_3(a_{qm} + m w_3(x)) \geqslant 0;$$

$$w_2((a_q(x))^{(0)}) \geqslant \inf_m (w_2(a_{qm}x^m)^{(0)}) \geqslant \Lambda_2(0, q) \geqslant 0;$$

$$w_1((a_q(x))^{(00)}) \geqslant \Lambda_1(0, 0, q) \geqslant 1.$$

Теперь докажем сходимость ряда $d(X)$ при $X = x$. По определению формальной суммы

$$d_m = a_{1m} + a_{2m} +$$

$$+ \sum_{i,j \geqslant 1} f_{ij} \sum_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+ \\ +\lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}} a_{1\lambda_{11}} \dots a_{1\lambda_{1i}} a_{2\lambda_{21}} \dots a_{2\lambda_{2j}}.$$

Т.к. $i + j \leqslant m$, сумма реально берется по конечному числу слагаемых и элемент d_m определен корректно. Проверим для ряда $d(X)$ и элемента x выполнение условий следствия теоремы 4.1. Имеем

$$w_3(d_m x^m) \geqslant \inf \Bigg(w_3(a_{1m}x^m), w_3(a_{2m}x^m),$$

$$\inf_{i,j \geqslant 1} \inf_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+ \\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}} \big(w_3(a_{1\lambda_{11}} x^{\lambda_{11}}) + \dots + w_3(a_{1\lambda_{1i}} x^{\lambda_{1i}}) +$$

$$+ w_3(a_{2\lambda_{21}} x^{\lambda_{21}}) + \dots + w_3(a_{2\lambda_{2j}} x^{\lambda_{2j}}) \big) \Bigg) \geqslant 0.$$

Фиксируем r_3. Тогда

$$R_2(r_3) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_m \inf_{l_3 + l_3^{(1)} + \dots l_3^{(m)} \leqslant r_3} \big(w_2(d_m^{(l_3)}) + w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \dots + w_2(x^{l_3^{(m)}}) \big) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_m \inf_{i,j \geqslant 1} \inf_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+ \\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}} \inf_{\substack{s_3 + \mu_{3\lambda_{11}} + \dots + \mu_{3\lambda_{1i}} + \\ + \mu_{3\lambda_{21}} + \dots + \mu_{3\lambda_{2j}} + \\ + l_3 + l_3^{(1)} + \dots l_3^{(m)} \leqslant r_3}} \big(w_2(f_{ij}^{(s_3)}) +$$

$$+w_2(a_{1\lambda_{11}}^{(\mu_{3\lambda_{11}})}) + \dots + w_2(a_{1\lambda_{1i}}^{(\mu_{3\lambda_{1i}})}) + w_2(a_{2\lambda_{21}}^{(\mu_{3\lambda_{21}})}) +$$
$$+ \dots + w_2(a_{2\lambda_{2j}}^{(\mu_{3\lambda_{2j}})}) +$$
$$+w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \dots + w_2(x^{(l_3^{(m)})})\big) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_m \inf_{i,j\geqslant 1} \inf_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+\\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}} \inf_{\substack{\mu_{3\lambda_{11}}+\dots+\mu_{3\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{3\lambda_{21}}+\dots+\mu_{3\lambda_{2j}}+\\ +l_3+l_3^{(1)}+\dots l_3^{(m)}\leqslant r_3}} \inf_{s_3}\big(-s_3+$$
$$+w_2(a_{1\lambda_{11}}^{(\mu_{3\lambda_{11}})}) + \dots + w_2(a_{1\lambda_{1i}}^{(\mu_{3\lambda_{1i}})}) + w_2(a_{2\lambda_{21}}^{(\mu_{3\lambda_{21}})}) +$$
$$+ \dots + w_2(a_{2\lambda_{2j}}^{(\mu_{3\lambda_{2j}})}) + w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \dots + w_2(x^{l_3^{(m)}})\big)\big),$$

причем

$$0 \leqslant s_3 \leqslant r_3 - \big(w_3(a_{1\lambda_{11}}) + \dots + w_3(a_{1\lambda_{1i}}) +$$
$$+w_3(a_{2\lambda_{21}}) + \dots + w_3(a_{2\lambda_{2j}}) + mw_3(x)\big).$$

Но по первому условию теоремы

$$w_3(a_{1\lambda_{11}}) + \dots + w_3(a_{1\lambda_{1i}}) +$$
$$+w_3(a_{2\lambda_{21}}) + \dots + w_3(a_{2\lambda_{2j}}) + mw_3(x) \geqslant 0,$$

и потому $s_3 \leqslant r_3$. Тогда

$$R_2(r_3) \geqslant -r_3 + \inf_m \inf_{\substack{r_3^{(1)}+r_3^{(2)}\leqslant r_3\\ m_1+m_2=m}} \Bigg(\inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m_1\\ \mu_1+\dots+\mu_i+\\ +l_1+\dots+l_{m_1}\leqslant r_3^{(1)}}} \big(w_2(a_{1\lambda_1}^{(\mu_1)}) + \dots +$$
$$w_2(a_{1\lambda_i}^{(\mu_i)}) + \dots + w_2(x^{(l_1)}) + \dots + w_2(x^{(l_{m_1})})\big) +$$
$$+ \inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m_2\\ \mu_1+\dots+\mu_i+\\ +l_1+\dots+l_{m_2}\leqslant r_3^{(2)}}} \big(w_2(a_{2\lambda_1}^{(\mu_1)}) + \dots + w_2(a_{2\lambda_i}^{(\mu_i)}) +$$
$$+ \dots + w_2(x^{(l_1)}) + \dots + w_2(x^{(l_{m_2})})\big)\Bigg) \geqslant$$
$$\geqslant -r_3 + \inf_m \inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m\\ \mu_1+\dots+\mu_i+\\ +l_1+\dots+l_m\leqslant r_3}} \big(w_2(a_{1\lambda_1}^{(\mu_1)}) + \dots + w_2(a_{1\lambda_i}^{(\mu_i)}) +$$
$$+ \dots + w_2(x^{(l_1)}) + \dots + w_2(x^{(l_m)})\big) +$$
$$+ \inf_m \inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m\\ \mu_1+\dots+\mu_i+\\ +l_1+\dots+l_m\leqslant r_3}} \big(w_2(a_{2\lambda_1}^{(\mu_1)}) + \dots + w_2(a_{2\lambda_i}^{(\mu_i)}) +$$
$$+ \dots + w_2(x^{(l_1)}) + \dots + w_2(x^{(l_m)})\big)$$

(мы воспользовались тем, что по первому условию теоремы $r_3^{(1)}, r_3^{(2)} \geqslant 0$.)

Для $q=1,2$ рассмотрим величину

$$A_2(r_3,q)=\inf_{m}\inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m\\ \mu_1+\dots+\mu_i+l_1+\dots+l_m\leqslant r_3}}\big(w_2(a_{q\lambda_1}^{(\mu_1)})+\dots+w_2(a_{q\lambda_i}^{(\mu_i)})+$$
$$+\dots+w_2(x^{(l_1)})+\dots+w_2(x^{l_{(m)}})\big).$$

Если докажем, что $A_2(r_3,q)>-\infty$, то и $R_2(r_3)>-\infty$. Но

$$A_2(r_3,q)\geqslant\inf_{r_3^{(1)}+\dots+r_3^{(i)}\leqslant r_3}(\Lambda(r_{13},q)+\dots+\Lambda(r_{i3},q))\geqslant$$
$$\geqslant r_3\inf(0,\Lambda_2(r_3,q)),$$

т.к. $r_3^{(\alpha)}\leqslant r_3$ при $\alpha=1,\dots,i$, количество ненулевых индексов не превышает r_3, а $\Lambda_2(0,q)\geqslant 0$.

Для доказательства сходимости ряда $d(X)$ при $X=x$ осталось показать, что при фиксированных r_3,r_2 имеем

$$R_1(r_2,r_3,m)\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{\substack{l_3+l_3^{(1)}+\dots l_3^{(m)}\leqslant r_3\\ l_2+l_2^{(1)}+\dots l_2^{(m)}\leqslant r_2}}\big(w_1(d_m^{(l_2l_3)})+w_1(x^{(l_2^{(1)}l_3^{(1)})})+$$
$$+\dots+w_1(x^{(l_2^{(m)}l_3^{(m)})})\big)\overset{m\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Но по свойствам входящих в формулу величин

$$R_1(r_2,r_3,m)=$$
$$=\inf_{i,j\geqslant 1}\inf_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+\\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}}\inf_{\substack{s_3+\mu_{3\lambda_{11}}+\dots+\mu_{3\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{3\lambda_{21}}+\dots+\mu_{3\lambda_{2j}}+\\ +l_3+l_3^{(1)}+\dots l_3^{(m)}\leqslant r_3\\ s_2+\mu_{2\lambda_{11}}+\dots+\mu_{2\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{2\lambda_{21}}+\dots+\mu_{2\lambda_{2j}}+\\ +l_2+l_2^{(1)}+\dots l_2^{(m)}\leqslant r_2}}\big(w_1(f_{ij}^{(s_2s_3)})+$$
$$+w_1(a_{1\lambda_{11}}^{(\mu_{2\lambda_{11}}\mu_{3\lambda_{11}})})+\dots+w_1(a_{1\lambda_{1i}}^{(\mu_{2\lambda_{1i}}\mu_{3\lambda_{1i}})})+$$
$$+w_1(a_{2\lambda_{21}}^{(\mu_{2\lambda_{21}}\mu_{3\lambda_{21}})})+\dots+w_1(a_{2\lambda_{2j}}^{(\mu_{2\lambda_{2j}}\mu_{3\lambda_{2j}})})+$$
$$+w_1(x^{(l_2^{(1)}l_3^{(1)})})+\dots+w_1(x^{(l_2^{(m)}l_3^{(m)})})\big)\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{i,j\geqslant 1}\inf_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+\\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}}\inf_{\substack{\mu_{3\lambda_{11}}+\dots+\mu_{3\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{3\lambda_{21}}+\dots+\mu_{3\lambda_{2j}}+\\ +l_3+l_3^{(1)}+\dots l_3^{(m)}\leqslant r_3\\ s_2+\mu_{2\lambda_{11}}+\dots+\mu_{2\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{2\lambda_{21}}+\dots+\mu_{2\lambda_{2j}}+\\ +l_2+l_2^{(1)}+\dots l_2^{(m)}\leqslant r_2}}\inf_{s_2,s_3}\big(-s_2-$$
$$-s_3+w_1(a_{1\lambda_{11}}^{(\mu_{2\lambda_{11}}\mu_{3\lambda_{11}})})+\dots w_1(a_{1\lambda_{1i}}^{(\mu_{2\lambda_{1i}}\mu_{3\lambda_{1i}})})+$$

$$+w_1(a_{2\lambda_{21}}^{(\mu_{2\lambda_{21}}\mu_{3\lambda_{21}})}) + \dots + w_1(a_{2\lambda_{2j}}^{(\mu_{2\lambda_{2j}}\mu_{3\lambda_{2j}})})+$$
$$+w_1(x^{(l_2^{(1)}l_3^{(1)})}) + \dots + w_1(x^{(l_2^{(m)}l_3^{(m)})}))\big),$$

причем

$$0 \leqslant s_3 \leqslant r_3,$$
$$-r_3 \leqslant s_2 \leqslant r_2 - \big(w_2(a_{1\lambda_{11}}^{\mu_{3\lambda_{11}}}) + \dots + w_2(a_{1\lambda_{1i}}^{\mu_{3\lambda_{1i}}}) + w_2(a_{2\lambda_{21}}^{\mu_{3\lambda_{21}}})+$$
$$+ \dots + w_2(a_{2\lambda_{2j}}^{\mu_{3\lambda_{2j}}}) + w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \dots + w_2(x^{l_3^{(m)}})\big).$$

Учитывая полученный выше результат и рассуждая аналогичным образом, видим, что

$$R_1(r_2, r_3, m) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{i,j\geqslant 1} \inf_{\substack{\lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+\\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}} \inf_{\substack{\mu_{3\lambda_{11}}+\dots+\mu_{3\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{3\lambda_{21}}+\dots+\mu_{3\lambda_{2j}}+\\ +l_3+l_3^{(1)}+\dots l_3^{(m)}\leqslant r_3\\ \mu_{2\lambda_{11}}+\dots+\mu_{2\lambda_{1i}}+\\ +\mu_{2\lambda_{21}}+\dots+\mu_{2\lambda_{2j}}+\\ +l_2+l_2^{(1)}+\dots l_2^{(m)}\leqslant r_2+r_3}} \big(-s_2 - s_3+$$
$$+w_1(a_{1\lambda_{11}}^{(\mu_{2\lambda_{11}}\mu_{3\lambda_{11}})}) + \dots + w_1(a_{1\lambda_{1i}}^{(\mu_{2\lambda_{1i}}\mu_{3\lambda_{1i}})})+$$
$$+w_1(a_{2\lambda_{21}}^{(\mu_{2\lambda_{21}}\mu_{3\lambda_{21}})}) + \dots + w_1(a_{2\lambda_{2j}}^{(\mu_{2\lambda_{2j}}\mu_{3\lambda_{2j}})})+$$
$$+w_1(x^{(l_2^{(1)}l_3^{(1)})}) + \dots + w_1(x^{(l_2^{(m)}l_3^{(m)})})\big) \geqslant$$
$$\geqslant -r_2 - r_3 - r_3\Big(\inf\big(0, \Lambda_2(r_3, 1)\big) + \inf\big(0, \Lambda_2(r_3, 2)\big)\Big)+$$
$$+ \inf_{\substack{m_1+\dots+m_{i+j}=m\\ r_3^{(1)}+\dots+r_3^{(i+j)}\leqslant r_3\\ r_2^{(1)}+\dots+r_2^{(i+j)}\leqslant r_2+r_3}} \big(\Lambda_1(r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, 1, m_1) + \dots + \Lambda_1(r_2^{(i)}, r_3^{(i)}, i, m_i)+$$
$$+\Lambda_1(r_2^{(i+1)}, r_3^{(i+1)}, 2, m_{i+1}) + \dots + \Lambda_1(r_2^{(i+j)}, r_3^{(i+j)}, 2, m_{i+j})\big),$$

