Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 330, 2006 г.

С. В. Востоков, Б. М. Беккер

ВЫДЕЛЕННЫЕ ИЗОГЕНИИ ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ С МАЛЫМ ВЕТВЛЕНИЕМ

1. Введение

При получении явного закона взаимности для формальных групп, определенных над кольцом векторов Витта, возникла необходимость использования так называемых выделенных изогений (см. [1]). Простейший тип выделенных изогений существует в группах Любина–Тейта, которые наиболее близки к мультипликативной формальной группе. А именно, для любого ряда $f(x)$ с коэффициентами из кольца целых локального поля, $f(x) \equiv x^q \bmod \pi$, $f'(0) = \pi$, где π – простой элемент локального поля, а q – порядок поля вычетов, найдется единственная формальная группа $F(x, y)$, для которой ряд $f(x)$ будет ее изогенией: $F \circ f = f \circ F$.

При переходе к формальным группам над кольцом векторов Витта оказалось, что не для всякого ряда $f(x)$, который дает эндоморфизм Фробениуса на поле вычетов, найдется формальная группа $F(x, y)$ с изогенией $f(x)$.

О. Демченко доказал, что для заданной формальной группы можно построить другую формальную группу с выделенной изогенией, удовлетворяющей нужному свойству (см. [2]).

В настоящей работе мы обобщаем результат Демченко на произвольную формальную группу, определенную над кольцом целых локального поля с индексом ветвления меньшим характеристики поля вычетов. Мы активно используем при этом явную классификацию формальных групп, полученную в работе [3].

2. Обозначения и известные результаты

- K – локальное поле с простым элементом π,

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ 04-01-00082 и SFB 478, Münster, “Geometrische Strukturen”.

- $\mathcal{O}$ – кольцо целых элементов поля K,
- $\overline{K}$ – поле вычетов характеристики p,
- T – подполе инерции поля K,
- $\mathcal{O}_T \simeq W(\overline{K})$ – кольцо векторов Витта,
- $q = p^f = \operatorname{card} \overline{K}$,
- $e = (K : T)$ – индекс ветвления поля K,
- σ – автоморфизм Фробениуса поля T: $\sigma(a) \equiv a \bmod p$ для любого $a \in \mathcal{O}_T$,
- Δ – оператор Фробениуса на модуле $K[[X]] : \Delta X^m = X^{pm}$,
- $\mathcal{O}_T[[\Delta]]'$ – некоммутативное кольцо, совпадающее с $\mathcal{O}_T[[\Delta]]$ как левый $\mathcal{O}_T$-модуль и имеющее соотношение $\Delta^m a = \sigma^m(a)\Delta$ для любого $a \in \mathcal{O}_T$,
- $T[[\Delta]]'$ – аналогичное некоммутативное кольцо, построенное на левом T-модуле $T[[\Delta]]$,
- $F(X,Y)$ – одномерная формальная группы над $\mathcal{O}_K$,
- $\lambda(X)$ – логарифм $F(X,Y)$.

Мы будем использовать следующие известные результаты.

Пусть $\mathfrak{A}$ – свободная коммутативная $\mathbb{Z}_p$-алгебра.

Утверждение 1. *Пусть $F(X,Y)$ – формальная группа над $\mathfrak{A}$ с логарифмом $\lambda(X) = X + c_2X^2 + c_3X^3 + \dots$, $c_i \in \operatorname{Quot}\mathfrak{A}$. Тогда ряд $\lambda_p(X) = X + c_pX^p + c_{2p}X^{2p} + \dots$ определяет формальную группу $F_p(X,Y) = \lambda_p^{-1}(\lambda_p(X) + \lambda_p(Y))$ над $\mathfrak{A}$, строго изоморфную группе $F(X,Y)$ (см.* [4]).

Замечание. Формальная группа $F_p(X,Y)$ называется p-типической формальной группой.

