Г.К.Пак

ФИЛЬТРАЦИЯ ГРУППЫ ГЛАВНЫХ ЕДИНИЦ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ КАК МОДУЛЬ ГАЛУА

1°. Введение. Пусть $k=\mathbb{F}\{\{t\}\}$ – поле формальных степенных рядов от одной переменной над конечным полем констант характеристики p (функциональное локальное поле характеристики p). Мультипликативная группа главных единиц E нормального расширения K/k с группой Галуа G является операторной группой с операторами из группового кольца $\Lambda=\mathbb{Z}_p[G]$. В теории Галуа представляет интерес вопрос о строении Λ-модуля E.

Обозначим через E_α группу главных единиц поля K, сравнимых с 1 по модулю T^α, $\alpha\geqslant 1$ (здесь T – простой элемент поля K). В предлагаемой работе выясняется строение групп E_α как модулей Галуа в случае, когда расширение K/k вполне разветвлено и имеет степень p (§3). Кроме того, в работе эффективно строятся образующие Λ-модуля E (§4).

2°. Леммы. Далее всюду через Λ обозначается групповое кольцо циклической группы G порядка p над $\mathbb{Z}_p$. Известно, что с точностью до изоморфизма существует лишь три неразложимых Λ-модуля, свободных над $\mathbb{Z}_p$, а именно, кольцо Λ, фундаментальный идеал I кольца Λ (модуль Шевалле) и кольцо $\mathbb{Z}_p$ с тривиальными операторами из G. Будем рассматривать мультипликативно записываемые Λ-модули M, свободные над $\mathbb{Z}_p$. Пусть такой модуль M раскладывается в прямое произведение

$$M=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\times W,$$

где Λ-модуль $\mathfrak{A}$ порожден элементами $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_a$ с определяющими соотношениями

$$N\xi_1=1,\quad N\xi_2=1,\dots,N\xi_a=1,$$

Λ-модуль $\mathfrak{B}$ порожден элементами $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_b$ с определяющими соотношениями

$$\eta_1^{\sigma-1}=1,\quad \eta_2^{\sigma-1}=1,\dots,\eta_b^{\sigma-1}=1,$$

а W – полное прямое произведение счетного числа модулей Λ (здесь N – отображение нормы в групповом кольце Λ, а σ – образующий элемент группы G).

Будем говорить, что Λ-модуль M *подобен* конечнопорожденному модулю с инвариантами a, b. Числа a и b называем *инвариантами* Λ-модуля M.

ЛЕММА I. Инварианты Λ-модуля M удовлетворяют условиям

$$a=\dim H^1(G,M), \quad b=\dim H^0(G,M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения леммы очевидным образом вытекают из соответствующих равенств $H^1(G,M)=(\mathrm{Ker}\, N|_M)/M^{\sigma-1}$ и $H^0(G,M)=(\mathrm{Ker}(\sigma-1)|_M)/NM$. Лемма доказана.

Обозначим через U_m группу главных единиц поля k, сравнимых с I по модулю t^m, $U_1=U$.

ЛЕММА 2. Пусть h – скачок ветвления расширения K/k, тогда норменное отображение индуцирует отображение

$$N_m: E_{\psi(m)}/E_{\psi(m)+1} \longrightarrow U_m/U_{m+1} \quad (m\neq h).$$

При этом, если $m<h$, то N_m инъективно и $\psi(m)=m$, а если $m>h$, то N_m сюръективно и $\psi(m)=h+(m-h)p$. Кроме того, $\dim U_h/NE_h=1$.

См. предложение 5, гл.У, §3 [I].

3°. Фильтрация группы E. Пусть K/k – вполне разветвленное расширение Галуа степени p функционального локального поля k, и пусть E_α – группа главных единиц, сравнимых с I по модулю T^α.

ТЕОРЕМА I. Λ-модуль E_α свободен над $\mathbb{Z}_p$ и подобен конечнопорожденному Λ-модулю, инварианты которого a и b удовлетворяют условиям

$$a=b=\begin{cases}(\alpha+[-\frac{\alpha}{p}])f+1, & \alpha\leqslant h;\\ (h-[\frac{h}{p}]f, & \alpha>h,\ \bar{\alpha}>\bar{h};\\ (h-[\frac{h}{p}]-1)f, & \alpha>h,\ \bar{\alpha}\leqslant\bar{h},\end{cases}$$