причем

$$0 \leqslant s_3 \leqslant r_3$$
$$-r_3 \leqslant s_2 \leqslant r_2 + r_3\big(\inf(0, \Lambda_2(r_3, 1)) + \inf(0, \Lambda_2(r_3, 2))\big).$$

Но $r_3^{(\alpha)}$ отлично от нуля для количества индексов, не превышающего r_3, и для этих α имеем $r_2^{(\alpha)} \geqslant \inf_{q=1,2} \Lambda_2(r_3, q)$, а для тех, при которых $r_3^{(\alpha)} = 0$, имеем $r_2^{(\alpha)} \geqslant 0$. Пусть для p индексов верно, что $r_3^{(\alpha)} \geqslant 1$. Тогда $r_2^{(1)} + \dots + r_2^{(i+j)} \geqslant p + r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3))$. Но $r_2^{(1)} + \dots + r_2^{(i+j)} \leqslant r_2 + r_3$. Следовательно,

$$p \leqslant r_2 + r_3 + r_3 \sup(0, -\Lambda_2(r_3)) = q_2.$$

Итак, количество пар $(r_2^{(\alpha)}, r_3^{(\alpha)})$, не удовлетворяющих условию $r_2^{(\alpha)} \leqslant 0$, $r_3^{(\alpha)} \leqslant 0$, не превышает $r_3 + q_2$, и для этих пар $r_2^{(\alpha)} \leqslant q_2$, $r_3^{(\alpha)} \leqslant r_3$. Таким образом, в сумме, ограничивающей снизу $R_1(r_2, r_3, m)$, число отрицательных слагаемых не превышает r_3+q_2, и каждое из этих слагаемых ограничено снизу.

Возьмем произвольное число R. Хотим показать, что при $m > M$ получим $R_1(r_2, r_3, m) > R$. Если $i + j$ достаточно велико, то достаточно велико и число пар индексов вида $(0, 0)$. Но $\Lambda_1(0, 0) \geqslant 1$. Следовательно, при больших значениях $i + j$ можно добиться того, чтобы исследуемая сумма была больше R. Если же $i + j$ ограничено сверху, то одно из m_α будет достаточно велико при больших m, а значит, по третьему условию теоремы будет велико и соответствующее слагаемое.

Итак, $R_1(r_2, r_3, m) \xrightarrow{m\to+\infty} +\infty$ и ряд $d(X)$ сходится при $X = x$. Осталось показать, что $d(x) = a_1(x) +_F a_2(x)$. Для этого рассмотрим последовательность

$$g_p = (a_1(x) +_F a_2(x)) - \sum_{1\leqslant m\leqslant p} d_m x^m.$$

Хотим доказать, что $g_p \xrightarrow{p\to+\infty} 0$. Проверим для последовательности $\{g_p\}$ выполнение условий теоремы 4.1. Очевидно, что

$$g_p = \sum_{m\geqslant p} a_{1m} x^m + \sum_{m\geqslant p} a_{2m} x^m +$$
$$+ \sum_{i,j\geqslant 1} f_{ij} \sum_{\substack{m\geqslant p\\ \lambda_{11}+\dots+\lambda_{1i}+\\ \lambda_{21}+\dots+\lambda_{2j}=m}} a_{1\lambda_{11}} \dots a_{1\lambda_{1i}} a_{2\lambda_{21}} \dots a_{2\lambda_{2j}} x^m.$$

Следовательно, по доказанному ранее $w_3(g_p) \geqslant 0$, при всех r_3 имеем

$$w_2(g_p^{(r_3)}) \geqslant r_3\bigl(\inf(0, \Lambda_2(r_3, 1)) + \inf(0, \Lambda_2(r_3, 2))\bigr) > -\infty$$

и при всех r_2, r_3 имеем

$$w_1(g_p^{(r_2 r_3)}) \geqslant \inf_{m\geqslant p} R_1(r_2, r_3) \xrightarrow{p\to+\infty} +\infty.$$

Значит, $g_p \xrightarrow{p\to+\infty} 0$ и $d(x) = a_1(x) +_F a_2(x)$.

Теорема доказана полностью. □

Теорема (6.2). *Пусть $x \in K$, для всех натуральных q определены $a_q(X) \in K[[X]]$, причем $a_q(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_{qm} X^m$. Пусть $d(X) = \sum_{m\geqslant 1} d_m X^m = \sum_{F\, q\geqslant 1} a_q(X)$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\sum_{F\, q\geqslant 1} a_q(x)$:*
1. для всех натуральных q и m имеем

$$w_n(a_{qm}) + m w_n(x) \geqslant 0;$$

2. для всех натуральных q для любого $s = n, \dots, 3$ при всех $\overline{r}_s$ имеем

$$\Lambda_{s-1}(\overline{r}_s, q) = \inf_m \inf_{\bar{l}_s + \bar{l}_s^{(1)} + \dots + \bar{l}_s^{(m)} \leqslant \overline{r}_s} \big(w_{s-1}(a_{qm}^{(\bar{l}_s)}) +$$

$$+ w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(1)})}) + \dots + w_{s-1}(x^{(\bar{l}_s^{(m)})}) \big) > -\infty;$$

$$\Lambda_{s-1}(\overline{\zeta}, q) \geqslant 0;$$

3. для всех натуральных q при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$\Lambda_1(\overline{r}_2, q, m) = \inf_{\bar{l}_2 + \bar{l}_2^{(1)} + \dots + \bar{l}_2^{(m)} \leqslant \overline{r}_2} \big(w_1(a_{qm}^{(\bar{l}_2)}) +$$

$$+ w_1(x^{(\bar{l}_2^{(1)})}) + \dots + w_1(x^{(\bar{l}_2^{(m)})}) \big) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

$$\Lambda_1(\overline{\zeta}, q) = \inf_m \Lambda_1(\overline{\zeta}, q, m) \geqslant 1;$$

4. при всех $\overline{r}_2$ имеем

$$\Lambda_1(\overline{r}_2, q) = \inf_m \Lambda_1(\overline{r}_2, q, m) \overset{q \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Считаем, что $n = 3$ и что $J_2(r_3) = -r_3, J_1(r_2, r_3) = -r_2 - r_3$.

Сходимость всех рядов $a_q(X)$, а также рядов

$$d_p(X) = \sum_{m \geqslant 1} d_{pm} X^m = \sum\nolimits_{F\, 1 \leqslant q \leqslant p} a_q(X)$$

при $X = x$ следует из теоремы 6.2. Докажем, что ряд $d(X)$ определен корректно.

По определению формальной суммы

$$d_{p+1}(X) = d_p(X) + a_{p+1}(X) + \sum_{i,j \geqslant 1} f_{ij} d_p(X)^i a^{p+1}(X)^j.$$

Тогда для любого натурального m имеем

$$d_{n+1,m} = d_{pm} + a_{p+1,m} +$$

$$+ \sum_{i,j \geqslant 1} f_{ij} \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_i + \mu_1 + \dots + \mu_j = m} d_{p\lambda_1} \dots d_{p\lambda_i} a_{p+1,\mu_1} \dots a_{p+1,\mu_j}.$$

Но $d_m = \lim_{p \to +\infty} d_{pm}$. Следовательно, требуется проверить, что при любом m для последовательности $\{d_{pm}\}$ выполнены условия Коши, т.е.

$$g_{pm} = d_{p+1,m} - d_{pm} \overset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Докажем индукцией m по следующее утверждение: если при всех m верно, что $a_{qm} \overset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, то при всех m имеем

$$g_{pm} \overset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Напомним, что по теореме 4.1 $a_{qm} \overset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ тогда и только тогда, когда

1.$N_3(m) = \inf_q w_3(a_{qm}) > -\infty$,

2.при всех r_3 имеем

$$N_2(r_3, m) = \inf_q w_2(a_{qm}^{(r_3)}) > -\infty,$$

3.при всех r_2 и r_3 имеем

$$w_1(a_{qm}^{(r_2 r_3)}) \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Возьмем $m = 1$. Поскольку $g_{p1} = a_p$, наше утверждение тривиально.

Пусть для $\lambda < m$ имеем $g_{p\lambda} \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, т.е. $d_{p\lambda} \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} d_\lambda$. Тогда по теореме 4.1 верно, что

1.$K_3(\lambda) = \inf_p w_3(d_{p\lambda}) > -\infty$,

2.при всех r_3 имеем

$$K_2(r_3, \lambda) = \inf_p w_2(d_{p\lambda}^{(r_3)}) > -\infty,$$

3.при всех r_2 и r_3 имеем

$$w_1(d_{p+1,\lambda}^{(r_2 r_3)} - d_{p\lambda}^{(r_2 r_3)}) \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Проверим, что $g_{pm} \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Для этого снова воспользуемся теоремой 4.1. По построению

$$\inf_p w_3(g_{pm}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_p \Big(w_3(a_{p+1,m}), \inf_{i,j\geqslant 1} \inf_{\lambda_1+\dots+\lambda_i+\mu_1+\dots+\mu_j=m} \big(w_3(d_{p\lambda_1}) +$$
$$+ \dots + w_3(d_{p\lambda_i}) + w_3(a_{p+1,\mu_1}) + \dots + w_3(a_{p+1,\mu_j})\big)\Big) =$$
$$= E_3(m) > -\infty,$$

т.к. $\lambda_1, \dots, \lambda_i < m$ и мы можем использовать индукционное предположение, а для индексов λ_α и μ_α имеем конечное число вариантов.

Теперь фиксируем r_3. Тогда

$$\inf_p w_2(g_{pm}^{(r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_p \Big(w_2(a_{p+1,m}^{(r_3)}), \inf_{i,j\geqslant 1} \inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i+\mu_1+\dots+\mu_j=m \\ r_3^{(1)}+\dots+r_3^{(i)}+l_3^{(1)}+\dots+l_3^{(j)}\leqslant r_3 \\ 0\leqslant s_3\leqslant E_3(m)}} \big(-s_3 + w_2(d_{p\lambda_1}^{(r_3^{(1)})}) +$$
$$+ \dots + w_2(d_{p\lambda_i}^{(r_3^{(i)})}) + w_2(a_{p+1,\mu_1}^{(l_3^{(1)})}) + \dots + w_2(a_{p+1,\mu_j}^{(l_3^{(j)})})\big)\Big) =$$
$$= E_2(r_3, m).$$

Но $r_3^{(\alpha)} \geqslant K_3(\lambda_\alpha)$ при $\alpha = 1, \dots, i$ и $l_3^{(\alpha)} \geqslant N_3(\mu_\alpha)$ при $\alpha = 1, \dots, j$. Учитывая, что вариантов для индексов $\lambda_3^{(\alpha)}$ и $\mu_3^{(\alpha)}$ конечное число, получаем, что индексы $r_3^{(\alpha)}$ и $l_3^{(\alpha)}$ при всех α ограничены сверху и, следовательно, по условию и по индукционному предположению

$$\inf_p w_2(g_{pm}^{(r_3)}) \geqslant E_2(r_3, m) > -\infty.$$

Фиксируем r_2 и r_3. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &w_1(g_{pm}^{(r_2 r_3)}) \geqslant \\ &\geqslant \inf\Bigg(w_1(a_{p+1,m}^{(r_2 r_3)}), \inf_{i,j \geqslant 1} \inf_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_i+\mu_1+\dots+\mu_j=m \\ r_3^{(1)}+\dots+r_3^{(i)}+l_3^{(1)}+\dots+l_3^{(j)} \leqslant r_3 \\ 0 \leqslant s_3 \leqslant E_3(m) \\ r_2^{(1)}+\dots+r_2^{(i)}+l_2^{(1)}+\dots+l_2^{(j)} \leqslant r_2+r_3-E_3(m) \\ -E_3(m) \leqslant s_2 \leqslant r_2+r_3-E_3(m)-E_2(s_3,m)}} (-s_3- \\ &-s_2 + w_1(d_{p\lambda_1}^{(r_2^{(1)} r_3^{(1)})}) + \dots + w_1(d_{p\lambda_i}^{(r_2^{(i)} r_3^{(i)})}) + \\ &+w_1(a_{p+1,\mu_1}^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) + \dots + w_1(a_{p+1,\mu_j}^{(l_2^{(j)} l_3^{(j)})})) \Bigg). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся, что все индексы $r_2^{(\alpha)}$, $l_2^{(\alpha)}$, $r_3^{(\alpha)}$, $l_3^{(\alpha)}$ ограничены сверху, а вариантов для индексов $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ конечное число. Кроме того, в каждое выражение

$$\begin{aligned} &w_1(d_{p\lambda_1}^{(r_2^{(1)} r_3^{(1)})}) + \dots + w_1(d_{p\lambda_i}^{(r_2^{(i)} r_3^{(i)})}) + \\ &+w_1(a_{p+1,\mu_1}^{(l_2^{(1)} l_3^{(1)})}) + \dots + w_1(a_{p+1,\mu_j}^{(l_2^{(j)} l_3^{(j)})}) \end{aligned}$$

входит хотя бы одно слагаемое вида $w_1(a_{p+1,\mu_j}^{(l_2^{(j)} l_3^{(j)})})$. Учитывая, что по условию для всех r_2 и r_3 имеем $w_1(a_{qm}^{(r_2 r_3)}) \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ и что $w_1(d_{p\lambda}^{(l_2 l_3)})$ ограничено снизу по p как член стремящейся к бесконечности последовательности, получаем, что

$$w_1(g_{pm}^{(r_2 r_3)}) \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

т.е. все коэффициенты d_{pm} определены корректно.

