

А. А. Горшков, С. В. Востоков, С. М. Власьев
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ
В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

1 Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p -х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным*. Эта задача была решена З. И. Боровичем в работе [3]. Основной результат этой работы, доказательство которого было упрощено Д. К. Фаддеевым, является следующим.

Теорема 1.1. Пусть K — регулярное локальное поле. Расширение $K(\zeta)/K$, где $\zeta^p = 1$, $\zeta \neq 1$, будет неразветвленным тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$ делится на $p - 1$.

Встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, то есть содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geq 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается в первой части работы.

Задача о регулярных и вполне регулярных полях возникает в арифметике формальных модулей и она решается во второй части настоящей работы.

2 Вполне разветвленное $K(\zeta_{p^2})/K$ при нерегулярном K с индексом ветвления $p(p - 1)$

K — локальное поле (конечное расширение \mathbb{Q}_p),
 ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
 e — абсолютный индекс ветвления поля K ,
 \mathfrak{R} — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K ,
 \mathfrak{O} — кольцо целых подполя инерции T в K/\mathbb{Q}_p ,
 $E(f(X)) = \exp(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$,
для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления делится на p .

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K .

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1 - \zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 2.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^* . Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\underline{\zeta}(X) = (1 - X^p)^p$.

В работе [3] было доказано, что $\omega(a)$ — p -примарный элемент поля K (то есть расширение $K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K , $(,)_p : K^* \times K^* \rightarrow \langle \zeta_p \rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1 - \theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{A}, 1 \leq b < p^2, p \nmid b\}$, и корень ζ_p , тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b < p^2}} (1 - \theta\pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \quad (1)$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p . Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1 - \alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1 - \theta\pi^b) = 1, p \nmid b. \quad (3)$$

Действительно, $1 = (\theta\pi^b, 1 - \theta\pi^b) = (\theta, 1 - \theta\pi^b) \cdot (\Pi, 1 - \theta\pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{A}$, так как группа \mathfrak{A} p -делима. Значит, $(\Pi, 1 - \theta\pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1 - \theta\pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1 - \theta\pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leq k \leq p-1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$\begin{aligned} (\Pi, \zeta_p) &= (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b < p^2}} (1 - \theta\pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} = \\ &= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{ то есть} \\ (\Pi, \zeta_p) &= \zeta_p^{a\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [?, 12]). Пусть $l(1 + f(X))$ — обратная функция к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [?, §1, п. 1]: $l(1 + f(X)) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log(1 + f(X))$ для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула $(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{\text{res}_X X^{-1}l(\underline{\zeta})/((1 - \underline{\zeta}^p)^{p-1})}$. Вычислим для $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(X) = 1 - X^p$ $\text{res}_X X^{-1}l(\underline{\zeta})/((1 - \underline{\zeta}^p)^{p-1} - 1) \pmod{p}$. Ясно, что

$$(1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \pmod{p} \quad (5)$$

Кроме того, $l(\zeta) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log(1 - X^p) = \sum_{p \nmid m} \frac{X^{pm}}{m} + \sum_{m \geq 1} \frac{X^{p^{m+1}} - X^{p^m}}{p^m} = \sum_{p \nmid m} \frac{X^{pm}}{m}$. Среди степеней X^{pm} , $p \nmid m$ нет степени p^2 , значит $(\Pi, \zeta_p) = 1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p \equiv \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leq b < p^2}} (1 - \theta \Pi^b)^{\alpha_{\theta, b}} \pmod{K^{*p}}$. Пусть степень

b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta, b} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p \in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $\zeta_p = 1 - c \Pi^b$, где c — некоторая единица поля K , то есть $c = c_0 + c_1 \Pi + c_2 \Pi^2 + \dots$, $c_i \in \mathbb{Z}_p$ и $p \nmid c_0$, $1 \leq b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$.

Несложно видеть, что расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. Действительно, ζ_p будет корнем многочлена $X + c \Pi^b - 1$, тогда ζ_{p^2} будет корнем многочлена $X^p + c \Pi^b - 1$. !!!! и что дальше?!!!!!! \square

3 Формальные модули в многомерном поле

3.1 Формулировка

Пусть K — полное многомерное поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательность полей, $K_0, K_1, \dots, K_{n-1}, K_n = K$ таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p , и K_{i-1} — поле вычетов для K_i , $i \leq n$.

$(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \pi)$ — система локальных параметров поля K ,

\mathfrak{O} — кольцо целых поля K относительно n -мерного нормирования,

$F(X, Y)$ — одномерная формальная группа над \mathfrak{O} .

Будем предполагать, что K — разнохарактеристическое полное многомерное поле, то есть $\text{char} K = 0$, $\text{char} K_{n-1} = p > 0$.

Пусть k — максимальное локальное поле в K (конечное расширение \mathbb{Q}_p), для которого поле $E = k\{\{t_1\}\} \cdots \{\{t_{n-1}\}\}((\pi))$ содержится в K .

Предполагаем, что K/E — конечное расширение, и кольцо эндоморфизмов $\text{End}_{\mathfrak{O}} F$ формальной группы F изоморфно кольцу целых \mathfrak{O}_0 подрасширения E_0 в E . Считаем при этом, что K/E_0 — конечное расширение.

Пусть $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}, t_n^{(0)} = \pi_0)$ — система локальных параметров поля E_0 , $\pi \in k_0$.

$E_0 = k_0\{\{t_1^{(0)}\}\} \cdots \{\{t_{n-1}^{(0)}\}\}((\pi_0))$, причем k_0 — подполе k . Пусть, далее L — расширение поля K с системой локальных параметров $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n = \Pi)$, и

$$-\pi_0 = T_1^{i_1} \cdots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n} \rho u, \quad (*)$$

где ρ — представитель Тейхмюллера в L , u — главная единица поля L .

