А. А. Горшков, С. В. Востоков, С. М. Власьев

РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p-х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным.* Эта задача была решена З.И. Боревичем в работе [3]. Основной результат этой работы, доказательство которого было упрощено Д.К. Фадеевым, является следующим.

Теорема 0.1. (З.И. Боревич, 1962). Для того, чтобы локальное поле K было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы показатель ветвления e расширения $K/\mathbb{Q}_p$ не делился на $p-1$.

Встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, то есть содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geqslant 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается в первом параграфе работы.

Задача о регулярных и вполне регулярных полях возникает в арифметике формальных модулей и она решается во втором параграфе настоящей работы.

1 Пример поля K, которое содержит ζ_p, но $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено

K — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),
ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
e — абсолютный индекс ветвления поля K,
$\mathfrak{R}$ — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K,
$\mathfrak{O}$ — кольцо целых подполя инерции T в $K/\mathbb{Q}_p$,
$E(f(X)) = exp(1+\frac{\Delta}{p}+\frac{\Delta^2}{p^2}+\ldots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$, для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления делится на p.

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K.

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1-\zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 1.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^*. Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\underline{\zeta}(X) = (1 - X^p)^p$.

В работе [3] было доказано, что $\omega(a) - p$ — примарный элемент поля K (то есть расширение $K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K, $(,)_p : K^* \times K^* \to \langle\zeta_p\rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1-\theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{R}, 1 \leqslant b < p^2, p \nmid b\}$ и корень ζ_p, тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p\nmid b\\ 1\leqslant b\leqslant p^2}} (1-\theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \tag{1}$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \mod p. \tag{2}$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p. Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1-\alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = 1, p \nmid b. \tag{3}$$

Действительно, $1 = (\theta\Pi^b, 1-\theta\Pi^b) = (\theta, 1-\theta\Pi^b)\cdot(\Pi, 1-\theta\Pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{R}$, так как группа $\mathfrak{R}$ p-делима. Значит, $(\Pi, 1-\theta\Pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$(\Pi, \zeta_p) = (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p\nmid b\\ 1\leqslant b\leqslant p^2}} (1-\theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} =$$

$$= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{то есть}$$

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{a\beta}. \tag{4}$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [**?**, 12]). Пусть $l(1+f(X)))$ — обратная функция к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [**?**, §1, п. 1].: $l(1+f(X)) = (1-\frac{\Delta}{p})\log(1+f(X))$ для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула $(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p - 1)}$. Вычислим для $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(X) = 1 - X^p$ $\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p - 1) \mod p$. Ясно, что

$$(1-\underline{\zeta}^p)^p - 1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \mod p \tag{5}$$

Кроме того, $l(\underline{\zeta}) = (1-\frac{\Delta}{p})\log(1-X^p) = \sum\limits_{p\nmid m}\frac{X^{pm}}{m} + \sum\limits_{m\geqslant 1}\frac{X^{p^{m+1}}-X^{p^m}}{p^m} = \sum\limits_{p\nmid m}\frac{X^{p^m}}{m}$. Среди степеней X^{pm}, $p\nmid m$ нет степени p^2, значит $(\Pi,\zeta_p)=1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p = \prod\limits_{\substack{p\nmid b\\ 1\leqslant b\leqslant p^2}}(1-\theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} \mod K^{*p}$. Пусть степень b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta,b}\not\equiv 0 \mod p$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p\in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $\zeta_p = 1-c\Pi^b$, где c — некоторая единица поля K, то есть $c = c_0+c_1\Pi+c_2\Pi^2+\ldots$, $c_i\in\mathbb{Z}_p$ и $p\nmid c_0$, $1\leqslant b<\frac{pe}{p-1}$, $p\nmid b$.

Несложно видеть, что расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. Действительно, ζ_p будет корнем многочлена $X+c\Pi^b-1$, тогда ζ_{p^2} будет корнем многочлена $X^p+c\Pi^b-1$. !!!! и что дальше??!!!!! □

2 Формальные модули в многомерном поле

2.1 Формулировка

Пусть K — полное многомерное поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательнось полей, $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_n = K$ таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p, и K_{i-1} — поле вычетов для K_i, $i\leqslant i\leqslant n$.
$(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = \pi)$ — система локальных параметров поля K,
$\mathfrak{o}$ — кольцо целых поля K относительно n-мерного нормирования,
$F(X,Y)$ — одномерная формальная группа над $\mathfrak{O}$.
Будем предполагать, что K — разнохарактеристическое полное многомерное поле, то есть $char K = 0$, $char K_{n-1} = p > 0$.

Пусть k — максимальное локальное поле в K (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$), для которого поле $E = k\{\{t_1\}\}\cdots\{\{t_{n-1}\}\}((\pi))$ содерижится в K.
Предполагаем, что K/E — конечное расширение, и кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}} F$ формальной группы F изоморфно кольцу целых $\mathfrak{O}_0$ подрасширения E_0 в E. Считаем при этом, что K/E_0 — конечное расширение.

Пусть $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots t_{n-1}^{(0)}, t_n^{(0)} = \pi_0)$ — система локальноых параметров поля E_0, $\pi\in k_0$.
$E_0 = k_0\{\{t_1^{(0)}\}\}\cdots\{\{t_{n-1}^{(0)}\}\}((\pi_0))$, причем k_0 — подполе k.
Пусть, далее L — расширение поля K с системой локальных параметров $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n = \Pi)$, и

$$-\pi_0 = T_1^{i_1}\cdots T_{n-1}^{i_{n-1}}\Pi^{e_n}\rho u, \qquad (*)$$

где ρ — представитель Тейхмюллера в L, u — главная единица поля L.

