С. С. Афанасьева, Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина–Тейта. 2, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2013, том 413, 26–44

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

С. С. Афанасьева

СИМВОЛ ГИЛЬБЕРТА В МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ДЛЯ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЛЮБИНА–ТЕЙТА. 2

§1. Введение

Данная работа является продолжением работы [1], в которой были получены явные формулы для спаривания с формальным модулем Любина–Тейта для многомерного локального поля в случае, когда предпоследнее поле вычетов имеет нулевую характеристику. В данной работе рассматривается случай, когда предпоследнее поле вычетов имеет конечную характеристику $p > 2$. Полученная в этом случае явная формула имеет более простой вид. Как и в работе [1], предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику.

§2. Обозначения

Пусть K – n-мерное локальное поле нулевой характеристики, т. е. последовательность полных дискретно нормированных полей $K = K_n$, $K_{n-1}, \dots, K_0$, где каждое последующее поле является полем вычетов предыдущего, причем K_0 конечно. Мы будем рассматривать случай, когда K_1 – поле конечной характеристики $p > 2$. Будем использовать следующие обозначения:

- $q = p^f$ – порядок последнего поля вычетов K_0, т.е. $K_0 = \mathbb{F}_q$,
- $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ – локальные параметры поля K,
- $\overline{v}_K = (v_1^K, \dots, v_n^K) : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ – n-мерное нормирование поля K, соответствующее локальным параметрам $t, t_2, \dots, t_n$,
- $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых поля K относительно n-мерного нормирования $\overline{v}_K$,
- $F \in \mathcal{O}_K[[X, Y]]$ – формальная группа Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_K$ (см. ниже), с логарифмом $\lambda(X)$,
- вместо $F(x, y)$ будем писать $x +_F y$,

Ключевые слова: формальные группы Любина–Тейта, символ норменного вычета Гильберта, многомерные локальные поля.

Автор благодарит Санкт-Петербургский государственный университет за поддержку исследований.

- L – конечное расширение поля K, содержащее группу $W_F^N := \operatorname{Ker}[t^N]$ корней изогении $[t^N]$,
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ – индекс ветвления расширения L/K,
- $L_0 = \mathbb{F}_{q'}$ – последнее поле вычетов поля L,
- $\mathcal{O} := W(K_0)$, $\mathcal{O}' := W(L_0)$ – кольца векторов Витта полей K_0 и L_0 соответственно,
- $\mathfrak{R}$ – система представителей Тейхмюллера поля L_0 в $\mathcal{O}'$,
- $k := \operatorname{Quot} \mathcal{O}$, $l := \operatorname{Quot} \mathcal{O}'$ – поля частных $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$. Будем считать, что заданы вложения $k \hookrightarrow K$, $l \hookrightarrow L$,
- Frob – автоморфизм Фробениуса $L \cap \widetilde{K}/K$, где $\widetilde{K}$ – максимальное чисто неразветвленное расширение поля K,
- Tr – оператор следа в $L \cap \widetilde{K}/K$,
- $T = T_1, \dots, T_n$ – локальные параметры поля L,
- $\mathcal{O}_L$ – кольцо целых поля L относительно n-мерного нормирования $\overline{v}_L$,
- $\mathfrak{M}_L$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_L$, $F(\mathfrak{M}_L)$ – соответствующий формальный $\mathcal{O}_K$-модуль,
- $\Psi_L : K_n^{\mathrm{top}}(L) \longrightarrow \operatorname{Gal}(L^{ab}/L)$ – отображение взаимности à la Паршин–Като из топологической группы Милнора поля L в группу Галуа максимального абелева расширения поля L.

2.1. Модуль кривых Картье мультипликативной группы многомерного локального поля. Рассмотрим n-мерное локальное поле $M(L) = l\{\{X_1\}\} \dots \{\{X_{n-1}\}\}((X_n))$. Введем следующие обозначения:

- $$W(L_0)[[X]] = \Big\{ \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in\Omega,\\ (i_1,\dots,i_n)\geqslant(0,\dots,0)}} a_{(i_1,\dots,i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} : a_{(i_1,\dots,i_n)} \in \mathcal{O}' \Big\},$$

  где $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ – допустимый набор (см. ниже),
- $$XW(L_0)[[X]] = \Big\{ \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in\Omega,\\ (i_1,\dots,i_n)>(0,\dots,0)}} a_{(i_1,\dots,i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} : a_{(i_1,\dots,i_n)} \in \mathcal{O}' \Big\},$$
- $\mathcal{O}'_{(p)} = W(L_0)\{\{X_1\}\} \dots \{\{X_{n-1}\}\}((X_n))$,
- $U_m = 1 + XW(L_0)[[X]]$,
- $\mathcal{H}_m = \langle X_1 \rangle \times \dots \times \langle X_n \rangle \times \mathfrak{R}^* \times U_m \subset \mathcal{O}'^*_{(p)}$ – модуль кривых Картье мультипликативной группы L,

- $\eta_m : \mathcal{O}'_{(p)} \to L$ – сюръективный (неканонический) гомоморфизм, определенный следующим образом $\alpha(X) \to \alpha(T_1, \dots, T_n)$,
- ∂_i будет обозначать $\frac{\partial}{\partial X_i}$.

§3. Вспомогательные и известные результаты.

