О. В. Демченко, Формальные группы Хонды: арифметика группы точек, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 1, 132–149

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 1

ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ХОНДЫ: АРИФМЕТИКА ГРУППЫ ТОЧЕК

© О. В. Демченко

Понятие символа Гильберта может быть обобщено на произвольную формальную группу над кольцом целых локального поля. В данной работе для достаточно важного случая формальных групп Хонды построен базис группы точек (так называемый базис Шафаревича) и вычислены значения обобщенного символа Гильберта на его элементах. При этом естественным образом возникает несколько иной, отличный от „стандартного", способ обобщения, что позволяет использовать схему построений, разработанную для формальных групп Любина–Тэйта.

Введение

Доказательство явной формулы типа Востокова для обобщенного символа Гильберта предполагает построение специального базиса группы точек и дальнейшую проверку совпадения значений сконструированного спаривания и символа Гильберта на его элементах. Идея нахождения такого базиса принадлежит Шафаревичу [8], который построил его для случая мультипликативной формальной группы (что соответствует обычному символу Гильберта). Востоков [3–5] успешно развил эту идею, обобщив базис Шафаревича на случай формальных групп Любина–Тэйта и построив явную формулу для этого случая.

В дальнейшем Бенуа и Востоковым [1, 2] была предпринята попытка последующего обобщения этой конструкции на формальные группы Хонды, однако существенные результаты были получены только для символа первой степени. В настоящей работе рассматриваются формальные группы Хонды и символ Гильберта произвольной степени для них. В этом случае построен базис Шафаревича и найдены значения символа Гильберта на его образующих. Принципиальное отличие нашего подхода заключается в ином, в некотором смысле более „естественном", но отличном от „стандартного" определении обобщенного символа Гильберта для формальных групп Хонды. Необходимость введения этого „вспомогательного" символа объясняется желанием обобщить конструкции, использующие „выделенную" изогению, которые были разработаны для формальных групп Любина–Тэйта [4, 5] и затем перенесены на случай относительных формальных групп Любина–Тэйта [6]. Возможность такого обобщения

Ключевые слова: кольцо целых локального поля, формальная группа.

устанавливается результатами работы [7], проводящими параллели между формальными группами Хонды и формальными группами Любина–Тэйта.

В §1–3 настоящей статьи дается определение основных понятий и доказываются их простейшие свойства. Идея рассмотрения кольца целых неразветвленного расширения степени h (h — высота формальной группы) для исследования группы точек формальной группы Хонды появилась в работах [1, 2]. В §4 эти результаты переносятся на случай символа Гильберта произвольной степени $n \geqslant 1$. Примарные элементы играют важнейшую роль в конструкции базиса Шафаревича. Такие элементы характеризуются следующим свойством: деленные на степень изогении, они порождают неразветвленное расширение базисного поля. Им посвящены §5, 6. Заметим, что для $n > 1$ удалось найти более удобный, чем в [1, 2], вид примарных элементов (предложение 5). Наконец, в §7 строится обобщенный базис Шафаревича и вычисляются значения на нем сначала для „вспомогательного" (теорема 3), а затем и для „стандартного" обобщенных символов Гильберта (теорема 4).

Автор выражает свою глубокую признательность профессору С. В. Востокову за чуткое руководство и неоценимую поддержку, оказанную во время написания этой статьи.

§1. Формальные группы Хонды

Итак, пусть k — локальное поле нулевой характеристики, $\overline{k}$ — его поле вычетов характеристики $p \neq 2$ и мощности $q = p^f$, $\mathcal{O}$ — кольцо целых, π — униформизующая k. Рассмотрим k' — конечное неразветвленное расширение k, $\mathcal{O}'$ и $\mathfrak{M}'$ — его кольцо целых и максимальный идеал. Обозначим через Δ автоморфизм Фробениуса расширения k'/k. Формальная группа Хонды [9] определяется как такая формальная группа F над $\mathcal{O}'$, чей логарифм λ удовлетворяет сравнению $u\lambda \equiv 0 \mod \pi$ для некоторого оператора $u = \pi + a_1 \blacktriangle + a_2 \blacktriangle^2 + \ldots$, $a_i \in \mathcal{O}'$ (u называется типом формальной группы F). Действие $\blacktriangle$ на $k'[[x]]$ определяется следующим образом: $\blacktriangle(\Sigma c_i x^i) = \Sigma c_i^{\Delta} x^{qi}$. Отметим одно свойство такого рода операторов. Если $u = \sum a_i \blacktriangle^i$, $v = \sum b_j \blacktriangle^j$, то $u(v\varphi) = (uv)\varphi$, где произведение u и v берется в некоммутативном кольце формальных степенных рядов от переменной $\blacktriangle$ с правилом умножения $\blacktriangle a = a^{\Delta} \blacktriangle$, $a \in \mathcal{O}'$.

Формальная группа Хонды имеет множество разных типов, но существует единственный определяющий группу (с точностью до изоморфизма) „канонический" вид $u = \pi - a_1 \blacktriangle - \cdots - a_h \blacktriangle^h$, где $a_1, \ldots, a_{h-1} \in \mathfrak{M}'$, $a_h \in \mathcal{O}'$ обратим и h — высота F. Таким представлением мы и будем пользоваться в дальнейшем. Кроме того, в силу равенства

$$\begin{aligned}\widetilde{u} &= (\pi^{-1}(u + a_h \blacktriangle^h))^{-1} u = \pi - (\pi^{-1}(u + a_h \blacktriangle^h))^{-1} a_h \blacktriangle^h \\ &= \pi - a_h \blacktriangle^h - a_{h+1} \blacktriangle^{h+1} - \ldots, \quad a_{h+1}, \dots \in \mathcal{O}'\end{aligned}$$

$\widetilde{u}$ также является типом F, важным по следующим обстоятельствам.

Сформулируем результаты работы [7], являющиеся основой для наших исследований.

Теорема 1. *Пусть* F *— формальная группа Хонды типа* $\widetilde{u}=\pi-a_h \blacktriangle^h - a_{h+1} \blacktriangle^{h+1} - \dots$, $a_h, a_{h+1}, \dots \in \mathcal{O}'$, a_h *обратим;* λ*-логарифм* F. *Определим оператор*

$$B = 1 + \frac{a_{h+1}}{a_h} \blacktriangle + \frac{a_{h+2}}{a_h} \blacktriangle^2 + \dots$$

и положим $\lambda_1 = B\lambda^{\Delta^h}$. *Тогда*

1) λ_1 *является логарифмом формальной группы Хонды* F_1 *типа* $\widetilde{u}_1$, *где* $\widetilde{u}a_h = a_h\widetilde{u}_1$.

2) $f = [\pi/a_h]_{F,F_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, F_1)$ *и* $f(x) \equiv x^{q^h} \mod \pi$.

Теорема 2 (обратная к теореме 1). *Пусть* $f \in \mathcal{O}'[[x]]$ *и* $\widetilde{u} = \pi - a_h \blacktriangle^h - a_{h+1} \blacktriangle^{h+1} - \dots$, $a_h, a_{h+1}, \dots \in \mathcal{O}'$, a_h *обратим, таковы, что* $f(x) \equiv x^{q^h} \mod \pi$ *и* $f(x) \equiv (\pi/a_h)x \mod \deg 2$. *Тогда существует и единственна формальная группа Хонды* F *типа* $\widetilde{u}$ *такая, что* $f = [\pi/a_h]_{F,F_1}$, *где* F_1 *— формальная группа Хонды, соответствующая* F *в силу теоремы* 1.

Ясно, что это позволяет на множестве формальных групп Хонды определить обратимый оператор $\mathcal{A}$, ставящий в соответствие группе F группу F_1 согласно теореме 1.

Зафиксируем теперь формальную группу Хонды F высоты h, ее логарифм λ и ее „канонический" тип $u = \pi - a_1 \blacktriangle - \dots - a_h \blacktriangle^h$. В дальнейших рассуждениях существенную роль будет играть цепочка формальных групп Хонды

$$F \xrightarrow[f]{} F_1 \xrightarrow[f_1]{} \dots \xrightarrow[f_{n-1}]{} F_n,$$

где $F_m = \mathcal{A}^m F$, u_m — „канонический" тип F_m, λ_m — логарифм F_m. Обозначим $\pi_1 = \pi/a_h$, $\pi_m = \pi_1^{\Delta^{h(m-1)}}$, $\pi_1^{(m)} = \pi_m \dots \pi_2\pi_1$, $f^{(m)} = f_{m-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f$. Из теоремы 1 легко вытекают следующие свойства.

Лемма 1. а) $f_{m-1}(x) \equiv \pi_m x \mod \deg 2$; $f^{(m)}(x) \equiv \pi_1^{(m)} x \mod \deg 2$.

б) $u_m \pi_1^{(m)} = \pi_1^{(m)} u$.

