А. Н. Паршин, Локальная теория полей классов, *Тр. МИАН СССР*, 1984, том 165, 143–170

Труды Математического института АН СССР
1984, том 165

УДК 512.62

А. Н. ПАРШИН

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ КЛАССОВ

Локальным полем обычно называется поле отношений полного дискретно нормированного кольца. Теория таких полей является важной частью классической коммутативной алгебры и имеет много применений как в арифметике, так и в геометрии. В работах [1, 2, 3] автор ввел понятие локального поля произвольной размерности n, по отношению к которому обычные локальные поля являются локальными полями размерности 1. Оказалось, что это понятие весьма удобно для изложения ряда задач многомерной алгебраической геометрии (см. введение в работе [2]). Кроме того, для локальных в этом смысле полей можно построить точный аналог теории полей классов, дающий полное описание абелевых расширений. Это описание дается в терминах высших K-функторов Милнора. Независимо этот аспект теории локальных полей был открыт К. Като и развит им в работах [4, 5, 6, 7].

Настоящая работа содержит подробное изложение части результатов локальной теории полей классов, аннонсированных в [3] и относящихся к локальным полям конечной характеристики. Мы старались дать замкнутое в себе изложение, приводя необходимые мотивировки вводимых понятий и конструкций и используя минимальное количество результатов из алгебраической K-теории. В частности, мы не используем общую теорию Квиллена.

Работа состоит из четырех разделов. Раздел 1 содержит общие сведения о локальных полях. В разделе 2 излагается очерк K-теории, определение групп $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ для локальных полей K и их вычисление. Раздел 3 посвящен построению в нашей ситуации двойственности Куммера и Артина—Шрейера—Витта (а также отображения переноса). Теория полей классов содержится в разделе 4. Ряд результатов, в частности вычисление группы Брауера локального поля, будет рассмотрен в отдельной статье.

Я глубоко признателен Х. Коху, П. Рокетту, Ж. П. Серру и И. Р. Шафаревичу за внимание к моей работе.

Обозначения, используемые в работе, как правило, стандартны. $a \mid b$ обозначает делимость целых a и b, δ_{ij} — символ Кронекера, A/n — сокращение A/nA для абелевой группы A. В зависимости от контекста знак $\bigwedge$ является знаком пропуска или внешним умножением,— сходимость в некоторой топологии или отображение, (a, b) — наибольший общий делитель целых a и b или элемент группы K_2, K_i — i-е поле вычетов локального поля или i-й K-функтор. Слово «символ» также используется в двух смыслах — для обозначения произвольной образующей в K-функторе и для обозначения конкретных функций от этих образующих (например, символ норменного вычета).

1. Локальные поля

Пусть K и k — поля. Введем на K структуру локального поля.

Определение 1. *Структурой n-мерного локального поля на K (над полем k) называется такая последовательность полных колец дискретного нормирования O_i с полями отношений K_i, что поле K_{i+1} является полем вычетов кольца O_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и $K_0 = K$, $K_n = k$.*

Будем называть K_1 первым полем вычетов (и обозначать через $\bar{K}$), а k — последним. Обозначим через $\mathfrak{p}_i$ ($\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$) максимальные идеалы колец O_i. Кольцо O_0 (обозначаемое далее через O_K) определяет на K дискретное нормирование v_K. *Системой параметров* $t_1, \ldots, t_n$ назовем набор таких элементов $t_i \in O_0$, что

$$t_i \bmod \mathfrak{p}_0 \in O_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_i \bmod \mathfrak{p}_0 \ldots \bmod \mathfrak{p}_{i-2} \in O_{i-1}$$

и последний элемент является образующей идеала $\mathfrak{p}_{i-1}$. Система параметров определяет нормирование ранга n поля K, подробно изученное в [8, 9].

Примером локального поля служит поле $K = \boldsymbol{F}_q((t_1))\ldots((t_n))$ степенных рядов от n переменных над конечным полем $\boldsymbol{F}_q$ характеристики p. Здесь $O_i = \boldsymbol{F}_q((t_1))\ldots((t_{n-i-1}))[[t_{n-i}]]$, $K_i = \boldsymbol{F}_q((t_1))\ldots((t_{n-i}))$ и $t_1, \ldots, t_n$ — система параметров. Заметим, что в этом случае имеются также огласованные с локальной структурой вложения колец O_i и полей K_i в поле K. Для произвольных локальных полей это, вообще говоря, не так. Однако если $\mathrm{char}\, K = \mathrm{char}\, k$ и $k = \boldsymbol{F}_q$, то в силу структурной теоремы Коэна—Тейхмюллера ([10, гл. 2, § 4]) существует изоморфизм поля K с полем степенных рядов, сохраняющий локальную структуру.

Построение этого изоморфизма проводится индукцией по размерности поля K. Пусть $\bar{K} = \boldsymbol{F}_q((\tilde{t}_1))\ldots((\tilde{t}_{n-1}))$, тогда, чтобы установить изоморфизм $K \cong \bar{K}((t_n))$, нужно построить вложение поля $\bar{K}$ в O_K, согласованное с проекцией $O_K/\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} \bar{K}$. В силу указанной теоремы Коэна—Тейхмюллера требуемое вложение определяется однозначно, если выбрать (произвольным образом) подъемы в кольцо O_K элементов поля $\bar{K}$, образующих p-базу поля $\bar{K}$ над $\bar{K}^p$. Поскольку переменные $\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{n-1}$ являются p-базой, то их подъемы $t_1, \ldots, t_{n-1}$ вместе с образующей t_n идеала $\mathfrak{p}$ определяют требуемый изоморфизм, $K \cong \boldsymbol{F}_q((t_1))\ldots((t_n))$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь локальные поля этого типа. Другие примеры см. в [3].

Если L/K — конечное расширение локального поля K, то, полагая O_0' равным целому замыканию кольца O_0 в L, O_1' равным целому замыканию кольца O_1 в поле вычетов $L_1 \supset K_1$ кольца O_1 и т. д., получаем структуру локального поля на L. Если имеются два конечных расширений M/L и L/K, то эта конструкция обладает естественным свойством транзитивности. Таким образом, вся башня конечных расширений поля K естественно наделяется структурами локального поля. Если L/K — расширение Галуа, то автоморфизмы поля L над K сохраняют локальную структуру.

Предложение 1. *Пусть $K_{\mathrm{sep}}(p)$ и K_{sep} (не p) — максимальные сепарабельные расширения поля K, являющиеся соответственно p-расширениями и расширениями степени, простой с p. Тогда*

1. *Поле K_{sep} является композитом линейно разделенных расширений $K_{\mathrm{sep}}(p)$ и K_{sep}* (не p).

2. *Поле* K_{sep} (не p) *является композитом расширений* $(\boldsymbol{F}_q)_{\text{не } p}, E_1, \ldots$
$\ldots, E_n$, *где* $E_i = \bigcup_{(m,\,p)=1} K(\sqrt[m]{t_i})$, $i = 1, \ldots, n$.

3. *Поле* K_{sep}^{ab} (не p) *является композитом линейно разделенных расширений* $(\boldsymbol{F}_q)_{\text{не } p}, L_1, \ldots, L_n$, *где* $L_i = K(\sqrt[q-1]{t_i})$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство незамедлительно следует из стандартных свойств расширений локальных полей размерности 1 (см. например, [10]) и радикальных расширений. При этом свойство 3 следует из свойства 2, если учесть, что единственными корнями из единицы в поле K являются ненулевые элементы поля $\boldsymbol{F}_q$.

Следствие. *Каждое расширение Галуа локального поля K разрешимо.*

Для изучения чисто несепарабельных расширений поля K полезна

Лемма 1. *Если K — локальное поле размерности n, то*

1. $[K^{1/p}: K] = p^n$.

2. *Для любого расширения* $K \subset L \subset K^{1/p}$ *степени* p *в поле* K *найдется такая система параметров* $t_1, \ldots, t_n$, *что* $L = K(t_i^{1/p})$ *для некоторого* i.

Доказательство. Если $K = \boldsymbol{F}_q((t_1)) \ldots ((t_n))$, то $K^{1/p} = \boldsymbol{F}_q((T_1)) \ldots ((T_n))$, где $T_i^p = t_i$, $i = 1, \ldots, n$. Второе утверждение проверим индукцией по n. Если $\dim K = 1$, то оно, очевидно, вытекает из доказанного равенства $[K^{1/p}: K] = p$. Предполагая его справедливым для полей размерности $n - 1$, рассмотрим чисто несепарабельное расширение L/K степени p. Имеются две возможности:

1. $\bar{L} = \bar{K}$ и $v_L = p v_K$. Пусть $L = \boldsymbol{F}_q((T_1)) \ldots ((T_n))$. Тогда $T_n^p \in K$ и $v_K(T_n^p) = 1$. Полагая $t_1 = T_1, \ldots, t_{n-1} = T_{n-1}$, $t_n = T_n^p$, получаем требуемое.

2. $[\bar{L} : \bar{K}] = p$ и $v_L = v_K$. В этом случае если $L = \boldsymbol{F}_q((T_1)) \ldots ((T_n))$, то $T_n \in K$ и является образующей идеала $\mathfrak{p}_K$. Пусть теперь $\bar{K} = \boldsymbol{F}_q((\tilde{t}_1)) \ldots$
$\ldots ((\tilde{t}_{n-1}))$, и для некоторого i $\bar{L} = \bar{K}(\tilde{T}_i)$ и $\tilde{T}_i^p = \tilde{t}_i$, $i \leqslant n - 1$. Поднимая $\tilde{T}_i$ в кольцо O_L до некоторого элемента T_i, видим, что $L = K(T_i)$ и T_i^p входит в некоторую систему параметров поля K.

Лемма доказана.

Будем называть расширение L/K *неразветвленным*, если оно неразветвлено относительно нормирования v_K и расширение поля вычетов L_1/K_1 сепарабельно. Максимальное расширение с этими свойствами обозначим через K_{et}. Имеем последовательности эпиморфизмов

$$\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K) \to \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{et}}/K) \cong \mathrm{Gal}(K_{1,\,\mathrm{sep}}/K_1),$$

$$\mathrm{Gal}(K_{1,\,\mathrm{sep}}/K_1) \to \mathrm{Gal}(K_{1,\,\mathrm{et}}/K_1) \cong \mathrm{Gal}(K_{2,\,\mathrm{sep}}/K_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{Gal}(K_{n-1,\,\mathrm{sep}}/K_{n-1}) \to \mathrm{Gal}(K_{n-1,\,\mathrm{et}}/K_{n-1}) \cong \mathrm{Gal}(\boldsymbol{F}_{q,\,\mathrm{sep}}/\boldsymbol{F}_q) = \hat{\boldsymbol{Z}}.$$

Перейдем теперь к изучению топологий в поле K и его мультипликативной группе K^*. Мы определим их индукцией по размерности поля.

Определение 2. *Пусть* $t_1, \ldots, t_n$ — *система параметров поля* K. *Если* U_m, $m \in \boldsymbol{Z}$, — *система окрестностей нуля в поле* $\bar{K} = \boldsymbol{F}_q((t_1)) \ldots ((t_{n-1}))$, $U_{m+1} \subseteq U_m$ *и* $U_m = \bar{K}$ *для больших* m, *то окрестностями нуля в* K *назовем подгруппы вида*

$$U = \{\sum_m x_m t_n^m,\ x_m \in U_m\}.$$

Если $n = 0$, то окрестностями в $\boldsymbol{F}_q$ являются (0) *и* $\boldsymbol{F}_q$. Представим K как $\bigcup\limits_m K(m)$, где $x \in K(m)$, если $v_K(x) \geqslant m$. Тогда множества U являются фундаментальной системой окрестностей топологии, которая на $K(m) \cong \cong \overline{K}^{\boldsymbol{Z}}$ (как аддитивная группа) индуцирует топологию прямого произведения. Множество $V \subset K$ открыто в том и только в том случае, если все пересечения $V \cap K(m)$ открыты в $K(m)$. Для поля размерности 1 это обычная локально-компактная топология. В произвольной размерности >1 эта топология уже не будет локально-компактной. При этом множества $K(m)$ всегда замкнуты, но при $\dim K > 1$ не открыты.

Предложение 2. *Топология поля K не зависит от выбора системы параметров $t_1, \ldots, t_n$ и обладает следующими свойствами:*

1. *Если $x_n \to 0$, то для некоторого m все $x_n \in K(m)$.*
2. *Аддитивная группа K_+ поля K является отделимой топологической группой. Любая фундаментальная последовательность в K_+ сходится.*
3. *Отображение x_n: $K \to K$ $(y \to yx)$ является гомеоморфизмом.*
4. *Любой автоморфизм локального поля K является гомеоморфизмом.*
5. *Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n y_n \to xy$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Если $s_1, \ldots, s_n$ — другая система параметров поля K, то

$$s_1^{b_1} \ldots s_n^{b_n} = \sum_{a_n} \ldots \sum_{a_1} a(a_1, \ldots, a_n)\, t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, \qquad (1)$$

причем если $b_{k+1} = \ldots = b_n = 0$ и $b_k \neq 0$, то $a_{k+1}, \ldots, a_n \geqslant 0$, и если $a_{k+1} = \ldots = a_n = 0$, то $a_k \geqslant b_k$. Кроме того, имеется ненулевой одночлен вида $a t_1^{a_1} \ldots t_{k-1}^{a_{k-1}} t_k^{b_k}$.