3.1. Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля. Множество $\mathbb{Z}^n$ предполагается лексикографически упорядоченным. Напомним, что $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ называется *допустимым набором*, если для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ при каждом наборе целых $j_{l+1}, \dots, j_n$ существует целое $i = i(j_{l+1}, \dots, j_n)$ такое, что

$$(i_1, \dots, i_n) \in \Omega,\ i_{l+1} = j_{l+1}, \dots, i_n = j_n \Longrightarrow i_l \geqslant i.$$

Обозначим

$$\mathfrak{M}_1 := \{\alpha \in \mathcal{O}_K : (v_2^K(\alpha), \dots, v_n^K(\alpha)) \geqslant (1, 0 \dots, 0)\} = t_2\mathcal{O}_K.$$

Пусть $F(X, Y) \in \mathcal{O}_K[[X, Y]]$ – формальная группа Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_K$ и $\lambda(X)$ – ее логарифм (см. [5]). Нетрудно убедиться в том, что, как и в одномерном случае, $\mathrm{End}(F) \approxeq \mathcal{O}_K$. Эндоморфизм группы F, соответствующий элементу $a \in \mathcal{O}_K$, будем обозначать $[a](X)$, как и в одномерном случае $[a](X) = \lambda^{-1}(a\lambda(X))$. В работе [5] было показано, что все формальные группы Любина–Тейта с точностью до изоморфизма определяются простым элементом $t \mod \mathfrak{M}_1$, для которого $\lambda(X) - t^{-1}\lambda(X^q) \in \mathcal{O}_K[[X]]$, причем для изогении $[t]$ выполняются сравнения

$$[t](X) \equiv tX \mod \deg 2,$$
$$[t](X) \equiv X^q \mod t.$$

В классе изоморфных групп Любина–Тейта содержится формальная группа F_a с логарифмом Артина–Хассе:

$$\lambda_a(X) = X + \frac{X^q}{t} + \frac{X^{q^2}}{t^2} + \dots.$$

Лемма 1. *Пусть F – формальная группа Любина–Тейта над $\mathcal{O}_K$ с логарифмом λ. Тогда λ можно представить в виде:*

$$\lambda(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{q^k}}{t^k} b_k(X),$$

где $b_k(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$.

Доказательство. Поскольку группы F и F_a изоморфны над $\mathcal{O}_K$, существует ряд $g(X) \in X\mathcal{O}_K[[X]]$ такой, что

$$\lambda(X) = \lambda_a(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(X)^{q^k}}{t^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{q^k}}{t^k} b_k(X),$$

где $b_k(X) = \left(\frac{g(X)}{X}\right)^{q^k}$. □

3.2. Многомерный символ Гильберта. Для формальной группы F над $\mathcal{O}_K$ символ Гильберта определяется следующим образом:

$$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_F = (\cdot,\cdot)^N_{F,L} : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N,$$
$$(\alpha,\beta)^N_{F,L} = \Psi_L(\alpha)(\tilde{\beta}) -_F \tilde{\beta},$$

где $\tilde{\beta}$ берется из пополнения алгебраического замыкания L и является корнем уравнения $[t^N]_F(\tilde{\beta}) = \beta$. Нетрудно видеть, что символ Гильберта обладает следующими свойствами.

H.1. Аддитивность по первому аргументу и $\mathcal{O}_K$-линейность по второму, т.е.

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) +_F (\alpha_2, \beta),$$
$$(\alpha, [a](\beta)) = [a](\alpha, \beta),$$
$$(\alpha, \beta_1 +_F \beta_2) = (\alpha, \beta_1) +_F (\alpha, \beta_2),$$

для всех $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in F(\mathfrak{M}_L)$ и $a \in \mathcal{O}_K$.

H.2. $(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ – норма в $K_n^{\mathrm{top}}(L(\widetilde{\beta}))/K_n^{\mathrm{top}}(L)$.

H.3. Если формальная группа G изоморфна F и

$$G = f(F(f^{-1}(X), f^{-1}(Y))$$

для $f \in \mathcal{O}_K[[X]]_0$, то

$$(\alpha,\beta)_G = f((\alpha, f^{-1}(\beta))_F).$$

3.3. Функции Артина–Хассе. Пусть $\mathcal{A} = \widetilde{K} \cap \mathcal{O}_L$. Рассмотрим следующий аддитивный $\mathcal{O}_K$-модуль:

$$\mathfrak{M}_X := \bigl\{\alpha = \sum_{(i_1,\dots,i_n)>0} a_{(i_1,\dots,i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} : a_{(i_1,\dots,i_n)} \in \mathcal{A}\bigr\},$$

где $(i_1,\dots,i_n)$ пробегают допустимый набор Ω_α. $F(\mathfrak{M}_X)$ – соответствующий формальный $\mathcal{O}_K$-модуль. Имеется (неканонический) сюръективный гомоморфизм $\mathcal{O}_K$-модулей:

$$F(\mathfrak{M}_X) \xrightarrow{\eta_F} F(\mathfrak{M}_L),$$
$$\alpha(X_1,\dots,X_n) \mapsto \alpha(T_1,\dots,T_n).$$

На $F(\mathfrak{M}_X)$ определим оператор Δ и функции Артина–Хассе:

$$\Delta(a) = \operatorname{Frob} a, \text{ для } a \in \mathcal{A},$$
$$\Delta(X_i) = X_i^q,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$E_F : \mathfrak{M}_X \longrightarrow F(\mathfrak{M}_X),$$
$$E_F(\varphi) = \lambda^{-1}(1 + \frac{\Delta}{t} + \frac{\Delta^2}{t^2} + \cdots)(\varphi) = \lambda^{-1}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi^{\Delta^r}}{t^r}\right),$$
$$l_F : F(\mathfrak{M}_X) \longrightarrow \mathfrak{M}_X,$$
$$l_F(\psi) = \left(1 - \frac{\Delta}{t}\right)\lambda(\psi).$$

Как и в одномерном случае, легко видеть, что функции E_F и l_F корректно определены и задают взаимно обратные изоморфизмы между соответствующими модулями. Для рядов $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}_X$ будем писать $\varphi \equiv \psi \mod \deg(i_1,\dots,i_n)$, если $\varphi - \psi \in X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\mathfrak{M}_X$. Обозначим

$$\mathcal{E}(X) = \lambda^{-1} \circ \lambda_a(X). \tag{1}$$

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 2. (1) *Если* $\theta \in \mathfrak{R}$, $(i_1, i_2, \dots, i_n) > (0,\dots,0)$, *то*

$$E_F(\theta X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}) = \mathcal{E}(\theta X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}).$$