Осталось проверить, что при всех m верно, что $a_{qm} \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Для этого достаточно рассмотреть условия нашей теоремы, когда $\bar{l}_2^{(1)} = \dots = \bar{l}_2^{(m)}$ и $x^{(\bar{l}_2^{(1)})}$ ненулевое.

Итак, ряд $d(X)$ определен корректно. Несложной индукцией по j можно показать, что при всех j и m с точностью до множителей f из кольца S имеем

$$d_m - d_{jm} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{q_1\geqslant j} \sum_{q_2\geqslant 1} \ldots$$
$$\ldots \sum_{q_i\geqslant 1} \sum_{m_1+\cdots+m_i=m} a_{q_1m_1} a_{q_2m_2} \ldots a_{q_im_i},$$

а

$$d_{jm} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{1\leqslant q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_i\leqslant j}$$
$$\sum_{m_1+\cdots+m_i=m} a_{q_1m_1} a_{q_2m_2} \ldots a_{q_im_i}.$$

Докажем, что $d(x)$ конечно и что $d_j(x) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} d(x)$.

Из первого условия теоремы вытекает, что для всех j и m выполняются следующие соотношения:

$$w_3(d_m x^m) \geqslant 0, w_3((d_m - d_{jm})x^m) \geqslant 0, w_3(d_{jm}x^m) \geqslant 0$$

(мы использовали тот факт, что $f \in S$.)

Фиксируем r_3. Тогда

$$w_2((d_m x^m)^{(r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{l_3+l_3^{(1)}+\ldots l_3^{(m)}\leqslant r_3} \left(w_2(d_m^{(l_3)}) + w_2(x^{(l_3^{(1)})}) + \cdots + w_2(x^{l_3^{(m)}})\right) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{s_3+r_3^{(1)}+\ldots r_3^{(m)}\leqslant r_3} \left(-s_3 + \Lambda_2(r_3^{(1)}) + \cdots + \Lambda_2(r_3^{(i)})\right).$$

Из первого условия теоремы вытекает, что все $r_3^{(\alpha)} \geqslant 0$, а по определению кольца S имеем $s_3 \geqslant 0$. Значит, среди них количество ненулевых не превышает r_3 и значение каждого индекса тоже не превышает r_3. Но по второму условию теоремы $\Lambda_2(0) \geqslant 0$. Поэтому

$$w_2((d_m x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3)) - r_3.$$

Аналогично доказывается, что

$$w_2(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3)) - r_3$$

и

$$w_2((d_{jm} x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3)) - r_3.$$

Теперь фиксируем r_2. Тогда для всех j и m имеем:

$$w_1(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{1\leqslant i\leqslant m} \inf_{q_1\geqslant j+1} \inf_{q_2\geqslant 1} \dots \inf_{q_i\geqslant 1} \inf_{\substack{m_1+\dots+m_i=m \\ s_3+r_3^{(1)}+\dots r_3^{(i)}\leqslant r_3 \\ s_2+r_2^{(1)}+\dots r_2^{(i)}\leqslant r_2}} \big(-s_2 - s_3 +$$
$$+\Lambda_1(r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, q_1, m_1) + \dots + +\Lambda_1(r_2^{(i)}, r_3^{(i)}, q_i, m_i)\big).$$

По второму условию теоремы получаем, что при тех значениях α, для которых $r_3^{(\alpha)} = 0$, имеем $r_2^{(\alpha)} \geqslant 0$. Следовательно, значение $r_2^{(\alpha)}$ может быть отрицательно не более, чем для r_3 индексов α. Но $r_2^{(\alpha)} \geqslant \Lambda_2(r_3)$. Пусть имеется q_2 положительных индекса. Тогда

$$s_2 + r_2^{(1)} + \dots + r_2^{(m)} \geqslant q_2 + r_3\Lambda_2(r_3).$$

Используя условие

$$s_2 + r_2^{(1)} + \dots + r_2^{(m)} \leqslant r_2,$$

получаем, что

$$q_2 \leqslant r_2 - s_2 - r_3\Lambda_2(r_3) \geqslant r_2 + r_3 - r_3\Lambda_2(r_3).$$

Значит, максимальное количество ненулевых индексов $r_2^{(\alpha)}$ тоже ограничено сверху некой константой q, а остальные индексы нулевые, причем соответствующие им индексы $r_3^{(\alpha)}$ тоже нулевые. Кроме того, $s_2, r_2^{(1)}, \dots, r_2^{(m)}$ ограничены сверху константой, зависящей от r_2, r_3.

Следовательно, число ненулевых пар $(r_2^{(\alpha)}, r_3^{(\alpha)})$ конечно, а значения $r_2^{(\alpha)}, r_3^{(\alpha)}$ ограничены сверху некими n_2, n_3. Пусть ненулевых пар γ штук. Учитывая, что $\Lambda_1(0,0) \geqslant 0$, имеем:

$$w_1(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{q\geqslant j+1} \Lambda_1(n_2, n_3, q) + \gamma \inf(0, \Lambda_1(n_2, n_3)) - r_2 - r_3 - r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3)).$$

Следовательно, по четвертому условию теоремы

$$\inf_m w_1(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Но

$$w_1((d_m)x^m)^{(r_2r_3)}) \geqslant$$
$$\geqslant \inf\big(w_1(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}), w_1((d_{jm}x^m)^{(r_2r_3)})\big).$$

По третьему условию теоремы при всех r_2, r_3 имеем

$$w_1((d_{jm}x^m)^{(r_2r_3)}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Зададим произвольное число A. При $j \geqslant j_0$ верно, что для всех m выполняется неравенство

$$w_1(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_2r_3)}) > A;$$

при $m \geqslant m_0$ верно, что

$$w_1((d_{j_0 m} x^m)^{(r_2 r_3)}) > A.$$

Тогда при $m \geqslant m_0$ получаем, что $w_1((d_m x^m)^{(r_2 r_3)}) > A$, т.е.

$$w_1((d_m x^m)^{(r_2 r_3)}) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Следовательно, ряд $d(X)$ сходится при подстановке x вместо X по следствию теоремы 4.1.

Осталось показать, что $d_j(x) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} d(x)$. Проверим выполнение условий теоремы 4.1 для последовательности $d(x) - d_j(x)$. Уже доказано, что $w_3((d_m - d_{jm})x^m) \geqslant 0$ и что при фиксированном r_3 выполнено неравенство

$$w_2(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3)).$$

Значит, $w_3(d(x) - d_j(x)) \geqslant 0$ и

$$w_2((d(x) - d_j(x))^{(r_3)}) \geqslant r_3 \inf(0, \Lambda_2(r_3)).$$

Кроме того, при всех r_2, r_3 верно, что

$$w_1((d(x) - d_j(x))^{(r_2 r_3)}) \geqslant \inf_m w_1(((d_m - d_{jm})x^m)^{(r_2 r_3)}) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Таким образом,

$$d(x) - d_j(x) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

что и завершает доказательство. □

§7. Некоторые особенности сходимости рядов в поле $K = k\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\}$

На протяжении этого параграфа

$$K = k\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\},$$

где k — полное дискретно нормированное поле с нормированием v, и все обозначения соответствуют обозначениям §3.

Напомним, что любой элемент a, принадлежащий полю K, может быть представлен в виде ряда

$$a = \sum_{\tilde{r}} a_{\tilde{r}} T^{\tilde{r}},$$

где $a_{\tilde{r}} \in k$.

В теореме 3.1 мы мы сформулировали критерий сходимости к нулю последовательности $a_m \in K$ в терминах нормирования v поля k, после чего в теореме 3.2 переформулировали этот критерий в терминах псевдонормирований w_s и признаки сходимости, относящиеся к рядам, вывели уже в терминах псевдонормирований w_s (см. §4). Однако можно дать признаки сходимости рядов в терминах нормирования v поля k (напомним, что $v_n(a) = \inf_{\mathbf{r}} v(a_{\mathbf{r}})$).

Вначале докажем следующее утверждение.

Лемма (7.1). *Кольцо нормирования O поля K состоит из тех и только тех элементов a для которых выполнена следующая совокупность условий:*
1.

$$v_n(a) \geqslant 0,$$

2. для $s = n-1, \dots, 1$ имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{s-1}\in\mathbb{Z}\\ r_s<0\\ r_{s+1},\dots,r_{n-1}=0}} v(a_{\boldsymbol{r}}) \geqslant 1.$$

Максимальный идеал $\mathfrak{M}$ поля K состоит из тех и только тех элементов a, для которых выполнена следующая совокупность условий:
1.

$$v_n(a) \geqslant 0,$$

2. для $s = n-1, \dots, 1$ имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{s-1}\in\mathbb{Z}\\ r_s<0\\ r_{s+1},\dots,r_{n-1}=0}} v(a_{\boldsymbol{r}}) \geqslant 1,$$

3.

$$v(a_\zeta) \geqslant 1.$$

Доказательство. По определению кольца нормирования многомерного полного поля $a \in O$ в том и только в том случае, когда $\overline{v}(a) = (v^{(1)}(a), \dots, v^{(n)}(a)) \geqslant (0, \dots, 0)$ в смысле лексикографического упорядочивания. Вспоминая, как строятся нормирования $v^{(s)}$ (см.§1), получаем, что $a \in O$, когда реализуется одна из следующих возможностей:

1. $v^{(n)}(a) = v_n(a) \geqslant 1$, т.е. $v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1$ при всех $\mathtt{r}$,

2. $v^{(n)}(a) = 0$, т.е. существует $\mathtt{r}_0$ такое, что $v(a_{\mathtt{r}_0}) = 0$, но $v^{(n-1)}(a) = v_n(a) \geqslant 1$. Это значит, что минимальный номер $r^{(0)}_{n-1}$, для которого $v(a_{\mathtt{r}_0}) = 0$, не меньше единицы. Следовательно, при $r_{n-1} \leqslant 0$ имеем $\inf_{r_1,\dots,r_{n-2}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1$, и потому

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{n-2}\in\mathbb{Z}\\ r_{n-1}\leqslant 0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1.$$

3. $v^{(n)}(a) = 0, v^{(n-1)}(a) = 0$, т.е.

$$\inf_{r_1,\dots,r_{n-2}} v(a_{r_1,\dots,r_{n-1},0}) = 0$$

и

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{n-2}\in\mathbb{Z}\\ r_{n-1}<0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1,$$

но $v^{(n-2)}(a) \geqslant 1$. Тогда минимальный номер $r^{(0)}_{n-2}$, для которого

$$v(a_{r^{(0)}_1,\dots,r_{n-1}(0),0}) = 0,$$

не меньше единицы, и имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{n-3}\in\mathbb{Z}\\ r_{n-2}\leqslant 0\\ r_{n-1}=0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1.$$

Продолжая рассуждения, приходим, наконец, к последней возможности:
4. $v^{(n)}(a) = \dots = v^{(2)}(a) = 0$, $v^{(1)}(a) \geqslant 0$, т.е.

$$v_n(a) = 0, \inf_{\substack{r_1,\dots,r_{n-2}\in\mathbb{Z}\\ r_{n-1}<0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1,$$

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{n-3}\in\mathbb{Z}\\ r_{n-2}<0\\ r_{n-1}=0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1, \dots, \quad \inf_{\substack{r_1<0\\ r_2,\dots,r_{n-1}=0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1.$$

Объединение всех вариантов и дает условие леммы.

Для элементов максимального идеала получаем те же условия, за исключением последнего пункта, в котором $v^{(1)}(a) \geqslant 1$ и потому

$$\inf_{\substack{r_1\leqslant 0\\ r_2,\dots,r_{n-1}=0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1.$$

Для единообразия это условие можно разбить на два:

$$\inf_{\substack{r_1<0\\ r_2,\dots,r_{n-1}=0}} v(a_{\mathtt{r}}) \geqslant 1$$

и

$$v(a_\zeta) \geqslant 1.$$

□

Лемма доказана.

Следующие утверждения являются следствиями теоремы 3.2 и соответствующих теорем §§4-6.