Предполагаем, что поле L — регулярно относительно формальной группы F , то есть ядро изогения $\text{Ker}[\pi_0]$ не содержится в L за исключением нуля.

$h := htF$ — высота формальной группы F ,

$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_L$ — максимальный идеал кольца целых поля L ,

$F(\mathfrak{M})$ — формальный \mathfrak{D} -модуль на идеале \mathfrak{M} .

Будем называть поле L вполне регулярным относительно формальной группы F , если $\text{Ker}[\pi_0]$ не содержится в любом неразветвленном расширении M поля L .

В настоящей работе доказывается следующий результат

Теорема 3.1. Поле L является вполне регулярным относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда система индексов $(i_1, \dots, i_{n-1}, e_n)$ делится на $p^h - 1$, то есть $i_k : p^h - 1$, $1 \leq k \leq n$ (см. (*)).

3.2 Вспомогательные результаты

Пусть $\xi \in \text{Ker}[\pi_0]$, $\xi \neq 0$, $\xi \in K^{alg}$ — произвольный элемент ядра изогения $[\pi_0]$. $[\pi_0](X) = \pi_0 X \varepsilon(X) + X^{p^h} \theta r(X)$, где $\varepsilon(X), r(X) \in \mathfrak{D}_0[[X]]$, при этом $\varepsilon(X) \equiv r(X) \equiv 1 \pmod{X}$, а θ — представитель системы Тейхмюллера в кольце целых поля k_0 . Ясно, что $\frac{[\pi_0](X)}{X} = \pi_0 \varepsilon_1(X)^{p^h-1} + (X r_1(X))^{p^h-1} \theta$, где $\varepsilon_1(X)^{p^h-1} = \varepsilon(X)$, $r_1(X)^{p^h-1} = r(X)$. Поэтому элемент ξ удовлетворяет уравнению $-\pi_0 = (\xi \varepsilon(\xi))^{p^h-1} \theta$, где $\varepsilon(X) = \varepsilon_1(X)^{-1} r_1(X)$. Поэтому

$$L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{-\theta^{-1}\pi_0}). \quad (1)$$

Пусть $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$; $1 \leq b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$, Π — простой элемент в K , $\varepsilon = 1 + c\Pi^b$, c — единица в K .

Лемма 3.2. Пусть $\zeta_p \in K$, тогда $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $X^p = \varepsilon$ и $X = Y + 1$, тогда

$$Y^p + c_p^{p-1} Y^{p-1} + \dots + pY = c\Pi^b. \quad (*)$$

Пусть расширение $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ неразветвлено. Тогда, если корень уравнения (*) α — единица, то получим противоречие: $\mathfrak{v}_L(\alpha) = 0 \implies \mathfrak{v}(\alpha^p + \dots + p\alpha) = 0$, но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \geq 1$. Здесь и далее $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_L$ — нормирование в поле $L = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$. Если $\mathfrak{v}(\alpha) \geq 1$, то есть два варианта.

1. $1 \leq \mathfrak{v}(\alpha) \leq \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + c_p^{p-1} \alpha^{p-1} + \dots + p\alpha) = \mathfrak{v}(\alpha^p) = p\mathfrak{v}(\alpha)$. Но $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b \not\equiv 0 \pmod{p}$ — противоречие.

2. $\mathfrak{v}(\alpha) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p + c_p^{p-1}\alpha^{p-1} + \dots + p\alpha) \geq \frac{pe}{p-1}$,
так как $\mathfrak{v}(\alpha^p) = p\mathfrak{v}(\alpha) \geq \frac{pe}{p-1}$ и $\mathfrak{v}(p\alpha) = e + \mathfrak{v}(\alpha) \geq \frac{pe}{p-1}$.
С другой стороны, $\mathfrak{v}(c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Итак, предположение, что L/K неразветвлено приводит к противоречию. \square

Следствие 3.3. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

3.3 Доказательство теоремы (3.1)

Доказательство. Пусть $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ делится на $p^h - 1$. Тогда

$$-\pi_0 = (T_1^{i'_1} \dots T_{n-1}^{i'_{n-1}} \rho_1 u_1)^{p^h-1},$$

где $i'_k = \frac{i_k}{p^h-1}$, $1 \leq k \leq n-1$; $\rho_1^{p^h-1} = \rho$, $\rho \in \mathfrak{K}$; и $u_1^{p^h-1} = u$, где u_1 — главная единица в L . Отсюда и из (*) получаем $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{T_1^{i_1} \dots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n}})$ и, значит, расширение L/K неразветвлено.

Если же $(i_1, \dots, i_{n-1}, e_n)$ не делится на $p^h - 1$, то $L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{T_1^{i_1} \dots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n}})$ и $L(\xi)/L$ поэтому разветвлено. \square

Список литературы

- [1] Fesenko I. B., Vostokov S. V, *Local Fields and Their Extensions*, Second edition, 2002.
- [2] Востоков С. В, Волков П. П., Пак Г. К, *Символ Гильберта для многочленных формальных групп*, Зап. науч. сем. ПОМИ, том 400, 2012, стр. 127-132.
- [3] Борович З. И., *О регулярных локальных полях*, Вестник ЛГУ, 1962, стр. 142-145.
- [4] Бенуа Д. Г., Востоков С.В. *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 191 (1991), стр. 9–23.
- [5] Zhukov I. B., *Higher dimensional local fields*, Invitation to higher local fields, 2000, стр. 5-18.
- [6] Honda T., *On the theory of commutative formal groups*, J. Math Soc. Japan, 1970, стр. 213-246.
- [7] Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.