Доказательство независимости топологии от выбора системы параметров проведем индукцией по размерности поля K. Полагая, что независимость справедлива для поля $\overline{K}$, рассмотрим замену $s_1, \ldots, s_n$ системы $t_1, \ldots, t_n$. Достаточно рассмотреть последовательно n случаев: $s_1 = t_1, \ldots, s_{n-1} = t_{n-1}$; $\forall i \neq k$, $s_i = t_i, \ldots$; $s_2 = t_2, \ldots, s_n = t_n$. В первом из них поле $\overline{K}$ вкладывается в K одинаковым образом как для $s_1, \ldots, s_n$, так и для $t_1, \ldots, t_n$. В последующих случаях имеем два подполя $\overline{K}'$ и $\overline{K}''$, отождествляемые как поля (с индуцированной топологией) с полем $\overline{K}$. Достаточно показать, что топологии, определяемые системами параметров $s_1, \ldots, s_n$ и $t_1, \ldots, t_n$, совпадают в O_K. Поскольку $K = \overline{K}'((s_n)) = = \overline{K}''((t_n))$, каждый элемент $x \in K$ имеет два разложения в степенные ряды, переход между которыми дается формулами (1). Непосредственное сравнение коэффициентов рядов дает требуемое.

Для проверки свойства 1 положим $\alpha_n = v_K(x_n)$ и предположим, что $\alpha_n \to -\infty$ и $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. Тогда имеется окрестность нуля $U = (U_k)$, $U_k \subset \overline{K}$, для которой коэффициент $y_n \in \overline{K}$ при $t_n^{\alpha_n}$ в x_n не принадлежит U_{α_n}. Очевидно, что $\forall n$ $x_n \overline{\in} U$.

Свойство 2 вытекает из того, что для любой окрестности U из определения 2 $U + U = U$. Сходимость фундаментальных последовательностей получается индукцией по размерности с использованием 1.

Свойство 4 эквивалентно независимости топологии от системы параметров. Чтобы установить свойство 3, можно считать, что $v_K(x) = 0$ (для $x = t_n^a$ оно очевидно). Тогда $\forall m$ $xK(m) = K(m)$, и задача сводится к аналогичному утверждению для O_K. Предполагая, что Uy открытое множество для любой окрестности нуля $U \subset \overline{K}$ и $y \in \overline{K}$, получаем, что это же верно и в O_K. Аналогичной редукцией к O_K (с помощью свойства 1) и затем к полю $\bar{K}$ меньшей размерности получается 5.

Замечание 1. Умножение в поле K не является непрерывным в построенной топологии. Именно, если $\dim K > 1$, то для любых окрестностей нуля U и V имеем $UV = K$. Это не противоречит свойству 5 ввиду несчетности множества окрестностей нуля поля K.

Замечание 2. Для любого элемента $x \in K$ имеем однозначное представление

$$x = \sum_{a_n \geqslant A_n} \sum_{a_{n-1} \geqslant A_{n-1}(a_n)} \cdots \sum_{a_1 \geqslant A_1(a_2, \ldots, a_n)} a(a_1, \ldots, a_n) t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, a \in \boldsymbol{F}_q \quad (2)$$

в виде сходящихся рядов. Мы будем иногда опускать индексы у коэффициентов a.

Лемма 2. *Пусть $F(x) = x^p$, $x \in K$. Тогда каждый элемент поля $x \subset K$ однозначно представим по модулю подгруппы $(F-1)K$ рядом (2), в котором одночлены из параметров $t_1, \ldots, t_n$ удовлетворяют условиям:*

1. *Наибольший общий делитель всех ненулевых чисел $a_1, \ldots, a_n$ прост с p.*

2. $a_n \leqslant 0$; $a_{n-1} \leqslant 0$, *если* $a_n = 0$; $\ldots$; $a_1 \leqslant 0$, *если* $a_2 = \ldots = a_n = 0$.

3. *Коэффициенты a пробегают аддитивный базис поля $\boldsymbol{F}_q$ над $\boldsymbol{F}_p$, и если $a_1 = \ldots = a_n = 0$, то $Tr_{\boldsymbol{F}_q/\boldsymbol{F}_p}(a) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим в разложении (2) все одночлены, у которых последняя ненулевая степень a_i переменной t_i положительна. Если их сумма равна y, то

$$y = y - y^p + (y^p - y^{p^2}) + \ldots$$

и поскольку $y^{p^n} \to 0$ при $n \to \infty$, получаем, что $y \in (F-1)K$. Остальные одночлены либо удовлетворяют условиям леммы, либо являются p-ми степенями и сводятся к предыдущим с помощью элементов из $(F-1)K$.

Чтобы установить однозначность разложения, допустим, что

$$\sum_{a_1, \ldots a_n} a(a_1, \ldots, a_n) t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n} = x^p - x, \qquad x = \sum b(b_1, \ldots, b_n) t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют условиям леммы.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t_1, \ldots, t_n$ в обеих частях равенства, получаем

$$-b(b_1 p, \ldots, b_n p) + b(b_1, \ldots, b_n)^p = 0.$$

Итерируя это, находим, что при любом $s \geqslant 1$

$$b(b_1 p^s, \ldots, b_n p^s) = \pm b(b_1, \ldots, b_n)^{p^s}.$$

Индексы $b_1, \ldots, b_n$ должны удовлетворять условию 2, и, следовательно, при больших s левая часть равна нулю, что дает требуемое.

Лемма 3. *Пусть L/K — конечное расширение локальных полей. Тогда поле K замкнуто в L и его топология совпадает с топологией, индуцированной из L.*

В ([9, гл. 1, предложение 1.2]) содержится более сильное утверждение. Именно, для любого базиса $e_1, \ldots, e_m$ поля L над K отображение $K^m \to L$ $(x_1, \ldots, x_m \to x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m)$ гомеоморфно.

Мультипликативная группа K^* поля K имеет следующее представление:

$$K^* = \{t_1\} \times \ldots \times \{t_n\} \boldsymbol{F}_q^* \mathscr{E}_K, \quad (3)$$

где $\{t_i\} \cong \boldsymbol{Z}$ и $x \in \mathscr{E}_K$ в том и только том случае, если $x \in O_0$, $x \bmod \mathfrak{p}_0 \in O_2, \ldots, x \bmod \mathfrak{p}_0 \ldots \bmod \mathfrak{p}_{n-1} = 1$.

Определение 3. *Введем в группе K^* топологию как произведение дискретной топологии в $\{t_1\} \times \ldots \times \{t_n\} \boldsymbol{F}_q^*$ и индуцированной из K топологии в $\mathscr{E}_K$.*

В этой топологии K^* является топологической группой лишь при $\dim K \leqslant 2$ (см. замечание 1). Это обстоятельство впервые отметил К. Като [7].

Предложение 3. *Топология группы K^* не зависит от выбора системы параметров $t_1, \ldots, t_n$ и обладает следующими свойствами:*

1. *Отображение $x : K^* \to K^*$ $(y \to yx)$ является гомеоморфизмом.*

2. *Любой автоморфизм локального поля K является в K^* гомеоморфизмом.*

3. *Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n y_n \to xy$ при $n \to \infty$. Если $x_n \to x$, то $x_n^{-1} \to x^{-1}$.*

4. *Если $x_n \in \mathfrak{p}^n$, то $\prod (1 + x_n)$ сходится в K^*.*

5. *Если $x_n \to 0$ в поле $\bar{K}$ и t — образующая идеала $\mathfrak{p}$, то $\prod (1 + x_n t^a)$ сходится в K^*.*

6. *Для любой последовательности $y_n \in \mathscr{E}_K$ последовательность $y_n^{p^n}$ сходится к 1.*

7. *Если $K \subset L$ — конечное расширение локальных полей, то группа K^* замкнута в L^* и ее топология совпадает с топологией, индуцированной из L^*.*

Доказательство. Свойства 1—3 соответствуют свойствам 3—5 предложения 2 (переход к x_n^{-1} см. ниже). Свойство 7 вытекает из леммы 3. Свойство 4 непосредственно следует из определения топологии.

Проверим утверждение 5. Раскрывая произведение $\prod\limits_{n \leqslant m} (1 + x_n t^a)$, имеем

$$1 + \Big(\sum_{n \leqslant m} x_n\Big) t^a + \sum_{n<k \leqslant m} x_n x_k\Big) t^{2a} + \ldots,$$

и нужно показать сходимость рядов, стоящих при степенях t. Так как окрестности нуля в K суть подгруппы (определение 2), то последовательность $\sum\limits_{n \leqslant m} x_n$ фундаментальна и, следовательно, сходится (предложение 2.2). Далее, имеем

$$\sum_{n<k \leqslant m+1} x_n x_k - \sum_{n<k \leqslant m} x_n x_k = \Big(\sum_{n \leqslant m} x_n\Big) x_{m+1} \to 0$$

в силу доказанного и предложения 2.5. Применяя предыдущее рассуждение, находим, что ряд $\Sigma x_n x_k$ сходится. Следующие ряды рассматриваются аналогично. Таким образом, получается сходимость x_n^{-1} в свойстве 3.

Осталось рассмотреть утверждение 6. Группа $\mathscr{E}_K$ является произведением своих подгрупп $\mathscr{E}_{\bar{K}}$, $\bar{K} = \boldsymbol{F}_q((t_1)) \ldots ((t_{n-1}))$ и $1 + \mathfrak{p}$. Следовательно, $y_n = u_n v_n$, $u_n \in \mathscr{E}_{\bar{K}}$, $v_n \in 1 + \mathfrak{p}$. Топология, индуцируемая в $\mathscr{E}_{\bar{K}}$, совпадает с имеющейся там топологией группы $\bar{K}^*$, и по индукции можно считать, что $u_n^{p^n} \to 1$. Для $v_n^{p^n}$ это вытекает из свойства 4.

Замечание 3. Из 4 вытекает, что введенная нами топология слабее топологии в K^*, определяемой нормированием v_K. Последняя, конечно, согласована со структурой группы K^*, но совершенно не учитывает топологию поля вычетов $\bar{K}$. Переход к упомянутому в начале раздела нормированию ранга n не меняет положения.

Предложение 4. *Пусть* $x \in \mathscr{E}_K$. *Тогда* x *представляется в виде сходящихся произведений*

$$x = \prod_{a_n \geqslant A_n} \ \prod_{a_{n-1} \geqslant A_{n-1}(a_n)} \cdots \prod_{a_1 \geqslant A_1(a_2, \ldots, a_n)} (1 + a t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}), \tag{4}$$

где $A_n \geqslant 0$; $A_{n-1}(0) \geqslant 0$, *если* $A_n = 0$; $\ldots$; $A_1(0, \ldots, 0) \geqslant 0$, *если* $A_2(0, \ldots, 0) = 0$, *и* a *пробегает аддитивный базис поля* $\boldsymbol{F}_q$.

Доказательство использует индукцию по размерности поля. Представим x в виде yz, $y \in \mathscr{E}_{\overline{K}}$, $z \in 1 + \mathfrak{p}$. Разложение элемента y в поле $\overline{K}$ дает часть разложения (4), отвечающую $A_n = 0$. Если $z = 1 + \left(\sum_i z_i t_{n-1}^i\right) t_n + \ldots$, то в силу предложения 3.5

$$z = \prod_i (1 + z_i t_{n-1}^i t_n)(1 + z' t_n^2 + \ldots),$$

где $z_i \in \boldsymbol{F}_q((t_1)) \ldots ((t_{n-2}))$, $z' \in \overline{K}$. Применяя это рассуждение достаточное число раз к элементу $1 + z_i t_{n-1}^i t_n$ и разложению (2) для z_i в поле $\boldsymbol{F}_q((t_1)) \ldots ((t_{n-2}))$, получим часть разложения (4), отвечающую $A_n = 1$. Дальнейшие действия проходят аналогично.

Следствие. *Пусть* $x \in \mathscr{E}_K$. *Тогда* x *(однозначно) представляется по модулю подгруппы* $\mathscr{E}_K^p$ *в виде произведения* (4) *с индексами* $a_1, \ldots, a_n$, *наибольший общий делитель которых прост с* p.

2. K-теория

Мы дадим здесь краткий очерк понятий и результатов алгебраической K-теории. Доказательства и мотивировки см. в [11, 12, 13].

Каждому кольцу A можно сопоставить абелевы группы $K_i(A)$, $i = 0, 1, \ldots$. Соответствие $A \to K_i(A)$ является ковариантным функтором из категории колец в категорию абелевых групп.

Если $A = K$ — поле, то $K_0(K) = \boldsymbol{Z}$, $K_1(K) = K^*$ (мультипликативная группа) и группа $K_2(K)$ есть абелева группа, порожденная образующими

$$(x, y), \quad x, y \in K^*,$$

удовлетворяющими соотношениям

$$(x_1 x_2, y) = (x_1, y)(x_2, y),$$
$$(x, y_1 y_2) = (x, y_1)(x, y_2),$$
$$(x, 1 - x) = 1, \ x \neq 0 \text{ или } 1.$$

Эти образующие называются *символами*. Нетрудно получить, что

$$(x, y) = (y, x)^{-1} \tag{1}$$

и

$$(x, x) = (x, -1). \tag{2}$$

Для любого локального поля K размерности 1 над $\overline{K}$ определен граничный гомоморфизм

$$\partial : K_i(K) \to K_{i-1}(\overline{K}).$$

Если $i = 2$, то он совпадает с неразветвленным символом норменного вычета (см. (1) в разделе 3).