Теорема (7.1). *Пусть $a(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_m X^m$ — ряд над K, $x \in K$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $a(X)$ при подстановке вместо X элемента x:*
1. $R_n = \inf_m(v_n(a_m) + mv_n(x)) > -\infty$;
2. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$R_1(I,m) = \inf_{\mathtt{r}\in I} \inf_{\mathtt{l}+\mathtt{l}_1+\dots+\mathtt{l}_m=\mathtt{r}} v(a_{m\mathtt{r}} x_{\mathtt{l}_1}\dots x_{\mathtt{l}_m}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Теорема (7.2). *Пусть*

$$a(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_m X^n, \qquad b(X) = \sum_{m\geqslant 1} b_m X^m$$

— ряды над K,

$$c(X) = (a\circ b)(X) = \sum_{m\geqslant 1} c_m X^m$$

— суперпозиция $a(X)$ и $b(X)$, $x \in K$.

Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $c(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $a(b(x))$:

1. $R_n = \inf_m \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ \lambda_1+\cdots+\lambda_i=m}} (v_n(a_i b_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_i}) + mv_n(x)) > -\infty$;

2. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$R_1(I,m) = \inf_{-\boldsymbol{r}\in I} \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ \lambda_1+\cdots+\lambda_i=m}} \inf_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{f}_1+\cdots+\boldsymbol{f}_m=\boldsymbol{r}} v(a_{m\boldsymbol{r}} b_{\lambda_1 \boldsymbol{l}_1}\ldots b_{\lambda_i \boldsymbol{l}_i} \times x_{\boldsymbol{f}_1}\ldots x_{\boldsymbol{f}_m}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Теорема (7.3). *Пусть имеется последовательность $\{a_m\}_{m\geqslant1}$ элементов поля K. Тогда $\prod_{m=1}^{+\infty}(1+a_m)$ сходится в K, если выполнены следующие условия:*

1. при всех m имеем

$$v_n(a_m) \geqslant 0;$$

2. при всех m для $s = n-1,\ldots,1$ имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\ldots,r_{s-1}\in\mathbb{Z}\\ r_s<0\\ r_{s+1},\ldots,r_{n-1}=0}} v(a_{m\boldsymbol{r}}) \geqslant 1,$$

3. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\tilde{R}_1(I,m) = \inf_{-\boldsymbol{r}\in I} v(a_{m,\boldsymbol{r}}) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что условия теоремы означают, что последовательность $\{a_m\}$ сходится к нулю и что все ее члены принадлежат кольцу нормирования поля K. Но по теореме 5.1 для такой последовательности $\prod_{m=1}^{+\infty}(1+a_m)$ сходится. □

Теорема (7.4). *Пусть для всех натуральных q определены ряды над K*

$$h_q(X) = \sum_{m\geqslant1} h_{qm}X^m$$

и пусть

$$1 + H(X) = 1 + \sum_{m\geqslant1} H_m X^m = \prod_{q\geqslant1}(1 + h_q(X)),$$

$x \in K$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $H(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\prod_{q\geqslant1}(1+h_q(x)) - 1$:

1. при всех натуральных q и m имеем

$$v_n(h_{qm}) + mv_n(x) \geqslant 0;$$

2. при всех натуральных q и m для $s = n-1, \dots, 1$ имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{s-1}\in\mathbb{Z}\\ r_s<0\\ r_{s+1},\dots,r_{n-1}=0}} \inf_{\boldsymbol{l}+l_1+\dots+l_m=\boldsymbol{r}} v(h_{qm\boldsymbol{r}} x_{l_1}\dots x_{l_m}) \geqslant 1,$$

3. при всех натуральных q для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\inf_{-\boldsymbol{r}\in I} \inf_{\boldsymbol{l}+l_1+\dots+l_m=\boldsymbol{r}} v(h_{qm\boldsymbol{r}} x_{l_1}\dots x_{l_m}) \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

4. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\inf_{-\boldsymbol{r}\in I} \inf_{m} \inf_{\boldsymbol{l}+l_1+\dots+l_m=\boldsymbol{r}} v(h_{qm\boldsymbol{r}} x_{l_1}\dots x_{l_m}) \stackrel{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Перейдем к вопросу сходимости формальных сумм над введенными в §6 кольцами. Напомним, что эти кольца имеют вид

$$S = \{\sum_{r_n\geqslant 0} \sum_{r_{n-1}\geqslant J_{n-1}(\overline{r}_n)} \cdots \sum_{r_1\geqslant J_1(\overline{r}_2)} a^{(\overline{r})} T^{\overline{r}}\},$$

где $a^{(\overline{r})} \in \mathcal{R}_{\tilde{K}} \cup \{0\}$ и $J_{n-1}(\overline{r}_n), \dots, J_1(\overline{r}_2)$ — фиксированные целочисленные функции со свойствами $J_s(\overline{i_{s+1} + j_{s+1}}) = J_s(\overline{i}_{s+1}) + J_s(\overline{j}_{s+1}), s = n-1, \dots, 1$.

Пусть $F(X,Y)$ — однопараметрическая формальная группа над S, причем

$$F(X,Y) = X + Y + \sum_{i,j\geqslant 1} f_{ij} X^i Y^j.$$

Мы введем обозначение $X +_F Y = F(X,Y)$.

Теорема (7.5). *Пусть $x \in K$, $a_1(X), a_2(X) \in K[[X]]$, причем $a_q(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_{qm} X^m, q = 1,2$; и пусть $d(X) = a_1(X) +_F a_2(X) = \sum_{m\geqslant 1} d_m X^m$.*

Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $a_1(x) +_F a_2(x)$:

для $q = 1,2$ верно, что

1. при всех натуральных m имеем

$$v_n(a_{qm}) + m v_n(x) \geqslant 0;$$

2. при всех натуральных m для $s = n-1, \dots, 0$ имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{s-1}\in\mathbb{Z}\\ r_s<0\\ r_{s+1},\dots,r_{n-1}=0}} \inf_{\boldsymbol{l}+l_1+\dots+l_m=\boldsymbol{r}} v(a_{qm\boldsymbol{r}} x_{l_1}\dots x_{l_m}) \geqslant 1,$$

3. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\inf_{-\boldsymbol{r}\in I} \inf_{\boldsymbol{l}+l_1+\dots+l_m=\boldsymbol{r}} v(a_{qm\boldsymbol{r}} x_{l_1}\dots x_{l_m}) \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что условия этой теоремы означают, что $a_1(x), a_2(x)$ сходятся к элементам максимального идеала поля K. □

Теорема (7.6). *Пусть $x \in K$, для всех натуральных q определены $a_q(X) \in K[[X]]$, причем $a_q(X) = \sum_{m \geqslant 1} a_{qm} X^m$, и пусть $d(X) = \sum_{m \geqslant 1} d_m X^m = \sum_{Fq \geqslant 1} a_q(X)$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\sum_{Fq \geqslant 1} a_q(x)$:*
1. при всех натуральных m и q имеем

$$v_n(a_{qm}) + m v_n(x) \geqslant 0;$$

2. при всех натуральных m и q для $s = n-1, \dots, 0$ имеем

$$\inf_{\substack{r_1,\dots,r_{s-1} \in \mathbb{Z} \\ r_s < 0 \\ r_{s+1},\dots,r_{n-1} = 0}} \ \inf_{\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}_1 + \dots + \boldsymbol{l}_m = \boldsymbol{r}} v(a_{qm\boldsymbol{r}} x_{\boldsymbol{l}_1} \dots x_{\boldsymbol{l}_m}) \geqslant 1,$$

3. при всех натуральных q для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\inf_{-\boldsymbol{r} \in I} \ \inf_{\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}_1 + \dots + \boldsymbol{l}_m = \boldsymbol{r}} v(a_{qm\boldsymbol{r}} x_{\boldsymbol{l}_1} \dots x_{\boldsymbol{l}_m}) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

4. для любого допустимого набора мультииндексов I из $\mathbb{Z}^{n-1}$ имеем

$$\inf_{-\boldsymbol{r} \in I} \inf_{m} \ \inf_{\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}_1 + \dots + \boldsymbol{l}_m = \boldsymbol{r}} v(a_{qm\boldsymbol{r}} x_{\boldsymbol{l}_1} \dots x_{\boldsymbol{l}_m}) \overset{q \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Глава 2

Применение признаков сходимости к ряду, определяющему примарный элемент полного поля

Вторая глава работы посвящена доказательству корректности определения примарных элементов $\omega(a)$ и $H(a)$ полного поля (см. [5—10]). Эти элементы определены в виде рядов, в которые вместо переменной подставлен некоторый элемент поля.

В первом параграфе приводятся формулировки результатов первой главы для случая полного дискретно нормированного поля, во втором доказывается корректность определения $\omega(a)$ и $H(a)$ в случае классического локального поля нулевой характеристики, в третьем — в случае многомерного полного поля нулевой характеристики с первым полем вычетов положительной характеристики.

§1. Признаки сходимости рядов над полными дискретно нормированными полями

Рассмотрев доказательства теорем §§4-6 главы 1, связанных со сходимостью рядов, при $n = 1$, замечаем, что в этом случае не используется структурная теорема для n-мерных полных полей и потому можно не требовать совершенности поля вычетов. Следовательно, результаты верны для любого полного дискретно нормированного поля. Сформулируем эти результаты.

Пусть K — полное дискретно нормированное поле с нормированием v и кольцом нормирования O.

Теорема (1.1). *Пусть*

$$a(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_m X^m, \qquad b(X) = \sum_{m\geqslant 1} b_m X^m$$

— ряды над K,

$$c(X) = (a\circ b)(X) = \sum_{m\geqslant 1} c_m X^m$$

— суперпозиция $a(X)$ *и* $b(X)$, $x \in K$.

Тогда следующее условие является достаточным для сходимости $c(X)$ *при подстановке вместо* X *элемента* x *к элементу* $a(b(x))$:

$$\inf_m \inf_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m}} v(a_i b_{\lambda_1}\dots b_{\lambda_i} x^m) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Теорема (1.2). *Пусть для всех натуральных q определены ряды над K*

$$h_q(X)=\sum_{m\geqslant 1} h_{qm}X^m$$

и пусть

$$1+H(X)=1+\sum_{m\geqslant 1} H_mX^m=\prod_{q\geqslant 1}(1+h_q(X)),$$

$x\in K$. *Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $H(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\prod_{q\geqslant 1}(1+h_q(x))-1$:*
1. при всех натуральных q и m имеем

$$v(h_{qm}x^m)\geqslant 0;$$

2. при всех q имеем

$$v(h_{qm}x^m)\overset{m\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty;$$

3.

$$\inf_m v(h_{qm}x^m)\overset{q\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Следствие. *Рассмотрим двойное бесконечное произведение рядов*

$$H(X)=\prod_q\prod_r(1+h_{qr}(X))-1.$$

Если аналогично доказательству теоремы 5.2 главы 1 ввести ряды

$$d_{j_1j_2}(X)=\prod_{q=1}^{j_1}\prod_{r=1}^{j_2}(1+h_{qr}(X))$$

и повторить соответствующие рассуждения, получим следующее утверждение:

пусть для всех натуральных q и r определены ряды над K

$$h_{qr}(X)=\sum_{m\geqslant 1} h_{qrm}X^m$$

и пусть

$$1+H(X)=1+\sum_{m\geqslant 1} H_mX^m=\prod_{q\geqslant 1}\prod_{r\geqslant 1}(1+h_{qr}(X)),$$

$x\in K$. *Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $H(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\prod_{q\geqslant 1}\prod_{r\geqslant 1}(1+h_{qr}(x))-1$:*
1. при всех натуральных q,r и m имеем

$$v(h_{qrm}x^m)\geqslant 0;$$

2. при всех натуральных q и r имеем

$$v(h_{qrm}x^m) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

3. $\inf_m \inf_q v(h_{qrm}x^m) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

4. $\inf_m \inf_r v(h_{qrm}x^m) \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Перейдем к вопросу сходимости формальных сумм рядов. Напомним, что в нашем случае введенные в §6 главы 1 кольца совпадают с кольцом нормирования O.

Пусть $F(X,Y)$ — однопараметрическая формальная группа над O, причем

$$F(X,Y) = X + Y + \sum_{i,j\geqslant 1} f_{ij}X^iY^j.$$

Мы введем обозначение $X +_F Y = F(X,Y)$.

Теорема (1.3). *Пусть $x \in K$, $a_1(X), a_2(X), d(X) \in K[[X]]$, причем $a_q(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_{qm}X^m, q = 1,2$; $d(X) = a_1(X) +_F a_2(X) = \sum_{m\geqslant 1} d_mX^m$.*

Тогда следующая совокупность условий является досьаточной для сходимости $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $a_1(x) +_F a_2(x)$:

для $q = 1,2$ верно, что

1. при всех натуральных q и m имеем

$$v(a_{qm}x^m) \geqslant 1;$$

2. при всех натуральных q имеем

$$v(a_{qm}x^m) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Замечание. *Если для всех натуральных r*

$$v(a_mx^m) \geqslant Mm,$$

где $M > 0$ и не зависит от m, то для ряда $a(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_mX^m$ и элемента x выполнено условие, налагаемое на ряд и элемент теоремой 1.3.

