

1 Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p -х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным*. Эта задача была решена З. И. Боровичем в работе [3]. Основным результатом этой работы, доказательство которого было упрощено Д. К. Фаддеевым, является следующим.

Теорема 1.1. (З. И. Борович, 1962). Для того, чтобы локальное поле K было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы показатель ветвления e расширения K/\mathbb{Q}_p не делился на $p - 1$.

Аналогичная задача возникает в арифметике формальных модулей. Она и решается в настоящей работе. Чтобы сформулировать эту задачу в общем случае, введем необходимые обозначения.

Пусть K — локальное поле, \mathfrak{O}_K — его кольцо целых, \mathfrak{M}_K — максимальный идеал в \mathfrak{O}_K , $F(X, Y)$ — одномерная коммутативная формальная группа над \mathfrak{O}_K (далее мы будем писать просто формальная группа), $i(X)$ — ее обратный элемент. Заметим, что на множестве \mathfrak{M}_K можно задать структуру группы:

$$\begin{aligned}(\alpha +_F \beta)(X) &= F(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_K \\ (-_F \alpha)(X) &= i(\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{M}_K.\end{aligned}$$

Теперь пусть π_0 — простой элемент в подполе K_0 поля K , $F(X, Y)$ — формальная группа над \mathfrak{O}_K такая, что $\text{End}_{\mathfrak{O}_K}(F) \cong \mathfrak{O}_{K_0}$.

Определение 1.1. Под *формальным \mathfrak{O}_{K_0} -модулем $F(\mathfrak{M}_K)$* мы будем понимать \mathfrak{O}_{K_0} -модуль, построенный на максимальном идеале \mathfrak{M}_K кольца целых \mathfrak{O}_K с помощью следующих операций:

$$\alpha +_F \beta := F(\alpha, \beta), \quad a \cdot \alpha := [a]_F(\alpha), \quad a \in \mathfrak{O}_{K_0}, \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_K.$$

Определение 1.2. Обобщая определение регулярного локального поля в работе З. И. Боровича, мы называем локальное поле K (а вместе с ним и формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$) *регулярным относительно формальной группы F* , если K (а значит и $F(\mathfrak{M}_K)$) не содержит нетривиальных корней изогении $[\pi_0]_F$.

Определение 1.3. Будем называть локальное поле K (а вместе с ним и формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$) *вполне регулярным относительно формальной группы F* , если любое его конечное неразветвленное расширение L/K (а значит и $F(\mathfrak{M}_L)$) является регулярным относительно формальной группы F .

Например, пусть $F_m = X + Y + XY$ — мультипликативная формальная группа. Эндоморфизмы умножения в F_m имеют вид: для $r \in \mathbb{N}$

$$[r]_{F_m}(x) = (1 + x)^r - 1,$$

$$\text{Ker}[p]_{F_m} = \{\xi = (\zeta - 1)\},$$

где ζ — первообразный корень p -ой степени из 1. Диаграмма полей выглядит в этом случае так:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & L = K \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K \\ p & \longrightarrow & \pi \end{array}$$

Сформулируем теорему 1.1 в терминах регулярного формального модуля.

Теорема 1.2. Пусть K — регулярное локальное поле, $F_m(X, Y)$ — мультипликативная группа над \mathbb{Z}_p . Тогда поле K (а значит и формальный модуль $F_m(\mathfrak{M}_K)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$ не делится на $p - 1$.

Таким образом, мы перенесли постановку задачи на область арифметики формальных модулей. Далее эта задача будет решаться для различных одномерных формальных групп (формальных модулей).

2 Основные обозначения

K — конечное алгебраическое расширение поля \mathbb{Q}_p ,

K_0 — подполе в K ,

T — подполе инерции в K со степенью инерции f_0 ,

\mathfrak{O}_K — кольцо целых K , \mathfrak{O}_{K_0} — кольцо целых K_0 ,

π — простой элемент \mathfrak{O}_K ,

π_0 — простой элемент \mathfrak{O}_{K_0} ,

$F(X, Y)$ — одномерная коммутативная формальная группа над \mathfrak{O}_K ,

причем $\text{End}_{\mathfrak{O}_K}(F) \cong \mathfrak{O}_{K_0}$,

L — расширение поля K , не содержащее $\text{Ker}_F[\pi_0]$ (без нуля),

\mathfrak{O}_L — кольцо целых L ,

Π — простой элемент \mathfrak{O}_L .