Наконец, если F и G — формальные группы Хонды типа u и v соответственно, то существует простое описание их изогений. А именно, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, G) = \{a \in \mathcal{O}' : au = va\}$ и $\mathrm{End}_{\mathcal{O}'}(F) = \mathcal{O}$.

§2. Обобщенный символ Гильберта

Пусть $\widehat{\Omega}$ — пополнение алгебраического замыкания k, $F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}})$ — группа точек. Положим $W_F^n = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}) : [\pi^n]_F(\alpha) = 0\}$.

Предложение 1. а) $W_F^n = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}) : [a]_F(\alpha) = 0$ *для любого* $a \in \mathfrak{M}_k^n\} = \mathrm{Ker}(f^{(n)} : F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}) \to F_n(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}))$.

б) W_F^n — *$\mathcal{O}$-подмодуль $F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}})$ мощности q^{hn}, изоморфный $(\mathcal{O}/\mathfrak{M}_k^n)^h$.*

Доказательство. а) Для любого $a \in \mathfrak{M}_k^n$ имеет место $[a]_F = [b]_F \circ [\pi^n]_F$, где $b \in \mathcal{O}$. Также $f^{(n)} = [\pi_1^{(n)}]_{F,F_n} = [\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n} \circ [\pi^n]_F$, поскольку $u_n(\pi_1^{(n)}/\pi^n) = (\pi_1^{(n)}/\pi^n)u$.

б) Мощность W_F^n равна q^{hn}, поскольку $f^{(n)} \equiv x^{q^{hn}} \mod \pi$. Пусть теперь $W_F^n \simeq \sum \mathcal{O}/\mathfrak{M}_k^{s_i}$ — разложение конечного $\mathcal{O}$-модуля в прямую сумму. Очевидно, что $\pi^n \cdot \alpha = 0$ для любого $\alpha \in W_F^n$, поэтому $s_i \leqslant n$ и $W_F^1 \simeq (\mathcal{O}/\mathfrak{M}_k)^h$. Из сюръективности $f^{(n)}$ следует, что число слагаемых в разложении W_F^n равно h, $\sum_{i=1}^h s_i = hn$, поэтому $s_i = n$. •

Из предложения 1 следует, что W_F^n как $\mathcal{O}$-модуль имеет h образующих. Зафиксируем образующие $\eta_1, \dots \eta_h$; η — одна из них.

Пусть K — конечное расширение k', содержащее W_F^n, M — его максимальный идеал, $\rho_K : K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ — отображение взаимности.

Рассмотрим два способа обобщения понятия символа Гильберта на случай формальных групп Хонды. Первый — стандартный — использует изогению $[\pi^n]_F$, второй — „выделенный" гомоморфизм $f^{(n)}$.

Соответственно

$$(,)_F : K^* \times F(M) \to W_F^n; \quad (\alpha, \beta)_F = \rho_k(\alpha)(\widetilde{\beta}) \underset{F}{-} \widetilde{\beta},$$

где $\widetilde{\beta} \in \Omega : [\pi^n]_F(\widetilde{\beta}) = \beta$, и

$$\{,\}_F : K^* \times F_n(M) \to W_F^n; \quad \{\alpha, \beta\}_F = \rho_k(\alpha)(\overline{\beta}) \underset{F}{-} \overline{\beta},$$

где $\overline{\beta} \in \Omega : f^{(n)}(\overline{\beta}) = \beta$.

Несложно проверяется корректность определения символов и следующие их свойства.

Предложение 2.

а) *Норменное свойство*

$(\alpha, \beta)_F = 0$ *тогда и только тогда, когда α является нормой в расширении $K(\widetilde{\beta})/K$;*

$\{\alpha, \beta\}_F = 0$ *тогда и только тогда, когда α является нормой в расширении $K(\overline{\beta})/K$.*

б) *Пусть $\mathcal{E}$ — гомоморфизм двух формальных групп Хонды $\mathcal{E} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(G, F)$, $\mathcal{E}_n$ — соответствующий гомоморфизм A^nG и A^nF, т.е. $\mathcal{E}_n \circ g^{(n)} = f^{(n)} \circ \mathcal{E}$, где g и f — „выделенные" гомоморфизмы групп G и F соответственно.*

Тогда $\{\alpha, \mathcal{E}_n(\beta)\}_F = \mathcal{E}(\{\alpha, \beta\}_G)$.

в) $(\alpha, \beta)_F = \{\alpha, [\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n}(\beta)\}_F$.

§3. Вспомогательные результаты

Пусть $\sqcap$ — униформизующая поля K, ν — регулярное нормирование. Если e — индекс ветвления K/k, то обозначим

$$e_i = \frac{e}{(q^h - 1)q^{h(i-1)}}, \quad 1 \le i \le n.$$

Лемма 2. *Для* $\lambda = \sum_{i\ge1} c_i x^i$ *выполняется оценка* $\nu(c_i) \ge -ke$, *где* $i = q^{hk} r$, $r \not| q^h$.

Доказательство. Имеем

$$\pi\lambda \equiv a_1 \lambda^{\Delta}(x^q) + \dots + a_h \lambda^{\Delta^h}(x^{q^h}) \mod \pi,$$

откуда по индукции получается требуемая оценка. •

Предложение 3. *λ сходится на M, λ^{-1} сходится на M^{e_1+1} и при этом $\nu(\lambda(\alpha)) = \nu(\alpha)$, $\nu(\lambda^{-1}(\alpha)) = \nu(\alpha)$ для любого $\alpha \in M^{e_1+1}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \sum_{i\ge1} c_i x^i$, $c_1 = 1$, $\lambda^{-1} = \sum_{i\ge1} c'_i x^i$, $c'_1 = 1$. По лемме 2 $\nu(c_i\alpha^i) = i\nu(\alpha) + \nu(c_i) \ge i\nu(\alpha) - e\log_{q^h} i \to \infty$ при $i \to \infty$ для любого $\alpha \in M$. Поэтому λ сходится на M. Теперь выберем $\beta \in M : \nu(\beta) = e_1$. Тогда для любого $i \ge 1$, $i = q^{hk} + r$, $r \not| q^h$ имеем

$$\nu(c_i\beta^{i-1}) = e\frac{i-1}{q^h - 1} + \nu(c_i) \ge e\left(\frac{q^{hk} - 1}{q^h - 1} - k\right) = e(1 + q^h + \dots + q^{(k-1)h} - k)$$
$$\ge 0.$$

Значит, $\beta^{-1}\lambda(\beta x) = \sum_{i\ge1} c_i\beta^{i-1}x^i$ имеет целые коэффициенты и младший коэффициент 1. Поэтому обратный к нему ряд $\beta^{-1}\lambda^{-1}(\beta x) = \sum_{i\ge1} c'_i\beta^{i-1}x^i$ тоже имеет целые коэффициенты, т.е. $\nu(c'_i\beta^{i-1}) \ge 0$. Взяв $\alpha \in M : \nu(\alpha) > e_1$, получаем $\nu(c'_i\alpha^i) = \nu(c'_i\beta^{i-1}) + (i-1)\nu(\alpha\beta^{-1}) + \nu(\alpha) \to \infty$ при $i \to \infty$, т.е. λ^{-1} сходится на M^{e_1+1}. Более того, $\nu(c'_i\alpha^i) > \nu(\alpha)$ при $i > 1$, поэтому $\nu(\lambda^{-1}(\alpha)) = \nu(\alpha)$. Отсюда легко получается, что $\nu(\lambda(\alpha)) = \nu(\alpha)$ для любого $\alpha \in M^{e_1+1}$. •

Лемма 3. а) *Для любого $\alpha \in M$ и $0 \le i \le n$ верны сравнения*

$$f_{i-1}(\alpha) \equiv \left[\begin{array}{ll} \alpha^{q^h} \bmod \sqcap^{q^h\nu(\alpha)+1}, & \text{если } \nu(\alpha) < e_1, \\ \pi_i\alpha \bmod \sqcap^{\nu(\alpha)+e+1}, & \text{если } \nu(\alpha) > e_1, \\ \pi_i\alpha + \alpha^{q^h} \bmod \sqcap^{q^h e_1+1}, & \text{если } \nu(\alpha) = e_1. \end{array}\right.$$

б) *Если $\nu(\alpha) \ge e_n q^i$, то $\nu(f^{(n)}(\alpha)) \ge q^h e_1 + [i/h]e$, $\nu(\pi_1^{(n)}\lambda(\alpha)) \ge q^h e_1 + [i/h]e$, причем если $i \not| h$, то неравенства строгие. В частности, если $\nu(\alpha) \ge e_n$, то $\nu(f^{(n)}(\alpha)) \ge q^h e_1$, $\nu(\pi_1^{(n)}\lambda(\alpha)) \ge q^h e_1$.*

в) $\nu(\eta) = e_n$.

