1 Используемые обозначения

Мы будем использовать следующие обозначения.
$q = p^f$, где $p \neq 2$ — простое число.
K — многомерное локальное поле такое, что существует цепочка полей

$$K = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q,$$

где $k^{(i)}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ является полным дискретно нормированным полем с полем вычетов $k^{(i-1)}$.
Набор $t_n, \dots, t_1$ — система локальных параметров поля K, то есть t_i является единицей в полях $K, k^{(n-1)}, \dots, k^{(i+1)}$ и при этом в поле $k^{(i)}$ является простым элементом. Таким образом, $t_n = \pi$ — простой элемент локального поля K.
$\overline{\mathfrak{v}_K} = \overline{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n) : K^* \to \mathbb{Z}^n$ — нормирование ранга n в K. Здесь $\mathfrak{v}_n(a) = \mathfrak{v}_{k^{(n)}}(a)$, а для $1 \leqslant i < n$

$$v_i(a) = \mathfrak{v}_{k^{(i)}}\left(\overline{\frac{a}{t_n^{\mathfrak{v}_n(a)} \dots t_{i+1}^{\mathfrak{v}_{i+1}(a)}}}\right),$$

$$v_n(a) = \mathfrak{v}_{k^{(n)}}(a).$$

$\mathfrak{O}_K = \{a \in K^* \mid \overline{\mathfrak{v}}(a) \geqslant 0\}$ — кольцо нормирования, которое не зависит от выбора системы локальных параметров.
$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M} = \{a \in \mathfrak{O}_K \mid \overline{\mathfrak{v}}(a) > 0\}$ — максимальный идеал кольца нормирования.
e_K — индекс ветвления поля K относительно нормирования $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_n$, то есть $\mathfrak{v}(p) = e_K$.
$\overline{e_K}$ — индекс ветвления поля K относительно нормирования $\overline{\mathfrak{v}}$.
Введём обозначение: $\mathfrak{p}_K(r_l, \dots, r_n) = \{a \in K \mid (v_l(a), \dots, v_n(a)) \geqslant (r_l, \dots, r_n)\}$. Мы считаем, что группа $\mathbb{Z}^n$ лексикографически упорядоченна: $(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n)$, если для наибольшего индекса l, для которого $i_l \neq j_l$, выполняется $i_l < j_l$. Если $(r_l, \dots, r_n) > (0, \dots, 0)$, то $\mathfrak{p}_K(r_l, \dots, r_n)$ — идеал в $\mathfrak{O}_K$. Более того, любой идеал в $\mathfrak{O}_K$ может быть представлен в виде $\mathfrak{p}_K(r_l, \dots, r)n)$.
Рассмотрим теперь набор мультииндексов $I \subset \mathbb{Z}^n$, будем называть набор I допустимым, если для любых $i_n, \dots, i_{l+1}$ $1 \leqslant l \leqslant n$ найдётся целое число i такое, что из того, что $\overline{r} = (r_1, \dots, r_l, i_{l+1}, \dots, i_n) \in I$ следует $r_l \geqslant i$. Согласно работе [**?**], если мы зафиксируем B — произвольную систему представителей $\mathbb{F}_q$ в K, то

$$\forall s \in K \ s = \sum_{\overline{r} \in I} \alpha_{\overline{r}} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1},$$

где I — допустимый набор, а $\alpha_{\overline{r}} \in B$.

Рассмотрим многомерное локальное поле $K = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \ldots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q$, в случае, когда $k^{(1)} = k$ — одномерное локальное поле характеристики ноль (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$). В этом случае $K = k((t_2))\ldots((t_n))$.

Пусть L — конечное расширение поля K без высшего ветвления, тогда $L = L^{(1)}((T_2))\ldots((T_n))$, где L_1 — конечное расширение поля k. При этом $(\pi = t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и $(\Pi = T_1, T_2, \ldots, T_n)$ — суть системы локальных параметров в полях K и L соответственно. И Пусть $\mathfrak{R}_L$ — набор представителей Тейхмюллера в поле L.

Одномерная формальная группа $F(X,Y) \in \mathfrak{O}_K[[X,Y]]$ высоты h определяет фильтрацию Лютц на модуле $F(\mathfrak{M}_L)$.

В одномерном случае в предложении 4 мы получили образующие модуля $F(\mathfrak{M}_L)$. В случае многомерных полей L/K этот результат получается аналогичным образом. Действительно, результаты работы [2] могут быть применены и к многомерным локальным полям L/K при условии малости абсолютного индекса ветвления поля K: $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$. Тогда очевидно, что рассуждения об образующих модуля $F(\mathfrak{M}_L)$ могут быть повторены для многомерного случая. Таким образом, мы получим, что, если поле L не содержит нетривиальных корней изогении $[p]_F$, а $e_0 < p$, то любой элемент $\alpha \in (\mathfrak{M}_L)$ единственным образом записывается в виде суммы $\alpha = \sum_{(F)}^{*}[p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r})$. Откуда, с учётом предложения 2, следует предложение 4 для многомерного случая.

