С. В. Востоков, С. М. Власьев
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

1 Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p-х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным.* Эта задача была решена З. И. Боревичем в работе [1]. Основной результат этой работы, доказательство которого было упрощено Д. К. Фаддеевым, является следующим.

Теорема 1.1. Пусть K — регулярное локальное поле. Расширение $K(\zeta)/K$, где $\zeta^p = 1$, $\zeta \neq 1$, будет неразветвленным тогда итолько тогда, когда индекс ветвления $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$ делится на $p-1$.

Встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, то есть содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geqslant 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается в первой части работы.

Задача о регулярных и вполне регулярных полях возникает в арифметике формальных модулей и она решается во второй части настоящей работы.

2 Вполне разветвленное $K(\zeta_{p^2})/K$ при нерегулярном K с индексом ветвления $p(p-1)$

K — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),
ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
e — абсолютный индекс ветвления поля K,
$\mathfrak{R}$ — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K,
$\mathfrak{O}$ — кольцо целых подполя инерции T в $K/\mathbb{Q}_p$,
$E(f(X)) = exp(1+\frac{\Delta}{p}+\frac{\Delta^2}{p^2}+\ldots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$, для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления e делится на p.

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K.

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1-\zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 2.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^*. Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\underline{\zeta}(X) = (1 - X^p)^p$.

В работе [2, §4, предложение 6] было доказано, что $\omega(a)$ — p-примарный элемент поля K (то есть расширение $K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K, $(,)_p : K^* \times K^* \to \langle\zeta_p\rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1 - \theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{R}, 1 \leqslant b < p^2, p \nmid b\}$, и корень ζ_p, тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leqslant b < p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \tag{1}$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \mod p. \tag{2}$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p. Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1 - \alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = 1, p \nmid b. \tag{3}$$

Действительно, $1 = (\theta\Pi^b, 1-\theta\Pi^b) = (\theta, 1-\theta\Pi^b)\cdot(\Pi, 1-\theta\Pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{R}$, так как группа $\mathfrak{R}$ p-делима. Значит, $(\Pi, 1-\theta\Pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$(\Pi, \zeta_p) = (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leqslant b < p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} =$$

$$= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{то есть}$$

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{a\beta}. \tag{4}$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [2, (12)]). Обозначим через $l(1 + f(X)))$ обратную функцию к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [2, §1, п. 1]:

$$l(1 + f(X)) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log(1 + f(X))$$

для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p - 1)}.$$

Вычислим значение $\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p-1) \mod p$ для $\underline{\zeta}=\underline{\zeta}(X)=1-X^p$. Ясно, что

$$(1-\underline{\zeta}^p)^p-1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \mod p. \tag{5}$$

Кроме того,

$$l(\underline{\zeta}) = (1-\frac{\Delta}{p})\log(1-X^p) =$$

$$= \sum_{p\nmid m} \frac{X^{pm}}{m} + \sum_{m\geqslant 1} \frac{X^{p^{m+1}} - X^{p^{m+1}}}{p^m} = \sum_{p\nmid m} \frac{X^{pm}}{m}.$$

Среди степеней X^{pm}, $p \nmid m$ нет степени p^2, поэтому

$$\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/-\underline{\zeta}^{p^2} \equiv 0 \mod p,$$

значит
$(\Pi, \zeta_p) = 1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p \equiv \prod\limits_{\substack{p\nmid b \\ 1\leqslant b<p^2}} (1-\theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} \mod K^{*p}$. Пусть степень b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta,b} \not\equiv 0 \mod p$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p \in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $K(\zeta_{p^2}) = K(\sqrt[p]{\zeta_p}) = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$, где $\varepsilon = 1-c\Pi^b$, а c — некоторая единица поля K, то есть $c = c_0 + c_1\Pi + c_2\Pi^2 + \ldots$, $c_i \in \mathbb{Z}_p$ и $p \nmid c_0$, $1 \leqslant b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$.

Таким образом $K(\zeta_{p^2})$ получается присоединением корня уравнения $X^p = \varepsilon$. Заменим переменную $X = Y+1$, тогда $Y^p + C_p^{p-1}Y^{p-1} + \cdots + pY = -c\Pi^b$. Пусть χ — корень последнего уравнения. Предположим, что $K(\zeta_{p^2})/K$ неразветвлено, тогда возможны три случая для нормирования $\mathfrak{v}(\chi) = \mathfrak{v}_{K(\zeta_{p^2})}(\chi)$.

1. $\mathfrak{v}(\chi) = 0$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \cdots + p\chi) = 0$, но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b > 0$.

2. $1 \leqslant \mathfrak{v}(\chi) \leqslant \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \cdots + p\chi) = \mathfrak{v}(\chi^p) = = p\mathfrak{v}(\chi)$ делится на p, но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b$ не делится на p.

3. $\mathfrak{v}(\chi) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \cdots + p\chi) \geqslant \frac{pe}{p-1}$, так как $\mathfrak{v}(\chi^p) = p\mathfrak{v}(\chi) > \frac{pe}{p-1}$ и $\mathfrak{v}(p\chi) = e + \mathfrak{v}(\chi) = \frac{pe}{p-1}$. Но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Мы предположили неразветвленность расширения $K(\zeta_{p^2})/K$ и получили противоречие.

Отсюда вытекает, что $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. $\square$

3 Формальные модули в многомерном поле

3.1 Формулировка

Пусть K — полное многомерное поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательнось полей, $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_n = K$ таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p, и K_{i-1} — поле вычетов для K_i, $i \leqslant i \leqslant n$.
$(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = \pi)$ — система локальных параметров поля K,
$\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля K относительно n-мерного нормирования,
$F(X,Y)$ — одномерная формальная группа над $\mathfrak{O}$.
Будем предполагать, что K — разнохарактеристическое полное многомерное поле, то есть $charK = 0$, $charK_{n-1} = p > 0$.