Общая диаграмма (башня) полей выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_{K_0} & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

3 Формальные модули в одномерных локальных полях

3.1 Случай многочленной формальной группы

Пусть K — конечное расширение поля \mathbb{Q}_p и c — некоторая единица в K .

Определение 3.1. Формальную группу вида $F_c(X, Y) = X + Y + cXY$ назовем *многочленной формальной группой*.

Замечание 3.1. Известно, что $\text{End}(F_c) \cong \mathbb{Z}_p$ (см. [7]), то есть в общем случае эта формальная группа не является группой Любина-Тейта. Однако, например, для $c \in \mathbb{Z}_p$ она таковой является.

Легко видеть, что

$$F_c(X, Y) = c^{-1}((1 + cX)(1 + cY) - 1).$$

Тогда несложно доказать, что (см. например [2])

$$[p]_{F_c}(X) = c^{-1}([p]_{F_m}(cX)) = c^{-1}((1 + cX)^p - 1),$$

$$\text{Ker}[p]_{F_c} = \{\xi = c^{-1}(\zeta - 1)\},$$

где ζ — первообразный корень p -ой степени из 1.

Пусть $\xi \in \text{Ker}[p]_{F_c}(X)$, $\xi \neq 0$.

Лемма 3.1.

$$-p = ((\varepsilon(X)c)X)^{p-1}|_{X=\xi}, \text{ где } \varepsilon \in 1 + \mathbb{Z}_p[c][[X]] \quad (1)$$

Доказательство. Действительно, из определения $[p]_{F_c}(X)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{[p]_{F_c}(X)}{X} &= p + C_p^2 cX + \dots + C_p^{p-1} c^{p-2} X^{p-2} + (cX)^{p-1} = \\ &= p\eta(X) + (cX)^{p-1}, \end{aligned}$$

где $\eta(X) = 1 + \frac{C_p^2}{p} cX + \dots + \frac{C_p^{p-1}}{p} c^{p-2} X^{p-2} \in \mathbb{Z}[c][X]$. Поэтому

$$-p = \eta(X)^{-1}(cX)^{p-1}|_{X=\xi}$$

Так как $\eta(X)^{-1} \equiv 1 \pmod{(X)}$, то найдется ряд $\varepsilon(X) \in \mathbb{Z}[c][[X]]$, $\varepsilon(X) \equiv 1 \pmod{(X)}$, такой что $\varepsilon(X)^{p-1} = \eta(X)^{-1}$. Тогда

$$-p = ((\varepsilon(X)c)X)^{p-1}|_{X=\xi}$$

□

Пусть L — конечное расширение поля \mathbb{Q}_p и c — некоторая единица в L . Пусть $F_c(X, Y)$ — многочленная формальная группа над $\mathbb{Z}_p[c]$. Пусть $\xi \neq 0$ — корень изогении $[p]_{F_c}(X)$, причем $\xi \notin L$. Тогда диаграмма полей выглядит так:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p[c] & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p[c] & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

Теорема 3.2. Поле L (а значит и $F_c(\mathfrak{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы $F_c(X, Y)$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/\mathbb{Q}_p)$ не делится на $p - 1$.

Доказательство. Из равенства (1) леммы 3.1 следует, что

$$-p = (\varepsilon(\xi)c)^{p-1}\xi^{p-1},$$

то есть. ${}^{p-1}\sqrt{-p} = (\varepsilon(\xi)c)\xi$. Отсюда получаем, что

$$L(\text{Ker}[p]_{F_c}) = L(\xi) = L({}^{p-1}\sqrt{-p}) \quad (2)$$

Пусть $-p = \Pi^e \theta u$, где Π — простой элемент в L , $\theta \in \mathfrak{R}$ — представитель Тейхмюллера в поле L , u — главная единица поля L .