С помощью предложения 5, взятого из работы [3] мы получили обобщённую функцию Артина-Хассе. В работе [3] рассматриваются обобщённые локальные поля, то есть этот результат применим и для случая многомерных локальных полей L/K. При этом поле $k^{(1)} = k$ не обязательно должно быть конечным расширением $\mathbb{Q}_p$, рассуждения верны для полных дискретно нормированных полей с совершенным полем вычетов полей. Тогда для многоменрного случая будет верно и предложение 6 о свойствах обобщённой функции Артина-Хассе.

Теорема 1 основывается на предложениях 4 и 6, эти предложения верны для случая многомерного локального поля, а значит верным будет и утверждение Теоремы 1.

Пускай L/K — нормальное расширение поля K, а $\mathfrak{O}_L, \mathfrak{M}_L$ — кольцо целых поля L и его максимальный идеал. Через Π обозначим простой элемент поля L, а $e = e(L/\mathbb{Q}_p)$ абсолютный индекс вевтения поля L относительно нормирования $\mathfrak{v}_L$, полученного продолжением нормирования $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_n$ с поля K на поле L.
G — группа Галуа расширения L/K.

2 Формальный групповой закон

В данной работе мы будем работать с формальной группой конечной высоты. Обозначим $F(X,Y) \in \mathfrak{O}_K[X,Y]$ — формальный групповой закон для формальной группы конечной высоты h, заданный над кольцом целых многомерного локального поля K.
$[p]_F(X) \in pX + \mathfrak{O}_K[|X|]X^2$ — эндоморфизм умножения на p формальной группы F.
Рассмотрим максимальный идеал кольца целых поля L и его степени $\mathfrak{M}_L \supset \mathfrak{M}_L^2 \supset \dots$, с помощью группового закона $F(X,Y)$ на этих идеалах можно задать структуру формальных $\mathbb{Z}_p$-модулей:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_L^i: \ \alpha +_F \beta = F(\alpha, \beta),$$

$$\forall a \in \mathbb{Z}_p, \forall \alpha \in \mathfrak{M}_L^i: \ a\alpha = [a]_F(\alpha).$$

3 Обозначения

В данной работе нам потребуются следующие обозначения.
K — локальное поле (конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$).
$e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$ — абсолютный индекс ветвления поля K.
π — простой элемент поля K.
$\mathfrak{O}_K$ — кольцо целых поля K.
$F(X,Y)$ — одномерная формальная группа высоты h, заданная над $\mathfrak{O}_K$.
$[p]_F(X) \in pX + \mathfrak{O}_K[|X|]X^2$ — эндоморфизм умножения на p формальной группы F. В соответствии с работой [2] $[p]_F(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i X^i$ можно записать в виде

$$[p]_F(X) = pc_0(X)X + \pi^{\alpha_1}c_1(X)X^{p^{m_1}} + \dots + \pi^{\alpha_k}c_k(X)X^{p^{m_k}} + c_h(X)X^{p^h},$$

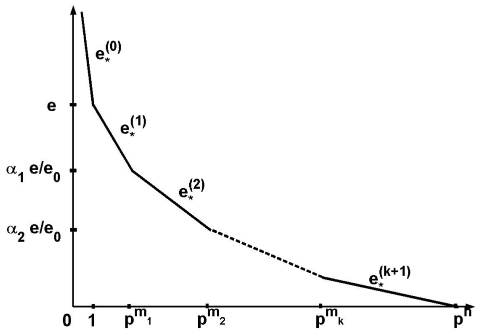
где $c_i(X) \in \mathfrak{O}_K[|X|]^*$, $c_0(X) \equiv 1 \mod X$, $\alpha_0 := e_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > > \dots > \alpha_k > \alpha_{k+1} := 0$, $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1} := h$.

Для изогении $[p]_F(X)$ можно построить многоугольник Ньютона. В области $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ отметим точки $(i, \mathfrak{v}(a_i))$, где $1 \leqslant i \leqslant p^h$. Из всех ломаных с вершинами в отмеченных точках и соединяющих точки $(1, \mathfrak{v}(a_1))$ и $(p^h, \mathfrak{v}(a_{p^h}))$ выберем наиболее близкую к границе области M. Эта ломаная является нижней границей выпуклой оболочки множества $\{i, \mathfrak{v}(a_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant p^h\}$. Постороенная ломаная называется многоугольником Ньютона изогении $[p]_F(X)$. В нашем случае многоугольник Ньютона будет выглядеть примерно так:

Обозначим через $e_*^{(i)}$ тангенс угла наклона прямой, соединяющей точки $(p^{m_i}, \mathfrak{v}(a_{p^{m_i}}))$ и $(p^{m_{i-1}}, \mathfrak{v}(a_{p^{m_{i-1}}}))$:

$$e_*^{(i)} := \frac{e}{e_0}\frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{p^{m_i} - p^{m_{i-1}}}.$$

Числа p^{m_i} и $e_*^{(i)}$ являются важными инвариантами формальной группы F (см. [4]).