(2) *Если* $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}_X$, *то*

$$E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi),$$
$$l_F(\varphi +_F \psi) = l_F(\varphi) + l_F(\psi).$$

(3) *Если* $a \in \mathcal{O}_K$, $\varphi \in \mathfrak{M}_X$, *то*

$$E_F(a\varphi) = [a]E_F(\varphi),$$
$$l_F([a](\varphi)) = a l_F(\varphi).$$

(4) *Если* $\varphi \equiv aX^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \mod \deg(i_1, i_2, \dots, i_n)$, *то*

$$E_F(\varphi) \equiv aX_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \mod \deg(i_1, i_2, \dots, i_n).$$

3.4. Дополнительные обозначения. Вместо X_1 для краткости часто будем писать просто X. Пусть

$$[t](X) = \sum_{i=1}^{\infty} ta_i X^i + X^q,\ a_1 = 1,\ a_i \in \mathcal{O}_K.$$

Обозначим

$$R(X) := \frac{[t](X)}{X} = t + a_2 tX + \sum_{i\geqslant 3} a_i t X^{i-1} + X^{q-1},$$

$$Q(X) = \frac{[t^N](X)}{[t^{N-1}](X)} = R([t^{N-1}](X)).$$

Легко проверить, что

$$Q(X) \equiv X^{q^{N-1}(q-1)} \mod t, \tag{2}$$
$$Q(X) \equiv t \mod \deg 1.$$

3.4.1. **Ряд s.** Пусть ξ – первообразный корень изогении $[t^N]$, т.е. $\xi \in W_F^N \setminus W_F^{N-1}$. Поскольку ξ является корнем ряда Эйзенштейна $Q(X)$, нетрудно убедиться, что $\overline{v}_L(\xi) = (\frac{e_1}{q^{N-1}(q-1)}, 0, \ldots, 0)$. Пусть

$$z(X_1, \ldots, X_n) = \theta X_1^{\overline{\frac{e_1}{q^{N-1}(q-1)}}} + \ldots,\ \theta \in \mathfrak{R},$$

такой ряд из $\mathfrak{M}_X$, для которого $z(T_1, \ldots, T_n) = \xi$. И пусть $z_1(X_1) = z(X_1, \ldots, X_n)|_{X_n = X_{n-1} = \ldots = X_2 = 0}$.

Замечание 1. Ряд $z(X_1, \ldots, X_n)|_{X_n = X_{n-1} = \ldots = X_2 = 0}$ будем определять следующим образом: пусть ряд z имеет вид

$$z = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \Omega} a_{(i_1, \ldots, i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n},$$

где Ω – допустимый набор. Так как $\xi \in \mathfrak{M}_L$, то $(i_1, \ldots, i_n) > 0$ для всех $(i_1, \ldots, i_n) \in \Omega$, поэтому корректна подстановка $X_n = 0$, после чего можно подставлять $X_{n-1} = 0$ и т.д.

Рассмотрим ряды:

$$s_m := [t^m](z_1), \quad s := s_N.$$

Нетрудно проверить (см. [3, сравнение (20)]), что

$$s \equiv s_{N-1}^{\Delta} \mod t^N,\ \frac{1}{s} \equiv \frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} \mod t^N. \tag{3}$$

3.4.2. **Ряд** u**.** Точно так же, как и в предложении 1.3.14 работы [8], можно проверить аналог теоремы о делении с остатком в кольце $\mathcal{A}$.

Предложение 1. *Пусть* $f = \sum d_i X^i \in \mathcal{A}[[X]]$*, причем* d_m *обратим в* $\mathcal{A}$*,* d_i *– необратим в* $\mathcal{A}$ *для* $0 \leqslant i \leqslant m-1$*. Тогда любой ряд* $g \in \mathcal{A}[[X]]$ *представим в виде* $g = fh +_F r$*, где* $r = \sum_{i=0}^{m-1} r_i X^i$*,* $r_i \in \mathcal{A}$*,* $h(X) \in \mathcal{A}[[X]]$*.*

Рассмотрим ряд:

$$u = Eis_F(X) := \frac{s}{s_{N-1}} = \frac{[t](s_{N-1})}{s_{N-1}} = R(s_{N-1}) \in \mathcal{A}[[X]].$$

Замечание 2. Из определения видно, что ряд u имеет вид $u = t + a_2 t s_{N-1} + \sum_{i \geqslant 3} a_i t s_{N-1}^{i-1} + s_{N-1}^{q-1}$.

Легко видеть, что ряд u удовлетворяет условиям предложения 1 для $m = e_1$.

Предложение 2. *Пусть* $\gamma \in \mathfrak{M}_X$*, причем* $\gamma(T_1, \ldots, T_n) = 0$*. Тогда* $\gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots = X_2 = 0}$ *можно представить в виде*

$$\gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots = X_2 = 0} = u(X) \cdot h(X) +_F r(X), \tag{4}$$

где $r = \sum_{i=0}^{e_1 - 1} r_i X^i$*,* $r_i \in t_2 \mathcal{A}$*,* $h(X) \in \mathcal{A}[[X]]$*.*

Доказательство. Представление (4) получается из предложения 1. Покажем, что коэффициенты ряда r кратны t_2.

