

С. В. Востоков, С. М. Власьев
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ
В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

1 Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p -х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным*. Эта задача была решена З. И. Боровичем в работе [1]. Основным результатом этой работы, доказательство которого было упрощено Д. К. Фаддеевым, является следующий.

Теорема 1.1. Пусть K — регулярное локальное поле. Расширение $K(\zeta)/K$, где $\zeta^p = 1$, $\zeta \neq 1$, будет неразветвленным тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$ делится на $p - 1$.

Встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, то есть содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geq 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается в первой части работы.

Задача о регулярных и вполне регулярных полях возникает в арифметике формальных модулей и она решается во второй части настоящей работы.

2 Вполне разветвленное $K(\zeta_{p^2})/K$ при нерегулярном K с индексом ветвления $p(p - 1)$

K — локальное поле (конечное расширение \mathbb{Q}_p),
 ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
 e — абсолютный индекс ветвления поля K ,
 \mathfrak{R} — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K ,
 \mathfrak{O} — кольцо целых подполя инерции T в K/\mathbb{Q}_p ,
 $E(f(X)) = \exp(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$,
для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления e делится на p .

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K .

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1 - \zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 2.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^* . Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\zeta_p^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\zeta(X) = (1 - X^p)^p$.

В работе [2, §4, предложение 6] было доказано, что $\omega(a)$ — p -примарный элемент поля K (то есть расширение $K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K , $(,)_p : K^* \times K^* \rightarrow \langle \zeta_p \rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1 - \theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{A}, 1 \leq b < p^2, p \nmid b\}$, и корень ζ_p , тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b < p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \quad (1)$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p . Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1 - \alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = 1, p \nmid b. \quad (3)$$

Действительно, $1 = (\theta\Pi^b, 1 - \theta\Pi^b) = (\theta, 1 - \theta\Pi^b) \cdot (\Pi, 1 - \theta\Pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{A}$, так как группа \mathfrak{A} p -делима. Значит, $(\Pi, 1 - \theta\Pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leq k \leq p-1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$\begin{aligned} (\Pi, \zeta_p) &= (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b < p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} = \\ &= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{ то есть} \\ (\Pi, \zeta_p) &= \zeta_p^{a\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [2, (12)]). Обозначим через $l(1 + f(X))$ обратную функцию к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [2, §1, п. 1]:

$$l(1 + f(X)) = \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right) \log(1 + f(X))$$

для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{\text{res}_X X^{-1}l(\zeta)/((1-\zeta^p)^p-1)}.$$

Вычислим значение $\text{res}_X X^{-1}l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p-1) \pmod p$ для $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(X) = 1 - X^p$. Ясно, что

$$(1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \pmod p. \quad (5)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} l(\underline{\zeta}) &= \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right) \log(1 - X^p) = \\ &= \sum_{p \nmid m} \frac{X^{pm}}{m} + \sum_{m \geq 1} \frac{X^{p^{m+1}} - X^{p^{m+1}}}{p^m} = \sum_{p \nmid m} \frac{X^{pm}}{m}. \end{aligned}$$

Среди степеней X^{pm} , $p \nmid m$ нет степени p^2 , поэтому

$$\text{res}_X X^{-1}l(\underline{\zeta}) / -\underline{\zeta}^{p^2} \equiv 0 \pmod p,$$

значит

$(\Pi, \zeta_p) = 1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p \equiv \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b < p^2}} (1 - \theta \Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} \pmod{K^{*p}}$. Пусть степень

b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta,b} \not\equiv 0 \pmod p$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p \in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $K(\zeta_{p^2}) = K(\sqrt[p]{\zeta_p}) = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$, где $\varepsilon = 1 - c\Pi^b$, а c — некоторая единица поля K , то есть $c = c_0 + c_1\Pi + c_2\Pi^2 + \dots$, $c_i \in \mathbb{Z}_p$ и $p \nmid c_0$, $1 \leq b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$.

Таким образом $K(\zeta_{p^2})$ получается присоединением корня уравнения $X^p = \varepsilon$. Заменим переменную $X = Y + 1$, тогда $Y^p + C_p^{p-1}Y^{p-1} + \dots + pY = -c\Pi^b$. Пусть χ — корень последнего уравнения. Предположим, что $K(\zeta_{p^2})/K$ неразветвлено, тогда возможны три случая для нормирования $\mathfrak{v}(\chi) = \mathfrak{v}_{K(\zeta_{p^2})}(\chi)$.