Теорема (1.4). *Пусть $x \in K$, для всех натуральных q определены $a_q(X) \in K[[X]]$, причем $a_q(X) = \sum_{m\geqslant 1} a_{qm}X^m$, и пусть $d(X) = \sum_{m\geqslant 1} d_mX^m = \sum_{F\, q\geqslant 1} a_q(X)$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимсти $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\sum_{F\, q\geqslant 1} a_q(x)$:*

1. при всех натуральных q и m имеем

$$v(a_{qm}x^m) \geqslant 1;$$

2. при всех натуральных q имеем

$$v(a_{qm}x^m) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

3. $\inf_m v(a_{qm}x^m) \overset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. *Рассмотрим двойную бесконечную формальную сумму рядов*

$$d(X) = \sum\nolimits_{F\,q} \sum\nolimits_{F\,r} a_{qr}(X).$$

Если аналогично доказательству теоремы 6.2 главы 1 ввести ряды

$$d_{j_1 j_2}(X) = \sum\nolimits_{F\,q=1}^{j_1} \sum\nolimits_{F\,r=1}^{j_2} a_{qr}(X)$$

и повторить соответствующие рассуждения, получим следующее утверждение.

Пусть для всех натуральных q и r определены ряды над K

$$a_{qr}(X) = \sum_{m \geqslant 1} a_{qrm} X^m$$

и пусть

$$d(X) = \sum_{m \geqslant 1} d_m X^m = \sum\nolimits_{F\,q \geqslant 1} \sum\nolimits_{F\,r \geqslant 1} a_{qr}(X),$$

$x \in K$. Тогда следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $d(X)$ при подстановке вместо X элемента x к элементу $\sum_{F\,q \geqslant 1} \sum_{F\,r \geqslant 1} a_{qr}(x)$:
1. при всех натуральных q, r и m имеем

$$v(a_{qrm} x^m) \geqslant 1;$$

2. при всех натуральных q и r имеем

$$v(a_{qrm} x^m) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

3. $\inf_m \inf_q v(a_{qrm} x^m) \overset{r \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$
4. $\inf_m \inf_r v(a_{qrm} x^m) \overset{q \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

§2. О сходимости рядов, определяющих примарные элементы $\omega(a)$ и $H(a)$ для случая классического локального поля

Пусть k — локальное поле нулевой характеристики (конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$), $q = p^{f_0}$ — порядок его поля вычетов, $\mathfrak{O}_0$ — кольцо целых, π_0 — униформизующая, v — нормирование, $F(X, Y)$ — формальная группа Любина-Тейта над $\mathfrak{O}_0$ $X +_F Y = F(X, Y)$.

Известно, что для $F(X, Y)$ существует ряд $\log_F X \in k[[X]]$, обладающий тем свойством, что $\log_F(X +_F Y) = \log_F X + \log_F Y$ и называемый формальным логарифмом, причем

$$\log_F X = \sum_{r \geqslant 1} c_r X^r, \quad c_1 = 1,$$

для всех $r > 1$ имеем $v(c_r) \geqslant -\log_q r$.

Напомним, что $\exp_F X$ — это ряд, обратный к $\log_F X$ в смысле суперпозиции.

Пусть K — конечное расширение поля k, содержащее все корни изогении $[\pi_0^{m_0}](X)$, где m_0 — фиксированное натуральное число.

Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля K, π — униформизующая K, ζ_{m_0} — первообразный корень $[\pi_0^{m_0}](X)$, Δ — продолжение на K автоморфизма Фробениуса T/K, где T — поле инерции K/k. Определим действие Δ на $K[[X]]$ следующим образом:

$$\text{если } a(X) = \sum_r a_r X^r, \text{ то } a^\Delta = \sum_r a_r^\Delta X^{qr}.$$

Пусть e — индекс ветвления K/k. Тогда $e = e_{m_0} q^{m_0-1}(q-1)$, где $e_{m_0} \in \mathbb{N}$.

Мы можем выбрать ряд

$$z(X) = \sum_{r \geqslant e_{m_0}} z_r X^r, \quad z_r \in \mathfrak{O},$$

такой, что $z(\pi) = \zeta_{m_0}$.

Пусть $l_F(X) = (1 - \frac{\Delta}{\pi_0}) \log_F X$, $E_F(X)$ — ряд, обратный к $l_F(X)$ в смысле суперпозиции, a принадлежит кольцу целых T, A принадлежит максимальному неразветвленному расширению T и $\Delta A - A = a$.

Тогда

$$\omega(a) = E_F(as(X))|_{X=\pi}, H(a) = E_F(\pi_0^{m_0} \Delta A l_F(z(X)))|_{X=\pi} \text{ —}$$

$\pi_0^{m_0}$—примарные элементы, играющие важную роль в задании символа Гильберта (см. [6], [10]).

Напомним, что элемент $\alpha \in k$ называется $\pi_0^{m_0}$—примарным, если расширение, полученное присоединением корней уравнения $[\pi_0^{m_0}](X) = \alpha$, неразветвлено.

Цель этого параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема (2.1). *$\omega(a)$ и $H(a)$ — корректно определенные элементы поля K, причем*

$$H(a) = \omega(a) +_F [\pi_0^{m_0}] \left({\sum}_{F\, m=2}^{+\infty} {\sum}_{F\, j=0}^{+\infty} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^{m\Delta^i}(\pi)}{\pi_0^{m_0+i}} \right).$$

Нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Преобразуем $H(a)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}(1 - \frac{\Delta}{\pi_0})(A \log_F z) &= A \log_F z - \Delta A \frac{\Delta}{\pi_0} \log_F z = \\ &= \Delta A \log_F z - a \log_F z - \Delta A \frac{\Delta}{\pi_0} \log_F z = \\ &= \Delta A l_F(z) - a \log_F z.\end{aligned}$$

Значит,

$$E_F(\pi_0^{m_0}\Delta Al_F(z)) = E_F(\pi_0^{m_0}(\Delta Al_F(z) - a\log_F z) + \pi_0^{m_0} a\log_F z) =$$
$$= E_F\left(\pi_0^{m_0}\left(1-\frac{\Delta}{\pi_0}\right)(A\log_F z)\right) +_F E_F(\pi_0^{m_0} a\log_F z) =$$
$$= \exp_F(\pi_0^{m_0} A\log_F z) +_F E_F(\pi_0^{m_0} a\log_F z),$$

так как

$$E_F\left(\pi_0^{m_0}(1-\frac{\Delta}{\pi_0})(A\log_F z)\right) =$$
$$= \exp_F\left(\pi_0^{m_0}(\sum_{i\geqslant 0}(\frac{\Delta}{\pi_0})^i (A\log_F z) - \sum_{i\geqslant 1}(\frac{\Delta}{\pi_0})^i (A\log_F z))\right) =$$
$$= \exp_F(\pi_0^{m_0} A\log_F z).$$

Итак,

$$H(a) = (E_F(\pi_0^{m_0} a\log_F z) +_F \exp_F(\pi_0^{m_0} A\log_F z))|_{X=\pi}.$$

Далее,

$$E_F(a\pi_0^{m_0}\log_F z) = E_F(a\log_F([\pi_0^{m_0}]z)) = E_F(a\log_F s) =$$
$$= E_F(a\sum_{m\geqslant 1} c_m s^m) = E_F(as) +_F \sum\nolimits_{F\,m\geqslant 2} E_F(ac_m s^m) =$$
$$= \sum\nolimits_{F\,i\geqslant 0} \exp_F \frac{\Delta^i s}{\pi_0^i} +_F \sum\nolimits_{F\,m\geqslant 2}\sum\nolimits_{F\,i\geqslant 0} \exp_F(\frac{c_m}{\pi_0^i}\Delta^i(as^m)).$$

Определим ряды $s_{m_0+i}(X) = [\pi_0^{m_0+i}](z(X)), \quad i \geqslant 0$.
Тогда $\Delta^i(as^m) = a^{\Delta^i}(s^{m\Delta^i} - s^m_{m_0+i}) + a^{\Delta^i}s^m_{m_0+i}$, и потому

$$H(a) = \Bigg(\exp_F(\pi_0^{m_0} A\log_F z(X)) +_F \sum\nolimits_{F\,i\geqslant 0} \exp_F \frac{\Delta^i s(X)}{\pi_0^i} +_F$$
$$+_F \sum\nolimits_{F\,m\geqslant 2}\sum\nolimits_{F\,i\geqslant 0} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^m_{m_0+i}(X)}{\pi_0^i} +_F$$
$$+_F \sum\nolimits_{F\,m\geqslant 2}\sum\nolimits_{F\,i\geqslant 0} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m (s^{m\Delta^i}(X) - s^m_{m_0+i}(X))}{\pi_0^i}\Bigg)\Bigg|_{X=\pi}.$$

Рассмотрим возможность подставлять π вместо X в каждое из слагаемых.

Лемма (2.1). *Для формальной экспоненты* $\exp_F X = \sum_{j\geqslant 1} a_j X^j$ *имеем*

$$v(a_j) \geqslant -\frac{j-1}{q-1}.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по j.
При $j=1$ получаем $v(a_1)=v(1)=0\geqslant -\frac{1-1}{q-1}$.
Теперь считаем, что для $j<m$ выполнено условие $v(a_j)\geqslant -\frac{j-1}{q-1}$.
Известно, что $[\pi_0](X)=\pi_0X+X^q+\pi_0\sum_{i\geqslant 2}b_iX^i$, $b_i\in\mathfrak{O}_0$.
Следовательно,

$$(\exp_F X)=\pi_0\left(\sum_{j\geqslant 1}a_jX^j\right)+\left(\sum_{j\geqslant 1}a_jX^j\right)^q+ \\ +\pi_0\left(\sum_{i\geqslant 2}b_i\left(\sum_{j\geqslant 1}a_jX^j\right)^i\right).$$

Но $[\pi_0]\exp_F X=\exp_F(\pi_0X)=\sum_{j\geqslant 1}a_j\pi_0^jX^j$, и потому

$$a_m\pi_0^m=a_m\pi_0+\sum_{j_1+\dots+j_q=m}a_{j_1}\dots a_{j_q}+ \\ +\pi_0\sum_{i\geqslant 2}b_i\left(\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_i=m}a_{\lambda_1}\dots a_{\lambda_i}\right).$$

Значит,

$$v(a_m\pi_0^m-a_m\pi_0)=1+v(a_m)\geqslant \\ \geqslant \inf_{\substack{j_1+\dots+j_q=m\\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m\\ i\geqslant 2}}(v(a_{j_1}\dots a_{j_q}),1+v(a_{\lambda_1}\dots a_{\lambda_i}))\geqslant \\ \geqslant \inf_{\substack{j_1+\dots+j_q=m\\ \lambda_1+\dots+\lambda_i=m\\ i\geqslant 2}}\left(-\frac{j_1-1+\dots+j_q-1}{q-1},1-\frac{\lambda_1-1+\dots+\lambda_j-1}{q-1}\right)= \\ =\inf_{i\geqslant 2}\left(-\frac{m-1}{q-1}+1,-\frac{m-i}{q-1}+1\right)=-\frac{m-1}{q-1}+1,$$

то есть $v(a_m)\geqslant -\frac{m-1}{q-1}$.
Индукция завершена. □

Лемма (2.2). *Для* $h(X)\in\mathfrak{O}[[X]]$ *имеем*

$$([\pi_0^r]h(X))^\Delta\equiv[\pi_0^{r+1}](h(X))\pmod{\pi_0^{r+1}}.$$

Доказательство легко проводится индукцией по r.

Следствие. $s^\Delta_{m_0+i}(X)\equiv s_{m_0+i+1}(X)\pmod{\pi_0^{m_0+i+1}}$.

Лемма (2.3).

$$\Delta^is(X)=s_{n+i}(X)+\pi_0^{m_0+1}\Delta^{i-1}g_1(X)+ \\ +\pi_0^{m_0+2}\Delta^{i-2}g_2(X)+\dots+\pi_0^{m_0+i}g_i(X),$$

где $g_\alpha(X) \in X^{e_{m_0}}\mathfrak{O}[[X]]$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по i.

При $i = 0$ утверждение очевидно.

Пусть для $r \leqslant i$ утверждение верно. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta^{i+1}s(X) = \Delta(\Delta^i s(X)) = \\ = \Delta(s_{m_0+i}(X) + \pi_0^{m_0+1}\Delta^{i-1}g_1(X)+ \\ +\pi_0^{m_0+2}\Delta^{i-2}g_2(X) + \dots + \pi_0^{m_0+i}g_i(X)) = \\ = s_{m_0+i+1}(X) + \pi_0^{m_0+1}\Delta^i g_1(X) + \pi_0^{m_0+2}\Delta^{i-1}g_2(X)+ \\ + \dots + \pi_0^{m_0+i}\Delta g_i(X) \qquad + \pi_0^{m_0+i+1}g_{i+1}(X),\end{aligned}$$

где $g_{i+1}(X) \in \mathfrak{O}[[X]]$ и находится по следствию леммы 2.2, причем начинается с e_{m_0} как разность начинающихся с e_{m_0} рядов. □

Лемма (2.4). $\log_F(z(X))|_{X=\pi} = \log_F(z(\pi)) = \log_F(\zeta_{m_0}) = 0$.

Доказательство. Вспомним теорему Ямамото (см. [38]).

Пусть $a(X) = \sum_{j\geqslant 1} a_j X^j$, $b(X) = \sum_{j\geqslant 1} b_j X^j$, $a_j, b_j \in K$ — дискретно нормированному полю, r_a, r_b — радиусы сходимости $a(X)$ и $b(X)$ соответственно, $c(X) = (a \circ b)(X)$.

Тогда если существует $s \in \mathcal{R}$, такое что $s \leqslant r_b$ и $|b(x)| < r_a$ для всех x с $|x| < s$, то для таких x определено $c(x)$ и $c(x) = a(b(x))$.