Пусть $\mathfrak{p} \subset O_K$ — максимальный идеал. Положим

$$K_2(O_K, \mathfrak{p}^n) = \operatorname{Ker}(K_2(O_K) \to K_2(O_K/\mathfrak{p}^n)).$$

Имеют место канонические точные последовательности

$$1 \to K_2(O_K) \to K_2(K) \xrightarrow{\partial} K_1(\overline{K}) \to 1, \tag{3}$$

$$1 \to K_2(O_K, \mathfrak{p}^n) \to K_2(O_K) \to K_2(O_K/\mathfrak{p}^n) \to 1. \tag{4}$$

Если $t \in \mathfrak{p} - \mathfrak{p}^2$ и подгруппа $\overline{K}'^*$ изоморфна $\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}$ группе $\overline{K}^*$, то подгруппа, состоящая из символов (x, t), $x \in \overline{K}'^*$, расщепляет первую точную последовательность, а подгруппа, состоящая из (x, y), $x, y \in \overline{K}'^*$,— вторую последовательность при $n = 1$.

Для любых i и j определено умножение

$$K_i(A) \times K_j(A) \to K_{i+j}(A),$$

являющееся билинейным отображением. Как умножение, так и гомоморфизм ∂ в естественном смысле функториальны.

Помимо обычной функториальности для морфизмов колец $f: A \to B$ (состоящей в переходе к отображению $f_*: K_i(A) \to K_i(B)$), в некоторых случаях определен гомоморфизм переноса

$$N: K_i(B) \to K_i(A).$$

Его можно построить, если кольца A и B коммутативны и B — проективный A-модуль конечного типа. Если $i = 1$, то он совпадает с обычной нормой.

Отображение N обладает свойством транзитивности для троек $A \to B \to C$. Если K — локальное поле размерности 1 над $\overline{K}$, L/K — его конечное расширение и L наделено естественной структурой локального поля с полем вычетов $\overline{L}$ (раздел 1), то имеются коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K_i(L) \xrightarrow{\partial} K_{i-1}(\overline{L}) & & K_i(L) \xrightarrow{\partial} K_{i-1}(\overline{L}) \\ {\scriptstyle N}\downarrow \qquad\quad {\scriptstyle N}\downarrow & & {\scriptstyle j_*}\uparrow \qquad {\scriptstyle e_{L|K}j_*}\uparrow \\ K_i(K) \xrightarrow{\partial} K_{i-1}(\overline{K}) & & K_i(K) \to K_{i-1}(\overline{K}) \end{array}, \tag{5}$$

где j отвечает вложению $K \subset L$, а $e_{L/K}$ — индекс ветвления поля L над K [11, с. 373].

Перенос связан с умножением следующей *формулой проекции.* Если $x \in K_i(A)$, $y \in K_j(B)$, то

$$N(f_*(x) \cdot y) = x \cdot N(y)$$

в группе $K_{i+j}(A)$.

Если $A \to B$ — гомоморфизм K-алгебр, для которого определен перенос, и $K \subset K'$, то естественная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_i(B) & \to & K_i(B \otimes_K K') \\ {\scriptstyle N}\downarrow & & {\scriptstyle N}\downarrow \\ K_i(A) & \to & K_i(A \otimes_K K') \end{array} \tag{6}$$

коммутативна, т. е. перенос перестановочен с заменой базы.

Лемма 1 (Басс?). *Пусть K — поле, M/K — конечное, сепарабельное и нормальное расширение, $M \supset L \supset K$. Если $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, M)$, то пусть $\sigma' \in \mathrm{Gal}(M/K)$ какое-нибудь продолжение σ на M. Тогда для любого $y \in K_i(L)$*

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, M)} \beta(y)^{\sigma'} = \beta \circ \alpha(N(y)), \tag{7}$$

где α: $K_i(K) \to K_i(L)$, β: $K_i(L) \to K_i(M)$ — естественные морфизмы.

Доказательство. Применим диаграмму (6) к $A = K$, $B = L$, $K' = M$ и учтем, что $L \otimes M = \prod M$ (произведение по всем $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L,$

M)), отображение $L \to L \otimes M$ есть $\prod \sigma$ и отображение $M \to L \otimes M$ совпадает с диагональным вложением Δ поля M в $\prod M$. Наше утверждение сведется тогда к следующему факту. Пусть $[L:K] = n$ и p_i: $\prod M \to M$ проекции. Тогда

$$\Delta^* = p_{1,*} + \ldots + p_{n,*}.$$

Обозначим через s_i: $M \to \prod M$ — вложение i-го сомножителя. Имеем по определению

$$\Delta^* = s_1^* + \ldots + s_n^*$$

и

$$1 = s_{1,*} \circ p_{1,*} + \ldots + s_{n,*} \circ p_{n,*},$$

и достаточно показать, что $s_i^* \circ s_{j,*} = \delta_{ij}$. Пусть $e \in K_0(M)$ — класс модуля M. Из формулы проекции и разложимости $K_*(\prod M)$ в прямую сумму получаем $(i \neq j)$

$$s_i^* \circ s_{j,*}(x) = e \cdot s_i^*(s_{j,*}(x)) = s_i^*(s_{i,*}(e)\, s_{j,*}(x)) = 0,$$

а при $i = j$

$$s_i^* \circ s_{i,*}(x) = s_i^*(s_{i,*}(e) \cdot s_{i,*}(x)) = s_i^*(s_{i,*}(e)) \cdot x = x.$$

Лемма доказана.

Все эти факты справедливы для K-функтора $K_i(A)$, построенного Квилленом. Мы будем использовать в дальнейшем, однако, K-функтор Милнора $K_n^M(K)$, $n \geqslant 0$, определенный для любого поля K [12].

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть K — поле. $K_n^M(K)$ — абелева группа с образующими $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in K^*$, и соотношениями*

$$(x_1, \ldots, x_i'x_i'', \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n),$$

$$(x_1, \ldots, x_i, 1 - x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n) = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Образующие $(x_1, \ldots, x_n)$ называются *символами*. Из (1) немедленно получается, что для любой перестановки $i_1, \ldots, i_n$ индексов $1, \ldots, n$ четности τ имеем

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = (x_1, \ldots, x_n)^{\tau}.$$

Умножение определяет естественный морфизм $K_n^M(K) \to K_n(K)$, не являющийся при $n > 2$, вообще говоря, изоморфизмом. Так, для $K = \boldsymbol{F}_q$ все $K_n^M(K) = 0$, $n \geqslant 2$, а функторы Квиллена весьма нетривиальны (для нечетных n). Поэтому приведенные выше понятия и конструкции не могут быть непосредственно перенесены на случай групп K_n^M. Мы определим их для интересующих нас полей без использования общей теории Квиллена.

Имеется каноническое отображение Ψ: $K^* \times \ldots \times K^* \to K_n^M(K)$ и любая n-линейная функция f: $K^* \times \ldots \times K^* \to A$, переводящая тривиальные символы из определения 1 в нуль, однозначно представляется в виде $f = f_0 \circ \Psi$, где f_0: $K_n^M(K) \to A$ — гомоморфизм. Применяя это к отображению $\delta(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{-1}dx_1 \wedge \ldots \wedge x_n^{-1}dx_n \in \Omega_{K/\boldsymbol{Z}}^n$, получаем отображение Тейта

$$\delta\colon K_n^M(K) \to \Omega_{K/\boldsymbol{Z}}^n. \tag{8}$$

В случае, когда мультипликативная группа K^* имеет топологию, естественно рассмотреть символы, удовлетворяющие условию непрерывности, и соответствующим образом изменить группы $K_n^M(K)$.

Рассмотрим топологии τ на $K_n^M(K)$, удовлетворяющие условиям:

1. Ψ непрерывно по каждому аргументу относительно τ и топологии на K^*.

2. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в топологии τ, то также $x_n y_n \to xy$ и $x_n^{-1} \to x^{-1}$.

Множество таких топологий непусто (оно содержит слабейшую топологию). Покажем, что верхняя грань всех топологий из этого множества снова принадлежит ему. Для условий 1 это очевидно. Для проверки условия 2 достаточно применить следующее утверждение, легко получаемое из определений (см. [14, гл. 1, § 2]).

Лемма 2. *Пусть τ_α, $\alpha \in I$, — множества топологий в топологическом пространстве X и τ — верхняя грань всех топологий τ_α, $\alpha \in I$. Последовательность $x_n \in X$ сходится к $x \in X$ в топологии τ в том и только том случае, когда она сходится к x во всех топологиях τ_α, $\alpha \in I$.*

Из условия 2 следует, что пересечение всех окрестностей единицы есть подгруппа.

Определение 2. *Пусть группа K^* снабжена топологией. Тогда наделим $K_n^M(K)$ сильнейшей топологией, удовлетворяющей условиям 1 и 2, и положим*

$$K_n^{\mathrm{top}}(K) = K_n^M(K)/\Lambda,$$

где Λ — пересечение всех окрестностей единицы.

Конечно, это определение содержательно, если исходная топология группы K^* удовлетворяет условию 2. В этом случае $K_1^{\mathrm{top}}(K) = K^*$ (всегда $K_0^{\mathrm{top}}(K) = \boldsymbol{Z}$). В силу предложения 3.3 раздела 1 это верно для любого локального поля K.

Если $\dim K = 0$, то

$$K_m^{\mathrm{top}}(K) = \begin{cases} \boldsymbol{Z}, & m = 0, \\ \boldsymbol{F}_q^*, & m = 1, \\ (1), & m > 1. \end{cases}$$

Если $\dim K = 1$, то

$$K_m^{\mathrm{top}}(K) = \begin{cases} \boldsymbol{Z}, & m = 0, \\ K^*, & m = 1, \\ \boldsymbol{F}_q^*, & m = 2, \\ 1), & m > 2. \end{cases}$$

Это известные факты алгебраической K-теории [13]. Мы получим полное описание групп $K_m^{\mathrm{top}}(K)$ для локальных полей.

Предложение 1. *Пусть K — локальное поле размерности n и $t_1, \ldots, t_n$ — система параметров и $x \in K_{m+}^{\mathrm{top}}(\boldsymbol{K})$, $m \geqslant 0$. Тогда x является произведением символов вида*

$$1)\ (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{m+1}}),\ i_1 < \ldots < i_{m+1};$$

$$2)\ (a, t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}),\ a \in \boldsymbol{F}_q^*,\ i_1 < \ldots < i_m;$$

$$3)\ \prod_{a_n \geqslant A_n} \ldots \prod_{a_1 \geqslant A_1(a_2, \ldots, a_n)} (1 + a t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n},\ t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}),\quad i_1 < \ldots < i_m, \tag{9}$$

где индексы удовлетворяют следующим условиям:

1) $A_n \geqslant 0$; $A_{n-1} \geqslant 0$, *если* $A_n = 0$; $\ldots$; $A_1(0, \ldots, 0) \geqslant 0$, *если* $A_2(0, \ldots, 0) = 0$;

2) *если* $k = k(a_1, \ldots, a_n)$ *таково, что* $a_k \bmod p \neq 0$, $a_{k+1} = \ldots = a_n = 0 \bmod p$, *то* $k \in \{i_1, \ldots, i_m\}$;

3) *a пробегает аддитивный базис поля $\boldsymbol{F}_q$.*

Здесь и далее символы $(x_1, \ldots, x_m) \in K_m^M(K)$ отождествляются с их образами в $K_m^{\mathrm{top}}(K)$.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Если $a \in \boldsymbol{F}^*$, $\varepsilon \in \mathscr{E}_K$, $x_1, \ldots, x_{m-1} \in K^*$, то

$$(a, \varepsilon, x_1, \ldots, x_{m-1}) = 1. \tag{10}$$

Действительно, если $a \in \boldsymbol{F}_q$, то $\forall n \geqslant 1$ $a = a^{q^n}$ и $(a, \varepsilon, x_1, \ldots, x_{m-1}) = (a, \varepsilon^{q^n}, x_1, \ldots, x_{m-1}) \to 1$ в силу предложения 3.6 раздела 1.

Шаг 2. В условии на индексы $i_1, \ldots, i_m$ в разложении (9) можно опустить предположение $k \in \{i_1, \ldots, i_m\}$. Имеем тождество

$$1 = (1 + at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, -at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \prod_{i=1}^{n} (1 + at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, t_i, x_1, \ldots, x_{m-1})^{a_i}$$

(последнее равенство в силу (10)). Перепишем сомножитель с $i = k$ как

$$((1 + at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n})^{a_k}, t_k, \ldots) = (1 + a_k^{-1} at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, t_k, \ldots)(1 + z, t_k, \ldots),$$

где $v_K(z) > a_n$, если $a_n > 0$. Индукция по a_n дает тогда требуемое. Если $a_n = 0$, то нужно рассмотреть a_{n-1} и т. д.

Шаг 3. Разложение (3) раздела 1 показывает, что достаточно рассмотреть элементы $x = (x_1, \ldots, x_m)$, где $x_i \in \mathscr{E}_K$ или $x_i \in \boldsymbol{F}_q^*$, или же x_i — переменная t_j. Поскольку $K_2(\boldsymbol{F}_q) = (1)$, каждый такой символ содержит не более одного $x_i \in \boldsymbol{F}_q^*$. Из (2) видно, что индексы переменных t_i можно сделать различными. Предположим, что все доказано для $m = 2$. Тогда любой символ вида $(x_1, x_2, \ldots)$, $x_{1,2} \in \mathscr{E}_K$ можно представить как произведение $(x_1', t_i, \ldots)$ на символ $(a, t_j, \ldots)$ и $(t_k, t_l, \ldots)$. Действуя таким образом, видим, что достаточно рассмотреть случай $m = 2$. При этом требуется рассмотреть лишь элементы $x \in K_2^{\mathrm{top}}(K)$ вида (x_1, x_2), $x_{1,2} \in \mathscr{E}_K$.