где $f=(\mathbb{F}:GF(p))$, и через $\bar{z}$ обозначается наименьший неотрицательный вычет числа z по модулю p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из локальной теории полей классов следует, что $\dim H^0(G,E_\alpha)=\dim H^1(G,E_\alpha)$, таким образом $a=b$. Далее, $H^0(G,E_\alpha)=(E_\alpha\cap k)/NE_\alpha$. Если $E_\alpha\cap k=U_m$, то $pm\geqslant\alpha>p(m-1)$, т.е. $m=-[-\frac{\alpha}{p}]$. Пусть $\alpha\leqslant h$, тогда $\dim U_\alpha/NE_\alpha=1$, следовательно, $b=\dim H^0(G,E_\alpha)=$

$$=\dim(E_\alpha\cap k)/NE_\alpha=\dim U_{-[-\frac{\alpha}{p}]}/NE_\alpha=\dim U_{-[-\frac{\alpha}{p}]}/U_\alpha+$$

$$+\dim U_\alpha/NE_\alpha=(\alpha+[-\frac{\alpha}{p}])f+1.$$

Пусть теперь $\alpha > h$ и $NE_\alpha = U_m$. Из леммы 2 следует, что $m = h - \left[\frac{h-\alpha}{p}\right]$. Если $\bar{h} < \bar{\alpha}$, то $\left[\frac{h-\alpha}{p}\right] = \left[\frac{h}{p}\right] + \left[-\frac{\alpha}{p}\right]$, а если $\bar{h} \geqslant \bar{\alpha}$, то $\left[\frac{h-\alpha}{p}\right] = \left[\frac{h}{p}\right] + \left[-\frac{\alpha}{p}\right] - 1$. Поэтому

$$b = \dim (E_\alpha \cap k)/NE_\alpha = \dim U_{-\left[-\frac{\alpha}{p}\right]} / U_{h - \left[\frac{h-\alpha}{p}\right]} = \left(h - \left[\frac{h-\alpha}{p}\right] + \left[-\frac{\alpha}{p}\right]\right) f,$$

и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точно такие же рассуждения приводят к совершенно аналогичной формулировке в случае циклического вполне разветвленного расширения простой степени p регулярного локального поля (конечного расширения поля $\mathbb{Q}_p$, которое не содержит нетривиальных корней степени p из I).

4°. Образующие группы E. При $\alpha = 1$ из теоремы следует, что для Λ-модуля E существует система образующих $\gamma, \theta, \theta_\mu$ (μ пробегает счетное множество) с определяющими соотношениями

$$\gamma^{\sigma-1} = 1, \quad N\theta = 1.$$

Образующую θ можно выбрать как $T^{\sigma-1}$ для простого элемента T такого, что $T^{\sigma-1} \in E$. Элемент γ является образующим фактор-группы U_h / NE_h.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\xi, \xi^p, \ldots, \xi^{p^{f-1}}$ – базис $\mathbb{F}/GF(p)$. Тогда свободные образующие Λ-модуля E можно выбрать в виде

$$R_{ij} = 1 + \xi^{p^i} T^j, \quad (j, p) = 1, \quad 1 \leqslant j < h, \quad 0 \leqslant i \leqslant f-1; \tag{1}$$

$$Q_\ell = 1 + \xi^{p^\ell}(\theta - 1), \quad 0 \leqslant \ell \leqslant f-1, \quad \ell \neq i_0; \tag{2}$$

$$S_{ij} = 1 + \xi^{p^i} t^j (\theta - 1), \quad (j+h, p) = 1, \quad j > 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant f-1. \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (см. [I], гл. IУ, §3)

$$NR_{ij} \equiv 1 + \xi^{p^{i+1}} NT^j \bmod t^{j+1};$$

$$NQ_\ell \equiv 1 + (\xi^{p^{\ell+1}} - \xi^{p^\ell}) N(\theta - 1) \bmod t^{h+1};$$

$$NS_{ij} \equiv 1 - \xi^{p^i} t^j N(\theta - 1) \bmod t^{j+h+1},$$

то эти нормы при добавлении к ним единицы γ образуют базис U/U^p. Поэтому элементы

$$R_{ij}^{\sigma^k}, \quad (j, p) = 1, \quad 1 \leqslant j < h, \quad 0 \leqslant i \leqslant f-1, \quad 0 \leqslant k \leqslant p-1;$$

$$Q_\ell^{\sigma^k}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant f-1, \quad \ell \neq i_0, \quad 0 \leqslant k \leqslant p-1;$$

$$S_{ij}^{\sigma^k}, \quad (j+h,p)=1, \ j>0, \ 0\leq i\leq f-1, \ 0\leq k\leq p-1,$$

вместе с единицей γ образуют линейно независимую систему в E/E^p (см. [2]), а вместе с единицами γ и θ образуют базис линейного пространства E/E^p. Отсюда следует утверждение теоремы.

Литература

1. S e r r e J.-P. Corps Locaux. - Paris, 1962. 243p.
2. Б о р е в и ч З.И. О мультипликативной группе циклических p-расширений локального поля. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1965, т.80, с.16-29.