Предполагаем, что поле L — регулярно относительно формальной группы F, то есть ядро изогении $\mathrm{Ker}[\pi_0]$ не содрежится в L за исключением нуля.
$h := htF$ — высотра формальной группы F,
$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_L$ — максимальный идеал кольца целых поля L,
$F(\mathfrak{M})$ — формальный $\mathfrak{O}$-модуль на идеале $\mathfrak{M}$.

Будем называть поле L вполне регулярным относительно формальной группы F, если $\mathrm{Ker}[\pi_0]$ не содержится в любом неразветвтленном расширении M поля L.

В настоящей работе доказывается следующий результат

Теорема 2.1. Поле L является вполне регулярным относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда система индексов $(i_1, \ldots, i_{n-1}, e_n)$ делится на $p^h - 1$, то есть $i_k \vdots p^h - 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (см. (*)).

2.2 Вспомогательные результаты

Пусть $\xi \in \mathrm{Ker}[\pi_0]$, $\xi \neq 0$, $\xi \in K^{alg}$ — произвольный элемент ядра изогении $[\pi_0]$. $[\pi_0](X) = \pi_0 X \varepsilon(X) + X^{p^h}\theta r(X)$, где $\varepsilon(X), r(X) \in \mathfrak{O}_0[[X]]$, при этом $\varepsilon(X) \equiv r(X) \equiv 1 \mod X$, а θ — представитель система Тейхмюллера в кольце целых поля k_0. Ясно, что $\frac{[\pi_0](X)}{X} = \pi_0 \varepsilon_1(X)^{p^h-1} + (X r_1(X))^{p^h-1}\theta$, где $\varepsilon_1(X)^{p^h-1} = \varepsilon(X)$, $r_1(X)^{p^h-1} = r(X)$. Поэтому элемент ξ удовлетворяет уравнению $-pi_0 = (\xi\kappa(\xi))^{p^h-1}\theta$, где $\kappa(X) = \varepsilon_1(X)^{-1} r_1(X)$. Поэтому

$$L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{-\theta^{-1}\pi_0}). \tag{1}$$

Пусть $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$; $1 \leqslant b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$, Π — простой элемент в K, $\varepsilon = 1 + c\Pi^b$, c — единица в K.

Лемма 2.2. Пусть $\zeta_p \in K$, тогда $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ вполне разветвленно.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $X^p = \varepsilon$ и $X = Y + 1$, тогда

$$Y^p + c_p^{p-1} Y^{p-1} + \cdots + pY = c\Pi^b. \tag{*}$$

Пусть расширение $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ неразветвлено. Тогда, если корень уравнения (*) α — единица, то получим противоречие: $\mathfrak{v}_L(\alpha) = 0 \implies \mathfrak{v}(\alpha^p + \ldots + p\alpha) = 0$, но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \geqslant 1$. Здесь и далее $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$ — нормирование в поле $L = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$. Если $\mathfrak{v}(\alpha) \geqslant 1$, то есть два варианта.

1. $1 \leqslant \mathfrak{v}(\alpha) \leqslant \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + c_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \cdots + p\alpha) = \mathfrak{v}(\alpha^p) = p\mathfrak{v}(\alpha)$. Но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \not\equiv 0 \mod p$ — противоречие.

2. $\mathfrak{v}(\alpha) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + c_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \cdots + p\alpha) \geqslant \frac{pe}{p-1}$, так как $\mathfrak{v}(\alpha^p) = p\mathfrak{v}(\alpha) \geqslant \frac{pe}{p-1}$ и $\mathfrak{v}(p\alpha) = e+\mathfrak{v}(\alpha) \geqslant \frac{pe}{p-1}$. С другой стороны, $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Итак, предположение, что L/K неразветвлено приводит к противоречию. □

Следствие 2.3. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

2.3 Доказательство теоремы (2.1)

Доказательство. Пусть $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ делится на $p^h - 1$. Тогда

$$-\pi_0 = (T_1^{i'_1} \cdots T_{n-1}^{i'_{n-1}} \rho_1 u_1)^{p^h-1},$$

где $i'_k = \frac{i_k}{p^h-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$; $\rho_1^{p^h-1} = \rho$, $\rho \in \mathfrak{R}$; и $u_1^{p^h-1} = u$, где u_1 — главная единица в L. Отсюда и из (*) получаем $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{\theta^{-1}})$ и, значит, расширение L/K неразветвлено.

Если же $(i_1, \ldots, i_{n-1}, e_n)$ не делится на p^h-1, то $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{T_1^{i_1} \cdots T_{n-1}^{i_{n-1}}\Pi^{e_n}})$ и $L(\xi)/L$ поэтому разветвлено. □

Список литературы

[1] Fesenko I.B., Vostokov S.V, *Local Fields and Their Extensions*, Second edition, 2002.

[2] Востоков С.В, Волков П.П., Пак Г.К, *Символ Гильберта для многочленных формальных групп*, Зап. науч. сем. ПОМИ, том 400, 2012, стр. 127-132.

[3] Боревич З.И., *О регулярных локальных полях*, Вестник ЛГУ, 1962, стр. 142-145.

[4] Бенуа Д.Г., Востоков С.В. *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 191 (1991), стр. 9–23.

[5] Zhukov I. B., *Higher dimensional local fields*, Invitation to higher local fields, 2000, стр. 5-18.

[6] Honda T., *On the theory of commutative formal groups*, J. Math Soc. Japan, 1970, стр. 213-246.

[7] Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.