Пусть $F(X,Y)$ – формальная группа над кольцом $\mathfrak{A}$ конечной высоты h с логарифмом $\lambda(X)$. Тогда логарифм $\lambda_p(X)$ p-типической формальной группы $F_p(X,Y)$, изоморфной $F(X,Y)$, можно записать в виде

$$\lambda_p(X) = \Lambda(\Delta)(X),$$

где $\Lambda(\Delta) = 1 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \ldots \in K[[\Delta]]$ и $\Delta^m X = X^{pm}$.

Утверждение 2. *Логарифм $\lambda_p(X) = \Lambda(\Delta)(X)$ можно представить в виде*

$$\Lambda(\Delta) = v(\Delta) \cdot u(\Delta)^{-1},$$

где $u(\Delta) = p - a_1\Delta - a_2\Delta^2 - \ldots \in \mathcal{O}_T[[\Delta]]'$,

$$a_1, \ldots, a_{h-1} \in p\mathcal{O}_T, \quad a_h \in \mathcal{O}_T^*,$$

$$v(\Delta) = p + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \ldots \in K[[\Delta]].$$

При этом $\bigcup\limits_i p^{-i}\mathcal{O}_K[[\Delta]]$, *т.е. существует константа* c *такая, что* $p^c v(\Delta) \in \mathcal{O}_K[[\Delta]]$, *точнее*

$$p^l/\pi^l \cdot v(\Delta) \in \mathcal{O}_K[[\Delta]], \qquad l = \Big[\log_p \frac{pl}{p-1}\Big].$$

Ряд $F_p(X,Y) = \lambda^{-1}(\lambda_p(X) + \lambda_p(Y))$ *является формальной группой над* $\mathcal{O}_K$, *строго изоморфной группе* (X,Y), *а именно, ряд*

$$E_p(X) = (\lambda^{-1} \circ \lambda_p)(X) \colon F \to F_p$$

задает строгий изоморфизм (см. [3, предложение 1.4.1]).

Замечание 1. Умножение рядов $v(\Delta) \cdot u(\alpha)^{-1}$ происходит по следующему правилу:

$$(b_i\Delta^i)(a'_j\Delta^j) = b_i\sigma^i(a'_j)\Delta^{i+j}, \qquad b_i \in K, \quad a'_j \in T.$$

3. Классификационная теорема для формальных групп над кольцом $\mathcal{O}_K$ в случае "малого ветвления" $(e < p)$

Утверждение 3. 1. *Ряд* $\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X)$, $\Lambda(\Delta) \in 1 + K[[\Delta]]\Delta$, *является логарифмом p-типической формальной группы над* $\mathcal{O}_K$ *тогда и только тогда, когда* $\Lambda = v \cdot u^{-1}$ *для некоторого* $u \in p + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$ *и* $v \in p + \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$.

2. *Пусть* F *и* F' – *формальные группы над* $\mathcal{O}_K$ *с логарифмами* $\lambda(X) = (v \cdot u^{-1})(X)$ *и* $\lambda'(X) = (v' \cdot u'^{-1})(X)$, *соответственно. Тогда* $F \sim F' \Leftrightarrow u' = u\varepsilon$, $v' = v + g \cdot u$ *для некоторых* $\varepsilon \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$, $g \in \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$.

3. *В каждом классе строго изоморфных формальных групп над* $\mathcal{O}_K$ *конечной высоты* h *существует единственная формальная группа* $F_{ah}(X)$ *с логарифмом Артина–Хассе* $\lambda_{ah}(X) = \Lambda(\Delta)(X)$, *где*

$$\Lambda(\Delta) = v \cdot u^{-1}, \qquad u = p - a_1\Delta - \ldots - a_h\Delta^h,$$

$$a_1, \ldots, a_{h-1} \in p\mathcal{O}_T, \qquad a_h \in \mathcal{O}_T^*,$$

$$v = p + \pi b_1\Delta + \ldots + \pi b_h\Delta^h, \qquad b_i \in \mathcal{O}_K,$$

$$\mathrm{Tr}_{K/T}\pi b_i = 0$$

(*см.* [3, *теорема* 6.3.1]).