1. Если $e \equiv 0 \pmod{p-1}$, то

$${}^{p-1}\sqrt{-p} = {}^{p-1}\sqrt{\Pi^e \theta u_1},$$

где $u_1^{p-1} = u$, $u_1 \in L$. Откуда

$$L({}^{p-1}\sqrt{-p}) = L({}^{p-1}\sqrt{\theta}),$$

то есть расширение $L({}^{p-1}\sqrt{-p})/L$ неразветвлено, а значит, согласно (2), расширение $L(\text{Ker}[p]_{F_c})/L$ тоже неразветвлено, следовательно $F_c(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2. Если $e \not\equiv 0 \pmod{p-1}$, то

$${}^{p-1}\sqrt{-p} = {}^{p-1}\sqrt{\Pi^e \theta u_1},$$

и $L({}^{p-1}\sqrt{-p}) = L({}^{p-1}\sqrt{\Pi^e \theta})$ разветвлено над L , откуда $F_c(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный модуль.

□

Замечание 3.2. Условие неразветвленности получилось таким же, как и в случае мультипликативной формальной группы F_m .

3.2 Случай формальной группы Любина-Тейта

Определение 3.2. Пусть K — конечное расширение поля \mathbb{Q}_p . Введем \mathfrak{F}_π как множество формальных степенных рядов $f(X) \in \mathfrak{O}_K[[X]]$ таких, что

$$f(X) \equiv \pi X \pmod{\deg 2}, \quad f(X) \equiv X^q \pmod{\pi},$$

где π — простой элемент в K и q — количество элементов поля частных поля K .

Тогда по известной теореме (см. [1]) для каждого $f(X)$ из \mathfrak{F}_π однозначно строится формальная группа F_π над \mathfrak{O}_K , которая называется *формальной группой Любина-Тейта*. При этом отображение $\mathfrak{O}_K \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{O}_K}(F_\pi) : \alpha \mapsto [\alpha]_{F_\pi}$ является кольцевым гомоморфизмом и $f = [\pi]_{F_\pi}$.

Пусть формальная группа Любина-Тейта $F_\pi(X, Y)$ построена по изогении

$$[\pi](X) = \pi X + \pi a_2 X^2 + \dots + X^q + \dots \quad (3)$$

Заметим, что в этом случае $\mathfrak{O}_{K_0} = \mathfrak{O}_K, K_0 = K, \pi_0 = \pi$. Пусть L — расширение поля K такое, что $\text{Ker}_{F_\pi}[\pi]$ (без нуля) не содержится в L . Тогда диаграмма полей имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

Теорема 3.3. Поле L (а значит и $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F_π тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q - 1$.

Доказательство. Так как $F_\pi(X, Y)$ построена по изогении (3), то $[\pi](X)$ можно представить в виде:

$$[\pi](X) = \pi X \varepsilon(X) + X^q,$$

где $\varepsilon(X) \equiv 1 \pmod{X}$. Заметим, что так как $q - 1$ и p взаимно просты, то из ряда $\varepsilon(X)^{-1}$ в этом случае можно извлечь в кольце $\mathfrak{O}_K[[X]]$ корень степени $q - 1$. То есть существует ряд $u(X) \in 1 + X\mathfrak{O}_K[[X]]$ такой, что $u(X)^{q-1} = \varepsilon(X)^{-1}$, поэтому

$$\frac{[\pi](X)}{X} = \pi u(X)^{-(q-1)} + X^{q-1}.$$

Получаем уравнение для корня изогении $X \neq 0$:

$$-\pi = (Xu(X))^{q-1} = Y^{q-1}.$$

Так как L — расширение поля K , Π — простой в L , то для $e = e(L/K)$:

$$-\pi = \Pi^e \theta \eta(\Pi),$$

где $\eta(\Pi) \equiv 1 \pmod{\Pi}$ — главная единица.

