

А. А. Горшков, С. В. Востоков, С. М. Власьев
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ
В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p -х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным*. Эта задача была решена З.И. Боровичем в работе [3]. Основным результатом этой работы, доказательство которого было упрощено Д.К. Фадеевым, является следующим.

Теорема 0.1. (З.И. Борович, 1962). Для того, чтобы локальное поле K было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы показатель ветвления e расширения K/\mathbb{Q}_p не делился на $p - 1$.

Встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, то есть содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geq 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается в первом параграфе работы.

Задача о регулярных и вполне регулярных полях возникает в арифметике формальных модулей и она решается во втором параграфе настоящей работы.

1 Пример поля K , которое содержит ζ_p , но $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено

K — локальное поле (конечное расширение \mathbb{Q}_p),
 ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
 e — абсолютный индекс ветвления поля K ,
 \mathfrak{R} — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K ,
 \mathfrak{O} — кольцо целых подполя инерции T в K/\mathbb{Q}_p ,
 $E(f(X)) = \exp(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$,
для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления делится на p .

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K .

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1 - \zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 1.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^* . Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\underline{\zeta}(X) = (1 - X^p)^p$.

В работе [3] было доказано, что $\omega(a) - p$ — примарный элемент поля K (то есть расширение $K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K , $(,)_p : K^* \times K^* \rightarrow \langle \zeta_p \rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1 - \theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{A}, 1 \leq b < p^2, p \nmid b\}$ и корень ζ_p , тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b \leq p^2}} (1 - \theta\pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \quad (1)$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}_p$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p . Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1 - \alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1 - \theta\pi^b) = 1, p \nmid b. \quad (3)$$

Действительно, $1 = (\theta\pi^b, 1 - \theta\pi^b) = (\theta, 1 - \theta\pi^b) \cdot (\Pi, 1 - \theta\pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{A}$, так как группа \mathfrak{A} p -делима. Значит, $(\Pi, 1 - \theta\pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1 - \theta\pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1 - \theta\pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leq k \leq p-1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$\begin{aligned} (\Pi, \zeta_p) &= (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b \leq p^2}} (1 - \theta\pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} = \\ &= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{ то есть} \\ (\Pi, \zeta_p) &= \zeta_p^{a\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [?, 12]). Пусть $l(1 + f(X))$ — обратная функция к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [?, §1, п. 1]: $l(1 + f(X)) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log(1 + f(X))$ для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула $(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{\text{res}_X X^{-1}l(\underline{\zeta})/((1 - \underline{\zeta}^p)^{p-1})}$. Вычислим для $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(X) = 1 - X^p$ $\text{res}_X X^{-1}l(\underline{\zeta})/((1 - \underline{\zeta}^p)^{p-1} - 1) \pmod{p}$. Ясно, что

$$(1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \pmod{p} \quad (5)$$

Кроме того, $l(\zeta) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log(1 - X^p) = \sum_{p \nmid m} \frac{X^{pm}}{m} + \sum_{m \geq 1} \frac{X^{p^{m+1}} - X^{p^m}}{p^m} = \sum_{p \nmid m} \frac{X^{p^m}}{m}$. Среди степеней X^{pm} , $p \nmid m$ нет степени p^2 , значит $(\Pi, \zeta_p) = 1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p = \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b \leq p^2}} (1 - \theta \Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} \bmod K^{*p}$. Пусть степень

b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta,b} \not\equiv 0 \bmod p$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p \in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $\zeta_p = 1 - c\Pi^b$, где c — некоторая единица поля K , то есть $c = c_0 + c_1\Pi + c_2\Pi^2 + \dots$, $c_i \in \mathbb{Z}_p$ и $p \nmid c_0$, $1 \leq b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$.

Несложно видеть, что расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. Действительно, ζ_p будет корнем многочлена $X + c\Pi^b - 1$, тогда ζ_{p^2} будет корнем многочлена $X^p + c\Pi^b - 1$. !!!! и что дальше?!!!!!! □

Список литературы

- [1] Fesenko I.B., Vostokov S.V, *Local Fields and Their Extensions*, Second edition, 2002.
- [2] Востоков С.В, Волков П.П., Пак Г.К, *Символ Гильберта для многочленных формальных групп*, Зап. науч. сем. ПОМИ, том 400, 2012, стр. 127-132.
- [3] Борович З.И., *О регулярных локальных полях*, Вестник ЛГУ, 1962, стр. 142-145.
- [4] Бенуа Д.Г., Востоков С.В. *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 191 (1991), стр. 9–23.
- [5] Zhukov I. B., *Higher dimensional local fields*, Invitation to higher local fields, 2000, стр. 5-18.
- [6] Honda T., *On the theory of commutative formal groups*, J. Math Soc. Japan, 1970, стр. 213-246.
- [7] Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.