г) $\eta^{q^{hn}} + \pi_n \eta^{q^{h(n-1)}} \equiv 0 \mod \Pi^{q^h e_1+1}$.

д) *Для любого* $\alpha \in M$ *верны сравнения.*

$$[\pi]_{F_n}(\alpha) \equiv \left[\begin{array}{rl} (\pi/\pi_{n+1})\alpha^{q^h} \mod \Pi^{q^h\nu(\alpha)+1}, & \text{если } \nu(\alpha) < e_1, \\ \pi\alpha \mod \Pi^{\nu(\alpha)+e+1}, & \text{если } \nu(\alpha) > e_1, \\ \pi\alpha + (\pi/\pi_{n+1})\alpha^{q^h} \mod \Pi^{q^h e_1+1}, & \text{если } \nu(\alpha) = e_1. \end{array}\right.$$

Доказательство. а) Непосредственно следует из вида f_{i-1}:

$$f_{i-1}(x) = \pi_i x + x^{q^h} + \pi \sum_{i\geq 2} d_i x^i, \quad d_i \in \mathcal{O}'.$$

б) Пусть $i = kh + r$, $k = [i/h]$. Очевидно, имеет смысл рассматривать только случай $k < n-1$. По предыдущему пункту $\nu(f^{(n-k-1)}(\alpha)) \geq e_1 q^r$ (работает первая часть сравнения), $\nu(f^{(n)}(\alpha)) \geq e_1 q^r + (k+1)e \geq q^h e_1 + ke$ (работают вторая и третья части сравнения). Заметим, что если $r \neq 0$, то неравенство строгое. Второе доказываемое неравенство получается из первого с помощью предложения 3.

в) Так как $f_{n-1}(f^{(n-1)}(\eta)) = 0$, то из а) следует, что $\nu(f^{(n-1)}(\eta)) = e_1$. Теперь аналогичным образом заключаем, что $\nu(f^{(n-2)}(\eta)) = e_2$ и так далее до требуемого равенства.

г) Здесь рассуждаем в обратном порядке. Учитывая, что $\nu(\eta) = e_n$, применяем п. а). Сначала он дает сравнение

$$f^{(n-1)}(\eta) \equiv \eta^{q^{h(n-1)}} \mod \Pi^{e_1+1},$$

а затем

$$0 = f^{(n)}(\eta) \equiv \eta^{q^{hn}} + \pi_n \eta^{q^{h(n-1)}} \mod \Pi^{q^h e_1+1}.$$

д) $[\pi]_{F_n} = [\pi/\pi_{n+1}]_{F_{n+1},F_n} \circ f_n$, поэтому

$$[\pi]_{F_n}(x) = \pi x + (\pi/\pi_{n+1}) x^{q^h} + \pi \sum_{i\geq 2} d_i x^i + \sum_{i\geq 2} d_i' x^{iq^h}, \quad d_i, d_i' \in \mathcal{O}'.$$

Как и в п. а), сравнения легко получаются из вида изогении. •

И наконец, сформулируем два утверждения, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Теорема Ямамото. *Пусть φ, ψ — степенные ряды над локальным полем, имеющие радиусы сходимости r_φ и r_ψ соответственно. Если существует такое вещественное r, что $r \leq r_\psi$ и $\|\psi(\alpha)\| \leq r_\varphi$ для всех α таких, что $\|\alpha\| < r$, то для таких α определено $(\varphi\circ\psi)(\alpha)$ и $(\varphi\circ\psi)(\alpha) = \varphi(\psi(\alpha))$.*

Лемма Краснера. *Пусть k — локальное поле и $\alpha, \beta \in \Omega$ — алгебраическому замыканию k. Если для всех α', сопряженных к α над k, выполняется неравенство $\|\alpha' - \alpha\| > \|\beta - \alpha\|$, то $k(\alpha) \subset k(\beta)$.*

§4. Арифметика $\mathcal{O}_h'$

Пусть k_h — неразветвленное расширение k степени h, $\mathcal{O}_h$ — его кольцо целых, $\mathcal{R}_h$ — система мультипликативных представителей. Обозначим через T подполе инерции в расширении K/k, $\mathcal{O}_T$ — его кольцо целых, $\mathcal{R}$ — система мультипликативных представителей.

Лемма 4. *Существуют элементы $\theta_{ij} \in \mathcal{R}_h$, $1 \le i,j \le h$, такие, что $\eta_i \equiv \theta_{ij}\eta_j \mod \Pi^{2e_n}$ для любых i,j. При этом для каждого j элементы $\theta_{1j},\dots,\theta_{hj}$ образуют базис $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{O}_h$. Кроме того, $k_h \subset T$.*

Доказательство. Докажем индукцией по m, что существуют элементы $\theta_{ij} \in \mathcal{R}_h$, $1 \le i,j \le h$, такие, что $\eta_i^{(m)} \equiv \theta_{ij}\eta_j^{(m)} \mod \pi^{2e_m}$ для любых i,j (здесь $\eta_i^{(m)}$, $1 \le m \le n$, обозначают образующие $\mathcal{O}$-модуля W_F^m, удовлетворяющие условию $f_m(\eta_i^{(m+1)}) = \eta_i^{(m)}$, $\eta_i^{(n)} = \eta_i$).

Итак, пусть сначала $m = 1$. Обозначим через $\gamma_1,\dots,\gamma_{q^h-1}$ корни уравнения $\pi_1 + x^{q^h-1} = 0$, через $\xi_1,\dots,\xi_{q^h-1}$ — корни уравнения $f(x)/x = 0$. Заметим, что, с одной стороны,

$$\nu(\xi_1^{q^h-1} + \pi_1) = \nu(\xi_1^{q^h-1} + \pi_1 - f(\xi_1)/\xi_1) > e,$$

а с другой —

$$\nu(\xi_1^{q^h-1} + \pi_1) = \nu(\xi_1 - \gamma_1) + \dots + \nu(\xi_1 - \gamma_{q^h-1}).$$

Поэтому существует такое γ_k, что $\nu(\xi_1 - \gamma_k) > e_1$. Учитывая, что

$$\begin{aligned}\nu(\gamma_i - \gamma_1) + \dots + \nu(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \nu(\gamma_i - \gamma_{i+1}) + \dots + \nu(\gamma_i - \gamma_{q^h-1})\\ = \nu((q^h-1)\gamma_i^{q^h-2}) = (q^h-2)\nu(\gamma_i)\end{aligned}$$

и что

$$\nu(\xi_1) = \nu(\gamma_1) = \dots = \nu(\gamma_i) = \dots = \nu(\gamma_{q^h-1}) = e_1,$$

заключаем, что $\nu(\gamma_i - \gamma_j) = e_1$ для любых $i \ne j$, значит, γ_k с условием $\nu(\xi_1 - \gamma_k) > e_1$ единственно. Аналогично можно получить, что $\nu(\xi_i - \xi_j) = e_1$ при $i \ne j$. Из этого по лемме Краснера следует, что $k'(\xi_1) = k'(\gamma_k)$, поэтому на самом деле $\xi_1 \equiv \gamma_k \mod \Pi^{2e_1}$.

Итак, будем считать, что корни занумерованы так, что $\eta_i^{(1)} \equiv \gamma_i \mod \Pi^{2e_1}$, $1 \le i \le h$. Если теперь определять θ_{ij} из уравнения $\gamma_i = \theta_{ij}\gamma_j$, $1 \le i,j \le h$, то θ_{ij} будут корнями (q^h-1)-й степени из единицы, т.е. $\theta_{ij} \in \mathcal{R}_h$. Ясно, что при этом $\eta_i^{(1)} \equiv \theta_{ij}\eta_j^{(1)} \mod \Pi^{2e_1}$, и база индукции доказана. Заметим, что попутно мы показали, что $k_h \subset T$. Если теперь $\eta_i^{(m)} \equiv \theta_{ij}\eta_j^{(m)} \mod \pi^{2e_m}$, то из равенств $f_m(\eta_i^{(m+1)}) = \eta_i^{(m)}$, $f_m(\eta_j^{(m+1)}) = \eta_j^{(m)}$, $\theta_{ij}^{q^h} = \theta_{ij}$ следует индукционный переход.

Единственное, что осталось проверить, так это то, что $\theta_{1j},\dots,\theta_{hj}$ для любого $1\le j\le h$ образуют базис $\mathcal{O}_h$.

Докажем предварительно, что для любых $\theta\in\mathcal{R}_h$, $1\le j\le h$, существует $\xi\in W^1_F$, для которого $\xi\equiv\theta\eta^{(1)}_j \mod \Pi^{2e_1}$. Пусть $\eta^{(1)}_j\equiv\gamma_1 \mod \Pi^{2e_1}$. Тогда $\theta\gamma_1=\gamma_i$ для некоторого i, и теперь надо взять тот ξ, для которого $\xi\equiv\gamma_i \mod \Pi^{2e_1}$.