1) Если $e = (q - 1)e'$, то получим, что

$$-\pi = (\Pi^{e'} \eta_1(\Pi))^{q-1} \theta,$$

где $\eta_1^{q-1} = \eta$. И, значит,

$$Y = \Pi^{e'} \eta_1^{-1} \sqrt[q-1]{\theta},$$

где $\Pi^{e'} \eta_1 \in L$, а θ из неразветвленного расширения поля L . Таким образом, $L(Y)/L$ — неразветвлено, а значит $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2) Если e не делится на $q - 1$, то $L(Y) = L(\sqrt[q-1]{-\pi}) = L(\sqrt[q-1]{\Pi^{e'} \theta})$ разветвлено над L , откуда $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный относительно группы F модуль. \square

3.3 Случай формальной группы Хонды

Пусть K — конечное неразветвленное расширение \mathbb{Q}_p . Рассмотрим Δ — оператор Фробениуса в $\mathfrak{O}_K[[X]]$:

$$\Delta(\sum a_i x^i) = \sum a_i^{Fr} x^{p \cdot i}, \quad a_i \in \mathfrak{O}_K,$$

где Fr — продолжение автоморфизма Фробениуса на K/\mathbb{Q}_p . Множество операторов $\sum_{i \geq 0} a_i \Delta^i$, где $a_i \in \mathfrak{O}_K$, образуют некоммутативное кольцо $\mathfrak{O}_K[[\Delta]]$ формальных степенных рядов от Δ , для которого $\Delta a = a^{Fr} \Delta$ для $a \in \mathfrak{O}_K$.

Определение 3.3. Пусть K_0 — конечное расширение поля \mathbb{Q}_p , q — количество элементов поля частных поля K_0 , K — конечное неразветвленное расширение K_0 , π_0 — простой элемент в K_0 . Формальная группа F над \mathfrak{O}_K с логарифмом $\log_F(X) \in K[[X]]$ называется *формальной группой Хонды*, если

$$u \circ \log_F \equiv 0 \pmod{\pi_0}$$

для некоторого оператора $u = \pi_0 + a_1 \Delta + \dots \in \mathfrak{O}_K[[\Delta]]$. Оператор u называется *типом* формальной группы F .

Пусть опять K_0 — конечное расширение поля \mathbb{Q}_p , K — конечное неразветвленное расширение K_0 . Рассмотрим $F(X, Y)$ — группу Хонды над \mathfrak{O}_K высоты h такую, что $\mathfrak{O}_{K_0} \cong \text{End}_{\mathfrak{O}_K} F$. Пусть L — расширение K такое, что $\text{Ker}_F[\pi_0]$ (без нуля) не содержится в L . Тогда диаграмма полей имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_{K_0} & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

Теорема 3.4. Поле L (а значит и $F(\mathfrak{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q^h - 1$.

Доказательство. Заметим, что $e = e(L/K) = e(L/K_0)$, так как расширение K/K_0 неразветвлено по условию.

Пусть π_0 — простой элемент в K_0 . Рассмотрим эндоморфизм формальной группы F умножения на π_0 :

$$[\pi_0]_F(X) = \pi_0 X + a_2 \pi_0 X^2 + \dots + a_{q^h} X^{q^h} + \dots, \quad a_i \in \mathfrak{D}_K$$

и $a_{q^h} \in \mathfrak{D}_K^*$, так как высота F равна h . Все коэффициенты $a_i \in \pi_0 \mathfrak{D}_K$, так как по условию расширение $\mathfrak{D}_K/\mathfrak{D}_{K_0}$ неразветвлено.

По подготовительной лемме Вейерштрасса существует $\varepsilon(X) \in 1 + X\mathfrak{D}_{K_0}[[X]]$ такой, что

$$\begin{aligned} f(X) &:= \frac{[\pi_0](X)}{X} \varepsilon(X) = \\ &= \pi_0 + \pi_0 c_1 X^1 + \dots + \pi_0 c_{q^h-2} X^{q^h-2} + c_{q^h-1} X^{q^h-1}, \end{aligned}$$

где $c_{q^h-1} \in \mathfrak{D}_K^*$.

Ясно, что

$$\text{Ker}[\pi_0]_F(X) = \text{Ker } f(X)$$

Пусть π — корень многочлена $f(X)$ и соответственно, ненулевой корень $[\pi_0](X) = 0$, тогда расширение $K(\pi)/K$ вполне разветвлено и π — простой элемент в нем. Поэтому в поле $K(\pi)$ имеем:

$$-\pi_0(1 + c_1 \pi + \dots + c_{q^h-2} \pi^{q^h-2}) = c_{q^h-1} \pi^{q^h-1},$$

откуда

$$-\pi_0 = c_{q^h-1} \pi^{q^h-1} \varepsilon,$$

где $\varepsilon = (1 + c_1 \pi + \dots + c_{q^h-2} \pi^{q^h-2})^{-1}$.