1. $\mathfrak{v}(\chi) = 0$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \dots + p\chi) = 0$, но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b > 0$.
2. $1 \leq \mathfrak{v}(\chi) \leq \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \dots + p\chi) = \mathfrak{v}(\chi^p) = p\mathfrak{v}(\chi)$ делится на p , но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b$ не делится на p .
3. $\mathfrak{v}(\chi) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \dots + p\chi) \geq \frac{pe}{p-1}$, так как $\mathfrak{v}(\chi^p) = p\mathfrak{v}(\chi) > \frac{pe}{p-1}$ и $\mathfrak{v}(p\chi) = e + \mathfrak{v}(\chi) = \frac{pe}{p-1}$. Но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Мы предположили неразветвленность расширения $K(\zeta_{p^2})/K$ и получили противоречие.

Отсюда вытекает, что $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. \square

3 Формальные модули в многомерных локальных полях

В этом разделе формальный модуль будет строиться только для формальной группы Хонды высоты h .

Пусть поле K — полное многомерное (n -мерное) поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательность полей,

$$K_0, K_1, \dots, K_{n-1}, K_n = K$$

таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p , а K_{i-1} — поле вычетов для K_i , $1 \leq i \leq n$.

В дальнейшем мы предполагаем, что последнее поле вычетов конечно. Также, следуя изложению работы [?], мы будем рассматривать только *стандартные* многомерные поля для интересующего нас разнохарактеристического случая n -мерного локального поля (то есть $\text{char} K = 0$, $\text{char} K_{n-1} = p > 0$). Последовательность полей тогда выглядит следующим образом:

$$\mathbb{F}_q - \mathbb{F}_q((t_1)) - \dots - \mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_{n-1})) - \\ - k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\} := K,$$

где k — конечное расширение поля \mathbb{Q}_p , а $q = \# \bar{k}$.

3.1 Случай двумерного локального поля для формальной группы Хонды

Чтобы не усложнять процедуру доказательства общей теоремы техническими выкладками, докажем её для двумерного поля

$$\mathbb{F}_p - \mathbb{F}_p((t_0)) - k\{\{t_0\}\} := K,$$

где k — конечное расширение \mathbb{Q}_p .

Пусть T — подполе инерции в k , $T' := T\{\{t_0\}\}$, $\mathcal{O}_{T'}$ — его кольцо целых относительно двумерного нормирования. Тогда имеем такую схему двумерных полей:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & T\{\{t_0\}\} = T' & \longrightarrow & k\{\{t_0\}\} = K \\ \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K \\ \{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, \pi\} \end{array}$$

Определим формальную группу Хонды над $\mathcal{O}_{T'}$. Для этого фиксируем эндоморфизм $\sigma : \mathcal{O}_{T'} \rightarrow \mathcal{O}_{T'}$, определенный следующим образом:

$$\sigma\left(\sum a_i t_0^i\right) = \sum a_i^{Fr} t_0^{p \cdot i}, \quad a_i \in \mathcal{O}_T,$$

и обладающий свойством:

$$\forall x \in \mathcal{O}_{T'} \quad \sigma(x) \equiv x^p \pmod{\mathcal{M}_{T'}},$$

где Fr — продолжение автоморфизма Фробениуса на T/\mathbb{Q}_p . Определим действие оператора Фробениуса на рядах из $\mathcal{O}'_T[[X]]$ следующим образом:

$$\Delta\left(\sum b_i x^i\right) = \sum \sigma(b_i) x^{p \cdot i}, \quad b_i \in \mathcal{O}_{T'}.$$

Множество операторов $\sum_{i \geq 0} b_i \Delta^i$, где $b_i \in \mathcal{O}_{T'}$, образуют некоммутативное кольцо $\mathcal{O}_{T'}[[\Delta]]$ формальных степенных рядов от Δ , для которого $\Delta b = \sigma(b) \Delta$ для $b \in \mathcal{O}_{T'}$. Формальная группа Хонды над $\mathcal{O}_{T'}$ с логарифмом $\log_F(X) \in T'[[X]]$ задается также, как и в параграфе ???. Пусть теперь $F(X, Y)$ — формальная группа Хонды над $\mathcal{O}_{T'}$ высоты h , $\text{End}_{\mathcal{O}_K} F \cong \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}$. Пусть поле L — расширение поля K такое, что $\text{Ker}_F[p]$ (без нуля) не содержится в L , $e = e(L/T') = (e_1, e_2)$ — 2-мерный индекс ветвления, $\{T_0, \Pi\}$ — система локальных параметров поля L .