В нашем случае $a(X) = \log_F X$, $r_a = 1$, $b(X) = z(X)$, $r_b \geqslant 1$.

Пусть $s = 1 \leqslant r_b$, $|z(x)| < r_a = 1$ при $|x| < 1$. Поскольку $|\pi| < 1$, имеем по теореме Ямамото $\log_F(z(X))|_{X=\pi} = \log_F z(\pi) = \log_F \zeta_{m_0}$.

$\log_F \zeta_{m_0} = 0$, так как $[\pi_0^{m_0}](\zeta_{m_0}) = 0$ и $\pi_0^{m_0} \log_F \zeta_{m_0} = \log_F([\pi_0^{m_0}]\zeta_{m_0})$.

Лемма доказана. □

Лемма (2.5). *Пусть* $b(X) = \sum_{j\geqslant 1} b_j X^j = \log_F(z(X))$. *Тогда*

$$v(b_j) \geqslant -\log_q \frac{j}{e_{m_0}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\log_F X = \sum_{j\geqslant 1} c_j X^j, z(X) = \sum_{j\geqslant e_{m_0}} z_j X^j,$$

$$v(z_j) \geqslant 0, v(c_j) \geqslant -\log_q j.$$

Тогда

$$b_j = \sum_{m=1}^{j}\left(c_m \sum_{\substack{\lambda_1+\dots+\lambda_m=j\geqslant me_{m_0}\\ \lambda_\alpha\geqslant e_n}} z_{\lambda_1}\dots z_{\lambda_m}\right).$$

Следовательно,

$$v(b_j) \geqslant \inf_{\substack{1\leqslant m\leqslant \frac{j}{e_{m_0}} \\ \lambda_1+\dots+\lambda_m=j}} (v(c_m) + v(z_{\lambda_1}\dots z_{\lambda_m})) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{1\leqslant m\leqslant \frac{j}{e_{m_0}}} v(c_m) \geqslant -\log_q \frac{j}{e_{m_0}}.$$

$\square$

Предложение (2.1). *$\exp_F\left(\pi_0^{m_0} A \log_F(z(X))\right)\Big|_{X=\pi} = 0$, и для ряда*

$$\exp_F(\pi_0^{m_0} A \log_F z)$$

и элемента π выполнено условие, налагаемое на ряд и элемент теоремой 1.3.

Доказательство. Пусть $\widetilde{a}(X) = \exp_F(\pi_0^{m_0} AX) = \sum_{j\geqslant 1} \pi_0^{m_0 j} A^j a_j X^j$, где

$$\exp_F X = \sum_{j\geqslant 1} a_j X^j.$$

Пусть $b(X) = \log_F(z(X)) = \sum_{j\geqslant 1} b_j X^j$.

По теореме 1.1 для доказательства первой части нашей теоремы достаточно проверить условие

$$\inf_{\substack{1\leqslant j\leqslant r \\ \lambda_1+\dots+\lambda_j=r}} v(\widetilde{a}_j b_{\lambda_1}\dots b_{\lambda_j}\pi^r) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

чтобы получить результат

$$\exp_F(\pi_0^{m_0} A \log_F z)|_{X=\pi} = \exp_F\left(\pi_0^{m_0} A\big(\log_F(z(X))\big)|_{X=\pi}\right) = 0,$$

так как по лемме 2.4 имеем $\left(\log_F(z(X))\right)|_{X=\pi} = 0$.

По лемме 2.1 имеем $v(a_j) \geqslant -\frac{j-1}{q-1}$, по лемме 2.5 имеем $v(b_j) \geqslant -\log_q \frac{j}{e_{m_0}}$. Тогда

$$v(\widetilde{a}_j b_{\lambda_1}\dots b_{\lambda_j}) \geqslant m_0 j + jv(A) - \frac{j-1}{q-1} + \sum_{\alpha=1}^{j}(\log_q e_{m_0} - \log_q \lambda_\alpha) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q-1} + j(m_0 + \log_q e_{m_0} - \frac{1}{q-1}) - \sum_{\alpha=1}^{j} \log_q \lambda_\alpha.$$

Ищем минимум при условиях $1 \leqslant j \leqslant r$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_j = r$.

Очевидно, что $-\sum_{\alpha=1}^{j} \log_q \lambda_\alpha = -\log_q(\lambda_1 \dots \lambda_j)$ минимально при максимальном $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_j$ с условием $\lambda_1 + \dots + \lambda_j = r$, то есть минимально при $\lambda_1 = \dots = \lambda_j = r/j$.

Значит, при условиях $1 \leqslant j \leqslant r$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_j = r$ имеем

$$v(\widetilde{a}_j b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_j}) \geqslant \frac{1}{q-1} + j(m_0 - \frac{1}{q-1} + \log_q e_{m_0} - \log_q r + \log_q j).$$

Минимизируя по j функцию $f(j) = j(C + \log_q j)$, получаем

$$j_{min} = \frac{1}{q^C E}, \quad f(j_{min}) = -\frac{\log_q E}{E q^C}, \text{ где } E \approx 2.718.$$

В нашем случае $v(\widetilde{a}_j b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_j}) \geqslant \frac{1}{q-1} - \frac{r \log_q E}{E e_{m_0} q^{m_0 - \frac{1}{q-1}}}$.

Значит,

$$\inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_j = r}} v(\widetilde{a}_j b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_j} \pi^r) \geqslant \frac{1}{q-1} + r\left(\frac{1}{e_{m_0} q^{m_0 - 1}(q-1)} - \frac{q^{\frac{1}{q-1}} \log_q E}{E e_{m_0} q^{m_0}}\right).$$

Введем обозначение

$$M = \frac{1}{e_{m_0} q^{m_0 - 1}(q-1)} - \frac{q^{\frac{1}{q-1}} \log_q E}{E e_{m_0} q^{m_0}} = \frac{Eq - (q-1) q^{\frac{1}{q-1}} \log_q E}{E e_{m_0} q^{m_0}(q-1)}.$$

Если $M > 0$, то для $a(X)$, $b(X)$ и элемента π выполнено условие теоремы 1.1.

Рассмотрим $M_1 = q(E - q^{\frac{1}{q-1}} \log_q E) + q^{\frac{1}{q-1}} \log_q E$, имеющее тот же знак, что и M.

При $q = 2$ имеем $M_1 = 2E > 0$.

Докажем, что $M_1 > 0$ при $q \geqslant 3$.

Действительно, функция $x^{\frac{1}{x-1}}$ при $x \geqslant 3$ убывает и положительна, функция $\log_x E$ при $x \geqslant 3$ убывает и положительна. Поэтому то же можно сказать и про $x^{\frac{1}{x-1}} \log_x E$. Следовательно,

$$M_1 \geqslant q(E - 3^{\frac{1}{2}} \log_3 E) > 0.$$

Значит, для ряда $\exp_F(\pi_0^{m_0} A \log_F z) = \sum_{r \geqslant 1} d_r X^r$ имеем для любого r условие

$$v(d_r \pi^r) \geqslant Mr, \quad M > 0,$$

что и завершает доказательство. □

Предложение (2.2). *Имеем*

$$\left(\sum\nolimits_{F\, m \geqslant 2} \sum\nolimits_{F\, i \geqslant 0} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s_{m_0+i}^m(X)}{\pi_0^i}\right)\Bigg|_{X=\pi} =$$
$$= \sum\nolimits_{F\, m \geqslant 2} \sum\nolimits_{F\, i \geqslant 0} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s_{m_0+i}^m(\pi)}{\pi_0^i} = 0,$$

причем при всех m и i ряды

$$\exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^m_{m_0+i}(X)}{\pi_0^i}$$

и элемент π удовлетворяют условиям следствия теоремы 1.4.

Доказательство. Рассмотрим $\exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^m_{m_0+i}}{\pi_0^i}$. Для простоты можно считать, что $[\pi_0](X) = \pi_0 X + X^q$. Тогда по свойству изогении $s_{m_0+i} = \sum_{r=1}^{q^{m_0+i}} d_r z^r$, причем $v(d_r) \geqslant m_0 + i - [\log_q r]$, где $[x]$ — целая часть x (это утверждение легко проверяется индукцией).

$s^m_{m_0+i}$ есть конечная сумма слагаемых вида

$$d_{r_1} \dots d_{r_m} z^{r_1+\dots+r_m}, \qquad 1 \leqslant r_\alpha \leqslant q^{m_0+i}.$$

Рассмотрим

$$\exp_F(\frac{c_m a^{\Delta^i}}{\pi_0^i} d_{r_1} \dots d_{r_m} z^{r_1+\dots+r_m}), \quad 1 \leqslant r_\alpha \leqslant q^{m_0+i}.$$

Введем обозначение $r_1 + \dots + r_m = r$.

Пусть

$$\widetilde{a}(X) = \exp_F(\frac{c_m}{\pi_0^i} a^{\Delta^i} X) = \sum_{j \geqslant 1} \frac{c_m^j a^{\Delta^i j} a_j X^j}{\pi_0^{ij}},$$

где $\exp_F X = \sum_{j\geqslant 1} a_j X^j$, $\log_F X = \sum_{j \geqslant 1} c_j X^j$. Пусть

$$b(X) = d_{r_1} \dots d_{r_m} z^r, \widetilde{c}(X) = \widetilde{a} \circ b(X).$$

Проверим условие теоремы 1.1 для ряда $\widetilde{c}(X)$ и элемента π.

Легко видеть, что

$$v(\widetilde{a}_j) \geqslant j(v(c_m) + v(a^{\Delta^i}) - i) + v(a_j) \geqslant \frac{1}{q-1} - j(i + \log_q m + \frac{1}{q-1});$$

$$v(b_j) \geqslant m(m_0+i) - [\log_q r_1] - \dots - [\log_q r_m], j \geqslant e_{m_0} r;$$

$$v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant \inf_{l = l_1 + \dots + l_j \geqslant j r e_{m_0}} v(\widetilde{a}_j b_{l_1} \dots b_{l_j} \pi^l) \geqslant \frac{l}{q^{m_0-1}(q-1)e_{m_0}} + \frac{1}{q-1} +$$

$$+ \inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant \frac{l}{r e_{m_0}} \\ l_1+\dots+l_j = l}} \Bigg(j \Bigg(m m_0 + mi -$$

$$- [\log_q r_1] - \dots - [\log_q r_m] - i - \log_q m - \frac{1}{q-1} \Bigg) \Bigg).$$

Если $M = mm_0 + mi - [\log_q r_1] - \dots - [\log_q r_m] - i - \log_q m \geqslant 0$, то

$$v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant v(\widetilde{a}_j b_{l_1} \dots b_{l_j} \pi^l) \geqslant \frac{l}{e_{m_0} q^{m_0-1}(q-1)} \overset{l \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

При условии $1 \leqslant j \leqslant \frac{l}{re_{m_0}}$, $l_1 + \cdots + l_j = l$ имеем

$$edv(\widetilde{a}_j b_{l_1} \dots b_{l_j} \pi^l) \geqslant \frac{l}{q^{m_0-1}(q-1)e_{m_0}} + \frac{1}{q-1} +$$

$$+j\left(mm_0 + (m-1)i - [\log_q r_1] - \cdots - [\log_q r_m] - \log_q m - \frac{1}{q-1}\right) =$$

$$= \frac{l - je_{m_0}(\sum_{\alpha=1}^{m} q^{[\log_q r_\alpha]})}{e_{m_0} q^{m_0-1}(q-1)} +$$

$$+\frac{1}{q-1} + j((m-1)(i + \frac{1}{q-1}) + m - \log_q m) +_{ed}$$ 3

$$+j\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\left(\frac{q^{[\log_q r_\alpha]-m_0+1}}{q-1} - [\log_q r_\alpha] + m_0 - 1 - \frac{1}{q-1}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q-1} + j((m-1)(i + \frac{1}{q-1}) + m - \log_q m) +$$

$$+j\sum_{\alpha=1}^{m}(f([\log_q r_\alpha] - m_0 + 1) - f(0)),$$

где $f(\beta) = \frac{q^\beta}{q-1} - \beta, \beta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Легко проверяется, что $f(\beta)$ имеет минимум $\frac{1}{q-1}$ при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ и что $f(\beta) \overset{\beta \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Если $M < 0$, то $\inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant \frac{l}{re_{m_0}} \\ t_1 + \cdots + t_j = l}} v(\widetilde{a}_j b_{l_1} \dots b_{l_j})$ достигается при максимальном j и

$$v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant \inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant \frac{l}{re_{m_0}} \\ l_1 + \cdots + l_j = l}} v(\widetilde{a}_j b_{l_1} \dots b_{l_j} \pi^l) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q-1} + \frac{l}{re_{m_0}}((m-1)(i + \frac{1}{q-1}) + m - \log_q m) +$$

$$+\frac{l}{re_{m_0}}\sum_{\alpha=1}^{m}(f([\log_q r_\alpha] - m_0 + 1) - f(0)) \geqslant M(r)l,$$

где $M(r)$ зависит только от r и $M(r) > 0$.

Так как $m \leqslant r \leqslant mq^{m_0+i}$, имеем $\inf_r M(r) = M_1 > 0$.

Значит, существует оценка, не зависящая от r, поэтому она будет верна и для функции $\exp_F(\frac{a^{\Delta^i} c_m s^m_{m_0+i}}{\pi_0^i})$, где $s^m_{m_0+i}$ есть сумма рассмотренных функций $d_{r_1} \dots d_{r_m} z^r$.