В работе [2] доказано, что, если $e_0 < p$, то $e_*^{(1)} > e_*^{(2)} > \cdots > e_*^{(k+1)}$. Более того, верно следующее утверждение (см. лемму 2 в [2]).

Предложение 1. *Пусть z — ненулевой корень изогении $[p]_F(X)$ в поле L. Тогда*

$$\mathfrak{v}(z) = e_*^{(i)}$$

при некотором $i: \ 1 \leqslant i \leqslant k+1$, если $h \geqslant 2$. Если же $h = 1$, то

$$\mathfrak{v}(z) = \frac{e}{p-1}.$$

Аналогичные обозначения будут для других полей:
T_K — подполе инерции поля K (максимальное неразветвлённое подполе в расширение $K/\mathbb{Q}_p$), простым элементом в T_K будет p.
$\mathfrak{O}_{T_K}$ — его кольцо целых.
L — нормальное расширение поля K.
$\mathfrak{O}_L$, $\mathfrak{M}_L$ — кольцо целых поля L и его максимальный идеал.
Π — простой элемент поля L.
$e = e(L/\mathbb{Q}_p)$ — абсолютный индекс ветвления поля L. Мы считаем, что L/K не имеет высшего ветвления, то есть $(e, p) = 1$.
$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$ — нормирование в поле L.
T_L, $\mathfrak{O}_{T_L}$ — подполе инерции поля L и его кольцо целых.
$\mathfrak{R}_L$ — представители Тейхмюллера в поле L.
$G = Gal(L/K)$ — группа Галуа расширения L/K.

Пусть L/K — нормальное расширение без высшего ветвления с группой Галуа $G = Gal(L/K)$. Тогда так же, как в работе [1], сделаем $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модуль из $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$. В поле L всегда можно выбрать такой простой элемент Π, что элемент

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\Pi^\sigma}{\Pi} \in \mathfrak{R}_L$$

является корнем из единицы степени взаимно простой с p для любого автоморфизма $\sigma \in G$.

Теперь в кольце многочленов $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$ можно задать действие операторов из группы G, положив

$$X^\sigma = \varepsilon_\sigma X, \sigma \in G.$$

Тем самым кольцо $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$ становится модулем над групповым кольцом $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$.

Рассмотрим $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-подмодуль A_I из $\mathfrak{O}_{T_L}[X]$ с $\mathfrak{O}_{T_K}$-образующими X^i, где I — некоторая полная система вычетов по модулю $\frac{e}{e_0}$. Тогда, в соответствии с леммой 3 работы [1] имеем следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть L/K — нормальное расширение без высшего ветвления. Тогда $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модуль A_I является свободным $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модулем ранга 1.*

4 Образующие модуля $F(\mathfrak{M}_L)$

Рассмотрим формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль $F(\mathfrak{M}_L)$, который как множество совпадает с максимальным идеалом $\mathfrak{M}_L$ кольца целых поля L. Структуру $\mathbb{Z}_p$-модуля на $F(\mathfrak{M}_L)$ зададим с помощью формального группового закона F:

$$\forall \alpha, \beta \in F(\mathfrak{M}_L) \quad \alpha +_F \beta := F(\alpha, \beta),$$

$$\forall \alpha \in F(\mathfrak{M}_L), a \in \mathbb{Z}_p \quad a\alpha := [a]_F(\alpha).$$

Тогда, если $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$, то, согласно работе [2], получим следующие сравнения для элемента $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$.

$$[p]_F(\alpha) \equiv \begin{cases} c_h(0)\alpha^{p^h} \mod \Pi^{p^h \mathfrak{v}(\alpha)+1}, & 1 \leqslant \mathfrak{v}(\alpha) < e_*^{(k+1)} \\ \pi^{\alpha_i} c_i(0)\alpha^{p^{m_i}} \mod \Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i}\mathfrak{v}(\alpha)+1}, & e_*^{(i+1)} < \mathfrak{v}(\alpha) < e_*^{(i)} \\ & 1 \leqslant i \leqslant k \\ pc_0(0)\alpha \mod \Pi^{e+\mathfrak{v}(\alpha)+1}, & e_*^{(1)} < \mathfrak{v}(\alpha) \\ \pi^{\alpha_{i-1}} c_{i-1}(0)\alpha^{p^{m_{i-1}}} + \pi^{\alpha_i} c_i(0)\alpha^{p^{m_i}} & \mod \Pi^{\alpha_i \frac{e}{e_0} + e_*^{(i)} p^{m_i}+1}, \\ & \mathfrak{v}(\alpha) = e_*^{(i)} \\ & 1 \leqslant i \leqslant k+1 \end{cases}$$

С помощью этих сравнений можно получить образующие для формального модуля $F(\mathfrak{M}_L)$. Пусть θ из $\mathfrak{R}_L$, тогда с помощью $\varepsilon_s(\theta)$ сопоставим θ некий элемент из $F(\mathfrak{M}_L)$ такой, что $\varepsilon_s(\theta) \equiv \theta \Pi^s \mod \Pi^{s+1}$.