Пусть $F(X,Y)$ – p-типическая формальная группа над $\mathcal{O}_K$ с логарифмом $\lambda(X) = (v \cdot u^{-1})(X)$, где $u = p - a_h B\Delta^h$, $B \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$ и пусть $\lambda_1(X) = (v_1 \cdot u_1^{-1})(X)$, где $v_1 = a_h^{-1} v a_h$, $u_1 = u^{\sigma^h} \cdot B^{-1}$.

Предложение 1. *Пусть* $e < p$.

1. *Ряд* $\lambda_1(X)$ *является логарифмом формальной группы* $F_1(X,Y)$ *над* $\mathcal{O}_K$.

2. *Ряд* $[p/a_h]_{F,F_1} = (\lambda_1^{-1} \cdot p/a_h \cdot \lambda)(X)$ *задает гомоморфизм формальной группы* F *в формальную группу* F_1 *над* $\mathcal{O}_K$ *такой, что*

$$[p/a_h]_{F,F_1}(X) \equiv X^{p^h} \bmod \pi.$$

3. *Пусть* $F_{ah}(x,Y)$ – *канонический представитель для* $F(x,Y)$ *в классе строго изоморфных формальных групп над* $\mathcal{O}_K$ *с логарифмом Артина–Хассе* $\lambda_{ah}(X) = (v_{ah}(\Delta) \cdot u_{ah}(\Delta)^{-1})(X)$ (*см. утверждение* 3). *Тогда ряд*

$$\lambda_{ah}^{(1)}(X) = (a_h^{-1} \cdot v_{ah} \cdot (u_{ah} \cdot a_h)^{-1})(X)$$

является логарифмом Артина–Хассе канонического представителя $F_{ah}^{(1)}(X,Y)$ *для формальной группы* $F_1(X,Y)$.

Доказательство. 1. Ясно, что $u_1 = u^{\sigma^h} B^{-1} \in p + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$, поэтому ряд $\lambda_1(X)$ является логарифмом формальной группы над $\mathcal{O}_K$, согласно утверждению 3.

2. a) Пусть $u_1' = Bu^{\sigma^h} B^{-1} = Bu_1$, тогда ряд $F_1' = (\lambda_1')^{-1}(\lambda_1'(X) + \lambda_1'(Y))$, где $\lambda_1'(X) = (v_1/u_1')(X)$ является формальной группой над $\mathcal{O}_K$, строго изоморфной F_1, т.к. $B \equiv 1 \bmod \Delta$ (см. утверждение 3).

Из определения v_1 следует: $p/a_h \cdot v = v_1 \cdot p/a_h$, откуда ряд

$$[p/a_h]_{F,F_1'}(X) = (\lambda_1')^{-1} \frac{p}{a_h} \cdot \lambda$$

задает гомоморфизм из F в F_1' (см. [3, предложение 4.5.1]).

Формальные группы F_1' и F_1 строго изоморфны, поэтому

$$\left[\frac{p}{a_h}\right]_{F,F_1} = [1]_{F_1',F_1} \circ \left[\frac{p}{a_h}\right]_{F,F_1'} \in \mathcal{O}_K[[X]].$$

б) Докажем теперь, что

$$\left[\frac{p}{a_h}\right]_{F,F_1}(X) \equiv X^{p^h} \bmod \pi. \tag{1}$$

Действительно, из определения ряда $u(\Delta)$ следует, что $p/a_h = a_h^{-1}u + B\Delta^h$, и, значит

$$\begin{aligned}\frac{p}{a_h}\lambda(X) &= \Big(\frac{p}{a_h}\cdot v\cdot u^{-1}\Big)(X) = \Big(v_1\cdot\frac{p}{a_h}\cdot u^{-1}\Big)(X) = \\ &= (v_1\cdot(a_h^{-1}u + B\Delta^h)\cdot u^{-1})(X) = \\ &= (a_h^{-1}v)(X) + (v_1 B\Delta^h\cdot u^{-1})(X) = \\ &= (v_1 Bu^{-\sigma^h})(X^{\Delta^h}) = (v_1 u_1^{-1})(X^{p^h}) = \lambda_1(X^{p^h}) \bmod \pi,\end{aligned}$$