Тогда T_0 и Π являются делителями t_0 и π соответственно. Диаграмма полей в этом случае выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_L \\ \{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, \pi\} & \longrightarrow & \{T_0, \Pi\} \end{array}$$

Теорема 3.1. Поле L (а значит и $F(\mathcal{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда первый индекс e_1 в 2-мерном индексе ветвления $e = (e_1, e_2)$ расширения L/T' не делится на $p^h - 1$.

Доказательство. Из определения высоты формальной группы следует, что

$$[p]_F(X) \equiv cX^{p^h} \pmod{(\pi_0, \deg(p^h + 1))}, \quad c \in \mathcal{O}_{T'}^*,$$

при этом c является рядом

$$c = c_0 + c_1\pi + \dots, \quad c_i \in \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}, \quad c_0 \in \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}^* \cap \mathcal{O}_{T'}^*,$$

то есть его коэффициенты сами являются рядами с коэффициентами из \mathbb{Z}_p . Однако обратимость c_0 в $\mathcal{O}_{T'}$ выполняется только в том случае, когда c_0 начинается со свободного коэффициента. Действительно, пусть

$$c_0 = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots, \quad m \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z}_p, a_m \in \mathbb{Z}_p^*$$

Пусть $a'_{m+k} = \frac{a_{m+k}}{a_m}$. Тогда

$$c_0 = a_m t^m (1 + a'_{m+1} t^{m+1} + \dots),$$

откуда

$$c_0^{-1} = a_m^{-1} t^{-m} (1 + a'_{m+1} t^{m+1} + \dots)^{-1}.$$

Этот ряд лежит в $\mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}^*$, но не лежит в $\mathcal{O}_{T'}^*$ и даже $\mathcal{O}_{T'}$, поскольку

$$\mathcal{O}_K = \{\alpha \mid \mathbf{v}_K(\alpha) \geq (0, 0)\},$$

а $\mathbf{v}_K(t^{-m}) = (-m, 0) < (0, 0)$. Таким образом, $m = 0$ и тогда

$$c = (\theta_{0,0} + \theta_{0,1}t + \dots) + (\theta_{1,0}t^{-m_1} + \dots)\pi + (\theta_{2,0}t^{-m_2} + \dots)\pi^2 + \dots,$$

где $\theta_{0,0} \in \mathbb{Z}_p^*$, $\theta_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$.

Далее действуем аналогично случаю одномерного поля. Переобозначим для удобства $K_0 := \mathbb{Q}_p\{\{t_0\}\}$.

По подготовительной лемме Вейерштрасса существует $\varepsilon(X) \in 1 + X\mathcal{O}_{K_0}[[X]]$ такой, что

$$f(x) := \frac{[p](X)}{X} \varepsilon(X) =$$

$$= p + pd_1X^1 + \dots + pd_{p^h-2}X^{p^h-2} + d_{p^h-1}X^{p^h-1},$$

где $d_{p^h-1} := d_{p^h-1}(X) \in \mathcal{O}_{T'}^*$.

Ясно, что

$$\text{Ker}[p]_F(X) = \text{Ker } f(X).$$

Далее, сводим присоединение корня π многочлена $f(X)$ к присоединению корня π' уравнения $X^{p^h-1} + p' = 0$, то есть имеем

$$L(\text{Ker}[p]_F) = L(\pi'),$$

где $p' = p \cdot d_{p^h-1}^{-1}$ — простой в K_0 .

1. Пусть первый индекс e_1 в двумерном индексе ветвления $(e_1, e_2) = e = e(L/T') = e(L/K_0)$ делится на $p^h - 1$, то есть $e_1 = (p^h - 1)e'$, и пусть Π — простой элемент в L . Тогда

$$-p' = \Pi^e \theta \eta,$$

где θ — представитель Тейхмюллера, а η — главная единица поля L . Тогда

$$\pi' = \sqrt[p^h-1]{-p'} = \Pi^{e'} \sqrt[p^h-1]{\theta} \eta_1,$$

где $\eta_1^{p^h-1} = \eta$ в L .

Поэтому расширение $L(\pi') = L(\sqrt[p^h-1]{\theta})$, а с ним и $L(\text{Ker}[p]_F)$ неразветвлено над L . Это значит, что $F(\mathcal{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2. Если же e_1 не делится на $p^h - 1$, то расширение $L(\pi') = L(\sqrt[p^h-1]{\pi^e \theta})$ будет разветвлено над L , откуда $F(\mathcal{M}_L)$ — вполне регулярный модуль.