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(T_1, \ldots, T_n) \\ &= \gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots = X_2 = 0}(T_1) + \left(\gamma - \gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots X_2 = 0}\right)(T_1, \ldots, T_n) \\ &= u(T_1) \cdot h(T_1) + r(T_1) + \left(\gamma - \gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots = X_2 = 0}\right)(T_1, \ldots, T_n), \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, что у ряда $\left(\gamma - \gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots X_2 = 0}\right)$, все слагаемые имеют вид $a X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$, поэтому $\left(\gamma - \gamma|_{X_n = X_{n-1} = \ldots X_2 = 0}\right)(T_1, \ldots, T_n)$ делится на T_2. Точно так же

$$\begin{aligned} 0 &= Q(z)(T_1, \ldots, T_n) \\ &= Q(z)|_{X_n = X_{n-1} = \ldots X_2 = 0}(T_1) + \left(Q(z) - Q(z)|_{X_n = X_{n-1} = \ldots X_2 = 0}\right)(T_1, \ldots, T_n), \end{aligned}$$

откуда $u(T_1) = Q(z)|_{X_n = X_{n-1} = \ldots X_2 = 0}(T_1)$ делится на T_2. Поэтому, из (5) следует, что $r(T_1)$ делится на T_2, поэтому, поскольку нормирование элемента T_1 в поле L_2 нулевое и $\deg r < e_1$, все коэффициенты ряда $r(X)$ должны делиться на t_2. □

Пусть $\mathcal{B} = \left\{\alpha \in \mathfrak{M}_X : \alpha\big|_{X_n=\dots=X_2=0} = 0\right\}$. Обозначим

$$U_F := \{u(X)\cdot h(X) +_F t_2 \cdot r(X) +_F B : r(X), h(X) \in \mathcal{A}[[X]], B \in \mathcal{B}\}.$$

3.4.3. **Технические леммы.** Для дальнейших рассуждений понадобится еще несколько простых результатов.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in l\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_n\}\}$, $\alpha \in \mathcal{H}_m$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *тогда*

$$\partial_k(\alpha^{\Delta^i}) = q^i X_k^{-1} \Delta^i (X_k \partial_k \alpha), \tag{6}$$

$$\operatorname{res}(\partial_k \varphi)\frac{1}{s} \equiv 0 \mod t^N. \tag{7}$$

Доказательство. Равенство (6) очевидно. Докажем сравнение (7). Поскольку любая степень t делит q, из (6) получаем

$$\operatorname{res}(\partial_k\varphi)\frac{1}{s} \equiv \operatorname{res}(\partial_k\varphi)\frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} = -\operatorname{res}\varphi\partial_k\left(\frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}}\right)$$
$$= -q\operatorname{res}\varphi X_k^{-1}(X_k\partial_k\frac{1}{s_{N-1}})^{\Delta} \equiv 0 \mod t^N.$$

□

Из равенства (6) следует, что для всех $\alpha \in \mathcal{H}_m$ выполнено $q|\partial_k(\alpha^{\Delta})$. В работе [6] былда доказана следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $f_{k,l}(X_1,\dots,X_n)$, $1 \leqslant k, l \leqslant n$ *– ряды из* $M(L)$, *для которых выполняются соотношения*

$$\partial_m f_{k,l} = \partial_l f_{k,m}.$$

Пусть $\triangle_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *– определитель матрицы, полученной из матрицы* $(f_{k,l})$ *вычеркиванием* i*-го столбца и первой строки. Тогда для любого* $\varphi \in M(L)$ *выполнено:*

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\triangle_i\partial_i\varphi = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\partial_i(\varphi\triangle_i).$$

§4. Арифметика формального модуля. Базис Шафаревича

В этом параграфе будет построен базис Шафаревича формального модуля $F(\mathfrak{M}_L)$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{M}_L = T_1\mathfrak{R}[[T_1]] +_F \mathfrak{M}_1^L,$$

где $\mathfrak{M}_1^L = \{\alpha \in \mathfrak{M}_L : (v_2^L(\alpha), \dots, v_n^L(\alpha)) \geqslant (1, 0, \dots, 0)\}$. Точно так же, как и в [1], можно доказать следующую лемму.

Лемма 5. *В формальном модуле $F(\mathfrak{M}_L)$ идеал $\mathfrak{M}_1^L$ является $[t]$-делимым, т.е. для всякого α из идеала $\mathfrak{M}_1^L$ найдется $\beta \in \mathfrak{M}_1^L$ такой, что $[t](\beta) = \alpha$.*

Следствие 1. *Для любых $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\beta \in \mathfrak{M}_1^L$ имеет место:*

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

Доказательство. По лемме 5 найдется такой элемент $\gamma \in \mathfrak{M}_1^L$, что $[t^N](\gamma) = \beta$, поэтому

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, [t^N](\gamma)) = [t^N](\alpha, \gamma) = 0.$$

□

Пусть $I = \{i : 1 \leqslant i < \frac{qe_1}{q-1},\ q \nmid i\}$. Так же, как и в лемме 9 работы [3], можно проверить аналог теоремы Хензеля:

Лемма 6. *Пусть для каждого $i \in I \cup \{\frac{qe_1}{q-1}\}$ и для каждого $\theta \in \mathfrak{R}$ выбран элемент $\varepsilon_i(\theta) \in F(\mathfrak{M}_L)$, удовлетворяющий условию: $\varepsilon_i(\theta) \equiv \theta T^i \mod T^i\mathfrak{M}_L$. Тогда любой элемент $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$ можно представить в виде*

$$\beta = \sum_F [t^r](\varepsilon_i(\theta_{i,r})) +_F [t^N](\gamma).$$

4.1. Примарные элементы. Напомним, что элемент ω из группы $F(\mathfrak{M}_L)$ называется t^N-примарным, если расширение поля L, полученное делением точки ω на изогению $[t^N]$, неразветвлено (чисто неразветвлено). Пусть $\mathcal{O}'^{nr}$ – кольцо целых пополнения максимального неразветвленного расширения поля l. Поскольку для любого элемента $a \in \mathcal{O}'$ существует элемент $A \in \mathcal{O}'^{nr}$, для которого $A^{\Delta} - A = a$ (см. [3]), то аналогичное утверждение справедливо и для элементов кольца $\mathcal{O}'[[t]]$. Так же, как и в работе [3], можно показать, что элемент

$\omega_1(a) = E_F(as)|_{X_1=T_1,\dots,X_n=T_n}$, где $a \in \mathcal{O}'[[t]]$ является t^N-примарным. Очевидно, что элемент

$$\omega(a) = E_F(as)|_{X_1=T,X_2=0,\dots,X_n=0}$$

отличается от элемента $\omega_1(a)$ на элемент, делящийся в группе $F(\mathfrak{M}_L)$ на изогению $[t^N]$, поэтому $\omega(a)$ тоже является t^N-примарным.