т.к. $\Delta^h u^{-1} = u^{-\sigma^h}\Delta^h$. Но

$$\Big(\Big[\lambda_1\cdot\frac{p}{a_h}\Big]_{F,F_1}\Big)(X) = \frac{p}{h}(X) \equiv \lambda_1(X^{p^h}) \bmod \pi.$$

Наше сравнение (1) следует теперь из известного факта для рядов f, g из кольца $\mathcal{O}_K[[X]]$:

$$f \equiv g \bmod \pi \Leftrightarrow \lambda(f) \equiv \lambda(g) \bmod \pi.$$

3. Проверим сперва, что $u_1' = a_h^{-1}ua_h$. Имеем:

$$\begin{aligned}u_1' &= Bu_1 = Bu^{\sigma^h}B^{-1} = B\big(p - a_h^{\sigma^h}B^{\sigma^h}\Delta^h\big)B^{-1} = \\ &= p - Ba_h^{\sigma^h}\Delta^h = a_h^{-1}ua_h,\end{aligned}$$

т.к. $\Delta^h a_h = a_h^{\sigma^h}\Delta^h$.

Пусть $\lambda_{ah}(X) = (v_{ah}/u_{ah})(X)$ – логарифм Артина–Хассе канонического представителя $F_{ah}(X,Y)$ для формальной группы F, тогда $u_{ah} = \varepsilon u$ при некотором $\varepsilon \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$ и $v_{ah} = v + g\cdot u_{ah}$, $g \in \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$ (см. утверждение 3).

Покажем, что $u_{ah}^{(1)} := a_h^{-1}u_{ah}a_h$ – знаменатель в логарифме Артина–Хассе для канонического представителя $F_{ah}^{(1)}$ группы F_1. Действительно, с одной стороны, $u_{ah}^{(1)}$ имеет канонический вид, т.е.

$$u_{ah}^{(1)} = p - a_1'\Delta - \ldots - a_h'\Delta^h, \quad \text{где} \quad a_1', \ldots, a_{h-1}' \in p\mathcal{O}_T, \quad a_h' \in \mathcal{O}_T^*.$$

Далее,

$$u_{ah}^{(1)} = a_h^{-1} u_{ah} a_h = \left(a_h^{-1} \varepsilon a_h\right)\left(a^{-1} u a_h\right) = \\ = \left(a_h^{-1} \varepsilon a_h\right) u_1' = \left(a^{-1} \varepsilon a_h\right) B u_1 = \eta \cdot u_1,$$

где $\eta = a_h^{-1} \varepsilon a_h B \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$. Кроме того, из равенства $v_{ah} = v + g \cdot u_{ah}$ при некотором $g \in \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$ имеем

$$v_{ah}^{(1)} = a_h^{-1} v_{ah} a_h = a_h^{-1} v a_h + \left(a_h^{-1} g a_h\right)\left(a^{-1} u_{ah} a_h\right) = v_1 + g' \cdot u_{ah}^{(1)},$$

где $g' \in \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$. Ясно, что $v_{ah}^{(1)}$ имеет такой же канонический вид, как и v_{ah}, и при этом из равенств

$$u_{ah}^{(1)} = \eta u_1, \quad v_{ah}^{(1)} = v_1 + g' u_{ah}^{(1)}$$

следует изоморфизм групп с логарифмами

$$\lambda_1(X) = (v_1/u_1)(X) \quad \text{и} \quad \lambda_{ah}^{(1)}(X) = (v_{ah}^{(1)}/u_{ah}^{(1)})(X),$$

согласно утверждению 3.

Замечание 2. Коэффициент a_h при Δ^h логарифма формальной группы F переходит в $a_h^{\sigma^h}$ для F_1. Но коэффициент a_h' при Δ^h логарифма F_1' только сравним по модулю p: $a_h' \equiv a_h^{\sigma^h} \bmod P$.