□

3.2 Случай многомерного локального поля для формальной группы Хонды

В этом параграфе мы сформулируем общий результат для многомерных локальных полей без доказательства, чтобы не загружать работу техническими выкладками. Идейно оно ничем не отличается от двумерного случая.

Пусть k — конечное расширение \mathbb{Q}_p , T — подполе инерции в k . Рассмотрим стандартное n -мерное локальное поле K :

$$\mathbb{F}_q - \mathbb{F}_q((t_1)) - \dots - \mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_{n-1})) - \\ - k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\} := K.$$

Переобозначим для удобства $\mathbb{Q}_p' := \mathbb{Q}_p\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$, $T' := T\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$, $\mathbb{Z}_p' := \mathbb{Z}_p\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$.

Фиксируем эндоморфизм $\sigma : \mathcal{O}_{T'} \rightarrow \mathcal{O}_{T'}$, определенный следующим образом:

$$\sigma\left(\sum a_i t_1^{i_1} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}}\right) = \sum a_i^{Fr} t_1^{p^{i_1}} \dots t_{n-1}^{p^{i_{n-1}}}, \quad a_i \in \mathcal{O}_T,$$

и обладающий свойством:

$$\forall x \in \mathcal{O}_{T'} \quad \sigma(x) \equiv x^p \pmod{\mathcal{M}_{T'}},$$

где Fr — продолжение автоморфизма Фробениуса на T/\mathbb{Q}_p . Оператор Фробениуса и формальную группу Хонды определим также, как и в двумерном случае. Рассмотрим формальную группу Хонды $F(X, Y)$ над $\mathcal{O}_{T'}$ высоты h , $\text{End}_{\mathcal{O}_K} F \cong \mathbb{Z}'_p$. Пусть L — расширение поля K такое, что $\text{Ker}_F[p]$ (без нуля) не содержится в L , $e = e(L/T') = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — n -мерный индекс ветвления, \mathcal{M}_L — максимальный идеал кольца целых поля L , $F(\mathcal{M}_L)$ — формальный \mathcal{O}_L -модуль на идеале \mathcal{M}_L .

Пусть $\{T_1, \dots, T_{n-1}, T_n = \Pi\}$ — система локальных параметров поля L .

Диаграмма полей будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}'_p & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}'_p & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_L \end{array}$$

Теорема 3.2. Поле L (а значит и $F(\mathcal{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда первый индекс e_1 в n -мерном индексе ветвления $e = (e_1, \dots, e_n)$ расширения L/T' не делится на $p^h - 1$.

4 Формальные модули в многомерном поле

4.1 Формулировка

Пусть K — полное многомерное поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательность полей, $K_0, K_1, \dots, K_{n-1}, K_n = K$ таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p , и K_{i-1} — поле вычетов для K_i , $i \leq n$.

$(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \pi)$ — система локальных параметров поля K ,

\mathfrak{O} — кольцо целых поля K относительно n -мерного нормирования,

$F(X, Y)$ — одномерная формальная группа над \mathfrak{O} .

Будем предполагать, что K — разнотипное полное многомерное поле, то есть $\text{char} K = 0$, $\text{char} K_{n-1} = p > 0$.

Пусть k — максимальное локальное поле в K (конечное расширение \mathbb{Q}_p), для которого поле $E = k\{\{t_1\}\} \cdots \{\{t_{n-1}\}\}((\pi))$ содержится в K .

Предполагаем, что K/E — конечное расширение, и кольцо эндоморфизмов $\text{End}_{\mathfrak{O}} F$ формальной группы F изоморфно кольцу целых \mathfrak{O}_0 подрасширения E_0 в E . Считаем при этом, что K/E_0 — конечное расширение.

Пусть $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}, t_n^{(0)} = \pi_0)$ — система локальных параметров поля E_0 , $\pi \in k_0$.
 $E_0 = k_0\{\{t_1^{(0)}\}\} \cdots \{\{t_{n-1}^{(0)}\}\}((\pi_0))$, причем k_0 — подполе k .
Пусть, далее L — расширение поля K с системой локальных параметров $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n = \Pi)$, и

$$-\pi_0 = T_1^{i_1} \cdots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n} \rho u, \quad (*)$$

где ρ — представитель Тейхмюллера в L , u — главная единица поля L .