Предложение 3. *Любой элемент $\alpha \in F(\mathfrak{M}_L)$ представим в виде суммы*

$$\alpha = \sum\nolimits_{(F)}^{*} [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r}),$$

где символ $\sum_{(F)}^{*}$ обозначает суммирование по всем неотрицательным r и по индексам s из некоторого специального индексного множества I. При этом, если поле L не содержит нетривиальных корней изогении $[p]_F$, то такое представление однозначно.

В частности, в множестве I не будут встречаться индексы, большие $e_*^{(1)} + e$. Запишем I в виде $I = \{1 \leqslant s \leqslant e_*^{(1)} + e \mid \bigstar\}$, где $\bigstar$ — некое условие, которое мы получим ниже.

Доказательство. Для начала индукцией проверим, что любой элемент α из $F(\mathfrak{M}_L)$ можно представить в виде суммы следующего вида: $\alpha = \sum\limits_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$, где $\theta_s \in \mathfrak{R}_L,\ \varepsilon_s(\theta_s) \in F(\mathfrak{M}_L)$ такие, что $\varepsilon_s(\theta_s) \equiv \theta \Pi^s \mod \Pi^{s+1}$.

База индукции очевидна, так как любой элемент из $F(\mathfrak{M}_L)$ имеет вид $\alpha = \theta_1\Pi + \ldots \Rightarrow \alpha \equiv \theta_1\Pi \mod \Pi^2$.

Пусть теперь $\alpha \equiv \sum\limits_{s=1(F)}^{t} \varepsilon_s(\theta_s) \mod \Pi^{t+1} \Rightarrow \alpha = \sum\limits_{s=1(F)}^{t} \varepsilon_s(\theta_s) + \theta_{t+1}\Pi^{t+1} + \cdots \equiv \sum\limits_{s=1(F)}^{t} \varepsilon_s(\theta_s) + \theta_{s+1}\Pi^{t+1} \mod \Pi^{t+2} \equiv \sum\limits_{s=1(F)}^{t} \varepsilon_s(\theta_s) +_F +_F \theta_{s+1}\Pi^{t+1} \mod \Pi^{t+2}$.

Таким образом, мы получили, что для каждого $t > 0$ $\alpha \equiv \sum\limits_{s=1(F)}^{t} \varepsilon_s(\theta_s) \mod \Pi^{t+1}$, а значит $\alpha = \sum\limits_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$.

Далее, пользуясь сравнениями, уберём лишние индексы в этой сумме. Будем считать, что $\beta = \theta\Pi^{\mathfrak{v}(\beta)} + \cdots \in F(\mathfrak{M}_L)$, $c_i(0) = c_i + \ldots,\ \pi = \xi\Pi^{\frac{e}{e_0}} + \ldots,\ p = \zeta\Pi^e + \ldots$, где $\theta, c_i, \xi, \zeta \in \mathfrak{R}_L$.

1. Если $s = \mathfrak{v}(\beta) > e_*^{(1)}$, то $[p]_F(\beta) = pc_0(0)\beta + \cdots \equiv \equiv \zeta c_0\theta\Pi^{s+e} \mod \Pi^{s+e+1}$, следовательно, если в качестве θ взять $\theta = \theta_{s+e}(\zeta c_0)^{-1} \in \mathfrak{R}_L$, то $\beta \equiv \theta\Pi^s \mod \Pi^{s+1} \equiv \equiv \varepsilon_s(\theta) \mod \Pi^{s+1}$, а для слагаемого с индексом $s+e$ получим следующее сравнение:

   $$\varepsilon_{s+e}(\theta_{s+e}) \equiv [p]_F(\beta) \mod \Pi^{s+e+1} \equiv [p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \mod \Pi^{s+e+1}.$$

   Это сравнение означает, что в сумме $\alpha = \sum\limits_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$ любое слагаемое $\varepsilon_j(\theta_j)$ индекса $j > e_*^{(1)} + e$ можно заменить на слагаемое вида $[p]_F(\varepsilon_{j-e}(\theta_{j-e,1}))$, то есть в индексном множестве I нет индексов, больших $e_*^{(1)} + e$.