Переходим непосредственно к доказательству базисности $\theta_{1j},\dots,\theta_{hj}$ и покажем, что для любого $\theta\in\mathcal{R}_h$ найдутся $d_1,\dots,d_h\in\mathcal{O}$ такие, что $\theta\equiv d_1\theta_{1j}+\dots+d_h\theta_{hj} \mod \pi$. Возьмем $\xi\in W^1_F$, для которого $\xi\equiv\theta\eta^{(1)}_j \mod \Pi^{2e_1}$. Поскольку $\eta^{(1)}_1,\dots,\eta^{(1)}_h$ образуют базис W^1_F, существуют $d_1,\dots,d_h\in\mathcal{O}$ такие, что $[d_1]_F\eta^{(1)}_1\underset{F}{+}\dots\underset{F}{+}[d_h]_F\eta^{(1)}_h=\xi$. Учитывая, что $\eta^{(1)}_i\equiv\theta_{ij}\eta^{(1)}_j \mod \Pi^{2e_1}$, получаем сравнение

$$(d_1\theta_{1j}+\dots+d_h\theta_{hj})\eta^{(1)}_j\equiv\theta\eta^{(1)}_j \mod \Pi^{2e_1},$$

откуда $d_1\theta_{1j}+\dots+d_h\theta_{hj}\equiv\theta \mod \Pi^{e_1}$. Так как обе части этого сравнения лежат в неразветвленном расширении $\mathcal{O}$, заключаем, что оно выполняется по модулю π, что и требовалось доказать. •

Лемма 5. *Пусть $\chi_1,\dots,\chi_h$ образуют базис $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{O}_h$. Тогда для любого $b\in\mathcal{O}_T$ существуют $b^{(1)},\dots,b^{(h)}\in\mathcal{O}_T$, для которых*

$$b=\widehat{b^{(1)}}\chi_1+\widehat{b^{(2)}}\chi_2+\dots+\widehat{b^{(h)}}\chi_h,$$

где $\widehat{b}=b+b^{\Delta}+\dots+b^{\Delta^{h-1}}$.

Доказательство. Найдутся такие $c_1,\dots,c_h\in\mathcal{O}$, что $\mathrm{Tr}_{T/k_h}b=c_1\chi_1+\dots+c_h\chi_h$. Пусть выбраны $d_i\in\mathcal{O}_h$, $1\le i\le h$, так, что $\mathrm{Tr}_{T/k}d_i=c_i$ (в неразветвленном расширении оператор следа сюръективен). Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{T/k_h}b&=\left(\sum_{i=0}^{h-1}(\mathrm{Tr}_{T/k_h}d_1)^{\Delta^i}\right)\chi_1+\dots+\left(\sum_{i=0}^{h-1}(\mathrm{Tr}_{T/k_h}d_h)^{\Delta^i}\right)\chi_h\\&=\mathrm{Tr}_{T/k_h}\left(\sum_{i=0}^{h-1}d_1^{\Delta^i}\chi_1+\dots+\sum_{i=0}^{h-1}d_h^{\Delta^i}\chi_h\right).\end{aligned}$$

Значит, по теореме Гильберта 90 существует такое $r\in\mathcal{O}_T$, что

$$b-\left(\sum_{i=0}^{h-1}d_1^{\Delta^i}\chi_1+\dots+\sum_{i=0}^{h-1}d_h^{\Delta^i}\chi_h\right)=r^{\Delta^h}-r.$$

Пусть $w_1,\dots,w_n\in\mathcal{O}$ таковы, что $w_1\chi_1+\dots+w_h\chi_h=1$. Определим $b^{(i)}=d_i+w_i(r^{\Delta}-r)$, $1\le i\le h$. Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{b^{(1)}}\chi_1+\dots+\widehat{b^{(h)}}\chi_h&=(\widehat{d}_1\chi_1+w_1(r^{\Delta^h}-r)\chi_1)+\dots+(\widehat{d}_h\chi_h+w_h(r^{\Delta^h}-r)\chi_h)\\&=b.\end{aligned}$$

•

§5. Отображение Артина–Хассе–Шафаревича

Через tr в дальнейшем будем обозначать $\mathrm{Tr}_{T/k}$. Пусть $\mathcal{O}_T[[x]]_0$ — аддитивная группа формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathcal{O}_T$ без свободного члена со структурой $\mathcal{O}$-модуля; $\mathcal{H}_F$ — $\mathcal{O}$-модуль, который как множество совпадает с $\mathcal{O}_T[[x]]_0$, а операции задаются формальной группой F:

$$\varphi \underset{F}{+} \psi = F(\varphi, \psi), \qquad a \cdot \varphi = [a]_F \circ \varphi.$$

Пусть F_a — формальная группа Хонды над $\mathcal{O}'$ типа $u = \pi - a_1 \blacktriangle - \dots - a_h \blacktriangle^h$, задаваемая логарифмом

$$\lambda_a = (u^{-1}\pi)(x) = x + \alpha_1 x^q + \alpha_2 x^{q^2} + \dots, \quad \alpha_i \in k'.$$

Пусть F_b — формальная группа Хонды над $\mathcal{O}'$ типа $u_n = \pi - b_1 \blacktriangle - \dots - b_h \blacktriangle^h$, задаваемая логарифмом

$$\lambda_b = (u_n^{-1}\pi)(x) = x + \beta_1 x^q + \beta_2 x^{q^2} + \dots, \quad \beta_i \in k'.$$

Поскольку F_a и F, F_b и F_n имеют одинаковые типы, они изоморфны. Теперь на множестве степенных рядов с коэффициентами из $\mathcal{O}_T$ без свободного члена определим операторы

$$\begin{aligned}
E(\varphi) &= \lambda^{-1} \circ (1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots)\varphi, \\
l(\psi) &= \Big(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big)(\lambda \circ \psi), \\
E_n(\varphi) &= \lambda_n^{-1} \circ (1 + \beta_1 \blacktriangle + \beta_2 \blacktriangle^2 + \dots)\varphi, \\
l_n(\psi) &= \Big(1 - \frac{b_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{b_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big)(\lambda_n \circ \psi).
\end{aligned}$$

Предложение 4. *E и l осуществляют взаимно-обратные изоморфизмы между $\mathcal{O}_T[[x]]_0$ и $\mathcal{H}_F$, E_n и l_n — между $\mathcal{O}_T[[x]]_0$ и $\mathcal{H}_{F_n}$. Кроме того, если $\varphi \in \mathcal{O}_T[[x]]$ имеет порядок r, то $E(\varphi) \equiv \varphi \mod \deg r + 1$, $l(\varphi) \equiv \varphi \mod \deg r + 1$.*

Доказательство. Гомоморфные свойства E и l очевидны. Если $\theta \in \mathcal{R}$, то $\theta^\Delta = \theta^q$, поэтому $E(\theta x^m) = \lambda^{-1} \circ \lambda_a(\theta x^m)$ — имеет целые коэффициенты ввиду изоморфности F и F_a.

Далее, любое $d \in \mathcal{O}_T$ можно представить в виде $d = \sum_{i \ge 0} \theta_i \pi^i$, $\theta_i \in \mathcal{R}$, поэтому из гомоморфности E следует, что $E(dx^m)$ имеет целые коэффициенты. И наконец, общий факт целочисленности $E(\varphi)$ при $\varphi \in \mathcal{O}_T[[x]]_0$ следует из аддитивности E.

Далее,

$$E(dx^m) = \sum\nolimits_{(F)} E(\theta_i \pi^i x^m) = \sum\nolimits_{(F)} [\pi^i]_F \circ \lambda^{-1} \circ \lambda_a(\theta_i x^m),$$

откуда вытекает, что $E(\varphi) \equiv \varphi \mod \deg r + 1$, если порядок φ равен r.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для l, поэтому осталось только проверить, что E и l взаимно-обратны.

$$\begin{aligned} l(E(\varphi)) &= \left(1 - \frac{a_1}{\pi}\blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi}\blacktriangle^h\right)(1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots)\varphi \\ &= (u\pi^{-1})(u^{-1}\pi)\varphi = \varphi. \quad \bullet \end{aligned}$$

§6. Примарные элементы

Пусть $\eta = \varepsilon_0\pi^{e_n} + \varepsilon_1\pi^{e_n+1} + \dots$ — некоторое разложение η в ряд по степеням $\sqcap$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_T$ (согласно лемме 3, б) $\nu(\eta) = e_n$). Определим следующие ряды из $\mathcal{O}_T[[x]]_0$:

$$z(x) = \varepsilon_0 x^{e_n} + \varepsilon_1 x^{e_n+1} + \dots, \quad s_m = f^{(m)} \circ z, \quad 1 \le m \le n.$$

Зафиксируем элемент $b \in \mathcal{O}_T$ и определим $A \in \mathcal{O}_{\widehat{k}_{ur}}$ из условия $A^\Delta - A = b$. Напомним, что $\widehat{b} = b + b^\Delta + \dots + b^{\Delta^{h-1}}$.