4.2. Базис Шафаревича. Пусть G_ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$ – формальные группы Любина–Тейта, построенные по изогениям $[t]_0 = tX + X^q$, $[t]_\rho = tX + tX^{p^\rho} + X^q$, $\rho \geqslant 1$, соответственно. Пусть $\mathcal{E}_\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$, – степенные ряды, задающие изоморфизмы групп G_ρ в группу F, соответственно (т.е. $\mathcal{E}_\rho = \lambda^{-1} \circ \lambda_\rho$, где λ_ρ – логарифм формальной группы G_ρ).

Предложение 3. *Набор элементов*

$$\{\mathcal{E}_\rho(\theta T^i), \omega(a)\}, \tag{8}$$
$$\theta \in \mathfrak{R},\ 0 \leqslant \rho \leqslant f-1,\ 1 \leqslant i < \frac{qe_1}{q-1},\ (i,p)=1,\ a \in \mathcal{O}'[[t]]$$

составляет систему образующих $\mathcal{O}_K$-модуля $F(\mathfrak{M}_L)/[t^N](F(\mathfrak{M}_L))$; при этом

$$((T_1,\dots,T_n),\mathcal{E}_\rho(\theta T^i))_F = 0,\ ((T_1,\dots,T_n),\omega(a))_F = [\operatorname{Tr} a]_F(\xi). \tag{9}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 6. Поскольку значение отображения взаимности $\Psi_L(T_1,\dots,T_n)$ на неразветвленном расширении совпадает с автоморфизмом Фробениуса, то второе равенство в (9) можно показать точно так же, как в предложении 2.1 работы [9]. Остальные равенства из (9) достаточно показать для группы G_0, т.к. она изоморфна группе F. Изогения $[t^N]_{G_\rho}$ – унитарный многочлен степени q^N, поэтому символ $(\alpha,\dots) \in K_n^{\mathrm{top}}L$ является нормой от $(\widetilde{\alpha},\dots) \in K_n^{\mathrm{top}}L(\widetilde{\alpha})$, где $[t^N]_\rho(\widetilde{\alpha}) = \alpha$. Отсюда с учетом свойства H.2 $\{(\alpha,\dots),\alpha\}_{G_\rho} = 0$ для любого $\alpha \in F(\mathfrak{M})$, а тогда $\{(\alpha,\dots),\mathcal{E}_\rho(\alpha)\}_{G_0} = 0$, и мы получили оставшиеся равенства из (9). $\square$

§5. Спаривание на рядах

5.1. Спаривание $[\cdot,\cdot]$. Определим спаривание

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{H}_m^n \times F(\mathfrak{M}_X) \longrightarrow \mathcal{A}$$

следующим ообразом: для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}_m \times \dots \times \mathcal{H}_m$ и $\beta \in F(\mathfrak{M}_X)$ положим

$$[\alpha, \beta] = \operatorname{res} \Phi_{(\alpha,\beta)} \cdot V,$$

где

$$\begin{gathered} V = \frac{1}{s} + \frac{a_2}{t-1}, \\ \Phi = l_F(\beta_1) D, \\ \beta_1 = \beta|_{X_n = X_{n-1} = \dots = X_2 = 0}, \\ D = \det(\alpha_i^{-1} \partial_j \alpha_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \\ \operatorname{res} = \operatorname{res}_{X_1 \cdots X_n}. \end{gathered}$$

Замечание 3. Очевидно, что коэффициенты ряда Φ лежат в $\mathcal{A}$.

Пусть $\alpha, \alpha_i, \alpha'_i \in \mathcal{H}_m$, $\beta, \beta' \in F(\mathfrak{M}_X)$. Для $\alpha \in \mathcal{H}_m$ обозначим $l_m(\alpha) = \frac{1}{q} \log \frac{\alpha^q}{\alpha^\Delta}$.

Предложение 4. *Спаривание* $[\cdot, \cdot]$ *обладает следующими свойствами.*

1) *Аддитивность*

$$\begin{aligned} &[(\alpha_1, \cdots, \alpha_i \alpha'_i, \cdots, \alpha_n), \beta] \\ &\qquad = [(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n), \beta] + [(\alpha_1, \cdots, \alpha'_i, \cdots, \alpha_n), \beta], \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} [\alpha, \beta +_F \beta'] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \beta'], \\ [\alpha, [a](\beta)] = a[\alpha, \beta], a \in \mathcal{O}_K. \end{gathered}$$

2) *Гиперболичность*

$$[(\dots, \alpha, \dots, -\alpha, \dots), \beta] = 0.$$

3) *Соотношение Стейнберга*

$$[(\dots, \alpha, \dots, 1 - \alpha, \dots), \beta] = 0,$$

если $1 - \alpha \in \mathcal{H}_m$.