2. Если $1 \leqslant s = \mathfrak{v}(\beta) < e_*^{(k+1)}$, то $[p]_F(\beta) \equiv c_h\theta^{p^h}\Pi^{p^h s} \mod \Pi^{p^h s+1}$. Представители Тейхмюллера $\mathfrak{R}_L$ p-делимы, значит $\theta = = (c_h^{-1}\theta_{p^h s})^{\frac{1}{p^h}}$ будет лежать в $\mathfrak{R}_L$. При таком θ получим, что

   $$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \mod \Pi^{p^h s+1} \equiv \theta_{p^h s}\Pi^{p^h s} \mod \Pi^{p^h s+1}.$$

   А это означает, что в сумме $\alpha = \sum\limits_{s=1(F)}^{\infty} \varepsilon_s(\theta_s)$ будут отсутствовать слагаемые вида $\varepsilon_{p^h s}(\theta_{p^h s})$, где $1 \leqslant s < e_*^{(k+1)}$.

3. Если $e_*^{(i+1)} < s = \mathfrak{v}(\beta) < e_*^{(i)}$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$, то

   $$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \mod \Pi^{\alpha_i\frac{e}{e_0}+p^{m_i}s+1} \equiv$$

   $$\equiv \xi^{\alpha_i}c_i\theta^{p^{m_i}}\Pi^{\alpha_i\frac{e}{e_0}+p^{m_i}s} \mod \Pi^{\alpha_i\frac{e}{e_0}+p^{m_i}s+1}.$$

   $\xi^{\alpha_i}c_i\theta^{p^{m_i}s} \in \mathfrak{R}_L$, поэтому мы можем рассмотреть $\theta = = (\xi^{-\alpha_i}c_i^{-1}\theta_{\alpha_i\frac{e}{e_0}+p^{m_i}s})^{\frac{1}{p^{m_i}}} \in \mathfrak{R}_L$. Тогда получим, что для любого индекса $j = \alpha_i\frac{e}{e_0} + p^{m_i}s$ при некотором $1 \leqslant i \leqslant k$ и $e_*^{(i+1)} < s < e_*^{(i)}$ будет выполняться сравнение

   $$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv \varepsilon_j(\theta_j) \mod \Pi^{j+1},$$

   а значит из индексного множества I можно убрать все такие индексы j.

4. В случае, если $s = \mathfrak{v}(\beta) = e_*^{(i)}$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k+1$, рассмотрим $j = \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} s$, тогда
$$[p]_F(\varepsilon_s(\theta)) \equiv [p]_F(\beta) \mod \Pi^{j+1} \equiv$$
$$\equiv (\xi^{\alpha_{i-1}} c_{i-1} \theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i} c_i \theta^{p^{m_i}}) \Pi^j \mod \Pi^{j+1}.$$
Будем считать, что сравнения
$$\theta_j \equiv \xi^{\alpha_{i-1}} c_{i-1} \theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i} c_i \theta^{p^{m_i}} \mod \Pi$$
имеют решения θ в $\mathfrak{R}_L$ для любого θ_j из $\mathfrak{R}_L$, тогда индексы вида $e_*^{(i)}$, где $1 \leqslant i \leqslant k+1$, можно выкинуть из множества I.

Таким образом, условие $\bigstar$ состоит из четырёх пунктов:

1. $s \leqslant e + e_*^{(1)} = \alpha_0 \frac{e}{e_0} + p^{m_0} e_*^{(1)}$,
2. $s \neq p^h j = \alpha_{k+1} \frac{e}{e_0} + p^{m_{k+1}} j$ ни для какого $1 \leqslant j < e_*^{(k+1)}$,
3. $s \neq \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} j$ ни для каких $1 \leqslant i \leqslant k$ и $e_*^{(i+1)} < j < e_*^{(i)}$,
4. $s \neq \alpha_i \frac{e}{e_0} + p^{m_i} e_*^{(i)}$ ни для какого $1 \leqslant i \leqslant k+1$.

В итоге любой элемент α из $F(\mathfrak{M}_L)$ можно представить в виде суммы $\alpha = \sum_{(F)}^* [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r})$, где символ $\sum_{(F)}^*$ означает, что суммирование ведётся по всем неотрицательным r, а s берутся из индексного множества $I = \{1 \leqslant s \leqslant e + e_*^{(1)} \mid \bigstar\}$.