Лемма 6. *Положим* $H(b) = f^{(n)} \circ E(A^{\Delta^h} l(z))|_{x=\sqcap}$. *Тогда*

$$H(b) \equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1 + 1}.$$

Доказательство. Ясно, что $H(b) = f^{(n)}(E(A^{\Delta^h} l(z))|_{x=\sqcap})$. Порядок z равен e_n, поэтому из предложения 4 следует, что

$$E(A^{\Delta^h} l(z))|_{x=\sqcap} \equiv A^{\Delta^h} z(\sqcap) = A^{\Delta^h}\eta \mod \sqcap^{e_n+1},$$

Теперь применяем лемму 3, а). Сначала получаем, что

$$f^{(n-1)}(E(A^{\Delta^h} l(z))|_{x=\sqcap}) \equiv (A^{\Delta^h}\eta)^{q^{h(n-1)}} \mod \sqcap^{e_1+1},$$

а затем — что

$$f^{(n)}(E(A^{\Delta^h} l(z))|_{x=\sqcap}) \equiv (A^{\Delta^h}\eta)^{q^{hn}} + \pi_n (A^{\Delta^h}\eta)^{q^{h(n-1)}} \mod \sqcap^{q^h e_1 + 1}.$$

Но $(A^{\Delta^h})^{q^{hn}} = (A + \widehat{b})^{q^{hn}} \equiv (A^{\Delta^h})^{q^{h(n-1)}} + \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \mod \pi$, поэтому по лемме 3, г)

$$\begin{aligned} H(b) &\equiv (A^{\Delta^h}\eta)^{q^{hn}} + \pi_n (A^{\Delta^h}\eta)^{q^{h(n-1)}} \\ &\equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} + (A^{\Delta^h})^{q^{h(n-1)}} (\eta^{q^{hn}} + \pi_n \eta^{q^{h(n-1)}}) \\ &\equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1 + 1}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Лемма 7. *Определим оператор* $\xi(A) = J_0 + J_1 \blacktriangle + J_2 \blacktriangle^2 + \dots, J_i \in \widehat{k}_{ur}$ *из равенства*

$$\xi(A)\Big(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big) - \Big(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big) A$$
$$= A^{\Delta^h} - A.$$

Тогда $J_i \in T$ *при* $i \geq 1$ *и* $J_0 = A^{\Delta^h}$.

Доказательство. Очевидно, что $J_0 = A^{\Delta^h}$. Рассмотрим оператор $\xi(A) - A^{\Delta^h} = J_1 \blacktriangle + J_2 \blacktriangle^2 + \dots$. Тогда

$$(\xi(A) - A^{\Delta^h})\Big(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big)$$
$$= A^{\Delta^h} - A + \Big(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big) A - A^{\Delta^h}\Big(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\Big)$$
$$= \frac{a_1}{\pi}(A^{\Delta^h} - A^{\Delta}) \blacktriangle + \dots + \frac{a_{h-1}}{\pi}(A^{\Delta^h} - A^{\Delta^{h-1}}) \blacktriangle^{h-1}$$
$$= \frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} + \dots + b^{\Delta}) \blacktriangle + \dots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}.$$

Отсюда следует, что $\xi(A) - A^{\Delta^h}$ имеет коэффициенты из T. •

Лемма 8. *Элемент* $I(b) = f^{(n)} \circ E(\xi(A) l(z))|_{x=\sqcap}$ *корректно определен и при этом* $I(b) \equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1 + 1}$.

Доказательство. Согласно формуле, доказанной в лемме 7,

$$(\xi(A) - A^{\Delta^h}) l(z) = \Big(\frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} + \dots + b^{\Delta}) \blacktriangle + \dots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}\Big)(\lambda \circ z).$$

Следовательно,

$$f^{(n)} \circ E(\xi(A) l(z))$$
$$= f^{(n)} \circ E(A^{\Delta^h} l(z))$$
$$\underset{F_n}{+} f^{(n)} \circ E\Big(\Big(\frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} + \dots + b^{\Delta}) \blacktriangle + \dots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}\Big)(\lambda \circ z)\Big).$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое

$$f^{(n)} \circ E\Big(\Big(\frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} + \dots + b^{\Delta}) \blacktriangle + \dots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}\Big)(\lambda \circ z)\Big)$$
$$= \lambda_n^{-1}\Big(\pi_1^{(n)}(1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots)$$
$$\times \Big(\frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} + \dots + b^{\Delta}) \blacktriangle + \dots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}\Big)(\lambda \circ z)\Big)$$
$$= \lambda_n^{-1}(\pi_1^{(n)} \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i \blacktriangle^i (\lambda \circ z)),$$

причем $\nu(\varepsilon_{i+1}) \geq \nu(\alpha_i) \geq -[i/h]e$. Возможно ли подставить в этот ряд значение $x = \sqcap$, и если возможно, то что получится? Воспользуемся теоремой Ямамото. Для $\alpha \in M$ имеем $\nu(\blacktriangle^i z(\alpha)) \geq e_n q^i$, поэтому по лемме 3, б) $\nu(\pi_1^{(n)} \lambda^{\Delta^i}(\blacktriangle^i z(\alpha))) \geq q^h e_1 + [i/h]e + \mu(i)$, где $\mu(i) > 0$ при $i \not\vdots h$. Кроме того, $\nu(\pi_1^{(n)} \lambda^{\Delta^i}(\blacktriangle^i z(\alpha))) \geq e_n q^i + en$ при $i > h(n-1)$. Значит, ряд $\pi_1^{(n)} \sum_{i\geq 1} \varepsilon_1 \blacktriangle^i(\lambda \circ z)$ сходится при $x = \alpha$ и, так как $[i/h]e + \mu(i) - [(i-1)/h]e > 0$ для любого i, имеем

$$\nu\Big(\pi_1^{(n)} \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i \blacktriangle^i(\lambda \circ z)|_{x=\alpha}\Big) > q^h e_1.$$

Таким образом, согласно предложению 3, ряд $\lambda_n^{-1}(\pi_1^{(n)} \sum_{i\geq 0} \varepsilon_i \blacktriangle^i(\lambda \circ z))$ определен для любого $\alpha \in M$, в частности для $\alpha = \sqcap$, и при этом

$$\begin{aligned} f^{(n)} \circ E\Big(\Big(\frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} &+ \cdots + b^{\Delta})\blacktriangle \\ &+ \cdots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}\Big)(\lambda \circ z)\Big)\Big|_{x=\sqcap} \equiv 0 \mod \sqcap^{q^h e_1 + 1}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} I(b) &= f^{(n)} \circ E(\xi(A) l(z))|_{x=\sqcap} \\ &= f^{(n)} \circ E(A^{\Delta^h} l(z))|_{x=\sqcap} \\ &\underset{F_n}{+} f^{(n)} \circ E\Big(\Big(\frac{a_1}{\pi}(b^{\Delta^{h-1}} + \cdots + b^{\Delta})\blacktriangle + \cdots + \frac{a_{h-1}}{\pi} b^{\Delta^{h-1}} \blacktriangle^{h-1}\Big)(\lambda \circ z)\Big)\Big|_{x=\sqcap}. \end{aligned}$$

При этом первое слагаемое есть просто элемент $H(b)$, определенный в лемме 6, про который известно, что $H(b) \equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1+1}$, а второе слагаемое сравнимо с 0 по модулю $\sqcap^{q^h e_1+1}$. Значит, $I(b) \equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1+1}$.

Лемма 9. *Элемент $I(b) \in M$ и $\{\sqcap, I(b)\}_F = [\operatorname{tr} b]_F(\eta)$. Кроме того, разные $I(b)$ (получающиеся при различных z для данного η) отличаются в $F_n(M)$ на элемент вида $f^{(n)}(\gamma)$, $\gamma \in M$.*

Доказательство. Пусть D — автоморфизм Фробениуса $\widehat{k}_{ur}/T$. Тогда

$$\begin{aligned} A^{\Delta^h D} - A^{\Delta^h} &= (A^{\Delta^{h+1}} - A^{\Delta^h}) + (A^{\Delta^{h+2}} - A^{\Delta^{h+1}}) + \cdots + (A^{\Delta^h D} - A^{\Delta^{h-1} D}) \\ &= b^{\Delta^h} + b^{\Delta^{h+1}} + \cdots + b^{\Delta^{h-1} D} = \operatorname{tr} b. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} E(\xi(A) l(z))^D \underset{F}{-} E(\xi(A) l(z)) &= E(A^{\Delta^h D} l(z)) \underset{F}{-} E(A^{\Delta^h} l(z)) \\ &= E((A^{\Delta^h D} - A^{\Delta^h}) l(z)) = E((\operatorname{tr} b) l(z)) = [\operatorname{tr} b]_F(z). \end{aligned}$$

Значит,

$$f^{(n)} \circ E(\xi(A)l(z))^D \underset{F_n}{-} f^{(n)} \circ E(\xi(A)l(z)) = [\mathrm{tr}\, b]_{F_n} \circ f^{(n)}(z),$$

откуда следует, что автоморфизм Фробениуса $\widehat{K}_{\mathrm{ur}}/K$ оставляет на месте $f^{(n)} \circ E(\xi(A)l(z))|_{x=\sqcap}$, т.е. $I(b) \in M$. Кроме того, $\rho_K(\sqcap)|_{k_{\mathrm{ur}}} = D$, $\rho_K(\sqcap)|_K = \mathrm{id}_K$, поэтому по определению обобщенного символа Гильберта $\{\sqcap, I(b)\}_F = [\mathrm{tr}\, b]_F(\eta)$.