Шаг 4. Основная лемма. *Пусть* $\varepsilon_{1,2} \in \mathscr{E}_K$ *и* $\varepsilon_2 \in 1 + \mathfrak{p}^l$, $l > 0$. *Тогда*

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1', \varepsilon_2) \prod_{i=1}^{n} (\eta_i, t_i), \qquad \varepsilon_1', \eta_1 \ldots, \eta_n \in \mathscr{E}_K,$$

где $\varepsilon_1' \in 1 + \mathfrak{p}^{k+l}$, $\eta_i \in 1 + \mathfrak{p}^k$, *если* $\varepsilon_1 \in 1 + \mathfrak{p}^k$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\varepsilon_1 = 1 + at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}$. Полагая $\varepsilon_2 = 1 + yt_n^l$, $y \in O_K$ и $at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n} = xt_n^k$, имеем

$$(1 + xt_n^k, \varepsilon_2) = ((1 + xt_n^k\varepsilon_2)(1 + xt_n^k)^{-1}, \varepsilon_2)^{-1}(1 + xt_n^k\varepsilon_2, \varepsilon_2) =$$
$$= ((1 + xt_n^k\varepsilon_2)(1 + xt_n^k)^{-1}, \varepsilon_2)(1 + xt_n^k\varepsilon_2, -x)(1 + xt_n^k\varepsilon_2, t_n)^k.$$

Это дает нужное разложение

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1 + xy(1 + xt_n^k)^{-1}t_n^{k+l}, \varepsilon_2) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + xt_n^k + xyt_n^{k+l}, t_i) \times$$
$$\times ((1 + xt_n + xyt_n^{k+l})^k, t_n). \tag{11}$$

Пусть теперь $\varepsilon_1 \in \mathscr{E}_K$. Чтобы получить лемму, представим ε_1 в виде произведения (4) раздела 1. Для каждого сомножителя лемма справедлива, и, перемножая выражения для $(1 + at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, \varepsilon_2)$, получаем требуемое выражение для $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, если входящие в него произведения сходятся. Чтобы не загромождать изложение, докажем сходимость для $\dim K = 2$. Пусть

$K = \boldsymbol{F}_q((t_1))((t_2))$ и

$$\varepsilon_1 = \prod_{k \geqslant A_2} \prod_{i \geqslant A_1(k)} (1 + at_1^i t_2^k), \qquad A_2 \geqslant 0.$$

Соотношение (11) в этом случае имеет вид ($\varepsilon_2 = 1 + yt_2{}^l$, $y \in O_K$)

$$(1 + at_1^i t_2^k, 1 + yt_2^l) = (1 + at_1^i(1 + at_1^i t_2^k)^{-1} y t_2^{k+l}, \varepsilon_2) \times \\ \times (1 + at_1^i t_2^k + at_1^i y t_2^{k+l}, t_1)^i (1 + at_1^i t_2^k + at_1^i y t_2^{k+l}, t_2)^k. \qquad (12)$$

Первый аргумент каждого из трех символов записывается в виде

$$1 + \sum_m A_{im}(t_1) t_2^m, \qquad v_{\overline{K}}(A_{im}) \geqslant C_m \cdot i,$$

где суммирование по m распространено в первом символе от $k + l$, а в остальных от k (нужно учесть, что при $k = 0$ i обязательно > 0). Перемножая (12) по всем i (и при фиксированном k), видим, что произведение сходится ($\forall m\ A_{im} \to 0$ при $i \to \infty$), и предел разложения (12) удовлетворяет условию леммы. В частности, он имеет вид

$$(1 + x_k t_2^{k+l}, \varepsilon_2)(1 + y_k t_2^k, t_1)(1 + w_k t_2^k, t_2),$$

где $x_k, y_k, w_k \in O_K$. Перемножая по $k \geqslant A_2$, получаем сходящееся произведение, очевидно, удовлетворяющее условию леммы. Случай произвольной размерности разбирается точно так же.

Шаг 5. В силу шага 3 нам нужно представить символы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в виде произведения $(\eta_1, t_1) \ldots (\eta_n, t_n)$, $\eta_i \in \mathscr{E}_K$. Если $\varepsilon_i \in \mathscr{E}_{\overline{K}}$, то можно предположить по индукции, что это верно. Пусть теперь $\varepsilon_2 \in 1 + \mathfrak{p}^l$, $l > 0$. Применим к паре $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ основную лемму. Итерируя этот процесс, получаем требуемое представление (сходимость имеет место в силу предложения 3.4 раздела 1).

Предложение 1 доказано.

Замечание 1. Полученное в шаге 5 представление определено предыдущими конструкциями и единственностью разложения (4) раздела 1 однозначно (в разделе 3 мы покажем также, что оно и единственно). Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \prod_i (\eta_i, t_i)$ — это представление, которое мы будем называть каноническим. Если ε_1 *или* ε_2 образуют последовательность $\varepsilon_{1,m}$ $(\varepsilon_{2,m})$, то имеется соответствующая последовательность $\eta_{i,m}$. Рассуждения, которыми мы проверяем сходимость в доказательстве основной леммы, показывают, что сходимость $\varepsilon_{1,m}$ $(\varepsilon_{2,m})$, $m \to \infty$, влечет сходимость $\eta_{i,m}$, $m \to \infty$, к некоторым $\eta_i \in \mathscr{E}_K$, и произведение $\prod_i (\eta_i, t_i)$ будет каноническим представлением для $(\lim \varepsilon_{1,m}, \varepsilon_2)$ (или $(\varepsilon_1, \lim \varepsilon_{2,m})$).

Следствие 1. *Пусть K — локальное поле размерности n. Если $m > n + 1$, то $K_m^{\mathrm{top}}(K) = (1)$. Если $m = n + 1$, то $K_m^{\mathrm{top}}(K) = \{(a, t_1, \ldots, t_n), a \in \boldsymbol{F}_q^*\} \simeq \boldsymbol{F}_q^*$.*

Доказательство. В первом случае в символах 1—3 у переменных $t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}$ все индексы не могут быть разными. Во втором единственная возможность — это $(a, t_1, \ldots, t_n)$, $a \in \boldsymbol{F}_q^*$, так как для символов $(\varepsilon, t_1, \ldots, t_n)$ не может выполняться условие 2. Изоморфизм с $\boldsymbol{F}_q^*$ вытекает из замечания 3 раздела 3.1.

Следствие 2. *Пусть K — локальное поле размерности n. Тогда $x \in K_m^{\mathrm{top}}(K)$ представляется по модулю подгруппы $(K_m^{\mathrm{top}}(K))^p$ как про-*

изведение символов 1 *и* 3 *предложения* 1 *с дополнительным условием: наибольший общий делитель чисел* $a_1, \ldots, a_n$ *прост с* p.

Доказательство. Достаточно вспомнить следствие предложения 4 раздела 1 и учесть, что группа F_q^* p-делима.

Следствие 3. *Пусть* K *— локальное поле размерности* n *и* l *— целое,* $(l, p) = 1$. *Тогда* $x \in K_m^{\text{top}}(K)$ *представляется по модулю подгруппы* $(K_m^{\text{top}}(K))^l$ *как произведение символов* 1 *и* 2 *предложения* 1.

Доказательство. В силу общих свойств полных колец дискретного нормирования группа $\mathscr{E}_K$ l-делима.

В группах $K_m^{\text{top}}(K)$ имеется ряд замечательных подгрупп. В частности, можно определить аналоги подгрупп $K_m(O_K)$ и $K_m(O_K, \mathfrak{p}^k)$ (см. начало этого раздела). Мы сделаем это для случая, когда $m = n = \dim K$ и $k = 1$.

Определение 3. *Пусть* $K_n^{\text{top}}(O_K, \mathfrak{p})$ *— подгруппа в* $K_n^{\text{top}}(K)$, *порожденная символами* $(\varepsilon, t_1, \ldots, \hat{t}_k, \ldots, t_n)$, $\varepsilon \in 1 + \mathfrak{p}$, *и* $K_n^{\text{top}}(O_K)$ *— подгруппа, порожденная* $K_n^{\text{top}}(O_K, \mathfrak{p})$ *и символами* $(a, t_1, \ldots, t_{n-1})$, $a \in F_q^*$.

Предложение 2. *Существует единственный непрерывный гомоморфизм*

$$\partial : K_n^{\text{top}}(K) \to K_{n-1}^{\text{top}}(\overline{K}),$$

для которого:

1. $\partial(x_1, \ldots, x_{n-1}, t_n) = (x_1 \bmod \mathfrak{p}, \ldots, x_{n-1} \bmod \mathfrak{p})$, *если* $v_K(x_1) = \ldots = v_K(x_{n-1}) = 0$.

2. $\partial(x_1, \ldots, x_n) = 1$, *если* $v_K(x_1) = \ldots = v_K(x_n) = 0$.

3. *Последовательность*

$$1 \to K_n^{\text{top}}(O_K) \to K_n^{\text{top}}(K) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}^{\text{top}}(\overline{K}) \to 1 \tag{12}$$

точна.

Доказательство. Существование и единственность отображения ∂ со свойствами 1 и 2 в нашей ситуации получается буквальным повторением рассуждения Милнора в § 2 [12]. Заметим, что оно использует лишь структуру локального поля размерности 1 на K (с полем вычетов $\overline{K}$). Свойство 3 без труда получается из предложения 1.

Замечание 2. Имеет место также аналог последовательности (4)

$$1 \to K_n^{\text{top}}(O_K, \mathfrak{p}) \to K_n^{\text{top}}(O_K) \to K_n^{\text{top}}(\overline{K}) \to 1. \tag{13}$$

Это следует из следствия 1 предложения 1 и предложения 3 ниже. Можно определить и более тонкие фильтрации в группе $K_n^{\text{top}}(K)$, используя идеалы кольца нормирования ранга n, связанного с системой параметров (см. [8, 9]).

Лемма 3. *Пусть* $U \subset K_{m+1}^{\text{top}}(K)$ *— подгруппа, порожденная символами вида* $(\varepsilon, t_{i_1}, \ldots, t_{i_m})$, $\varepsilon \in \mathscr{E}_K$. *Тогда* $\bigcap_{k \geqslant 0} U^{p^k} = (1)$.

Доказательство. Достаточно применить предложение 3.6.

Снова предположим, что $m = n = \dim K$ и обозначим через U_K подгруппу $U \subset K_n^{\text{top}}(K)$. Добавляя к U_K произведения символов $(a, t_1, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n)$, получим подгруппу V_K.

Введем еще подгруппы $\mathscr{E}_{i,K} \subset \mathscr{E}_K$, состоящие из тех элементов x, в разложение (4) раздела 1 которых входят лишь степени $a_1, \ldots, a_n$ переменных $t_1, \ldots, t_n$ с условием $k(a_1, \ldots, a_n) = i$ (см. условие 2 предложения 1). Имеем отображение

$$\Phi_K : \prod_{i=1}^{n} \mathscr{E}_{i,K} \to U_K,$$

сопоставляющее набору $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ произведение $\prod_i (\varepsilon_i, t_1, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n)$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть K — локальное поле размерности n. Тогда фильтрация $U_K \subset V_K \subset K_n^{\mathrm{top}}(K)$ не зависит от выбора системы параметров $t_1, \ldots, t_n$ и при этом:*

1. $K_n^{\mathrm{top}}(K) = \{(t_1, \ldots, t_n)\} V_K$, $K_n^{\mathrm{top}}(K)/V_K \cong \mathbf{Z}$.

2. $V_K = \{(a, t_1, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n),\ a \in F_q^*,\ i = 1, \ldots, n\} U_K$, $V_K/U_K \cong \cong (F_q^*)^n$.

3. *Отображение Φ_K является изоморфизмом, переводящим топологию произведения на $\prod\limits_i \mathscr{E}_{i,K}$ в топологию группы U_K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Независимость V_K от выбора системы параметров и свойство 1 вытекают из свойств символа c_K (см. раздел 3.1, замечание 3).

Подгруппа U_K характеризуется тем, что $x^{p^k} \to 1$ для $x \in U_K$ (лемма 3). Свойство 2 есть следствие двойственности Куммера (раздел 3.1, следствие 2 предложения 3). |

Из предложения 1 вытекает, что гомоморфизм Φ_K сюръективен, а следствие предложения 5 раздела 3 показывает, что Φ_K взаимно однозначно. По определению топологии в U_K это отображение непрерывно. Рассмотрим теперь составное отображение

$$\Phi_K^{-1} \circ \Psi : \mathscr{E}_K \times \overset{n}{\ldots} \times \mathscr{E}_K \to U_K \to \prod_i \mathscr{E}_{i,K}. \tag{14}$$

Из свойств канонических представлений, указанных в замечании 1, следует, что это отображение непрерывно по каждому аргументу.

Обозначим теперь через τ топологию в U_K, индуцированную топологией группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)$, и через τ' топологию, получаемую перенесением на U_K топологии произведения в $\Pi\mathscr{E}_i$ с помощью Φ_K. Имеем $\tau' \geqslant \tau$. Топологию τ можно определить, используя те же условия 1 и 2, что и для топологии группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ (заменяя в условии 1 K^* на $\mathscr{E}_K$). Непрерывность отображения (14) означает, что условие 1 выполнено для τ'. Условие 2 также выполняется. Следовательно, $\tau' = \tau$ и Φ_K — гомеоморфизм.

Предложение доказано.

С л е д с т в и е. *Группа $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ не имеет p-кручения.*

В самом деле, его нет в мультипликативной группе K^*.

З а м е ч а н и е 3. Итак, мы получили явное описание группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)$. Используемые нами соображения, как обычно, в K-теории разбиваются на две части — оценку «сверху», произведенную в этом разделе, и оценку «снизу», состоящую в построении нетривиальных символов в группе $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ (раздел 3). Конструкции, приведенные выше, не противоречат, например, равенству $K_n^{\mathrm{top}}(K) = 1$.