Ясно, что, если L не содержит нетривиальных корней изогении $[p]_F$, то такое представление будет однозначным. $\square$

Разобьём индексное множество I на непересекающиеся подмножества так, чтобы в каждом из них было по $\frac{e}{e_0}$ различных представителей вычетов по модулю $\frac{e}{e_0}$. Рассмотрим числа $i_j := \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} e_*^{(j+1)}$, $0 \leqslant j \leqslant k+1$ (здесь и в дальнейшем будем считать, что $e_*^{(k+2)} = 0$), тогда I представляется в виде объединения непересекающихся множеств $I_j := \{i_j \leqslant s < i_{j-1} \mid \bigstar\}$: $I = \bigcup_{j=1}^{k+1} I_j$. Заметим, что для каждого j все индексы $s = \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} l$, где $e_*^{(j+1)} < l < e_*^{(j)}$, лежат в интервале I_j. Действительно:
$$s = \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} l > \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} e_*^{(j+1)} = i_j,$$
$$s = \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} l < \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} e_*^{(j)} = \alpha_j \frac{e}{e_0} + p^{m_j} \frac{e}{e_0} \frac{\alpha_{j-1} - \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} =$$
$$= \frac{e}{e_0} \frac{p^{m_j} \alpha_j - p^{m_{j-1}} \alpha_j + p^{m_j} \alpha_{j-1} - p^{m_j} \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \frac{e}{e_0} \frac{p^{m_j} \alpha_{j-1} - p^{m_{j-1}} \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} =$$
$$= \frac{e}{e_0} \frac{p^{m_j} \alpha_{j-1} - p^{m_{j-1}} \alpha_{j-1} + p^{m_{j-1}} \alpha_{j-1} - p^{m_{j-1}} \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} =$$
$$= \alpha_{j-1} \frac{e}{e_0} + p^{m_{j-1}} \frac{e}{e_0} \frac{\alpha_{j-1} - \alpha_j}{p^{m_j} - p^{m_{j-1}}} = \alpha_{j-1} \frac{e}{e_0} + p^{m_{j-1}} e_*^{(j)} = i_{j-1}.$$
Таким образом, условие $\bigstar$ в каждом из множеств I_j будет равномерно «выкалывать» индексы с шагом p^{m_j}. Из каждого I_j будет «выколото» ровно $e_*^{(j)} - e_*^{(j+1)}$ индексов, а значит из всех $e + e_*^{(1)}$ индексов в множестве I будет «выколото» ровно $(e_*^{(k+1)} - e_*^{(k+2)}) + (e_*^{(k)} -$

$- e_*^{(k+1)}) + \dots + (e_*^{(1)} - e_*^{(2)}) = e_*^{(1)}$ индексов, а значит в I останется e индексов. Разобьём их на на e_0 групп по $\frac{e}{e_0}$ в каждой. Ясно, что если для любого j $\frac{e}{e_0}$ делит $(p^{m_j} - 1):\ t_j \frac{e}{e_0} = p^{m_j} - 1$, то каждое из множеств I_j разбивается в объединение $t_j(e_*^{(j)} - e_*^{(j+1)})$ множеств по $\frac{e}{e_0}$ представителей вычетов по модулю $\frac{e}{e_0}$. Следовательно можно будет наше множество I представить в виде объединения $I = \bigcup\limits_{i=1}^{e_0} I^i_{\frac{e}{e_0}}$, где множества $I^i_{\frac{e}{e_0}}$ имеют такой вид, как требуется в предложении 1.

Используя результаты этого параграфа, получим, что $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модуль A_I, построенный на $\mathfrak{O}_{T_K}[X]$ образующих X^s, где s из нашего индексного множества $I = \{1 \leqslant s \leqslant e + e_*^{(1)} \mid \bigstar\}$ будет представляться в виде прямой суммы модулей $A_{I^i_{\frac{e}{e_0}}}$: $A_I = \bigoplus\limits_{i=1}^{e_0} A_{I^i_{\frac{e}{e_0}}}$. В предложении 2 говорится, что каждый модуль $A_{I^i_{\frac{e}{e_0}}}$ является свободным $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модулем ранга 1, а значит будет верным следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть $I = \{1 \leqslant s \leqslant e + e_*^{(1)} \mid \bigstar\}$. Рассмотрим $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модуль A_I, с $\mathfrak{O}_{T_K}$-образующими X^s, где $s \in I$. Тогда A_I является свободным $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модулем ранга e_0.*

5 Функция Артина-Хассе

Теперь займёмся построением аналога функции Артина-Хассе

$$E(X) = \exp\left(X + \frac{X^p}{p} + \frac{X^{p^2}}{p^2} + \dots\right)$$

для нашего случая. Для этого мы воспользуемся результатами работы [3].

$F(X,Y)$ — p-типическая одномерная формальная группа, определённая над $\mathfrak{O}_K$. Тогда её логарифм имеет вид:

$$\lambda_F(X) = X + c_1 X^p + c_2 X^{p^2} + \dots = \Lambda_F(\Delta)(X),$$

где Δ действует на переменную X как возведение в степень p, а на коэффиценты, как автоморфизм Фробениуса в расширении $K/\mathbb{Q}_p$. В работе [3] доказано, следующее.

Предложение 5.