Пусть k — максимальное локальное поле в K (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$), для которого поле $E = k\{\{t_1\}\} \cdots \{\{t_{n-1}\}\}((\pi))$ содерижится в K.
Предполагаем, что K/E — конечное расширение, и кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}} F$ формальной группы F изоморфно кольцу целых $\mathfrak{O}_0$ подрасширения E_0 в E. Считаем при этом, что K/E_0 — конечное расширение.

Пусть $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots t_{n-1}^{(0)}, t_n^{(0)} = \pi_0)$ — система локальных параметров поля E_0, $\pi \in k_0$.
$E_0 = k_0\{\{t_1^{(0)}\}\} \cdots \{\{t_{n-1}^{(0)}\}\}((\pi_0))$, причем k_0 — подполе k.
Пусть, далее L — расширение поля K с системой локальных параметров $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n = \Pi)$, и

$$-\pi_0 = T_1^{i_1} \cdots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n} \rho u, \tag{*}$$

где ρ — представитель Тейхмюллера в L, u — главная единица поля L.

Предполагаем, что поле L — регулярно относительно формальной группы F, то есть ядро изогении $\mathrm{Ker}[\pi_0]$ не содрежится в L за исключением нуля.
$h := htF$ — высотра формальной группы F,
$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_L$ — максимальный идеал кольца целых поля L,
$F(\mathfrak{M})$ — формальный $\mathfrak{O}$-модуль на идеале $\mathfrak{M}$.

Будем называть поле L вполне регулярным относительно формальной группы F, если $\mathrm{Ker}[\pi_0]$ не содержится в любом неразветвтленном расширении M поля L.

В настоящей работе доказывается следующий результат

Теорема 3.1. Поле L является вполне регулярным относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда система индексов $(i_1, \ldots, i_{n-1}, e_n)$ делится на $p^h - 1$, то есть $i_k \vdots p^h - 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (см. (*)).

3.2 Вспомогательные результаты

Пусть $\xi \in \mathrm{Ker}[\pi_0]$, $\xi \neq 0$, $\xi \in K^{alg}$ — произвольный элемент ядра изогении $[\pi_0]$. $[\pi_0](X) = \pi_0 X \varepsilon(X) + X^{p^h}\theta r(X)$, где $\varepsilon(X), r(X) \in \mathfrak{O}_0[[X]]$, при этом $\varepsilon(X) \equiv r(X) \equiv 1 \mod X$, а θ — представитель система Тейхмюллера в кольце целых поля k_0. Ясно, что

$$\frac{[\pi_0](X)}{X} = \pi_0 \varepsilon_1(X)^{p^h-1} + (Xr_1(X))^{p^h-1}\theta,$$

где $\varepsilon_1(X)^{p^h-1} = \varepsilon(X)$, $r_1(X)^{p^h-1} = r(X)$. Поэтому элемент ξ удовлетворяет уравнению $-\pi_0 = (\xi æ(\xi))^{p^h-1}\theta$, где $æ(X) = \varepsilon_1(X)^{-1}r_1(X)$. Поэтому

$$L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{-\theta^{-1}\pi_0}). \tag{1}$$

Пусть $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$; $1 \leqslant b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$, Π — простой элемент в K, $\varepsilon = 1 + c\Pi^b$, c — единица в K.

Лемма 3.2. Пусть $\zeta_p \in K$, тогда $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ вполне разветвленно.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $X^p = \varepsilon$ и $X = Y + 1$, тогда

$$Y^p + C_p^{p-1}Y^{p-1} + \cdots + pY = c\Pi^b. \tag{*}$$

Пусть расширение $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ неразветвлено. Тогда, если корень уравнения (*) α — единица, то получим противоречие: $\mathfrak{v}_L(\alpha) = 0 \implies \mathfrak{v}(\alpha^p + \ldots + p\alpha) = 0$, но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \geqslant 1$. Здесь и далее $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$ — нормирование в поле $L = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$. Если $\mathfrak{v}(\alpha) \geqslant 1$, то есть два варианта.

1. $1 \leqslant \mathfrak{v}(\alpha) \leqslant \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + C_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \cdots + p\alpha) = p\mathfrak{v}(\alpha)$. Но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \not\equiv 0 \mod p$ — противоречие.

2. $\mathfrak{v}(\alpha) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + C_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \cdots + p\alpha) \geqslant \frac{pe}{p-1}$. С другой стороны, $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Итак, предположение, что L/K неразветвлено приводит к противоречию. □

Следствие 3.3. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

3.3 Доказательство теоремы (3.1)

Доказательство. Пусть $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ делится на $p^h - 1$. Тогда

$$-\pi_0 = (T_1^{i'_1} \cdots T_{n-1}^{i'_{n-1}} \rho_1 u_1)^{p^h-1},$$

где $i'_k = \frac{i_k}{p^h-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$; $\rho_1^{p^h-1} = \rho$, $\rho \in \mathfrak{R}$; и $u_1^{p^h-1} = u$, где u_1 — главная единица в L. Отсюда и из (*) получаем $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{\theta^{-1}})$ и, значит, расширение L/K неразветвлено.

Если же $(i_1, \ldots, i_{n-1}, e_n)$ не делится на $p^h - 1$, то $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{T_1^{i_1} \cdots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n}})$ и $L(\xi)/L$ поэтому разветвлено. □

Список литературы

[1] З. И. Боревич, «О регулярных локальных полях», *Вестник ЛГУ*, 1962, с. 142—145.

[2] С. В. Востоков, «Явная формула закона взаимности», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1288—1321.