Предполагаем, что поле L — регулярно относительно формальной группы F , то есть ядро изогении $\text{Ker}[\pi_0]$ не содержится в L за исключением нуля.

$h := htF$ — высота формальной группы F ,

$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_L$ — максимальный идеал кольца целых поля L ,

$F(\mathfrak{M})$ — формальный \mathfrak{O} -модуль на идеале \mathfrak{M} .

Будем называть поле L вполне регулярным относительно формальной группы F , если $\text{Ker}[\pi_0]$ не содержится в любом неразветвленном расширении M поля L .

В настоящей работе доказывается следующий результат

Теорема 4.1. Поле L является вполне регулярным относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда система индексов $(i_1, \dots, i_{n-1}, e_n)$ делится на $p^h - 1$, то есть $i_k : p^h - 1$, $1 \leq k \leq n$ (см. (*)).

4.2 Вспомогательные результаты

Пусть $\xi \in \text{Ker}[\pi_0]$, $\xi \neq 0$, $\xi \in K^{alg}$ — произвольный элемент ядра изогении $[\pi_0]$. $[\pi_0](X) = \pi_0 X \varepsilon(X) + X^{p^h} \theta r(X)$, где $\varepsilon(X), r(X) \in \mathfrak{O}_0[[X]]$, при этом $\varepsilon(X) \equiv r(X) \equiv 1 \pmod{X}$, а θ — представитель системы Тейхмюллера в кольце целых поля k_0 . Ясно, что

$$\frac{[\pi_0](X)}{X} = \pi_0 \varepsilon_1(X)^{p^h-1} + (X r_1(X))^{p^h-1} \theta,$$

где $\varepsilon_1(X)^{p^h-1} = \varepsilon(X)$, $r_1(X)^{p^h-1} = r(X)$. Поэтому элемент ξ удовлетворяет уравнению $-\pi_0 = (\xi \varepsilon(\xi))^{p^h-1} \theta$, где $\varepsilon(X) = \varepsilon_1(X)^{-1} r_1(X)$. Поэтому

$$L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{-\theta^{-1} \pi_0}). \quad (1)$$

Пусть $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$; $1 \leq b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$, Π — простой элемент в K , $\varepsilon = 1 + c\Pi^b$, c — единица в K .

Лемма 4.2. Пусть $\zeta_p \in K$, тогда $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $X^p = \varepsilon$ и $X = Y + 1$, тогда

$$Y^p + C_p^{p-1} Y^{p-1} + \cdots + pY = c\Pi^b. \quad (*)$$

Пусть расширение $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ неразветвлено. Тогда, если корень уравнения (*) α — единица, то получим противоречие: $\mathfrak{v}_L(\alpha) = 0 \implies \mathfrak{v}(\alpha^p + \dots + p\alpha) = 0$, но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \geq 1$. Здесь и далее $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$ — нормирование в поле $L = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$. Если $\mathfrak{v}(\alpha) \geq 1$, то есть два варианта.

1. $1 \leq \mathfrak{v}(\alpha) \leq \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + C_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \dots + p\alpha) = p\mathfrak{v}(\alpha)$. Но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \not\equiv 0 \pmod p$ — противоречие.
2. $\mathfrak{v}(\alpha) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + C_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \dots + p\alpha) \geq \frac{pe}{p-1}$.
С другой стороны, $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Итак, предположение, что L/K неразветвлено приводит к противоречию. \square

Следствие 4.3. Распирение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

4.3 Доказательство теоремы (4.1)

Доказательство. Пусть $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ делится на $p^h - 1$. Тогда

$$-\pi_0 = (T_1^{i'_1} \dots T_{n-1}^{i'_{n-1}} \rho_1 u_1)^{p^h-1},$$

где $i'_k = \frac{i_k}{p^h-1}$, $1 \leq k \leq n-1$; $\rho_1^{p^h-1} = \rho$, $\rho \in \mathfrak{A}$; и $u_1^{p^h-1} = u$, где u_1 — главная единица в L . Отсюда и из (*) получаем $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{\theta^{-1}})$ и, значит, расширение L/K неразветвлено.

Если же $(i_1, \dots, i_{n-1}, e_n)$ не делится на $p^h - 1$, то $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{T_1^{i_1} \dots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n}})$ и $L(\xi)/L$ поэтому разветвлено. \square

Список литературы

- [1] З. И. Борович, «О регулярных локальных полях», *Вестник ЛГУ*, 1962, с. 142—145.
- [2] С. В. Востоков, «Явная формула закона взаимности», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1288—1321.