1. *Существуют ряд $v_F(\Delta) = p + \pi \sum\limits_{i \geqslant 1} b_i \Delta^i$ и ряд $u_F(\Delta) = p + \sum u_j \Delta^j$, где $b_i \in \mathfrak{O}_K$, а u_j лежат в $\mathfrak{O}_{T_K}$, такие, что $\Lambda_F(\Delta) = \frac{v_F(\Delta)}{u_F(\Delta)}$. При этом, если $h = htF < \infty$ — высота формальной группы F, то $p \mid u_1, u_2, \dots, u_{h-1};\ u_h \in \mathfrak{O}^*_{T_K}$.*

2. *В классе изоморфных над $\mathfrak{O}_K$ формальных групп существует единственная формальная группа F_{ah} с логарифмом*

$$\lambda_{ah}(X) = \Lambda_{ah}(\Delta)(X) = \frac{v(\Delta)}{u(\Delta)}(X), \text{ где}$$

$$v(\Delta) = p + \pi b_1 \Delta + \dots + \pi b_h \Delta^h,$$

$$u(\Delta) = p + p u_1 \Delta + \dots + p u_{h-1} \Delta^{h-1} + u_h \Delta^h.$$

   При этом $tr_{K/T_K} b_i = 0$.

Ряд $E_F(X) = (\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{ah})(X)$ будет задавать строгий изоморфизм формальных групп над $\mathfrak{O}_K$ $E_F : F_{ah} \to F$. Рассмотрим функцию $E_F(\varphi) := (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(\varphi)$. Она будет действовать из $\mathfrak{O}_L[|X|]$ в $F(\mathfrak{O}_L[|X|])$ и будет обладать следующими свойствами.

Предложение 6.
$E_F(\varphi) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(\varphi) : \mathfrak{O}_L[|X|] \to F(\mathfrak{O}_L[|X|])$, *тогда*

1. $\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{O}_L[|X|]$ $E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi)$.

2. $E_F(pX^m) = [p]_F E_F(X^m)$.

3. $\forall \sigma \in Gal(L/K)$ $E_F(X^\sigma) = (E_F(X))^\sigma$.

4. $\forall a \in \mathfrak{O}_L$ $E_F(aX^m) \equiv aX^m \mod X^{m+1}$.

Доказательство. E_F задаёт изоморфизм формальных групп F и F_{ah}, то есть $E_F(F_{ah}(X,Y)) = F(E_F(X), E_F(X))$. $\Lambda_{ah}(\Delta)$ — линейный оператор, поэтому $\Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi + \psi) = \Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi) + \Lambda_{ah}(\Delta)(\psi)$. Отсюда очевидно следует, что

$$E_F(\Delta)(\varphi + \psi) = \Lambda_F^{-1}\left(\Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi + \psi)\right) =$$
$$= \Lambda_F^{-1}\left(\Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi) + \Lambda_{ah}(\Delta)(\psi)\right) =$$
$$= \Lambda_F^{-1}\left(\Lambda_F \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah}(\Delta)(\varphi) + \Lambda_F \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah}(\Delta)(\psi)\right) =$$
$$= \Lambda_F^{-1}\left(\Lambda_F(E_F(\varphi)) + \Lambda_F(E_F(\psi))\right) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi).$$

Свойство 1 доказано.

Из свойства 1 по определению эндоморфизма $[p]_F$ сразу же вытекает свойство 2.

Для доказательства свойства 3 рассмотрим σ из группы Галуа G, тогда $X^\sigma = \varepsilon_\sigma X$, где $\varepsilon_\sigma \in \mathfrak{R}_L$. Следовательно, $\Delta(X^\sigma) = \Delta(\varepsilon_\sigma X) = \varepsilon_\sigma^p X^p$. С другой стороны, $(\Delta(X))^\sigma = (X^p)^\sigma = \varepsilon_\sigma^p X^p$. Отсюда следует, что $\Delta(X^\sigma) = (\Delta(X))^\sigma$ и

$$E_F(X^\sigma) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(X^\sigma) = (\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta)(X)^\sigma = (E_F(X))^\sigma.$$

Так как $(\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{ah})(X)$ задаёт строгий изоморфизм формальных групп F и F_{ah}, то $(\Lambda_F^{-1} \circ \Lambda_{ah})(\Delta) \equiv 1 \mod (\Delta)$, а значит выполнено свойство 4: $E_F(aX^m) \equiv aX^m \mod (X^{m+1})$. □

6 Итоговый результат

Рассмотрим $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модуль A_I, который по предложению 4 является свободным $\mathfrak{O}_{T_K}[G]$-модулем ранга e_0. Пусть $\beta_l, \beta_2, \dots, \beta_{e_0}$ образуют нормальный базис модуля A_I, то есть элементы
$\{\beta_l^\sigma \mid 1 \leqslant l \leqslant e_0, \sigma \in G\}$ образуют базис модуля A_I над $\mathfrak{O}_{T_K}$. Тогда, если $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathfrak{O}_{T_K}$ образуют базис кольца $\mathfrak{O}_{T_K}$ над $\mathbb{Z}_p$, то множество $\{b_j\beta_l \mid 1 \leqslant l \leqslant e_0, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ является нормальным базисом модуля A_I как $\mathbb{Z}_p[G]$-модуля, а это означает, что A_I является свободным $\mathbb{Z}_p[G]$-модулем ранга ne_0, где $n = (\mathfrak{O}_{T_K} : \mathbb{Z}_p)$.