Теперь пусть $z_1(\sqcap) = z_2(\sqcap) = \eta$ и пусть $I_1(b)$ и $I_2(b)$ построены с помощью z_1 и z_2 соответственно. Так же, как и выше, убеждаемся, что $\gamma = E(\xi(A)l(z_1 \underset{F}{-} z_2))|_{x=\sqcap} \in M$ и $I_1(b) \underset{F_n}{-} I_2(b) = f^{(n)}(\gamma)$. •

Предложение 5. *Элемент $\omega(b) = E_n(\widehat{b}\lambda_n \circ s_n)|_{x=\sqcap}$ корректно определен, принадлежит M, $\omega(b) \equiv \widehat{b}^{\Delta^{hn}} \eta^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1 + 1}$ и $\{\sqcap, \omega(b)\}_F = [\mathrm{tr}\, b]_F(\eta)$. Кроме того, разные $\omega(b)$ (получающиеся при различных z для данного η) отличаются в $F_n(M)$ на элемент вида $f^{(n)}(\gamma)$, $\gamma \in M$.*

Доказательство. С учетом лемм 8 и 9 достаточно показать, что $\omega(b) = I(b)$. Из определения $\xi(A)$ следует, что $\xi(A)l(z) - (u\pi^{-1})A\lambda \circ z = (A^{\Delta^h} - A)(\lambda \circ z) = \widehat{b}\lambda \circ z$, откуда

$$E(\xi(A)l(z)) = \lambda^{-1}(A\lambda \circ z) \underset{F}{+} E(\widehat{b}\lambda \circ z).$$

Из этой формулы получаем другую формулу:

$$f^{(n)} \circ E(\xi(A)l(z)) = \lambda_n^{-1}(\pi_1^{(n)} A\lambda \circ z) \underset{F_n}{+} f^{(n)} \circ E(\widehat{b}\lambda \circ z).$$

Заметим, что $f^{(n)} \circ E(\widehat{b}\lambda \circ z) = E_n(\widehat{b}\lambda_n \circ s_n)$. Действительно, так как $\pi_1^{(n)} u = u_n \pi_1^{(n)}$, то

$$\begin{aligned}\pi_1^{(n)}(1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots) &= \pi_1^{(n)}(u^{-1}\pi) = (u_n^{-1}\pi)\pi_1^{(n)} \\ &= (1 + \beta_1 \blacktriangle + \beta_2 \blacktriangle^2 + \dots)\pi_1^{(n)}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f^{(n)} \circ E(\widehat{b}\lambda \circ z) &= f^{(n)} \circ \lambda^{-1} \circ (1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots)(\widehat{b}\lambda \circ z) \\ &= \lambda_n^{-1} \circ (\pi_1^{(n)}(1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots)(\widehat{b}\lambda \circ z)) \\ &= \lambda_n^{-1} \circ (1 + \beta_1 \blacktriangle + \beta_2 \blacktriangle^2 + \dots)(\widehat{b}\pi_1^{(n)}\lambda \circ z) \\ &= E_n(\widehat{b}\lambda_n \circ s_n). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства равенства $\omega(b)$ и $I(b)$ нужно показать, что $\lambda_n^{-1}(\pi_1^{(n)} A\lambda(z))|_{x=\pi} = 0$. Воспользуемся теоремой Ямамото. Для любого $\alpha \in M$ $\nu(z(\alpha)) \geq e_n$, поэтому по лемме 3, б) $\nu(\pi_1^{(n)}\lambda(z(\alpha))) \geq q^h e_1$. Значит, согласно предложению 3, ряд $f^{(n)} \circ \lambda^{-1}(A\lambda(z)) = \lambda_n^{-1}(\pi_1^{(n)} A\lambda(z))$ определен для любого $\alpha \in M$, в частности для $x = \sqcap$, и при этом его значение равно 0 ($\lambda(z)|_{x=\sqcap} = \lambda(\eta) = 0$ — здесь опять надо применить теорему Ямамото). •

§7. Арифметика группы точек

Предложение 6. *Пусть для каждого натурального $j < q^h e_1$, не делящегося на q^h, а также для $j = q^h e_1$ и для каждого $\Theta \in \mathcal{R}$ выбран элемент $\varepsilon_j(\Theta) \in F_n(M)$ такой, что $\varepsilon_j(\Theta) \equiv \Theta \Pi^j \mod \Pi^{j+1}$. Тогда любой $\tau \in F_n(M)$ можно представить в виде*

$$\tau = \sum_{j,r}{}_{(F_n)} [\pi^r]_{F_n}(\varepsilon_j(\Theta_{j,r})).$$

Доказательство. Несложной индукцией можно показать, что всякий элемент $\tau \in F_n(M)$ можно представить в виде

$$\tau = \sum_{j\geq 1}{}_{(F_n)} \varepsilon_j(\Theta_j),$$

где $\{\varepsilon_j(\Theta) : j \geq 1, \Theta \in \mathcal{R}\}$ — заранее выбранная система элементов $F_n(M)$, удовлетворяющих сравнению $\varepsilon_j(\Theta) \equiv \Theta\, \Pi^j \mod \Pi^{j+1}$. Теперь заметим, что из леммы 3, д) следует, что $[\pi]_{F_n}\varepsilon_{j-e}(\gamma^{-1}\Theta_j) \equiv \Theta_j \Pi^j \mod \Pi^{j+1}$ при $j > q^h e_1$ (здесь $\gamma \in \mathcal{R}$ — первый коэффициент в разложении π по Π). Из этой же леммы следует, что $[\pi]_{F_n}\varepsilon_t((\gamma\Theta_j)^{1/q^h}) \equiv \Theta_j\, \Pi^j \mod \Pi^{j+1}$ при $j = q^h t < q^h e_1$ (здесь $\gamma \in \mathcal{R}$ — представитель элемента π_{n+1}/π). Поэтому элементы $\varepsilon_j(\Theta_j)$ при $j > q^h e_1$ или при $j < q^h e_1$, $j \,\vdots\, q^h$ в первоначальном разложении τ можно соответствующим образом заменить. Этот процесс приведет нас к требуемому разложению. •

Пусть G — формальная группа Хонды, изоморфная F $(W_G^n \subset K)$, $g : G \to \mathcal{A}G$ — выделенная изогения, соответствующая G в силу теоремы 1.

Лемма 10. *Если $\alpha \in M$ таково, что $\nu(\alpha) < q^h e_1$ и $(\nu(\alpha), p) = 1$, то многочлен, получающийся умножением $g^{(n)} - \alpha$ на обратимый по умножению ряд (согласно подготовительной лемме Вейерштрасса), неприводим над K.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_{q^{hn}} \in \Omega$ — корни искомого многочлена. Так как $\nu(\alpha) < q^h e_1$, то по лемме 3, а) $\nu(\gamma_i) = \nu(\alpha)/q^{hn}$. Приводимость многочлена над K означает, по крайней мере, что произведение некоторого количества (меньшего q^{hn}) корней γ_i имеет целое нормирование. Поскольку $(\nu(\alpha), p) = 1$, это невозможно. •

Предложение 7. *Пусть G — формальная группа Хонды типа u такая, что выделенная изогения $g_{n-1} : \mathcal{A}^{n-1}G \to \mathcal{A}^n G$ обладает следующим свойством: все коэффициенты g_{n-1} при степенях, больших q^h, делятся на π^2. Тогда $\{\alpha, \alpha\}_G = 0$ для любого $\alpha \in M$ такого, что $\nu(\alpha) < q^h e_1$ и $(\nu(\alpha), p) = 1$.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{g^{(n)}}$ многочлен, образованный одночленами ряда $g^{(n)}$ до степени q^{hn} включительно (т.е. $\deg \overline{g^{(n)}} = q^{hn}$, $\overline{g^{(n)}} \equiv g^{(n)}$

$\mathrm{mod}\ \deg q^{hn}+1$). Покажем, что $\overline{g^{(n)}} \equiv g^{(n)} \mod \pi^2$. Поскольку $g^{(n)} = g_{n-1} \circ g^{(n-1)}$ и

$$g_{n-1} \equiv \pi(\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots + \varepsilon_{q^h-1} x^{q^h-1}) + x^{q^h} \mod \pi^2, \quad \varepsilon_i \in \mathcal{O}',$$

то

$$\begin{aligned} g^{(n)} &\equiv \pi(\varepsilon_1 g^{(n-1)} + \varepsilon_2 (g^{(n-1)})^2 + \cdots + \varepsilon_{q^h-1}(g^{(n-1)})^{q^h-1}) + (g^{(n-1)})^{q^h} \\ &\equiv \pi(\varepsilon_1 x^{q^{h(n-1)}} + \varepsilon_2 x^{2q^{h(n-1)}} + \cdots + \varepsilon_{q^h-1} x^{(q^h-1)q^{h(n-1)}}) + x^{q^{hn}} \mod \pi^2, \end{aligned}$$

то есть все коэффициенты $g^{(n)}$ при степенях, больших q^{hn}, делятся на π^2.