3. Символы и двойственность

1. Двойственность Куммера. Если K — локальное поле размерности 1 с полем вычетов k, то можно определить слабо разветвленный (*tame*) символ норменного вычета $(\cdot, \cdot)_K$. Именно, если v_K — нормирование поля K и $f \bmod \mathfrak{p}$ — образ элемента f из кольца целых поля K в группе k^*, то

$$(f, g)_K = (-1)^{mn} f^n g^{-m} \bmod \mathfrak{p}, \tag{1}$$

где $v_K(f) = m$, $v_K(g) = n$. Это билинейная кососимметрическая форма, свойства которой хорошо известны [10, 13].

В этом разделе мы введем аналогичный символ от $n+1$-го аргумента для полей размерности n и покажем, что для него сохраняются (в надлежащем виде) обычные свойства символа $(\cdot,\cdot)_K$. Предположим на время, что последнее поле вычетов k локального поля K произвольно.

Определение 1. *Пусть K — локальное поле размерности n над k и $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K^*$. Положим*

$$(x_1, \ldots, x_{n+1})_{K/k} = \pm \prod_{i=1}^{n} x_i^{(-1)^{i+1} v_n (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})_{K/K_{n-1}}} \bmod \mathfrak{p}_0 \ldots \bmod \mathfrak{p}_{n-1} \in k^*,$$

где символ от n аргументов, стоящий в показателе, относится к полю K, рассматриваемому как локальное поле размерности $n-1$ над предпоследним полем вычетов K_{n-1}, и v_n: $K_{n-1}^* \to \mathbf{Z}$ — дискретное нормирование поля K_{n-1}.

Если $\dim K = 1$, то с точностью до знака — это символ (1). По поводу знака в общем случае см. ниже. Мы будем также сокращать индекс K/h до K, если это не вызывает недоразумений.

Предложение 1. *Символ $(x_1, \ldots, x_{n+1})_K$ обладает следующими свойствами*:

1. $(x_1, \ldots, x_i' x_i'', \ldots, x_{n+1})_K = (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_{n+1})_K (x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_{n+1})_K$.
2. $(x_1, \ldots, x_i, 1 - x_i, \ldots, x_{n+1})_K = 1$ *с точностью до знака.*
3. $(x_1, \ldots, x_{n+1})_K = 1$ *с точностью до знака, если* $\exists i \; x_i \in \mathscr{E}_K$.

Доказательство. Свойства 1 и 3 очевидны. Чтобы получить 2, отметим сначала, что $(x_1, \ldots, x_{n+1})_K$ кососимметричен по каждой паре аргументов. Вычислим теперь целые числа, стоящие в показателе. Для этого выберем систему параметров $t_1, \ldots, t_n$ поля K и сопоставим каждому $x \in K^*$ целые $a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_n &= v_K(x), \\ a_{n-1} &= v_{K_1}(x t_n^{-a_n} \bmod \mathfrak{p}_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 &= v_{K_{n-1}}(x t_n^{-a_n} \bmod \mathfrak{p}_0 t_{n-1}^{-a_{n-1}} \bmod \mathfrak{p}_1 \ldots). \end{aligned}$$

Это упомянутое в разделе 1 нормирование ранга n в поле K.

Теперь нетрудно показать, что $v_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$ равно определителю порядка n, составленному из целых $a_1, \ldots, a_n$ для элементов $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$.

Возвращаясь к свойству 2, заметим, что из приведенного вычисления непосредственно вытекает, что $(x_1, \ldots, x_i, -x_i, \ldots, x_{n+1}) = \pm 1$ и $(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \pm 1$, если $x_i, x_{i+1} \in k^*$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} (\ldots, x_i, 1 - x_i, \ldots) &= (\ldots, x_i, -x_i, \ldots)(\ldots, x_i, 1 - x_i^{-1} \ldots) = \\ &= \pm(\ldots, x_i^{-1}, 1 - x_i^{-1}, \ldots)^{-1}. \end{aligned}$$

Если $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа, сопоставляемые x_i, то в силу этого тождества можно считать, что $(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (0, \ldots, 0)$ (лексикографически). Но тогда либо $x_i \in k^*$, либо $1 - x_i \in \mathscr{E}_K$, и требуемое свойство выполняется по доказанному выше.

Замечание 1. Конечно, свойства 2 и 3 выглядят не очень естественно. Если $\dim K = 2$, то определение 1 можно дополнить явным указанием знака. Именно, положим

$$(x_1, x_2, x_3)_K = (-1)^{a_{12}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{31}+a_{11}a_{22}a_{32}+a_{11}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{21}a_{31}} \times$$
$$\times\, x_1^{a_{22}a_{32}-a_{32}a_{21}} x_2^{a_{32}a_{11}-a_{12}a_{31}} x_3^{a_{12}a_{21}-a_{22}a_{11}} \bmod \mathfrak{p}_1 \bmod \mathfrak{p}_1. \qquad (2)$$

Тогда выполняется свойство 2 в виде $(x_1, 1-x_1, x_3) = 1$.

Чтобы получить свойство 2 в общем случае, необходимо использовать

Предложение 2. *Пусть K — локальное поле размерности n. С точностью до знака*

$$(x_1, \ldots, x_{n+1})_{\overline{K}}^{\to} = \partial_n \circ \ldots \circ \partial_1 (x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Отображения $\partial = \partial_n$: $K_n^{\mathrm{top}}(K) \to K_{n-1}^{\mathrm{top}}(\overline{K})$ были введены в разделе 2.

Доказательство этого предложения легко получается непосредственным вычислением на образующих (нужно использовать формулу (3) раздела 1, предложение 2 раздела 2 и предложение 1.3).

Мы будем считать, что знак в определении 1 выбран так, чтобы выполнялось свойство 2 с $+1$.

Вопрос. *Какова явная формула для знака в определении* 1, *обобщающая формулы* (1) *и* (2)?

Замечание 2. Когда $n = 2$, то символ, близкий к введенному нами, был независимо определен И. Пурше (Y. Pourchet) в 1970 г. (неопубликовано). Как показал Ж. П. Серр, этот символ является трилинейной кососимметрической формой (a, b, c), определенной для элементов a, b, c произвольного локального поля K (размерности 1) с полем вычетов k и принимающей значения в группе $\mathrm{Br}(k)_n$ (элементы n-го порядка группы Брауера). Он однозначно определяется следующими свойствами:

1. $(a, -a, c) = 0$.

2. Если $v_K(a) = 1$, $b, c \in \mathscr{E}$ (группа единиц), то $(a, b, c) = (\bar{b}, \bar{c})_{\overline{K}}^{\to}$ ($\bar{b}$, $\bar{c}$ — образы в поле вычетов).

3. Если $a, b, c \in \mathscr{E}$, то $(a, b, c) = 0$.

Для конструкции этого символа нужно взять произведение элементов $a, b, c \in K^*$ в группе $K_3(K)$, применить ∂: $K_3(K) \to K_2(k)$ и затем символ $(\bar{b}, \bar{c})_k$: $K_2(k) \to \mathrm{Br}(k)_n$, введенный в [13, § 15]. Предложение 2 показывает связь нашего символа с символом Пурше. Последний возник в связи со следующими приложениями к теории квадратичных форм. Именно, пусть $(1, -a)$ — форма вида $x_1^2 - ax_2^2$. Тогда если форма

$$(1, -a) \otimes (1, -b) \otimes (1, -c)$$

представляет нуль, то $(a, b, c) = 0$, $n = 2$. Обратное верно, если любая форма от пяти переменных над полем k представляет нуль (например, $k = \boldsymbol{Q}_p$).

Пусть теперь снова K — локальное поле размерности n с конечным полем вычетов $\boldsymbol{F}_q$. Обозначим через K' его предпоследнее поле вычетов (оно является локальным полем размерности 1 над $\boldsymbol{F}_q$). В силу предложения 2 имеет смысл

Определение 2. *Введем отображения*

$$a_K : K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K) \to \boldsymbol{F}_q^* \qquad (3)$$

и

$$c_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to \boldsymbol{Z}, \qquad (4)$$

полагая $a_K(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1})_{K/\boldsymbol{F}_q}$ *и* $c_K(x_1, \ldots, x_n) = v_{K'}(x_1, \ldots, x_n)_{K/K'}$.

Отметим, что для определения c_K вопрос о выборе знака несуществен.

Замечание 3. Отображения (3) и (4) сюръективны, поскольку $a_K(a, t_1, \ldots, t_n) = a$ и $c_K(t_1, \ldots, t_n) = 1$.

Как известно, с помощью символа (1) строится двойственность Куммера для локальных полей размерности 1. Мы покажем, что это же верно в произвольной размерности.

Если l — целое, $(l, p) = 1$ и ζ — первообразный корень степени l, то $\zeta \in K$ в том и только том случае, когда $l \mid q-1$, и тогда $\zeta \in \boldsymbol{F}_q^*$. Положим

$$\lambda(x) = x^{\frac{q-1}{l}}, \quad x \in \boldsymbol{F}_q^*.$$

Предложение 3. *Пусть $m \geqslant 0$. Отображение $\lambda \circ a_K$: $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K) \to \boldsymbol{Z}/l$ определяет непрерывное и невырожденное спаривание*

$$K_m^{\mathrm{top}}(K)/l \times K_{n+1-m}^{\mathrm{top}}(K)/l \to \boldsymbol{Z}/l.$$

Доказательство. Случай $m = 0$ разобран выше (следствие 1 предложения 1 раздела 2 и замечание 3). В силу предложения 1 раздела 2 и l-делимости группы $\mathscr{E}_K$ группа $K_m^{\mathrm{top}}(K)$ порождается элементами $(t_{i_1}, \ldots, t_{i_m})$ и $(\zeta, t_{i_1}, \ldots, t_{i_{m-1}})$, $i_1 < \ldots < i_m$. Покажем, что они линейно независимы. Если $m = 1$, то это так (см. (4) раздела 1). Образующие группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)/l$ можно сопоставить с образующими группы K^*/l. Именно

$$\begin{array}{cccc} (t_1, \ldots, t_n) & (\zeta, t_1, \ldots, t_{n-1}) & \ldots & (\zeta, t_2, \ldots, t_n). \\ \zeta & t_n & \ldots & t_1 \end{array}$$

Применяя наше спаривание (см. замечание 3), получаем, что и образующие в $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ независимы, а спаривание невырождено.

Рассмотрение дальнейших групп $K_m^{\mathrm{top}}(K)$ проходит индукцией вниз по m. Если утверждение доказано для m, то нужно обратиться к спариванию $K^* \times K_{m-1}^{\mathrm{top}}(K) \to K_m^{\mathrm{top}}(K)$. Это дает требуемое.

Следствие 1 (Двойственность Куммера). *Пусть K — локальное поле размерности n. Отображение $\lambda \circ a_K$: $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)/l \simeq \boldsymbol{Z}/l$ определяет непрерывное и невырожденное спаривание*

$$(\cdot, \cdot)_K\colon K_n^{\mathrm{top}}(K)/l \times K^*/l \to \boldsymbol{Z}/l.$$

Из доказательства предложения имеем также

Следствие 2. $\mathrm{rk}\, K_m^{\mathrm{top}}(K)/l = C_n^m + C_n^{m-1}$.

Оно использовалось в разделе 2 (предложение 3).

2. Двойственность Артина — Шрейера. Если снова обратиться к локальным полям размерности 1, то в случае $K = k((t))$ имеется символ

$$(x, y]_K = \mathrm{res}_K(yx^{-1}dx) \in k, \quad x \in K^*, \ y \in K, \tag{5}$$

играющий существенную роль в описании p-расширений поля K ([10, гл. XIV] и [15, 16]). Дадим теперь соответствующие определения для произвольных локальных полей.

Определение 3. *Пусть K — локальное поле размерности n, $\omega \in \Omega_{K/\boldsymbol{F}_q}^n$ и $t_1, \ldots, t_n$ — система параметров. Положим*

$$\mathrm{res}_K(\omega) = a(-1, \ldots, -1),$$

если

$$\omega = \Sigma a(a_1, \ldots, a_n)\, t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n.$$

Это обычное разложение ((1) раздела 1). Как показано в [2, 9], вычет $\mathrm{res}_K(\omega)$ не зависит от выбора системы параметров.

Определение 4. *Пусть* $x_1, \ldots, x_n \in K^*$, $y \in K$. *Положим*

$$(x_1, \ldots, x_n \mid y]_K = \mathrm{Tr}_{\boldsymbol{F}_q/\boldsymbol{F}_p} \circ \mathrm{res}_K\, (y x_1^{-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge x_n^{-1} dx_n).$$

При рассмотрении одного поля мы будем иногда опускать индекс K.

Предложение 4. *Символ* $(x_1, \ldots, x_n \mid y]_K$ *обладает следующими свойствами*:

1. $(x_1, \ldots, x_i' x_i'', \ldots, x_n \mid y]_K = (x_1, x_i' x_n \mid y]_K + (x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n \mid y]_K$
2. $(x_1, \ldots, x_n \mid y_1 + y_2]_K = (x_1, \ldots, x_n \mid y_1]_K + (x_1, \ldots, x_n \mid y_2]_K$.
3. $(x_1, \ldots, x_i, 1 - x_i, \ldots, x_n \mid y]_K = 0$.
4. $(x_1, \ldots, x_n \mid y]_K = 0$, *если* $x_i \in (K^*)^p$ *для некоторого* i.
5. $(x_1, \ldots, x_n \mid y^p]_K = (x_1, \ldots, x_n \mid y]_K^p$.
6. *Пусть*

$$x_i = \prod_{k=1}^{n} t_k^{m_{ik}}\, a_i \prod_{a_1, \ldots, a_n} (1 + a\,(a_1, \ldots, a_n)\, t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n})$$

— разложение (1) *и* (4) раздела 1 *и* $y = \Sigma b\,(b_1, \ldots, b_n)\, t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$. *Тогда при фиксированных числах* m_{ik} *символ* $(x_1, \ldots, x_n \mid y]_K$ *является многочленом от* $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$, $a\,(a_1, \ldots, a_n)$ *и* $b\,(b_1, \ldots, b_n)$ *с коэффициентами из* $\boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Свойства 1—4 очевидны. Свойство 5 для $n = 2$ получено в ([2, предложение 1.7 § 1]). Общий случай рассматривается аналогично. Последнее свойство непосредственно вытекает из определения вычета. Оно дает

Следствие. *Символ* $(x_1, \ldots, x_n \mid y]_K$ *непрерывен по каждому аргументу в топологии группы* K^* *и поля* K.