Пусть теперь $F(X,Y)$ – произвольная, не обязательно p-типическая, формальная группа над $\mathcal{O}_K$ с логарифмом $\lambda(X)$, и пусть $\lambda_p(X) = \left(v(\Delta)/u(\Delta)\right)(X)$ – p-типический логарифм, полученный из $\lambda(X)$ (см. утверждение 1), где $u(\Delta) = p - a_1\Delta - a_2\Delta^2 - \ldots \in \mathcal{O}_T[[\Delta]]'$. Взяв $c = 1 - a_1/p - \ldots - a_{h-1}/p\Delta^{h-1}$, получим $u'(\Delta) = c^{-1}u = p - a_h B \Delta^h$, где $B \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]'\Delta$. Тогда ряд $\lambda'(X) = (v/u')(X)$ является логарифмом группы F', строго изоморфной группе F (см. утверждение 3).

Пусть, наконец,

$$u_1 = (u')^{\sigma^h} \cdot B^{-1}, \quad v_1 = a_h^{-1} v a_h \quad \text{и} \quad \lambda_1(X) = (v_1/u_1)(X)$$

– логарифм группы F_1.

Теорема 1. *Ряд* $\left[p/a_h\right]_{F,F_1}(X) = (\lambda_1^{-1} \cdot p/a_h \cdot \lambda)(X)$ *задает гомоморфизм над* $\mathcal{O}_K$ *формальной группы* F *в группу* F_1*. При этом*

$$\left[\frac{p}{a_h}\right]_{F,F_1}(X) \equiv f(X^{p^h}) \bmod \pi,$$

при ряде $f(Y) \in Y + \mathcal{O}_K[[Y]]Y$, *который задает строгий изоморфизм из* F *в* F'.

Доказательство. Пусть $f(X)\colon F \to F'$ – изоморфизм. Для F' и F_1 гомоморфизм $[p/a_h]_{F',F_1}(X)$ существует согласно предложению 1. Поэтому $[p/a_h]_{F',F_1} \circ f = [p/a_h]_{F,F_1}$ – гомоморфизм над $\mathcal{O}_K$ группы F в F_1. По предложению 1 имеем

$$\left[\frac{p}{a_h}\right]_{F,F_1} \equiv f(X^{p^h}) \bmod \pi.$$

Следствие. *Пусть* N – *натуральное число. Тогда имеет место последовательность формальных групп* $F_0\colon = F$, $F_1, \dots, F_N$ *и выделенных изогений* $f_0\colon = f$, $f_1, \dots, f_{N-1}$ *таких, что*

$$F \xrightarrow[f_0]{} F_1 \xrightarrow[f_1]{} F_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{N-1} \xrightarrow[f_{N-1}]{} F_N,$$

где $f_m(X) \equiv g_m(X^{p^h}) \bmod \pi$, *при* $g_m(Y) \in Y + \mathcal{O}_K[[Y]]Y$.

Замечание 3. Если a_h обозначает коэффициент при Δ^h у ряда $u(\Delta) = p - a_1\Delta - \cdots$ для p-типической формальной группы, полученной из исходной группы F (см. утверждение 1), то

$$f_m = \left[\frac{p}{a_h^{\sigma^{mh}}}\right]_{F_m, F_{m+1}}$$

и

$$f^{(N)} = f_{N-1} \circ f_{N-2} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0 = \left[\frac{p}{a_h^{1+\sigma^h+\cdots+\sigma^{(N-1)h}}}\right]_{F,F_N}$$

— гомоморфизмы из F_m в F_{m+1} и из F в F_N, соответственно.

Литература

1. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 86–128.
2. О. В. Демченко, *Новое в отношениях формальных групп Любина–Тейта и формальных групп Хонды.* — Алгебра и анализ **10**, No. 5 (1998), 77–84.
3. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, *Явная классификация формальных групп над локальными полями.* — Труды МИАН **241**, вып. 2 (2003), 43–67.
4. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* — Springer-Verlag, Berlin et al. (1978).

Vostokov S. V., Bekker B. M. Distinguished isogenies for formal groups in local fields with small ramification.

We prove the existence of distinguished isogenies for formal groups defined over the ring of integers of a local field with ramification index less than the characteristic of the residue field. This generalizes the result of Demchenko for Honda formal groups.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: sergeivostokov@mail.ru

E-mail: bekker@pdmi.ras.ru

Поступило 15 января 2006