В силу норменного свойства символа Гильберта, предложение 2, а), равенство $\{\alpha, \alpha\}_G = 0$ эквивалентно тому, что α является нормой в расширении $K(\gamma_1)/K$, где $\gamma_1 \in \Omega : g^{(n)}(\gamma_1) = 0$. Рассмотрим расширение $K(\delta_1)/K$, где $\delta_1 \in \Omega : \overline{g^{(n)}}(\delta_1) = \alpha$. Если удастся показать, что $K(\delta_1) = K(\gamma_1)$ и $-\alpha + \overline{g^{(n)}}$ — неприводимый над K многочлен, то предложение будет доказано. Действительно, поскольку $-\alpha + \overline{g^{(n)}}$ является унитарным неприводимым многочленом, то $\alpha = N_{K(\delta_1)/K}(\delta_1) = N_{K(\gamma_1)/K}(\delta_1)$, что и требуется доказать.

Пусть $\gamma_1, \dots \gamma_{q^{hn}} \in \Omega$ — корни уравнения $g^{(n)}(x) = \alpha$. Предположим, что $\gamma_1 \notin K(\delta_1)$. Поскольку $\gamma_1 \underset{G}{-} \gamma_i \in W_G^n \subset K$ для всех i, то $\gamma_i \notin K(\delta_1)$, $1 \le i \le q^{hn}$. Кроме того, для каждого γ_i найдется $\gamma_{i'}$ такое, что $\gamma_i \underset{G}{-} \gamma_{i'}$ — первообразный корень из W_G^n, значит, $\nu(\gamma_i - \gamma_{i'}) = \nu(\gamma_i \underset{G}{-} \gamma_{i'}) = e_n$ (лемма 3, в). Так как $\gamma_{i'}, \gamma_i \notin K(\delta_1)$, по лемме 10 существует такой автоморфизм $K(\delta_1, \gamma_1)$, который оставляет $K(\delta_1)$ на месте, а γ_i переводит в $\gamma_{i'}$. Из этого следует, что $\nu(\delta_1 - \gamma_i) = \nu(\delta_1 - \gamma_{i'})$, значит, $e_n = \nu(\gamma_i - \gamma_{i'}) \ge \nu(\delta_1 - \gamma_i)$.

Рассмотрим $g^{(n)}(\delta_1) - \overline{g^{(n)}}(\delta_1) = g^{(n)}(\delta_1) - \alpha = (\delta_1 - \gamma_1)(\delta_1 - \gamma_2)\dots(\delta_1 - \gamma_{q^{hn}})\tau(\delta_1)$, где $\tau \in \mathcal{O}_K[[x]]$ — обратимый по умножению ряд. Поскольку $\nu(\tau(\delta_1)) = 0$, а $g^{(n)}(\delta_1) - \overline{g^{(n)}}(\delta_1) \equiv 0 \mod \pi^2$, то для некоторого γ_i выполняется $\nu(\delta_1 - \gamma_i) \ge 2e/q^{hn} > e_n$. Полученное противоречие показывает, что $\gamma_1 \in K(\delta_1)$. Наконец, по лемме 10 $q^{hn} = [K(\gamma_1) : K] \le [K(\delta_1) : K] \le \deg(-\alpha + \overline{g^{(n)}}) = q^{hn}$, т.е. $K(\gamma_1) = K(\delta_1)$ и $-\alpha + \overline{g^{(n)}}$ — неприводим над K. •

Пусть G_0 и $G_{\rho,a}$, $a \in \mathcal{O}_T$, $1 \le \rho < fh$ $(q = p^f)$ — формальные группы Хонды типа u_{n-1}, имеющие в качестве выделенных изогений многочлены $g_0(x) = \pi_{n-1}x + x^{q^h}$ и $g_{\rho,a}(x) = \pi_{n-1}x + \pi_{n-1}ax^{p^\rho} + x^{q^h}$ соответственно (теорема 2). Обозначим через $\mathcal{E}_n^0$ и $\mathcal{E}_n^{\rho,a}$ степенные ряды, задающие изоморфизмы $\mathcal{A}G_0$ и $\mathcal{A}G_{\rho,a}$ в F_n соответственно.

Пусть $\omega_i(b)$, $1 \le i \le h$ — примарные элементы, построенные с помощью η_i, $1 \le i \le h$.

Теорема 3. *Наборы элементов*

$$\{\omega_i(b) : b \in \mathcal{O}_T, 1 \le i \le h\};$$
$$\{\mathcal{E}_n^0(\theta\Pi^i) : \theta \in \mathcal{R}, 1 \le i < q^h e_1, (i,p) = 1\};$$
$$\{\mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\Pi^i) : \theta \in \mathcal{R}, a \in \mathcal{O}_T - \textit{обратим}, 1 \le \rho < fh, 1 \le i < q^h e_1, (i,p) = 1\}$$

составляют в совокупности систему образующих $\mathcal{O}$-модуля $F_n(M)$. При этом

$$\{\sqcap, \mathcal{E}_n^0(\theta\sqcap^i)\}_F = \{\sqcap, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_F = 0,$$
$$\{\sqcap, \omega_i(b)\}_F = [\operatorname{tr} b]_F(\eta_i).$$

Доказательство. Учитывая „каноничность" рассматриваемого набора относительно замены формальной группы (т.е. если $\varphi : F_n \to G_n$ — изоморфизм формальных групп, то F_n-базисному элементу χ соответствует G_n-базисный элемент $\varphi(\chi)$), а также предложение 2, б), достаточно проверить утверждение для какой-то одной формальной группы типа u.

Будем считать, что $F = \mathcal{A}^{-n+1}G_0$. Пусть λ_0 — логарифм G_0, μ — логарифм $G_{\rho,a}$. Тогда $(B_{n-1}\lambda_0^{\Delta^h}) \circ g_0 = \pi_{n-1}\lambda_0$, $(B_{n-1}\mu^{\Delta^h}) \circ g_{\rho,a} = \pi_{n-1}\mu$ (теорема 1). Значит,

$$(B_{n-1}\lambda_0^{\Delta^h})(\pi_{n-1}x) \equiv \pi_{n-1}\lambda_0(x) \mod \deg p^\rho + 1,$$
$$(B_{n-1}\mu^{\Delta^h})(\pi_{n-1}x) + \pi_{n-1}ax^{p^\rho} \equiv \pi_{n-1}\mu(x) \mod \deg p^\rho + 1.$$

Отсюда следует, что $\mu \equiv \lambda_0 + Vx^{p^\rho} \mod \deg p^\rho + 1$, V определяется из уравнения $V - V^{\Delta^h}\pi_{n-1}^{p^\rho-1} = a$. Рассмотрим теперь $\lambda_1 = B_{n-1}\lambda_0^{\Delta^h}$, $\mu_1 = B_{n-1}\mu^{\Delta^h}$ — логарифмы $\mathcal{A}G_0$ и $\mathcal{A}G_{\rho,a}$ соответственно. Для них выполняется сравнение $\mu_1 \equiv \lambda_1 + V^{\Delta^h}x^{p^\rho} \mod \deg p^\rho + 1$. Поскольку $F = \mathcal{A}^{-n+1}G_0$, имеем $\mathcal{E}_n^{\rho,a} = \lambda_1^{-1} \circ \mu_1 \equiv x + V^{\Delta^h}x^{p^\rho} \mod \deg p^{\rho+1}$. Таким образом, $\mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i) \underset{G_0}{-} \theta\sqcap^i \equiv V^{\Delta^h}\theta^{p^\rho}\sqcap^{ip^\rho} \mod \sqcap^{ip^\rho+1}$, и в условии предложения 6 эти элементы могут играть роль $\varepsilon_j(\Theta)$ для $j < q^h e_1$, $j \nmid q^h$. Действительно, так как V определен однозначно и обратим, в качестве θ нужно взять мультипликативный представитель $(\Theta/V^{\Delta^h})^{1/p^\rho}$. Для покрытия же потребности в $\varepsilon_j(\Theta)$ для $j = q^h e_1$ обратимся к элементам $\omega_i(b)$. Покажем, что для всякого $\Theta \in \mathcal{R}$ существуют такие $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(h)} \in \mathcal{O}_T$, что

$$\Theta\sqcap^{q^h e_1} \equiv \omega_1(b^{(1)}) \underset{G_0}{+} \omega_2(b^{(2)}) \underset{G_0}{+} \ldots \underset{G_0}{+} \omega_h(b^{(h)}) \mod \sqcap^{q^h e_1+1}.$$