Итак, по теореме 1.1 имеем

$$\exp_F\left(\frac{a^{\Delta^i} c_m s^m_{m_0+i}(X)}{\pi_0^i}\right)\Bigg|_{X=\pi} = \exp_F\left(\frac{a^{\Delta^i} c_m s^m_{m_0+i}(\pi)}{\pi_0^i}\right) = 0$$

и, более того, для ряда $\exp_F\left(\frac{a^{\Delta^i}c_m s^m_{m_0+i}(X)}{\pi_0^i}\right) = \sum_l \widetilde{c}_l X^l$ верно, что $v(\widetilde{c}_l X^l) \geqslant Ml$, где $M > 0$. Значит, по замечанию к теореме 1.3 условие теоремы 1.3 выполнено для $\widetilde{c}(X)$ и элемента π.

С другой стороны, из неравенства (3) следует, что

$$v(\widetilde{c}_l\pi^l) \geqslant (m-1)(i+\frac{1}{q-1}) + m - \log_q m.$$

Тогда

$$\inf_{m\geqslant 2}\inf_{l\geqslant 1} v(\widetilde{c}_l\pi^l) \geqslant i \overset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

и

$$\inf_{i\geqslant 0}\inf_{l\geqslant 1} v(\widetilde{c}_l\pi^l) \geqslant \frac{m-1}{q-1} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Следовательно, для рядов $\exp_F\left(\frac{a^{\Delta^i}c_m s^m_{m_0+i}(X)}{\pi_0^i}\right)$ и элемента π выполнены условия следствия теоремы 1.4. $\square$

Предложение (2.3). *Элемент*

$$\left(\sum\nolimits_{F\, m\geqslant 2}\sum\nolimits_{F\, i\geqslant 0}\exp_F \frac{a^{\Delta^i}c_m(s^{m\Delta^i}(X) - s^m_{m_0+i}(X))}{\pi_0^{m_0+i}}\right)\Bigg|_{X=\pi}$$

корректно определен, причем при всех m и i ряды

$$\exp_F \frac{a^{\Delta^i}c_m(s^{m\Delta^i}(X) - s^m_{m_0+i}(X))}{\pi_0^{m_0+i}}$$

и элемент π удовлетворяют условиям следствия теоремы 1.4.

Доказательство. Разность $s^{m\Delta^i}(X) - s^m_{m_0+i}(X)$ есть конечная сумма слагаемых вида

$$d_{r_1}\dots d_{r_m} z^{r_1+\dots+r_m}\prod_{j=1}^{m-\mu}\pi_0^{m_0+\nu_j}\Delta^{i-\nu_j}g_{\nu_j} = b(X),$$

где $1 \leqslant r_\alpha \leqslant q^{m_0+i}$, $\quad 0 \leqslant \mu \leqslant m-1$, $\quad 1 \leqslant \nu_j \leqslant i$, причем $v(d_{r_\alpha}) \geqslant m_0 + i - [\log_q r_\alpha]$.

Пусть $a(X) = \exp_F \frac{a^{\Delta^i}c_m X}{\pi_0^{m_0+i}}$, $\widetilde{c}(X) = a\circ b(X)$.

Тогда

$$v(b_l) \geqslant \sum_{\alpha=1}^{\mu}(m_0 + i - [\log_q r_\alpha]) + \sum_{\beta=1}^{m-\mu}(m_0+\nu_\beta),$$

причем $l \geqslant e_{m_0}(\sum_{\alpha=1}^{\mu} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} q^{i-\nu_\beta})$, так как $\Delta^r g_\nu \in X^{q^r e_{m_0}}\mathfrak{O}[[X]]$.

Пусть

$$R = v(a_j b_{l_1}\dots b_{l_j}\pi^l),$$

$$l_1 + \dots + l_j = l \geqslant j e_{m_0} (\sum_{\alpha=1}^{\mu} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} q^{i-\nu_\beta}).$$

Подобно доказательству предложения 2.2, получаем, что

$$R \geqslant -j \log_F m - j(m_0 + i) - \frac{l-1}{q-1} +$$

$$+ j\left(\sum_{\alpha=1}^{\mu} (m_0 + i - [\log_q r_\alpha]) + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} (m_0 + \nu_\beta) \right) + \frac{l}{e_{m_0} q^{m_0-1}(q-1)} -$$

линейная по j функция.

Если минимум ее достигается при $j = 1$, то

$$v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant \frac{l}{e_{m_0} q^{m_0-1}(q-1)} \overset{l \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

В любом случае

$$\begin{aligned} R \geqslant j(m - \log_q m + (m-1)(i + \frac{1}{q-1}) - m_0) + \\ + j\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{\mu} (f([\log_q r_\alpha] - m_0 + 1) - f(0)) + \\ + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} (f(i - \nu_\beta - m_0 + 1) - f(0)) \Bigg) + \\ + \frac{l - j e_{m_0} (\sum_{\alpha=1}^{\mu} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} q^{i-\nu_\beta})}{e_{m_0} q^{m_0-1}(q-1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Второе и третье слагаемые всегда неотрицательны.

Если $i \geqslant m_0$, то $(m-1)i - m_0 \geqslant 0$, то есть первое слагаемое положительно.

Тогда в случае достижения инфимума при

$$j = \frac{l}{e_{m_0} (\sum_{\alpha=1}^{\mu} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} q^{i-\nu_\beta})}$$

имеем

$$v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant l \frac{(m-2)i + m - \log_q m + \frac{m-1}{q-1}}{e_n (\sum_{\alpha=1}^{\mu} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-\mu} q^{i-\nu_\beta})},$$

то есть оценку типа $v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant Ml$, $M > 0$.

Если же инфимум достигается при $j = 1$, то получаем

$$v(\widetilde{c}_l \pi^l) \geqslant (m-2)i + m - \log_q m + \frac{m-1}{q-1}.$$

В случае $i < m_0$ имеем

$$f(i - m_0 - (\nu_\beta - 1)) \geqslant m_0 - i,$$

поэтому второе слагаемое суммы (4) ограничено следующим образом:

$$j\left(\sum_{\alpha=1}^{\mu}(f([\log_q r_\alpha])-m_0+1)-f(0))+\sum_{\beta=1}^{m-\mu}(f(i-\nu_\beta-m_0+1)-f(0))\right)\geqslant$$

$$\geqslant(m-\mu)j(m_0-i-\frac{1}{q-1})\geqslant j(m_0-i-\frac{1}{q-1}).$$

Тогда

$$j(m-\log_q m+(m-1)(i+\frac{1}{q-1})-m_0)+$$

$$+j\left(\sum_{\alpha=1}^{\mu}(f([\log_q r_\alpha]-m_0+1)-f(0))+\sum_{\beta=1}^{m-\mu}(f(i-\nu_\beta-m_0+1)-f(0))\right)\geqslant$$

$$\geqslant j((m-2)(i+\frac{1}{q-1})+m-\log_q m)>0,$$

то есть и в этом случае при достижении инфимума в точке

$$j=\frac{l}{e_{m_0}(\sum_{\alpha=1}^{\mu}r_\alpha+\sum_{\beta=1}^{m-\mu}q^{i-\nu_\beta})}$$

имеем оценку вида $v(\widetilde{c}_l\pi^l)\geqslant Ml$, $M>0$.

Таким образом, взяв минимальную из ограничивающих снизу констант, получим

$$v(\widetilde{c}_l\pi^l)\geqslant Ml,\quad M>0,$$

причем ввиду конечности вариантов для r_α, ν_β, μ подобная оценка верна и для $\exp_F\frac{a^{\Delta^i}c_m(s^{m\Delta^i}(X)-s^m_{m_0+i}(X))}{\pi_0^{m_0+i}}=\sum_{l\geqslant1}\widetilde{c}_lX^l$.

По замечанию к теореме 1.3 для этого ряда и элемента π выполнено условие теоремы 1.3.

Из неравенства (4) получаем, что

$$\inf_{m\geqslant2}\inf_{l\geqslant1}v(\widetilde{c}_l\pi^l)\geqslant i-n\overset{i\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,$$

$$\inf_{i\geqslant0}\inf_{l\geqslant1}v(\widetilde{c}_l\pi^l)\geqslant\frac{m-1}{q-1}\overset{i\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,$$

что и завершает доказательство. □

Предложение (2.4). *Для ряда* $E(as(X))=\sum_{F\,i=1}^{+\infty}\exp_F\frac{\Delta^is(X)\Delta^ia}{\pi_0^i}=a(X)$ *и элемента* π *выполнено условие теоремы 1.3 и ,следовательно,* $\omega(a)$ *можно использовать в качестве одного из слагаемых формальной суммы.*

Доказательство. $\Delta^is=s_{n+i}+\sum_{\alpha=1}^{i}\pi_0^{m_0+\alpha}\Delta^{i-\alpha}g_\alpha$, $s_{m_0+i}=\sum_{r=1}^{q^{m_0+i}}d_rz^r$, $v(d_r)\geqslant m_0+i-[\log_q r]$.

Обозначим $\widetilde{a}(X)=\exp_F\frac{\Delta^iaX}{\pi_0^i}$.

Для $b(X) = d_r X^r$ и для $c = \widetilde{a} \circ b$ имеем

$$\begin{aligned} v(c_l\pi^l) &\geqslant \inf_{l_1+\dots+l_j=l\geqslant je_n r} v(\widetilde{a}_j b_{l_1}\dots b_{l_j}\pi^l) \geqslant \\ &\geqslant \frac{l}{e_{m_0}q^{m_0-1}(q-1)} + \inf_{1\leqslant j\leqslant \frac{l}{ren}}(-ij - \frac{j}{q-1} + j(m_0+i)) \geqslant \\ &\geqslant \frac{l}{e_{m_0}q^{m_0-1}(q-1)}. \end{aligned}$$

Для $b(X) = \pi_0^{m_0+\alpha}\Delta^{i-\alpha}g_\alpha(X)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant i$, $c = \widetilde{a} \circ b$ имеем

$$v(c_l\pi^l) \geqslant \inf_{t_1+\dots+t_j=l\geqslant je_{m_0}q^{i-\alpha}} \left(-ij - \frac{j}{q-1} + j(m_0+\alpha)\right) + \frac{l}{e_{m_0}q^{m_0-1}(q-1)}.$$

Если $m_0+\alpha-i-\frac{1}{q-1} \geqslant 0$, то $v(c_l\pi^l) \geqslant \frac{l}{e_{m_0}q^{m_0-1}(q-1)}$, если же $m_0+\alpha-i-\frac{1}{q-1} < 0$, то

$$\begin{aligned} v(c_l\pi^l) &\geqslant \frac{l}{e_{m_0}q^{m_0-1}(q-1)} - \frac{l}{e_{m_0}q^{i-\alpha}}(i + \frac{1}{q-1} - m_0 - \alpha) = \\ &= \frac{l}{e_{m_0}q^{i-\alpha}}\left(f(i-\alpha-m_0+1) + \frac{q-2}{q-1}\right) > 0. \end{aligned}$$

У последней функции минимум по α достигается при $\alpha = i - m_0 - 1$ либо при $\alpha = i - m_0$, то есть мы имеем оценку $v(c_l\pi^l) \geqslant Ml$, где $M > 0$ и M не зависит от α, i.

Таким образом, для

$$c^{(i)}(X) = \exp_F \frac{\Delta^i s(X)\Delta^i a}{\pi_0^i} = \sum_{l\geqslant 1} c_l^{(i)} X^l$$

оказывается выполнено неравенство $v(c_l^{(i)}\pi^l) \geqslant Ml$, где $M > 0$ и M не зависит от i.

Ряд $E(as(X))$ имеет целые коэффициенты и, следовательно, сходится при $X = \pi$. По свойствам формальной суммы для $a(X) = E(as(X))$ имеем

$$v(a_l\pi^l) \geqslant \inf_{\substack{t\geqslant 1 \\ 1\leqslant i_1<\dots<i_t \\ 1\leqslant l_1+\dots+l_t\leqslant l \\ \alpha_1^{(1)}+\dots+\alpha_{l_1}^{(1)}+\dots+ \\ +\alpha_1^{(t)}+\dots+\alpha_{l_t}^{(t)}=l}} v(c_{\alpha_1^{(1)}}^{(i_1)}\dots c_{\alpha_{l_1}^{(1)}}^{(i_1)}\dots c_{\alpha_1^{(t)}}^{(i_t)}\dots c_{\alpha_{l_t}^{(t)}}^{(i_t)}\pi^l) \geqslant Ml.$$

Значит, по замечанию к теореме 1.3 для ряда $E(as(X))$ и элемента π выполнено условие теоремы 1.3. □

В итоге, используя предложения 2.1–2.4, получаем, что $\omega(a)$, $H(a)$ и $\sum_{F m=2}^{+\infty} \sum_{F j=0}^{+\infty} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^{m\Delta^i}}{\pi_0^{m_0+i}}$ корректно определенные элементы, причем

$$H(a) = \omega(a) +_F [\pi_0^{m_0}] \left(\sum_{F m=2}^{+\infty} \sum_{F j=0}^{+\infty} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_m s^{m\Delta^i}(\pi)}{\pi_0^{m_0+i}} \right).$$

§3. О сходимости рядов, определяющих примарные элементы $\omega(a)$ и $H(a)$ для случая многомерного полного поля нулевой характеристики с первым полем вычетов положительной характеристики

Результаты работ по построению явной формулы для символа Гильберта в случае классического локального поля обобщены на случай многомерного полного поля нулевой характеристики с первым полем вычетов положительной характеристики в работе [8]. Приведем те ее утверждения, которые потребуются для доказательства сходимости ряда, определяющего примарные элементы $\omega(a)$ и $H(a)$.