Предложение 5 (Двойственность Артина — Шрейера). *Пусть* K *— локальное поле размерности* n. *Символ* $(x_1, \ldots, x_n \mid y]_K$ *определяет непрерывное и невырожденное спаривание*

$$(\cdot \mid \cdot]_K \colon K_n^{\mathrm{top}}(K)/p \times K/(F - 1)\, K \to \boldsymbol{Z}/p,$$

где $F(x) = x^p$, $x \in K$.

Доказательство. Ввиду сказанного выше нужно проверить лишь невырожденность формы $(\cdot \mid \cdot]_K$. Найдем ее значения на образующих групп $K_n^{\mathrm{top}}(K)/p$ и $K/(F - 1)\, K$. Для этого предположим, что базисы поля $\boldsymbol{F}_q$ над $\boldsymbol{F}_p$, фигурирующие в разложении (4) и лемме 2 раздела 1, двойственны друг другу относительно билинейной формы $\mathrm{Tr}_{\boldsymbol{F}_q/\boldsymbol{F}_p}(ab)$ на $\boldsymbol{F}_q$. Тогда «образующими» в $K_n^{\mathrm{top}}(K)/p$ будут символы

$$(t_1, \ldots, t_n),\; e\,(a_1, \ldots, a_n) = (1 + a t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}, t_1, \ldots, \hat{t}_k, \ldots, t_n),$$

где индексы $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют условиям предложения 1 раздела 2 и его следствия 2. В $K/(F - 1)\, K$ имеются элементы $b_0 \in \boldsymbol{F}_q$, $\mathrm{Tr}_{\boldsymbol{F}_q/\boldsymbol{F}_p}(b_0) = 1$ и $b t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$ (лемма 2 раздела 1). Вычисления вычетов показывают, что

$$(t_1, \ldots, t_n \mid b_0]_K = 1, \tag{6}$$

$$(t_1, \ldots, t_n \mid b t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}]_K = 0, \tag{7}$$

$$(e\,(a_1, \ldots, a_n) \mid b_0]_K = 0, \tag{8}$$

$$(e\,(a_1, \ldots, a_n) \mid b t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}]_K = 0, \text{ если } (a_1, \ldots, a_n) \neq (-b_1, \ldots, -b_n). \tag{9}$$

Если же $(a_1, \ldots, a_n) = (-b_1, \ldots, -b_n)$, то

$$\operatorname{Tr}_{F_p/F_p} \circ \operatorname{res}_K \left(bt_1^{-a_1} \ldots t_n^{-a_n} \frac{d\,(at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n})}{1 + at_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}} \wedge \frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\widehat{dt_k}}{t_k} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \right) =$$

$$= \operatorname{Tr}_{F_q/F_p} \circ \operatorname{res}_K \left(abt_1^{-a_1} \ldots t_n^{-a_n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i t_1^{a_1} \ldots t_i^{a_i} \ldots t_n^{a_n} \frac{dt_i}{t_i} \right) \wedge \frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\widehat{dt_k}}{t_k} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \right) =$$

$$= \operatorname{Tr}_{F_q/F_p} (aba_k) = \delta_{ab} \cdot a_k. \qquad (10)$$

Это равно нулю, если $a \neq b$, и отлично от нуля (по определению индекса $k = k\,(a_1, \ldots, a_n)$, см. предложение 1 раздела 2) при $a = b$. Поскольку каждый элемент групп $K_n^{\text{top}}\,(K)/p$, $K/(F - 1)\,K$ обладает разложением по рассмотренным нами образующим (и в $K/(F - 1)\,K$ оно единственно), получаем невырожденность спаривания $(\cdot \mid \cdot]_K$. Одновременно мы имеем

Следствие. *Каждый элемент* $x \in K_n^{\text{top}}\,(K)$ *обладает лишь одним представлением в виде произведения* 3 *в* (9), *предложение* 1 *раздела* 2.

Замечание 4. Можно обобщить двойственность Артина—Шрейера на группы $K_m^{\text{top}}\,(K)$ для любого m. Именно, имеется спаривание

$$(\cdot|\cdot]_K : K_m^{\text{top}}\,(K)/p \times \Omega_K^{n-m}/(C - 1)\,\Omega_K^{n-m} \to Z/p,$$

где $C : \Omega_K^{n-m} \to \Omega_K^{n-m}$ — оператор Картье, и

$$(x_1, \ldots, x_m \,|\, \omega]_K = \operatorname{Tr}_{F_q/F_p} \circ \operatorname{res}_K (\omega \wedge x_1^{-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge x_m^{-1} dx_m).$$

Оно непрерывно и невырожденно.

3. Двойственность Витта. Для полей размерности 1 она развита Виттом в [16], ее применение к построению теории полей классов дано в [15]. Наша конструкция является непосредственным обобщением построений этих работ. Поскольку различие между общим случаем и случаем размерности 2 по существу отсутствует, мы ограничимся для простоты изложения этим последним.

Пусть A — произвольное поле характеристики 0 и $\tilde{K} = A((t_1)) \ldots \ldots ((t_n))$. Рассмотрим кольцо векторов Витта $W\,(\tilde{K})$ над $\tilde{K}$. Каждый элемент кольца $W\,(\tilde{K})$ имеет вид $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots), \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \in \tilde{K}$.

Если в поле $\tilde{K}$ имеется топология, то имеем естественную топологию в $W_m\,(\tilde{K})$.

Введем вспомогательные координаты

$$\mathbf{x}\,(m) = \mathbf{x}_0^{p^m} + p\mathbf{x}_1^{p^{m-1}} + \ldots + p^m \mathbf{x}_m, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Тогда имеем

$$\mathbf{x}_m = P_m (\mathbf{x}\,(0),\ \mathbf{x}\,(1), \ldots, \mathbf{x}\,(m)), \qquad m = 0, 1, \ldots, \qquad (11)$$

где P_m — многочлены с коэффициентами из $Z\,[p^{-1}]$. Сложение и умножение в кольце $W\,(\tilde{K})$ задается универсальными многочленами от переменных $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$ так, чтобы $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\,(m) = \mathbf{x}\,(m) + \mathbf{y}\,(m)$ и $(\mathbf{xy})\,(m) = \mathbf{x}\,(m)\,\mathbf{y}\,(m)$. При этом m-я компонента суммы и произведения зависит лишь от компонент векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с индексами $\leqslant m$. Более того,

$$W\,(\tilde{K}) = \varprojlim W_m\,(\tilde{K}),$$

где $W_m\,(\tilde{K})$ — кольцо, состоящее из векторов длины m. Более подробно см. [10, 16].

Пусть теперь $x, y \in \tilde{K}^*$, $\mathbf{z} \in W(\tilde{K})$. Положим ($n = 2$)

$$\mathbf{w}_m = P_m\left(\operatorname{res}_{\tilde{K}}\left(\mathbf{z}(0)\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y}\right), \quad \operatorname{res}_{\tilde{K}}\left(\mathbf{z}(1)\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y}\right), \ldots\right).$$

Тогда $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots) \in W(A)$.

Лемма 1. *Если*

$$x = t_2^m t_1^p (a_0 + a_1 t_2 + \ldots), \qquad a_i = a_{i0} + a_{i1} t_1 + \ldots, \qquad a_{00} \neq 0,$$
$$y = t_2^k t_1^q (b_0 + b_1 t_2 + \ldots), \qquad b_j = b_{j0} + b_{j1} t_1 + \ldots, \qquad b_{00} \neq 0,$$
$$\mathbf{z}_m = \sum_{i,j} c_{mij} t_1^i t_2^j$$

— разложения в поле $\tilde{K}$, то при фиксированных m, p, k, q компоненты $\mathbf{w}_m$ вектора $\mathbf{w}$ являются многочленами от a_{00}^{-1}, b_{00}^{-1}, a_{ik}, b_{jl}, c_{mij} с коэффициентами из $\mathbf{Z}$, не зависящими от поля A.

Доказательство. В силу конструкции вектор $\mathbf{w}$ зависит линейно от $\mathbf{z}$ и мультипликативно от x и y. Введем на векторах Витта две операции Ω_{t_1} и Ω_{t_2}. Именно, положим

$$\mathbf{z}'_m = \sum_{j>0} c_{mij} t_1^i t_2^j, \qquad \mathbf{z}''_m = \sum_{j<0} c_{mij} t_1^i t_2^j,$$
$$\Omega_{t_2}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathbf{z}' - \mathbf{z}''$$

и аналогично для Ω_{t_1}. Тогда если компоненты $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{m-1}$ не зависят от t_2, то это же верно для компонент $(\Omega_{t_2}\mathbf{z})_0, \ldots, (\Omega_{t_2}\mathbf{z})_m$. Аналогично, если $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{m-1}$ не зависят от t_1 и t_2, то $(\Omega_{t_1}\mathbf{z})_0, \ldots, (\Omega_{t_1}\mathbf{z})_m$ также не зависят от t_1 и t_2.

Докажем теперь лемму для случая $x = t_1$, $y = t_2$. В этой ситуации если $\mathbf{z}$ содержит лишь положительные степени t_2 или лишь отрицательные, то по определению вычета $\mathbf{w} = 0$. Это же верно по отношению к переменной t_1. Обозначим $\mathbf{w}$ как $(x, y, \mathbf{z})$. Тогда в силу сказанного

$$(t_1, t_2, \mathbf{z}) = (t_1, t_2, \mathbf{z}) - (t_1, t_2, \mathbf{z}') - (t_1, t_2, \mathbf{z}'') = (t_1, t_2, \Omega_{t_2}\mathbf{z}).$$

Итерируя этот процесс, получаем

$$(t_1, t_2, \mathbf{z}) = (t_1, t_2, \Omega_{t_2}^N \mathbf{z}),$$

где координаты $(\Omega_{t_2}^N \mathbf{z})_m$ не зависят от t_2 при $m < N$. Применяя затем Ω_{t_1}, находим, что

$$(t_1, t_2, \mathbf{z}) = (t_1, t_2, \Omega_{t_1}^M \Omega_{t_2}^N \mathbf{z}),$$

где координаты $(\Omega_{t_1}^M \Omega_{t_2}^N \mathbf{z})_m$ не зависят от t_1 и t_2. Следовательно,

$$(t_1, t_2, \mathbf{z})_m = (\Omega_{t_1}^M \Omega_{t_2}^N \mathbf{z})_m \text{ при } m < N, \ m < M,$$

что дает утверждение леммы.

Так как вычет инвариантен относительно замен параметров t_1 и t_2 в поле $\tilde{K}$, то лемма верна также и для любой пары t'_1, t'_2 параметров поля $\tilde{K}$. Но всегда можно записать x как $t_2^{m-1} t_1^p t'_2$, а y как $t_2^k t_1^{q-1} t'_1$ и, пользуясь мультипликативностью, свести все к разобранному случаю (на этом пути встретятся также выражения $(t_1, t'_1, \mathbf{z})$, $(t_2, t'_2, \mathbf{z})$, но они равны соответственно $(t_1, t_2 t_2'^{-1}, \mathbf{z})$, $(t_2, t_1 t_1'^{-1}, \mathbf{z})$.

Доказательство окончено. Вернемся теперь к полю $K = \boldsymbol{F}_q((t_1)) \ldots ((t_n))$ и обозначим через A поле отношений кольца $W(\boldsymbol{F}_q)$ и через $\tilde{f} \in \tilde{K}$ любой элемент кольца $W(\boldsymbol{F}_q)((t_1)) \ldots ((t_n))$, для которого $\tilde{f} \bmod p = f \in K$.

Определение 5. *Пусть* $x_0, \ldots, x_n \in K^*$, $\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1} \in K$. *Тогда*

$$(x_1, \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-1}) \in W_m(\boldsymbol{F}_q),$$

где

$$\mathbf{w}_i = P_i\,(\mathrm{res}_{\widetilde{K}}\,(\widetilde{\mathbf{y}}\,(0)\,x_1^{-1}dx_1 \wedge \ldots \wedge x_n^{-1}dx_n), \ldots, \mathrm{res}_{\widetilde{K}}\,(\widetilde{\mathbf{y}}\,(m-1)\,x_1^{-1}dx_1 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge x_n^{-1}dx_n)) \bmod p$$

и $\mathrm{res}_{\widetilde{K}}$ — *вычет в локальном поле* $\widetilde{K} = A\,((t_1))\ldots((t_n))$.

Тот факт, что значения многочленов P_i принадлежат подкольцу $W(\mathbf{F}_q)$ поля A, следует из леммы 1, так что переход к $\bmod\, p$ имеет смысл.

Для краткости будем иногда обозначать аргументы $x_1, \ldots, x_n$ через x, а $\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}$ через $\mathbf{y}$.