Из предложения 5

$$\omega_1(b^{(1)}) \underset{G_0}{+} \omega_2(b^{(2)}) \underset{G_0}{+} \ldots \underset{G_0}{+} \omega_h(b^{(h)})$$
$$\equiv \widehat{b^{(1)}}^{\Delta^{hn}} \eta_1^{q^{hn}} + \widehat{b^{(2)}}^{\Delta^{hn}} \eta_2^{q^{hn}} + \cdots + \widehat{b^{(h)}}^{\Delta^{hn}} \eta_h^{q^{hn}} \mod \sqcap^{q^h e_1+1}.$$

По лемме 4 элементы $\theta_{11}, \ldots, \theta_{h1}$ образуют базис $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{O}_h$, и для них выполняются сравнения $\eta_i \equiv \theta_{i1}\eta_1 \mod \sqcap^{2e_n}$, $1 \le i \le h$. Тогда $\eta_i^{q^{hn}} \equiv \theta_{i1}\eta_1^{q^{hn}}$

$\mod \sqcap^{q^h e_1+1}$, и если ε — мультипликативный представитель $\eta_1/\sqcap^{e_n}$, то $\eta_i^{q^{hn}} \equiv \theta_{i1}\varepsilon \sqcap^{q^h e_1} \mod \sqcap^{q^h e_1+1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}&\omega_1(b^{(1)}) \underset{G_0}{+} \omega_2(b^{(2)}) \underset{G_0}{+} \dots \underset{G_0}{+} \omega_h(b^{(h)})\\ &\equiv (\widehat{b^{(1)}}^{\Delta^{hn}}\theta_{11} + \widehat{b^{(2)}}^{\Delta^{hn}}\theta_{21} + \dots + \widehat{b^{(h)}}^{\Delta^{hn}}\theta_{h1})\varepsilon \sqcap^{q^h e_1} \mod \sqcap^{q^h e_1+1}.\end{aligned}$$

Осталось воспользоваться леммой 5 и выбрать $b^{(1)}, \dots, b^{(h)}$, так, чтобы $\Theta/\varepsilon = \widehat{b^{(1)}}^{\Delta^{hn}}\theta_{11} + \widehat{b^{(2)}}^{\Delta^{hn}}\theta_{21} + \dots + \widehat{b^{(h)}}^{\Delta^{hn}}\theta_{h1}$.

Перейдем к вычислению значений символа Гильберта на элементах базиса. По предложению 5 $\{\sqcap, \omega_i(b)\}_F = [\operatorname{tr} b]_F(\eta_i)$. Далее, поскольку $\mathcal{A}^{-n+1}G_{\rho,a}$, $g_{\rho,a}$ удовлетворяют условиям предложения 7, выполняется $\{\alpha,\alpha\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_{\rho,a}} = 0$ для любого $\alpha \in M$, такого, что $\nu(\alpha) < q^h e_1$ и $(\nu(\alpha), p) = 1$. Тогда по предложению 2, б) $\{\alpha, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\alpha)\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0} = \mathcal{E}^{\rho,a}(\{\alpha,\alpha\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_{\rho,a}}) = 0$, где $\mathcal{E}^{\rho,a}$ — изоморфизм $\mathcal{A}^{-n+1}G_{\rho,a}$ в $\mathcal{A}^{-n+1}G_0$. Поэтому

$$\begin{aligned}0 &= \{\theta\sqcap^i, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0}\\ &= \{\theta, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0} \underset{\mathcal{A}^{-n+1}G_0}{+} [i]_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0}\{\sqcap, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0}\\ &= [i]_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0}\{\sqcap, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0},\end{aligned}$$

так как θ есть корень из единицы степени, взаимно-простой с p. Аналогичным образом заключаем, что так как $(i,p) = 1$, то $\{\sqcap, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_{\mathcal{A}^{-n+1}G_0} = 0$, и предложение полностью доказано. •

Пусть $\widetilde{s} = [\pi^n]_F \circ z$, $\widetilde{\omega}(b) = E(\widehat{b}\lambda \circ \widetilde{s})$ для $b \in \mathcal{O}_T$ и $\widetilde{\omega}_i(b)$, $1 \le i \le h$, — построены с помощью η_i, $1 \le i \le h$. Положим $\widetilde{\mathcal{E}}^0 = [\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{AG_0,F}$, $\widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a} = [\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{AG_{\rho,a},F}$.

Теорема 4. *Наборы элементов*

$$\begin{gathered}\{\widetilde{\omega}_i(b) : b \in \mathcal{O}_T, 1 \leqslant i \leqslant h\};\\ \{\widetilde{\mathcal{E}}^0(\theta\sqcap^i) : \theta \in \mathcal{R}, 1 \le i < q^h e_1, (i,p) = 1\};\\ \{\widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a}(\theta\sqcap^i) : \theta \in \mathcal{R}, 1 \le i < q^h e_1, (i,p) = 1, a \in \mathcal{O}_T - \textit{обратим}, 1 \le \rho < fh\}\end{gathered}$$

составляют в совокупности систему образующих $\mathcal{O}$-модуля $F(M)$. При этом

$$(\sqcap, \widetilde{\mathcal{E}}^0(\theta\sqcap^i))_F = (\sqcap, \widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a}(\theta\sqcap^i))_F = 0,$$

$(\sqcap, \widetilde{\omega}_i(b))_F = [\operatorname{tr} b]_F(\eta_i)$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 3, предложения 2, в) и равенств $[\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{F_n,F}\mathcal{E}_n^0(\theta\sqcap^i) = \widetilde{\mathcal{E}}^0(\theta\sqcap^i)$, $[\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{F_n,F}\ \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i) = \widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)$,

$[\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{F_n,F}\omega_i(b) = \widetilde{\omega}_i(b)$. Эти равенства проверяются непосредственно. Проверим, например, последнее.

$$\begin{aligned}
[\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{F_n,F}\omega(b) &= [\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{F_n,F}E_n(\widehat{b}\lambda_n \circ s_n)\\
&= [\pi^n/\pi_1^{(n)}]_{F_n,F} \circ \lambda_n^{-1} \circ (1 + \beta_1 \blacktriangle + \beta_2 \blacktriangle^2 + \dots)(\widehat{b}\lambda_n \circ s_n)\\
&= \lambda^{-1} \circ (\pi^n/\pi_1^{(n)})(1 + \beta_1 \blacktriangle + \beta_2 \blacktriangle^2 + \dots)(\widehat{b}\pi_1^{(n)}\lambda \circ z)\\
&= \lambda^{-1} \circ (1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \dots)(\widehat{b}\pi^n\lambda \circ z) = E(\widehat{b}\lambda \circ \widetilde{s})\\
&= \widetilde{\omega}(b). \quad \bullet
\end{aligned}$$

Список литературы

[1] Бенуа Д. Г., Востоков С. В., *Норменное спаривание в формальных группах и представления Галуа*, Алгебра и анализ **2** (1990), № 6, 69–97.

[2] Бенуа Д. Г., Востоков С. В., *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **191** (1991), 9–23.

[3] Востоков С. В., *Явная форма закона взаимности*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **42** (1978), № 6, 1288–1321.

[4] Востоков С. В., *Норменное спаривание в формальных модулях*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **43** (1979), № 4, 765–794.

[5] Востоков С. В., *Символы на формальных группах*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **45** (1981), № 5, 985–1014.

[6] Востоков С. В., Демченко О. В., *Явная форма спаривания Гильберта для относительных формальных групп Любина–Тэйта*, Зап. науч. семин. ПОМИ **227** (1995), 41–44.

[7] Демченко О. В., *Новое в отношениях формальных групп Любина–Тэйта и формальных групп Хонды*, Алгебра и анализ **10** (1998), № 5, 77–84.

[8] Шафаревич И. Р., *Общий закон взаимности*, Мат. сб. **26(68)** (1950), № 1, 113–146.

[9] Honda T., *On the theory of commutative formal groups*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970), no. 2, 213–246.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечная пл., 2

Поступило 5 марта 1999 г.