Введем основные обозначения.

K — n-мерное полное поле нулевой характеристики;

F — первое поле вычетов K;

π — простой элемент из K относительно дискретного нормирования ранга 1;

$\overline{v}_K = (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})\, K^* \longrightarrow \mathbb{Z}^{(n)}$ — нормирование ранга n, соответствующее выбранным локальным параметрам;

$\mathcal{O}_K$ — кольцо нормирования ранга n;

$\mathfrak{M}_K$ — единственный максимальный идеал $\mathcal{O}_K$;

$v = v^{(n)}$ — нормирование ранга 1 для K как дискретно нормированного поля;

$e = v(p)$ — индекс ветвления K относительно нормирования ранга 1;

$\overline{e} = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}) = \overline{v}_K(p)$;

ζ_{m_0} — фиксированный корень степени p^{m_0} из 1, содержащийся в K;

F_0 — максимальное совершенное подполе в поле вычетов F поля K, которое предполагается не алгебраически замкнутым;

$\tilde{\mathfrak{O}}$ — кольцо векторов Витта над F_0;

$\mathcal{R}$ — система представителей Тейхмюллера поля F_0 в кольце $\mathcal{O}_K$;

k_0 — поле частных $\tilde{\mathfrak{O}}$;

Δ — автоморфизм Фробениуса в k_0;

$\wp(\alpha) = \alpha^{\Delta} - \alpha$ — оператор Картье на пополнении максимального неразветвленного расширения кольца $\tilde{\mathfrak{O}}$;

$\mathcal{O} = \tilde{\mathfrak{O}}\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\}$ — кольцо нормирования ранга n в поле $k_0\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\} \subset K$;

Оператор Фробениуса Δ в кольце $\mathcal{O}[[X]]$ рядов Лорана над $\mathcal{O}$ действует следующим образом:

$$\left(\sum_{\overline{r}} a_{\overline{r}} t_1^{r_1} \dots t_{n-1}^{r_{n-1}} X^{r_n}\right)^{\Delta} = \sum a_{\overline{r}}^{\Delta} t_1^{pr_1} \dots t_{n-1}^{pr_{n-1}} X^{pr_n}, \qquad a_{\overline{r}} \in \tilde{\mathfrak{O}}.$$

Для любого обратимого в кольце $\mathcal{O}[[X]]$ ряда f функция

$$l(f) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log f$$

корректно определена. Для любого ряда g из идеала $x\mathcal{O}[[X]]$ корректно определена функция Артина-Хассе:

$$E(g) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} g^{\Delta^m}/p^m\right),$$

причем функции l и E осуществляют взаимно обратные изоморфизмы между мультипликативным $\mathbb{Z}_p$-модулем $1 + X\mathcal{O}[[X]]$ и аддитивным $\mathbb{Z}_p$-модулем $X\mathcal{O}[[X]]$.

Легко видеть, что для любого элемента α из поля K существует ряд $\underline{\alpha}(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ такой, что $\underline{\alpha}(X)|_{X=\pi} = \alpha$.

Положим

$$s_r(X) = \underline{\zeta}(X)^{p^r} - 1.$$

(мы будем опускать индекс $r = m_0$ в рядах $s_{m_0}(X)$) .

Пусть $z_0(X) = \underline{\zeta}(X) - 1, z(X) = \underline{\zeta}(X)$.

Справедливо следующее сравнение

$$s_r \equiv s_{r-1}^{\Delta} \mod p^r, \qquad r \geqslant 1.$$

Пусть $\overline{e} = \overline{v}_K(p) = (e_1, \dots, e_n)$ и $\overline{e}_{m_0} = \overline{e}/(p^{m_0-1}(p-1))$. Тогда

$$\overline{v}_K(\zeta - 1) = \overline{e}_{m_0}$$

и, следовательно, из всех разложений элемента $\zeta - 1$ можно выбрать такое, что

$$\deg(\underline{\zeta}(X) - 1) = \overline{e}_{m_0}.$$

Отсюда и из определения s_r сразу следует , что

$$\deg s_r^{\Delta^i} \geqslant \overline{e}_m, \qquad r \geqslant m,\ i \geqslant 0.$$

Верно также, что

$$s^{\Delta^i} = s_{m+i} + p^{m+i} f_i + p^{m+i-1} f_{i-1}^{\Delta} + \dots + p^{m+1} f_1^{\Delta^{i-1}},$$

где $\deg f_\alpha \geqslant \overline{e}_m$.

Легко видеть, что эти утверждения в точности соответствуют утверждениям лемм 2.2 и 2.3. Что же касается леммы 2.1, то в нашем случае соответствующее утверждение верно по свойствам экспоненты.

§3. О СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРИМАРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ $\omega(a)$ И $H(a)$ ДЛЯ СЛУЧАЯ МНО

Пусть T_K — максимальное абелево чисто неразветвленное p-расширение поля K. Пусть $\tilde{\mathfrak{O}} = W(F_0)$ — кольцо векторов Витта поля F_0 и $\tilde{\mathfrak{O}}^{\mathrm{nr}}$ — кольцо целых пополнения максимального неразветвленного расширения k_0 (т.е. поля частных для кольца $\tilde{\mathfrak{O}}$).

Тогда для любого элемента $a \in \tilde{\mathfrak{O}}$ существует элемент $A \in \tilde{\mathfrak{O}}^{\mathrm{nr}}$, удовлетворяющий следующему уравнению

$$\wp(A) = A^{\Delta} - A = a.$$

Рассмотрим элементы

$$\omega(a) = E(as(X))|_{X=\pi}, H(a) = E(p^{m_0}\Delta Al(z(X))|_{X=\pi}.$$

Они p^{m_0}-примарны (напомним, что элемент называется p^{m_0}-примарным, если расширение, полученное присоединением корней степени p^{m_0} из этого элемента, чисто неразветвленное.) Преобразовав элемент $H(a)$ аналогично соответствующему преобразованию §2, имеем

$$\begin{aligned} H(a) = \Bigg(\exp(p^{m_0}A\log(z(X)))\prod_{i\geqslant 0}\exp\frac{\Delta^i s(X)}{p^i}\times \\ \times\prod_{m\geqslant 2}\prod_{i\geqslant 0}\exp\frac{a^{\Delta^i}c_m s^m_{m_0+i}(X)}{p^i}\times \\ \times\prod_{m\geqslant 2}\prod_{i\geqslant 0}\exp\frac{a^{\Delta^i}c_m(s^{m\Delta^i}(X)-s^m_{m_0+i}(X))}{p^i}\Bigg)\Bigg|_{X=\pi} \end{aligned}$$

(здесь $c_m = \frac{(-1)^{m-1}}{m}$.)

Заметим, что если некоторый ряд сходится в топологии дискретного нормирования, то он сходится и в топологии многомерного полного поля. Но доказательство последующих утверждений §2 опирается на леммы 2.1–2.3 и теоремы сходимости §1. При этом различие в виде $H(a)$ заключается лишь в том, что в данном случае формальная сумма рядов заменена их произведением. Сравнивая теоремы о сходимости бесконечных формальных сумм рядов и бесконечных произведений рядов, убеждаемся, что при наших условиях верны все утверждения, соответствующие утверждениям §2, и потому $\omega(a), H(a)$ и $\prod_{m=2}^{+\infty}\prod_{j=0}^{+\infty}\exp\frac{a^{\Delta^i}c_m s^{m\Delta^i}(\pi)}{p^{m_0+i}}$ — корректно определенные элементы, причем

$$H(a) = \omega(a)\Bigg(\prod_{m=2}^{+\infty}\prod_{j=0}^{+\infty}\exp\frac{a^{\Delta^i}c_m s^{m\Delta^i}(\pi)}{p^{m_0+i}}\Bigg)^{p^{m_0}}.$$

Именно это утверждение, полученное формально, без проверки сходимости, используется в [8] для построения спаривания на K-группах многомерных полных полей.

Литература

1 Алгебраическая терия чисел Д.Касселс, А.Фрелих М., <Мир> 1969

2 Беккер Б.М. Абелевы расширения полного дискретно нормированного поля конечной высоты Алгебра и анализ 3 1991 6 76–84

3 Беккер Б.М. Теория полей классов многомерных полных полей с квазиконечным полем вычетов Труды Санкт-Петерб. Мат. общ. 3 1994 128–134

4 Бурбаки Н. Коммутативная алгебра М., <Мир> 1971

5 Востоков С.В. Норменное спаривание в формальных модулях Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979 43 4 765–794

6 Востоков С.В. Символ Гильберта в дискретно нормированном поле Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1979 94 50–69

7 Востоков С.В. Символы на формальных группах Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981 45 5 985–1014

8 Востоков С.В. Спаривание на K-группах многомерных полных полей Труды Санкт-Петерб. Мат. общ. 3 1994 140–184

9 Востоков С.В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985 49 2 283–308

10 Востоков С.В. Явная форма закона взаимности Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978 42 6 1288–1321

11 Востоков С.В., Жуков И.Б., Фесенко И.Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции Алгебра и анализ 1990 2 4 91–118

12 Жуков И.Б. Структурная теорема для полных полей Труды Санкт-Петерб. Мат. общ. 3 1994 215–234

13 Жуков И.Б., Мадунц А.И. Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия Труды Санкт-Петерб. Мат. общ. 3 1994 4–46

14 Ивасава К. Локальная теория полей классов М., <Мир> 1983 180

15 Ломадзе В.Г. К теории ветвления двумерных локальных полей Мат. сб. 109 1979 378–394

16 Мадунц А.И. О сходимости рядов над локальными полями Зап. научных семинаров ЛОМИ 198 1991 28–30

17 Мадунц А.И. О сходимости рядов над локальными полями Труды Санкт-Петерб. Мат. общ. 3 1994 260–282

18 Мадунц А.И. О сходимости формальных сумм рядов над двумерными полными полями Зап. научных семинаров ЛОМИ 1995

19 Мадунц А.И. О топологии многомерных полных полей 1995

20 Мадунц А.И. Теория ветвления и построение нормального базиса для кольца целых в расширении без высшего ветвления многомерного локального поля Тезисы собщений XIX Всес. алг. конф. 1987 170

21 Паршин А.Н. Абелевы накрытия арифметических схем Докл. Акад. наук СССР 243 1978 4 855–858

22 Паршин А.Н. К арифметике двумерных схем. I.Распределения и вычеты Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976 40 736–773

23 Паршин А.Н. Локальная теория полей классов Труды МИАН 165 1984 143–170

24 Паршин А.Н. Поля классов и алгебраическая K-теория Успехи мат. наук 1975 30 253–254

25 Фесенко И.Б. Локальная теория полей классов: случай совершенного поля вычетов Изв. АН СССР. Сер. мат. 1993 57 4 72–91

26 Фесенко И.Б. Теория полей классов многомерных локальных полей характеристики ноль с полем вычетов положительной характеристики Алгебра и анализ 3 1991 3 165–196

27 Фесенко И.Б. Многомерная локальная теория полей классов ДАН СССР 318 1991 47–50

28 Фесенко И.Б. Многомерная локальная теория полей классов.2 Алгебра и анализ 3 1991 5 168–189

29 Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности Мат.сб. 68 26 1950 113–146

30 Artin T., Tate J. Class field theoryBenjamin New York and Amsterdam 1968

31 Dwork B. Norm residue symbol in local number fields Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg221958180–190

32 Fesenko I.B. Abelian local p-class field theory Math. Ann. 301 1995 561–586

33 Fesenko I.B. On class field theory of multidimensional local fields of positive characteristic Advances in Soviet Mathematics 4 1991 103–127

34 Fesenko I.B., Vostokov S.V. Local fields and their extensions: a constructive approach AMS Providence, RI 1993

35 Frolich A. Formal groups Springer-Verlad New-york-Heidelberg-Berlin 1968

36 Hazzewinkel H. Abelian extensions of local fields Doctoral Dissertation Universiteit van Amsterdam Amsterdam 1969

37 Hazzewinkel H. Local class field theory is easyAdv. Math. 181975148–181

38 Henniart G. Sur les lois de reciprocité explicites. I J. reine und angew. Math. 1981 329 177–202

39Osamu Hyodo Wild ramification in the imperfect residue field case Galois representations and arithmetic algebraic geometry (Kyoto 1985, Tokyo 1986), Adv. Stud. Pure Math. 12 1987 North-Holland Amsterdam and New York 287–314

40 Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups, I J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. Math. 26 1979 303–376

41 Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups, II J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. Math. 27 1980 603–685

42 Lubin J., Tate J. Formal complex multiplication in local fields Ann. of Math. (2) 81 1965 380–387

43Neukirch J. Neubegründung der Klassenkörpertheorie Math. Z. 186 1984 557–574

44Neukirch J. Class field theory Springer-Verlag Berlin and New York 1986

45Saito T. Class field theory for two dimensional local ring Adv. studies in pure math. 12 1987 343–373

46 Serre J.-P. Corps locaux 2nd ed. Hermann Paris 1968