Предложение 6. *Символ* $(x_1, \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K$ *зависит только от структуры локального поля* K *и обладает следующими свойствами*:

1. $(x_1, \ldots, x_i'x_i'', \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}]_K = (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}]_K + (x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}]_K$.
2. $(x \,|\, (\mathbf{y}+\mathbf{z})_0, \ldots, (\mathbf{y}+\mathbf{z})_{m-1}]_K = (x \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K + (x \,|\, \mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{m-1}]_K$.
3. $(x_1, \ldots x_i, 1 - x_i, \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}]_K = 0$.
4. $(x_1, \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}]_K = 0$, *если* $x_i \in (K^*)^{p^m}$ *для некоторого* i.
5. $(x \,|\, \mathbf{y}_0^p, \ldots, y_{m-1}^p]_K = (\mathbf{w}_0^p, \ldots, \mathbf{w}_{m-1}^p)$, *если* $(x \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K = (\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_{m-1})$.
6. $(x \,|\, \mathbf{y}]_K$ — *непрерывен по каждому аргументу в топологии групп* K^* *и* $W_m(K)$.
7. $(x \,|\, \mathbf{0}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K = (\mathbf{0}, (x \,|\, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K)$.
8. $(x \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-2}]_K = (\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_{m-2})$, *если* $(x \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K = (\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_{m-1})$.

Доказательство. Если $B = W(\boldsymbol{F}_q)((t_1))\ldots((t_n))$, то всякая замена параметров в K поднимается до замены параметров в B и обычное доказательство инвариантности вычета дает независимость символа $(\cdot \,|\, \cdot]_K$ от выбора $t_1, \ldots, t_n$.

Свойства 1—3 очевидны.

Чтобы получить 4, заметим, что в поле $\widetilde{K}$

$$\mathrm{res}_{\widetilde{K}}\left(\widetilde{\mathbf{y}}(k)\,\frac{d\widetilde{x}_1^{p^m}}{\widetilde{x}_1^{p^m}} \wedge \frac{d\widetilde{x}_2}{\widetilde{x}_2} \wedge \ldots \wedge \frac{d\widetilde{x}_n}{\widetilde{x}_n}\right) = p^m\,\mathrm{res}_{\widetilde{K}}\left(\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)}\frac{d\widetilde{x}_1}{\widetilde{x}_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\widetilde{x}_n}{\widetilde{x}_n}\right),$$

и, следовательно, при переходе от вспомогательных переменных $\mathbf{w}(m)$ к $\mathbf{w}_m$ мы получим вектор $p^m\mathbf{w}$, равный 0 в $W_m(K)$.

Свойства 7 и 8 получаются также из формул перехода (11). В частности, из 7 имеем

$$(x \,|\, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{y}_{m-1}] = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, (x \,|\, y_{m-1}]),$$

и поскольку

$$(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}) = (\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-2}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{y}_{m-1}),$$

из 8 и предложения 4.5 индукцией по m выводим 5.

Непрерывность (свойство 6) есть очевидное следствие леммы 1.

Предложение 7 (Двойственность Витта). *Пусть* K — *локальное поле размерности* n. *Символ* $(x_1, \ldots, x_n \,|\, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K$ *определяет непрерывное и невырожденное спаривание*

$$(\cdot \,|\, \cdot]_K : K_n^{\mathrm{top}}(K)/p^m \times W_m(K)/(F-1)W_m(K) \to \boldsymbol{Z}/p^m,$$

где $F\,(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}) = (\mathbf{y}_0^p, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}^p)$.

Доказательство. Как и раньше, нужно проверить лишь невырожденность спаривания. Пусть

$$(x \mid \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}]_K = 0$$

для любых $(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}) \in W_m(K)$. Из предложения 6 (свойства 4 и 8) получаем, что $x = g^p$. Тогда

$$0 = (g^p \mid \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}] = p\,(g \mid \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}] = (\mathbf{0}, \mathbf{w}_0^p, \ldots, \mathbf{w}_{m-2}^p),$$

если $(g \mid \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}] = (\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_{m-1})$ (это известное соотношение $p = VF$ в кольце векторов Витта [10, 16]). Таким образом, можно провести индукцию по m.

Невырожденность по второму аргументу доказывается также индукцией с использованием разложения (3) и предложения 6.8.

Предложение доказано, и мы видим, что построенные нами символы обладают в точности теми же свойствами, что и аналогичные символы в одномерном случае. Можно рассмотреть, следовательно, индуктивный предел $\mathfrak{M}(K)$ групп $W_m(K)/(F-1)W_m(K)$ относительно отображений, переводящих $(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1})$ в $(\mathbf{0}, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1})$.

Стандартные рассуждения ([15, § 2, с. 373]) дают нам спаривание

$$K_n^{\mathrm{top}}(K) \times \mathfrak{M}(K) \to \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z},$$

невырожденное по второму аргументу. Его ядро по первому аргументу равно $\bigcap\limits_{m \geqslant 1} K_n^{\mathrm{top}}(K)^{p^m}$.

Ясно, что отображение c_K (см. (4)) аннулирует это ядро, а если воспользоваться предложением 3 и леммой 3 раздела 2, то получаем, что единственными элементами группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)$, принадлежащими ядру, суть произведения символов $(a, t_1, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n)$, $a \in \boldsymbol{F}_q^*$. Итак, ядро спаривания состоит из элементов кручения, простого с p. Поскольку в группе $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ нет p-кручения, получаем

Следствие. *Символы* $(\cdot \mid \cdot]_K$ *определяют непрерывное спаривание*

$$K_n^{\mathrm{top}}(K)/K_n^{\mathrm{top}}(K)_{\mathrm{tors}} \times \mathfrak{M}(K) \to \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}.$$

4. Перенос. Как мы видели в начале раздела 2, для любого конечного расширения полей L/K определено отображение переноса $N: K_2(L) \to K_2(K)$, удовлетворяющее, в частности, формуле проекции из раздела 2. На функтор Милнора $K_n^M(K)$ при $n > 2$ это определение непосредственно не переносится. Кроме того, нам нужен перенос на группах $K_n^{\mathrm{top}}(K)$, являющихся факторами групп $K_n^M(K)$ (определение 2 раздела 2). Чтобы преодолеть эти трудности, рассмотрим следующий обходной путь. Мы ограничимся расширением Галуа L/K.

Лемма 2. *Пусть L/K — циклическое расширение простой степени локального поля K размерности n. Тогда в L и K имеются системы параметров $s_1, \ldots, s_n$ и $t_1, \ldots, t_n$, для которых все $s_1, \ldots, s_n$, кроме одного, равны переменным $t_1, \ldots, t_n$.*

Доказательство. В силу общих свойств локальных полей (размерности 1 над $\overline{K}$) ([10, гл. 1, § 7]) имеются три возможности: 1) расширение L/K вполне разветвлено, т. е. $\overline{L} = \overline{K}$, 2) расширение L/K неразветвлено, и, следовательно, имеется согласованное вложение полей вычетов $\overline{L} \supset \overline{K}$ в L/K, и параметр t_n поля K будет входить в систему параметров для L; 3) расширение L/K имеет индекс ветвления 1 и $\overline{L}/\overline{K}$ — чисто несепарабельно степени p. В первых двух случаях требуемое свойство очевидно. В третьем нужно заметить, что параметр t_n сохраняется, как и в случае 2, и применить лемму 1 раздела 1.

Из предложения 1 раздела 2 и доказанной леммы вытекает, что в циклическом расширении L/K элементы группы $K_n^{\text{top}}(L)$ являются произведениями элементов вида

$$(x, y, x_1, \ldots, x_{n-2}), \quad (x, y) \in K_n^{\text{top}}(L), \ x_1, \ldots, x_{n-2} \in K^*. \tag{12}$$

Определение 6. *Пусть L/K — конечное расширение Галуа, $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_m = K$ — башня циклических расширений простой степени. Если L/K — циклическое расширение и $x \in K_n^{\text{top}}(L)$ имеет вид* (12), *то положим*

$$N(x) = (N(x, y), x_1, \ldots, x_{n-2}) \in K_n^{\text{top}}(K).$$

Для произвольного L/K определим $N : K_n^{\text{top}}(L) \to K_n^{\text{top}}(K)$ как композицию отображений переноса для циклических расширений в башне $L_0 \supset L_1 \supset \ldots \ldots \supset L_m$.

Отметим, что такая башня всегда существует (следствие предложения 1 раздела 1).

Предложение 8. *Отображение переноса $N : K_n^{\text{top}}(L) \to K_n^{\text{top}}(K)$ определено корректно. Оно не зависит от выбора башни и представлений* (12). *Для любого конечного расширения Галуа L/K справедливы следующие соотношения*:

1. $(N(x), y)_K = (x, y)_L, \quad x \in K_n^{\text{top}}(L), \quad y \in K^*.$
2. $(x, N(y))_K = (x, y)_L, \quad x \in K_n^{\text{top}}(K), \quad y \in L^*.$
3. $(N(x) \mid \mathbf{y}]_K = (x \mid \mathbf{y}]_L, \quad x \in K_n^{\text{top}}(L), \quad \mathbf{y} \in W_m(K).$
4. $(x \mid \mathrm{Tr}(\mathbf{y})]_K = (x \mid \mathbf{y}]_L, \quad x \in K_n^{\text{top}}(K), \quad \mathbf{y} \in W_m(L).$

Здесь $\mathrm{Tr} : W_m(L) \to W_m(K)$ — обобщение следа, см. [15, § 2]. Соотношения 2 и 4, конечно, никак не связаны с переносом и будут разобраны по ходу доказательства.

Доказательство. Пусть B и A — абелевы группы, и мы хотим построить отображение f: $B \to A$. При этом имеются еще абелевы группы B' и A' и невырожденные спаривания

$$(\cdot, \cdot)_A: A \times A' \to \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}, \qquad (\cdot, \cdot)_B: B \times B' \to \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$$

и отображение $f' : A' \to B'$. Требуется, чтобы отображение $f : B \to A$ удовлетворяло соотношению $(f(b), a')_A = (b, f'(a'))_B$, т. е. было бы сопряжено к f'. Ясно, что этим условиям удовлетворяет не более одного f. Кроме того, если $M \subset B$ — подмножество, порождающее группу B, и

$$\forall b \in M \quad \exists a \in A \quad \forall a' \in A' \qquad (b, f'(a'))_B = (a, a')_A,$$

то отображение f существует.

Применим эти соображения в ситуации, когда $B = K_n^{\text{top}}(L)$, $A = K_n^{\text{top}}(K)$, L/K — циклическое расширение простой степени и $f = N$ — перенос, который мы хотим построить. Возьмем в качестве M множество символов вида (12), а в качестве B' и A' — соответствующие группы теорий Куммера и Артина—Шрейера (в зависимости от степени $[L : K]$). Из следствия предложения 3 и предложения 5 находим, что достаточно доказать соотношения 1 и 3 для символов (12).

Соотношения 1 (а также 2) проверяются элементарным образом на образующих групп $K_n^{\mathrm{top}}(L)/l$ и $K_n^{\mathrm{top}}(K)/l$ для куммеровых расширений (см. символы, указанные в доказательстве предложения 3). Перенос вычисляется при этом с помощью леммы 1 раздела 2. Можно рассуждать иначе и воспользоваться первой диаграммой (5) раздела 2 и предложением 2 раздела 3.

Формулы (3) и (4) получаются из случая $m = 1$ индукцией по m с применением предложения 6 (свойства 7 и 8). Если $m = 1$, то входящий в (3) перенос можно вычислить явно с помощью следующего результата:

Л е м м а 3. *Пусть L/K — конечное сепарабельное расширение поля K. Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} K_2(L) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^2_{L/K} \\ N\downarrow & & \mathrm{Tr}\downarrow \\ K_2(K) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^2_{K/h} \end{array},$$

где N — перенос, δ — отображение Тейта (см. (8) раздела 2) *и* Tr — *след, коммутативна.*

Требуемое утверждение вытекает тогда из того факта, что $\mathrm{Tr}(y\omega) = y\,\mathrm{Tr}(\omega)$, $y \in K$, $\omega \in \Omega^n_{L/k}$ и следующего общего свойства вычета.

Л е м м а 4. *Пусть L/K — конечное сепарабельное расширение локального поля K размерности n, l и k — последние поля вычетов полей L и K, $\omega \in \Omega^n_{L/l}$. Тогда*

$$\mathrm{Tr}_{l/k}(\mathrm{res}_L(\omega)) = \mathrm{res}_K(\mathrm{Tr}\ \omega),$$

где $\mathrm{Tr}: \Omega^n_{L/l} \to \Omega^n_{K/h}$ — *след.*

Этим завершается построение переноса для циклических расширений. Независимость от выбора башни также вытекает из двойственности.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Используем лемму 1 раздела 2. Для любого $y \in K_2L$ имеем

$$\delta\left(\sum_{\sigma}\beta(y)^{\sigma'}\right) = \sum_{\sigma}\delta\circ\beta(y)^{\sigma'} = \sum_{\sigma} j\circ\delta(y)^{\sigma'} = j\circ i(\mathrm{Tr}(\delta(y))),$$

где $i: \Omega^2_K \to \Omega_L$ и $j: \Omega^2_L \to \Omega^2_M$ — естественные вложения и $\delta\circ(\beta\circ\alpha(Ny)) = j\circ\delta\circ\alpha(Ny) = j\circ i\circ\delta(N(y))$. Это дает требуемое, ибо $j\circ i$ — вложение.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 4. Можно, как и выше, свести лемму к случаю циклического расширения простой степени L/K. Далее, надо разобрать встретившиеся в доказательстве леммы 2 три возможности. В первых двух существует вложение поля вычетов $\bar{L}$ в L, согласованное с вложением $\bar{K}$ в K, и можно рассуждать индукцией по $\dim K$, используя лемму 5 из гл. 2 [17]. Последняя лемма является как раз нашей леммой для полей размерности 1. Последний случай, когда расширение $\bar{L}/\bar{K}$ — чисто несепарабельно, требует прямых вычислений. Мы проведем их для двумерного случая.