4) *Кососимметричность*

$$[(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots), \beta] = -[(\dots, \alpha_k, \dots, \alpha_j, \dots), \beta].$$

5) *Символьное свойство. Пусть* $\mathcal{E}(X) = \lambda^{-1} \circ \lambda_a(X), \mathcal{E}_\rho = \lambda^{-1} \circ \lambda_\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$ *(см. (1)), тогда*

$$[(\ldots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), \mathcal{E}(\alpha)] = 0,$$
$$[(\ldots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), \mathcal{E}_\rho(\alpha)] = 0.$$

Доказательство. Пункты 1, 2, 3 и 4 следуют непосредственно из определения. Докажем символьное свойство. Проверим только первое сравнение, второе проверяется точно так же. Легко видеть, что

$$l_F(\mathcal{E}(\alpha)) = \left(1 - \frac{\Delta}{t}\right) \lambda_a(\alpha) = \lambda_a(\alpha) - \frac{\lambda_a(\alpha^\Delta)}{t}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{q^i}}{t^i} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{q^i \Delta}}{t^{i+1}} = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{i+1}} (\alpha^{q^{i+1}} - \alpha^{q^i \Delta}).$$

Поэтому для $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$l_F(\mathcal{E}(\alpha))\alpha^{-1}\partial_k \alpha = \partial_k \alpha + \partial_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{i+1}} g_i, \tag{10}$$

где $g_i = \frac{\alpha^{q^{i+1}} - \alpha^{q^i \Delta}}{q^{i+1}} - l_m(\alpha)\alpha^{q^i \Delta}$. Далее,

$$\Phi = l_F(\mathcal{E}(\alpha)) \cdot D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \alpha_2^{-1}\partial_1 \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{-1}\partial_n \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^{-1}\partial_1 \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{-1}\partial_n \alpha_n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \varphi_k \triangle_k, \tag{11}$$

где $\varphi_k = l_F(\mathcal{E}(\alpha))\alpha^{-1}\partial_k \alpha = \partial_k \alpha + \partial_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{i+1}} g_i = \partial_k \left(\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{i+1}} g_i\right)$ (см. (10)), а $\triangle_k$ – соответствующие миноры. Тогда из леммы 4 следует, что

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k + 1\partial_k((\alpha + \sum \frac{g_i}{t^{i+1}})\triangle_k),$$

откуда, учитывая сравнение 7, получаем:

$$\operatorname{res} \Phi \cdot \frac{1}{s} \equiv 0 \mod t^N. \qquad \square$$

Для $\mathcal{H}_m$ обычным путем (с помощью образующих и соотношений) определим K-группу Милнора $K_n(\mathcal{H}_m)$. Свойства 1) и 3) предложения 4 означают, что спаривание $[\cdot, \cdot]$ индуцирует спаривание

$$[\cdot, \cdot] : K_n(\mathcal{H}_m) \times F(\mathfrak{M}_X) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

5.2. Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$. С помощью спаривания $[\cdot,\cdot]$, построенного в п. 5.1, определим спаривание
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}_m^n \times F(\mathfrak{M}_X) \longrightarrow W_F^N$$
по формуле
$$\langle\alpha,\beta\rangle = [\mathrm{Tr}[\alpha,\beta]](\xi). \tag{12}$$

5.2.1. **Независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по второму аргументу.**

Предложение 5. *Пусть $\beta|_{X_n=\ldots=X_2=0} \in U_F$. Тогда*
$$\langle\alpha,\beta\rangle = 0,$$
для всех $\alpha \in K_n(\mathcal{H}_m)$.

По определению U_F ряд $\beta_1(X) = \beta|_{X_n=\ldots=X_2=0}$ можно представить в виде $\beta_1 = u(X)h(X) +_F t_2 r(X)$, где $r(X), h(X) \in \mathcal{A}[[X]]$. Тогда
$$[\alpha,\beta] = [\alpha, u(X)\cdot h(X) +_F t_2\cdot r(X)] = [\alpha, u(X)\cdot h(X)] + [\alpha, t_2\cdot r(X)].$$
Так же, как и в доказательстве леммы 5, можно убедиться, что для ряда $t_2 r(X)$ существует ряд $f(X) \in \mathcal{A}[[X]]$ такой, что $[t^N](f) = t_2 r$. Поэтому $[\alpha, t_2 r] = [\alpha, [t^N](f)] = t^N[\alpha, f] \equiv 0 \mod t^N$. Далее будем считать $\beta_1 = u(X)\cdot h(X)$. Заметим сперва, что поскольку $V \equiv \frac{1}{s^{\Delta}_{N-1}} + \frac{2a_2}{t-1} \mod t^N$ и $\partial_i \frac{1}{s^{\Delta}_{N-1}} \equiv 0 \mod t^N$(см (6)), то для любых рядов $a, b \in \mathcal{O}_K((X))$ выполнено сравнение
$$\operatorname{res} a\cdot(\partial_i b)\cdot V \equiv -\operatorname{res}(\partial_i a)\cdot b\cdot V \mod t^N. \tag{13}$$
Обозначим (для $1 \leqslant i \leqslant n$)
$$D_i' = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \hdotsfor{3} \\ \alpha_{i-1}^{-1}\partial_1\alpha_{i-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{-1}\partial_n\alpha_{i-1} \\ \partial_1(l_m(\alpha_i)) & \cdots & \partial_n(l_m(\alpha_i)) \\ X_1^{q-1}(\alpha_{i+1}^{-1}\partial_1\alpha_{i+1})^{\Delta} & \cdots & X_n^{q-1}(\alpha_{i+1}^{-1}\partial_n\alpha_{i+1})^{\Delta} \\ \hdotsfor{3} \\ X_1^{q-1}(\alpha_n^{-1}\partial_1\alpha_n)^{\Delta} & \cdots & X_n^{q-1}(\alpha_n^{-1}\partial_n\alpha_n)^{\Delta} \end{vmatrix},$$
$$\widetilde{D} := \det(X_j\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Лемма 7. *Для $\beta \in F(\mathfrak{M}_X)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ имеет место:*
$$\operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta)\right)\cdot D_i'\cdot V \equiv 0 \mod t^N.$$