Пусть ε' — единица в $K(\pi)$ такая, что $(\varepsilon')^{q^h-1} = \varepsilon$, тогда $\pi' = \pi \varepsilon'$ будет корнем уравнения

$$X^{q^h-1} + \pi'_0 = 0,$$

где $\pi'_0 = \pi_0 c_{q^h-1}^{-1} \in K_0$. При этом

$$L(\text{Ker}[\pi_0]_F) = L(\pi) = L(\pi'),$$

так как $\text{Ker}[\pi_0]_F$ не принадлежит по условию полю L . Но $K \subset L$, а уравнение

$$c_{q^h-1} X^{q^h-1} + \pi_0(1 + c_1 X + \dots + c_{q^h-2} X^{q^h-2}) = 0$$

равносильно уравнению

$$Y^{q^h-1} + \pi_0 c_{q^h-1}^{-1} = 0 \Leftrightarrow Y^{q^h-1} + \pi'_0 = 0,$$

где

$$Y = X(1 + c_1 X + \dots + c_{q^h-2} X^{q^h-2})^{-1}.$$

Итак, мы доказали, что

$$L(\text{Ker}[\pi_0]_F) = L(\pi'),$$

где π' — корень уравнения $X^{q^h-1} + \pi'_0 = 0$, π'_0 — простой в K_0 (и в K).

1. Пусть индекс ветвления $e = e(L/K)$ делится на $q^h - 1$, то есть $e = (q^h - 1)e'$, и пусть Π — простой элемент в L . Тогда

$$-\pi'_0 = \Pi^{e'} \theta \eta,$$

где θ — представитель Тейхмюллера, а η — главная единица поля L . Тогда

$$\pi' = {}^{q^h-1}\sqrt{-\pi'_0} = \Pi^{e' {}^{q^h-1}\sqrt{\theta}} \eta_1,$$

где $\eta_1^{q^h-1} = \eta$ в L .

Поэтому расширение $L(\pi') = L({}^{q^h-1}\sqrt{\theta})$, а с ним и $L(\text{Ker}[\pi_0]_F)$ неразветвлено над L . Это значит, что $F(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2. Если же e не делится на $q^h - 1$, то расширение $L(\pi') = L({}^{q^h-1}\sqrt{\pi^e \theta})$ будет разветвлено над L , откуда $F(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный относительно группы F модуль.

□

Заключение

Фактически, исследование регулярных формальных модулей до этого было выполнено только для случая мультипликативной формальной группы одномерного локального поля в работе З. И. Боровича [3]. В данной работе сделан следующий шаг к обобщению результатов — получены свойства для случая многочленной формальной группы, для формальной группы Любина-Тейта и формальной группы Хонды.

Остается открытым вопрос о произвольных формальных модулях как в одномерных, так и в многомерных локальных полях. Кроме того, возникает вопрос об условиях для неразветвленного кругового поля, содержащего все корни p -ой степени из 1. Эти вопросы мы постараемся исследовать в следующих работах.

Список литературы

- [1] I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions*, Second edition, 2002.
- [2] С. В. Востоков, П. П. Волков, Г. К. Пак, *Символ Гильберта для многочленных формальных групп*, Зап. науч. сем. ПОМИ, том 400, 2012, стр. 127-132.
- [3] З. И. Борович, *О регулярных локальных полях*, Вестник ЛГУ, 1962, стр. 142-145.

- [4] Д. Г. Бенуа, С. В. Востоков, *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 191 (1991), стр. 9–23.
- [5] I. B. Zhukov, *Higher dimensional local fields*, Invitation to higher local fields, 2000, стр. 5–18.
- [6] T. Honda, *On the theory of commutative formal groups*, J. Math Soc. Japan, 1970, стр. 213–246.
- [7] M. Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.