В силу теории Артина—Шрейера и леммы 2 раздела 1 $L = K(x)$, где

$$x^p - x = \lambda = at_1^i t_2^{-k} + \ldots \in K, \qquad k > 0.$$

Так как L/K неразветвлено относительно нормирования v_K, t_2 — параметр и для поля L и если $v_L(x) = -m$, то $k = mp$. Полагая $y = t_2^m x$ и $\mu = t_2^k\lambda$, получаем $L = K(y)$ и

$$y^p - t_2^{m(p-1)}y = \mu = bt_1^i + \ldots \tag{13}$$

Так как p/k, то по лемме 2 раздела 1 $(i, p) = 1$ и заменой параметров поля K можно добиться того, чтобы $\mu = bt_1^i$. Пусть теперь $K' = \boldsymbol{F}_q((\mu))((t_2))$ и

L'/K' — расширение, задаваемое уравнением (13), т. е. $L' = K'(y)$. Имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \swarrow & & \searrow \\ K & & L', \\ \searrow & & \swarrow \\ & K' & \end{array}$$

в которой для расширений L/L' и K/K' лемма верна.

Отсюда выводим, что достаточно рассмотреть расширение L'/K', т. е. случай, когда в (13) $b = 1$, $i = 1$.

Заметим, что по построению $y \in O_L$ и $L = \boldsymbol{F}_q((y))((t_2))$. Пусть $\omega = y^i t_2^j dt_1 \wedge dt_2$. Тогда

$$\mathrm{res}_L(\omega) = \mathrm{res}_L(-y^i t_2^{j+m(p-1)} dy \wedge dt_2) = \begin{cases} -1, & i = 1,\ j = -m(p-1) - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{res}_K(\mathrm{Tr}\,\omega) = \mathrm{res}_K(\mathrm{Tr}\,(y^i)\, t_2^j dt_1 \wedge dt_2).$$

Это равно 0 при $i \geqslant 0$ (ибо $\mathrm{Tr}\,(y^i) \in O_K$), равно -1 при $i = -1$, $j = -m(p-1) - 1$ ($\mathrm{Tr}\,(y^{-1}) = -t_1^{-1} t_2^{m(p-1)}$) и 0 при $i = -1$ и $j \neq -m(p-1) - 1$. Если же $i < -1$, то имеем из (13) рекуррентное соотношение

$$\mathrm{Tr}\,(y^{-i}) = t_1^{-1}\mathrm{Tr}\,(y^{p-i}) - t_1^{-1} t_2^{m(p-1)}\,\mathrm{Tr}\,(y^{-i+1}).$$

Кроме того, $\mathrm{Tr}\,(y^k) = \ldots = \mathrm{Tr}\,(y^{p-2}) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p-2$ (в силу формул Ньютона, выражающих степенные суммы через элементарные симметрические функции). Отсюда индукцией по i легко получаем, что $\mathrm{Tr}\,(y^{-i})$, $i > 1$, равен

$$P_0(t_1) + P_1(t_1)\, t_2 + \ldots,$$

где ряды $P_k(t_1)$ содержат лишь степени $t_1^{-2}, t_1^{-3}, \ldots,$ так что вычет формы $\mathrm{Tr}\,(\omega)$ равен нулю при $i < -1$.

Лемма доказана. (См. также [9]).

Пусть $x \in W_m(K)$ и $(F-1)\, y = x$, $y \in W_m(K^{ab})$. Тогда $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}\,(K^{ab}/K)$ $(F-1)(\sigma(y) - y) = 0$ и, следовательно, $\sigma(y) - y \in W_m(\boldsymbol{F}_p)$. Это дает характер группы $\mathrm{Gal}\,(K^{ab}/K)$ со значениями в $\boldsymbol{Z}/p^m$. Переходя с помощью предложения 7 к двойственной группе, получаем для любого расширения Галуа степени p^m отображение φ_K: $W_m(K) \to \mathrm{Gal}\,(L/K)$.

Л е м м а 5. *Для любого циклического расширения L/K степени p^m последовательность*

$$K_n^{\mathrm{top}}(L) \xrightarrow{N} K_n^{\mathrm{top}}(K) \xrightarrow{\varphi_K} \mathrm{Gal}\,(L/K) \to 1$$

точна.

Д о к а з а т е л ь с т в о будет дано в отдельной работе.

4. Теория полей классов

Теперь у нас имеется все необходимое для доказательства основного результата этой работы.

Т е о р е м а 1. *Пусть K — локальное поле размерности n. Существует такое каноническое отображение*

$$\varphi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to \mathrm{Gal}\,(K^{ab}/K),$$

что

1. $\mathrm{Ker}\,\varphi_K = (1)$ *и* $\mathrm{Im}\,\varphi_K$ — *плотная подгруппа в* $\mathrm{Gal}\,(K^{ab}/K)$.

2. *Для любого абелева расширения L/K последовательность*

$$K_n^{\mathrm{top}}(L) \xrightarrow{N} K_n^{\mathrm{top}}(K) \xrightarrow{\varphi_K} \mathrm{Gal}(L/K) \to 1$$

точна.

3. *Для любого конечного сепарабельного расширения L/K естественные диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} K_n^{\mathrm{top}}(L) & \xrightarrow{\varphi_L} & \mathrm{Gal}(L^{ab}/L) \\ \uparrow & & \uparrow V \\ K_n^{\mathrm{top}}(K) & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_n^{\mathrm{top}}(L) & \xrightarrow{\varphi_L} & \mathrm{Gal}(L^{ab}/L) \\ N\downarrow & & \downarrow \\ K_n^{\mathrm{top}}(K) & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K), \end{array}$$

где V — теоретико-групповое отображение переноса, коммутативны.

4. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} K_n^{\mathrm{top}}(K) & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \\ & & \downarrow \\ \partial\Big\downarrow & & \mathrm{Gal}(K_{et}^{ab}/K) \\ & & \| \\ K_{n-1}^{\mathrm{top}}(\overline{K}) & \xrightarrow{\varphi_{\overline{K}}} & \mathrm{Gal}(\overline{K}^{ab}/\overline{K}) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. В силу предложения 1 раздела 1 поле K^{ab}/K содержит следующие подполя:

$L_0 = K\overline{F}_q$, $\overline{F}_q$ — алгебраическое замыкание поля F_q,

$$L_1 = K(\sqrt[q-1]{t_1}, \ldots, \sqrt[q-1]{t_n}),$$

L_2 — максимальное абелево p-расширение, причем поле L_1 линейно разделено с L_0 и L_2, а поля L_0 и L_2 пересекаются очевидным образом. Пусть G_0, G_1, G_2 — соответствующие группы Галуа.

Группа $G_0 \cong \hat{\mathbf{Z}}$ содержит каноническую образующую — автоморфизм Фробениуса Fr. Определим

$$\varphi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to G_0,$$

полагая $\varphi_K(x_1, \ldots, x_n) = (\mathrm{Fr})^{c_K(x_1, \ldots, x_n)}$, где c_K — символ (4) раздела 3.

Расширение L_1/K куммерово и в силу теории Куммера группа G_1 двойственна группе $K^*/q - 1$. Пусть

$$\varphi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to G_1.$$

— отображение, возникающее из двойственности Куммера (следствие 1 предложения 3 раздела 3).

К расширению L_2/K применима теория Артина—Шрейера—Витта. Поэтому группа G_2 двойственна дискретной группе $\mathfrak{M}(K)$ из раздела 3.3. Двойственность Витта (следствие предложения 7 раздела 3) дает отображение

$$\varphi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to G_2.$$

Отображения в группы G_0 и G_2 согласованы друг с другом (это вытекает из явного вычисления их на образующей $(t_1, \ldots, t_n)$ группы $K_n^{\mathrm{tor}}(K)$ с помощью формул (6) — (10). В силу внутреннего характера двойственностей, построенных в разделе 3, отображения зависят только от структуры локального поля в K, и их можно склеить в единое отображение $\varphi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$. Невырожденность спариваний раздела 3 дает свойство 1 теоремы.

Проверку свойства 2 можно провести отдельно в расширениях Куммера и Артина—Шрейера—Витта. В этих случаях точность последовательностей вытекает из предложения 8 раздела 3.4 и стандартных точных последовательностей. Именно, в куммеровом случае достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathrm{Gal}(L_{\mathrm{sep}}/L), \boldsymbol{Z}/l) & \leftarrow & H^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K), \boldsymbol{Z}/l) & \leftarrow & H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \boldsymbol{Z}/l). \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\cong \\ L^*/l & \xleftarrow{i} & K^*/l & \longleftarrow & \mathrm{Ker}\, i \end{array}$$

Точность верхней строки дает точность в нижней, и, переходя к группам $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ и $K_n^{\mathrm{top}}(L)$ (предложение 8 раздела 3.4), получаем требуемое (точность в свойстве 2 вытекает из предложения 3 (лемма 5 раздела 3)).

Расширения Артина—Шрейера рассматриваются аналогично. Эти же соображения дают свойство 3.

Чтобы доказать последнее свойство, нужно рассмотреть абелево неразветвленное расширение L/K и проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K_n^{\mathrm{top}}(K) & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathrm{Gal}(L/K) \\ \partial\downarrow & & \downarrow\cong \\ K_{n-1}^{\mathrm{top}}(\overline{K}) & \xrightarrow{\varphi_{\overline{K}}} & \mathrm{Gal}(\overline{L}/\overline{K}) \end{array}.$$

Это можно сделать, опять-таки обращаясь к расширениям двух типов, используя предложение 2 раздела 2. Считая $\overline{K}$ подполем в K и согласованно выбирая систему параметров, видим, что куммеровы расширения L/K порождаются $\sqrt[n]{a}$, $a \in \overline{K}^*$, а расширения Артина—Шрейера — элементом x с $x^p - x = b \in \overline{K}$. Диаграмма легко вычисляется, если использовать явный вид двойственности для расширений L_α/K, у которых a или b является «образующей» соответственно группы $\overline{K}^*/l$ или $\overline{K}/(F-1)\overline{K}$ (см. предложение 4 и лемму 2 раздела 1). Поскольку

$$\bigcap_\alpha \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Gal}\,(L/K) \to \mathrm{Gal}\,(L_\alpha/K)] = (1),$$

если L — максимальное абелево расширение, то получаем требуемое свойство.

Теорема доказана.

Замечание 1. Так как предложение 3 раздела 2 полностью описывает группу $K_n^{\mathrm{top}}(K)$, то теорема 1 не только содержит теорию полей классов для поля K, но и дает полное вычисление группы Галуа максимального абелева расширения. Она является проконечным пополнением дискретной группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)$. Таким образом, в компактной группе $\mathrm{Gal}\,(K^{\mathrm{ab}}/K)$ выделяется подгруппа, зависящая лишь от структуры локального поля K. Если $\dim K = 0$, то $K_0^{\mathrm{top}}(K) = \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \hat{\boldsymbol{Z}} = \mathrm{Gal}\,(K^{\mathrm{ab}}/K)$.

Замечание 2. В случае $\dim K = 1$ можно дополнить теорему 1 сведениями о поведении функции φ_K относительно фильтрации $\{1 + \mathfrak{p}^k\}$ [10, гл. XV]. Аналогичный вопрос для $\dim K > 1$ остается открытым. Частичный ответ для $\dim K = 2$ получен в [8, 9].

Замечание 3. Расширения локального поля K, не имеющие высшего ветвления (относительно v_K), описываются с помощью группы $K_n^{\mathrm{top}}(K)/K_n^{\mathrm{top}}(O_K, \mathfrak{p})$ (см. формулу (13) и следствие 1 предложения 1 раздела 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паршин А. Н.* Поля классов и алгебраическая K-теория.— Успехи мат. наук, 1975, т. 30, вып. 1, с. 253—254.
2. *Паршин А. Н.* К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты. — Изв. АН СССР. Сер мат., 1976, т. 40, с. 736—773.
3. *Паршин А. Н.* Абелевы накрытия арифметических схем.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 4, с. 855—858.
4. *Kato K.* A generalization of local class field theory by using K-groups. I.— Proc. Jap. Acad., 1977, vol. 53, p. 140—143.
5. *Kato K.* A generalization of local class field theory by using K-groups. II.— Proc. Jap. Acad., 1978, vol. 54, p. 250—255.
6. *Kato K.* A generalization of local class field theory by using K-groups. I.— J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, 1979, vol. 26, p. 303—376.
7. *Kato K.* The Existence theorem for higher local class field theory: Prepr. Bures sur Yvette, 1980.
8. *Ломадзе В. Г.* К теории ветвления двумерных локальных полей.— Мат. сб., 1979, т. 109, № 3, с. 378—394.
9. *Ломадзе В. Г.* Многомерные локальные поля и их применения: Дис.... канд. физ.-мат. наук, М.: МИАН, 1981.
10. *Serre J. P.* Corps locaux. P.: Hermann, 1968.
11. Algebraic K-theory. II.— Lect. Notes Math., 1973, vol. 342.
12. *Милнор Дж.* Алгебраическая K-теория и квадратичные формы.— В кн.: Математика: Сб. переводов, 1971, т. 15, № 4, с. 3—27.
13. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую K-теорию. М.: Мир, 1974.
14. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Физматгиз, 1958.
15. *Kawada Y.*, *Satake I.* Class formations. II.— J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1956, vol. 7, p. 353—389.
16. *Witt E.* Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n .— J. reine und angew. Math., 1936, Bd. 176, S. 126—140.
17. *Серр Ж. П.* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.