Доказательство. Пусть $\triangle_k$ – определитель матрицы, полученной из D'_i вычеркиванием i-й строки и k-го столбца. Применяя лемму 4 для

$$f_{k,l} = \begin{cases} \alpha_k^{-1}\partial_l \alpha_k,\ k < i \\ X_l^{q-1}(\alpha_k^{-1}\partial_l \alpha_k)^{\Delta},\ k > i \end{cases}$$

и $\varphi = 1$, получаем

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \triangle_k \partial_k 1 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \partial_k \triangle_k.$$

Тогда, с учетом (13),

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta_1)\right) \cdot D'_i \cdot V &= \operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta_1)\right) V \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \partial_k (l_m(\alpha_i)) \triangle_k \\ &= \operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta_1)\right) V l_m(\alpha_i) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \partial_k \triangle_k = 0. \ \square \end{aligned}$$

Лемма 8. *Имеет место сравнение*

$$(\lambda(\beta)V)^{\Delta} \equiv \left(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta)\right) \cdot V \mod (t^N, \deg 1).$$

Доказательство. В силу замечания 2 легко видеть, что

$$\frac{u^{q^k-1}}{t^k s_{N-1}} \equiv \frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}} + (q^k-1)t^{q^k-k-1}a_2 \mod \deg 1.$$

Откуда, поскольку $t^N \mid q$:

$$\frac{u^{q^k-1}}{t^k s_{N-1}} \equiv \frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}} - t^{q^k-k-1}a_2 \mod (\deg 1, t^N).$$

Поэтому по лемме 1, учитывая, что $u/s = 1/s_{N-1}$ и $u \equiv t \mod \deg 1$, получаем:

$$(\lambda(\beta)V)^{\Delta} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h^{q^k}\frac{u^{q^k-1}}{t^k s_{N-1}} b_k(\beta) + \frac{a_2}{t-1}\sum_{k=0}^{\infty} t^{q^k-k} h^{q^k} b_k(\beta)\right)^{\Delta}$$

$$\equiv \left(\sum_{k=0}^{\infty} h^{q^k}\left(\frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}} - t^{q^k-k-1}a_2\right) b_k(\beta) + \frac{a_2}{t-1}\sum_{k=0}^{\infty} t^{q^k-k} h^{q^k} b_k(\beta)\right)^{\Delta}$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} h^{\Delta q^k}\left(\frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}^{\Delta}} - t^{q^k-k-1}a_2\right) b_k(\beta^{\Delta}) + \frac{a_2}{t-1}\sum_{k=0}^{\infty} t^{q^k-k} h^{\Delta q^k} b_k(\beta^{\Delta})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h^{\Delta q^k} t^{q^k-k-1}\left(\frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} + \frac{a_2}{t-1}\right) b_k(\beta^{\Delta}) \mod (t^N, \deg 1). \quad (14)$$

Далее, т.к. t в любой степени делит p и $N(q-1)q^k - k - 1 > N$, то, используя сравнение (3), легко получить, что:

$$\frac{s_{N-1}^{\Delta q^k(q-1)}}{t^{k+1}s} = \frac{(t^N A + s)^{\Delta q^k(q-1)}}{t^{k+1}s} \equiv \frac{t^{Nq^k(q-1)}A^{q^k(q-1)}}{t^{k+1}s} \equiv 0 \mod (t^N, \deg 1),$$

из чего следует

$$\frac{u^{\Delta q^k}}{t^{k+1}s} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i t s_{N-1}^{\Delta(i-1)})^{q^k} + s_{N-1}^{\Delta(q-1)q^k}}{t^{k+1}s} \equiv \frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}^{\Delta}} + \frac{s_{N-1}^{\Delta q^k(q-1)}}{t^{k+1}s} \equiv \frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}^{\Delta}} \mod (\deg 1, t^N).$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta)\right)\cdot V &= \sum_{k=0}^{\infty} h^{\Delta q^k}\frac{u^{\Delta q^k}}{t^{k+1}s}b_k(\beta^\Delta)+\frac{a_2}{t-1}\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta)\\
&\equiv \sum_{k=0}^{\infty} h^{\Delta q^k}\left(\frac{t^{q^k-k-1}}{s_{N-1}^{\Delta}}\right)b_k(\beta^\Delta)+\frac{a_2}{t-1}\sum_{k=0}^{\infty} t^{q^k-k-1}h^{\Delta q^k}b_k(\beta^\Delta)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h^{\Delta q^k}t^{q^k-k-1}\left(\frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}}+\frac{a_2}{t-1}\right)b_k(\beta^\Delta) \mod (t^N,\deg 1). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Сравнивая (14) и (15), получаем требуемое сравнение. □

Доказательство предложения 5. Применяя легко проверяемое равенство $\partial_k l_m \alpha = \alpha^{-1}\partial_k\alpha - X_k^{q-1}(\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^\Delta$ для $\alpha\in\mathcal{H}_m$, нетрудно вывести следующее:

$$D-\sum_{i=1}^{n} D_i' = \frac{1}{X_1\cdots X_n}\widetilde{D}^\Delta.$$

В силу леммы 8 получаем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{res}\Phi\cdot V = \operatorname{res}(l_F(\beta)\cdot D\cdot V) = \operatorname{res}\left(\frac{1}{X_1\cdots X_n}\widetilde{D}\lambda(\beta)V - (\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta))\cdot D\cdot V\right)\\
&= \operatorname{res}\left(\frac{1}{X_1\cdots X_n}\widetilde{D}\lambda(\beta)V - (\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta))DV + (\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta))D_1'V + (\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta))D_2'V\right)\\
&= \operatorname{res}\left(\frac{1}{X_1\cdots X_n}\widetilde{D}\lambda(\beta)V - \frac{1}{X_1\cdots X_n}(\frac{\Delta}{t}\lambda(\beta))\widetilde{D}^\Delta\cdot V\right)\\
&\equiv \operatorname{res}\frac{1}{X_1\cdots X_n}\left(\widetilde{D}\lambda(\beta)V - (\widetilde{D}\lambda(\beta)V)^\Delta\right) \mod t^N.
\end{aligned}
$$