В предложении 3 говорилось, что любой α из $F(\mathfrak{M}_L)$ представим в виде $\alpha = \sum_{(F)}^* [p]_F^r \varepsilon_s(\theta_{s,r})$, где $\varepsilon_s(\theta_{s,r}) \equiv \theta_{s,r}\Pi^s \mod \Pi^{s+1}$. Из свойств функции E_F ясно, что $\varepsilon_s(\theta_{s,r}) \equiv E_F(\theta_{s,r}X^s)|_{X=\Pi} \mod \Pi^{s+1}$, а значит

$$\forall \alpha \in F(\mathfrak{M}_L) \quad \alpha = E_F(\sum_{s \in I \ r \geqslant 0} p^r \theta_{s,r} X^s)|_{X=\Pi} = E_F(\varphi)|_{X=\Pi},$$

где φ из A_I. Так как $E_F(\varphi+\psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi)$, то получаем, что функция E_F задаёт гомоморфизм $\mathbb{Z}_p$-модулей A_I и $F(\mathfrak{M}_L)$. Если поле L не содержит нетривиальных корней изогении $[p]_F$, то E_F, по предложению 3, будет $\mathbb{Z}_p$-изоморфизмом. Более того, по свойству 3, $E_F(X^\sigma) = (E_F(X))^\sigma$ для любого σ из группы Галуа G, а значит E_F задаёт изоморфизм A_I и $F(\mathfrak{M}_L)$ как $\mathbb{Z}_p[G]$-модулей.

Рассмотрим образующие $\mathbb{Z}_p[G]$-модуля A_I :

$$\{b_j\beta_l \mid 1 \leqslant l \leqslant e_0, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Отображение E_F будет переводить их в образующие $\mathbb{Z}_p[G]$-модуля $F(\mathfrak{M}_L)$, а это значит, что $F(\mathfrak{M}_L)$ является свободным $\mathbb{Z}_p[G]$-модулем ранга ne_0.

Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных модулей $F(\mathfrak{M}_L^i)$ фильтрации Лютц.

В итоге, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, с индексом ветвления $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p) < p$, и пусть L/K — нормальное расширение без высшего ветвления с группой Галуа $G = Gal(L/K)$. Рассмотрим формальную группу $F(X,Y)$ конечной высоты h, заданную над кольцом целых $\mathfrak{O}_K$ поля K. Пусть $[p]_F(X) = pc_0(X)X + \pi^{\alpha_1}c_1(X)X^{p^{m_1}} + \cdots + \pi^{\alpha_k}c_kX^{p^{m_k}} + c_h(X)X^{p^h}$ — эндоморфизм умножения на p формальной группы F. Тогда, если выполняются следующие условия:*

1. *L не содержит нетривиальных корней изогении $[p]_F$,*
2. *Для любого i из $\{1,2,\dots,k+1\}$ сравнение $\theta_* \equiv \xi^{\alpha_{i-1}}c_{i-1}\theta^{p^{m_{i-1}}} + \xi^{\alpha_i}c_i\theta^{p^{m_i}} \mod \Pi$ имеет решение $\theta \in \mathfrak{R}_L$ для любого $\theta_* \in \mathfrak{R}_L$, где $\pi = \xi\Pi^{\frac{e}{e_0}} + \dots$,*

то $F(\mathfrak{M}_L)$ является свободным $\mathbb{Z}_p[G]$-модулем ранга ne_0, где $n = (\mathfrak{O}_{T_K} : \mathbb{Z}_p)$. Аналогичный результат верен и для $F(\mathfrak{M}_L^i)$.

Список литературы

[1] С. В. Востоков, «Фильтрация Лютц как модуль Галуа в расширении без высшего ветвления», *Аналитическая теория чисел и теория функций. 8*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **160**, ЛОМИ, Ленингад, 1987, 182-192.

[2] С. В. Востоков, А. Н. Зиновьев, «Арифметика модуля корней изогении формальной группы в малом ветвлении», *Вопросы теории представлений алгебр и групп. 14*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **338**, ПОМИ, СПб., 2006, 125-136.

[3] М. В. Бондарко, С. В. Востоков, «Явная классификация формальных групп над локальными полями», *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 43-67.

[4] М. И. Башмаков, А. Н. Кириллов, «Фильтрация Лютц формальных групп», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:6 (1975), 1227-1239.

[5] С. В. Востоков, «Норменное спаривание в формальных модулях», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 765-794.