Т.к. для любого $a\in\mathcal{O}'[[t]]$ имеем $\operatorname{Tr} a = \operatorname{Tr} a^\Delta$, то $\operatorname{res}\Phi\cdot V\equiv 0 \mod t^N$, что завершает доказательство. □

5.2.2. **Значения спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на базисе Шафаревича.** Для $\alpha_i = \theta_i X_1^{a_{i1}}\cdots X_n^{a_{in}}(1+\alpha_i')\in\mathcal{H}_m$ (здесь $\alpha_i'\in X(W)(L_0)[[X]]$, $\theta_i\in\mathfrak{R}^*$), положим

$$\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \det(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Пусть $\underline{\omega}(a) = E_F(as)$, $a\in\mathcal{O}'[[t]]$.

Лемма 9. *Для любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{H}_m$ *имеет место равенство*

$$\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \underline{\omega}(a)\rangle = [\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \operatorname{Tr} a](\xi).$$

Доказательство. Требуемое равенство легко проверить для

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (X_1, \ldots, X_n),$$

а также при $\alpha_1 \in 1 + XW(L_0)[[X]]$.

Утверждение леммы следует из свойств спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Лемма 10. *Для* $\theta \in \mathfrak{R}$, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$, $1 \leqslant i < \frac{qe_1}{q-1}$, $(i,p) = 1$ *имеет место равенство*

$$\langle(X_1, \ldots, X_n), \mathcal{E}_\rho(\theta X^i)\rangle = 0.$$

Доказательство. Из символьного свойства следует, что

$$\langle(\theta X^i, X_2, \ldots, X_n), \mathcal{E}_\rho(\theta X^i)\rangle = 0,$$

откуда, т.к. $p \nmid i$, следует требуемое равенство. □

5.2.3. **Инвариантность спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и его независимость по первому аргументу.** Инвариантность спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает независимость его значения от выбора локальных параметров. Иными словами

Предложение 6. *Пусть* $U_1, \ldots, U_n$ – *некоторые переменные, причем* $X_i = g_i(U_1, \ldots, U_n) = \theta_i U_i + \ldots$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *где* $\theta_i \in \mathcal{R}^*$. *Тогда*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_1,\ldots,X_n} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{U_1,\ldots,U_n}.$$

Доказательство. Точно такое же, как доказательство инвариантности в [7]. □

Далее так же, как и в [7], из независимости по второму аргументу и инвариантности можно получить независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по первому аргументу.

§6. Основной результат

6.1. Спаривание на формальном модуле $F(\mathfrak{M}_L)$. Определим спаривание:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N,$$

следующим образом: пусть $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$, $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$, и пусть $\underline{\alpha} \in K_n(\mathcal{H}_m)$, $\underline{\beta} \in F(\mathfrak{M}_X)$ – их прообразы. Положим

$$\langle\alpha,\beta\rangle := \langle\underline{\alpha},\underline{\beta}\rangle.$$

Из независимости и инвариантности спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следует, что спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N$ определено корректно, инвариантно относительно выбора системы локальных параметров и не зависит от разложения элементов в ряды по локальным параметрам.

6.2. Явная формула для спаривания Гильберта $(\cdot, \cdot)$.

Теорема 1. *Символ Гильберта*

$$(\cdot, \cdot) : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N$$

совпадает со спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *и тем самым выражется в явном виде с помощью формулы* (12).

Доказательство. В 5.2.2 было показано, что для $\alpha = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ символ Гильберта (α, β) совпадает со спариванием $\langle \alpha, \beta \rangle$ на элементах базиса Шафаревича. Откуда, в силу независимости от разложения по второму аргументу и линейности обоих спариваний, следует, что $(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ для всех $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$. Далее любой элемент α из $K_n L$ можно представить в виде суммы символов, состоящих из некоторых локальных параметров, т.е.

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\overline{T'}} (T_1', T_2', \dots, T_n').$$

В силу инвариантности спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ утверждение теоремы уже доказано для каждого слогаемого суммы. Для произвольных $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$ утверждение теоремы следует из аддитивности обоих спариваний по первому аргументу. □

Литература

1. С. С. Афанасьева, Б. М. Беккер, С. В. Востоков , *Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина–Тейта.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **400** (2012), 20–49.
2. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **42**, No. 6 (1978), 1288–1321.
3. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43**, No. 4 (1979), 765–794.
4. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **272** (2000), 86–128.
5. А. И. Мадунц, *Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **281** (2001), 221–226.
6. F. Lorenz, S. Vostokov, *Honda Groups and Explicit Pairings on the Modules of Cartier Curves.* — Contemporary Mathematics **300** (2002), 143–170.

7. С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле.* — Матем. сб. **194**, No. 2 (2003), 3–36.
8. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Спаривание Гильберта для формальных групп над σ-кольцами.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **319** (2004), 5–58.
9. Д. Г. Бенуа, С. В. Востоков, *Арифметика группы точек формальной группы.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **191** (1991), 9–23.

Afanas'eva S. S. The Hilbert symbol in multidimensional local fields for Lubin–Tate formal groups. 2.

In this paper an explicit formula for the Hilbert pairing between the Milnor K-group of multidimensional local field and the multidimensional Lubin–Tate formal module is derived. This formula is a generalization of such formula in one-dimensional case. Here we consider the case of characteristic $p > 0$ of penultimate residue field.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cheery_sonya@mail.ru

Поступило 28 ноября 2011 г.