С. В. Востоков, С. М. Власьев
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

1 Введение

В предыдущей работе [3] было выполнено исследование формальных регулярных модулей в некоторых случаях для одномерного локального поля. В частности, были получены условия вполне регулярности одномерных локальных полей относительно многочленной формальной группы, а также формальных групп Любина-Тейта и Хонда. Однако остается открытым вопрос о регулярных и вполне регулярных модулях в полных многомерных полях. Эта задача решается в первой части настоящей работы.
Кроме того, встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, то есть содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geqslant 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается во второй части работы.

2 Вполне разветвленное $K(\zeta_{p^2})/K$ при нерегулярном K с индексом ветвления $p(p-1)$

K — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),
ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
e — абсолютный индекс ветвления поля K,
$\mathfrak{R}$ — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K,
$\mathfrak{O}$ — кольцо целых подполя инерции T в $K/\mathbb{Q}_p$,
$E(f(X)) = exp(1+\frac{\Delta}{p}+\frac{\Delta^2}{p^2}+\ldots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$, для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления e делится на p.

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K.

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1-\zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 2.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^*. Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\underline{\zeta}(X) = (1-X^p)^p$.

В работе [2, §4, предложение 6] было доказано, что $\omega(a)$ — p-примарный элемент поля K (то есть расширение

$K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K, $(,)_p : K^* \times K^* \to \langle \zeta_p \rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1 - \theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{R}, 1 \leqslant b < p^2, p \nmid b\}$, и корень ζ_p, тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leqslant b < p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \tag{1}$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \mod p. \tag{2}$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p. Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1 - \alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = 1, p \nmid b. \tag{3}$$

Действительно, $1 = (\theta\Pi^b, 1 - \theta\Pi^b) = (\theta, 1 - \theta\Pi^b) \cdot (\Pi, 1 - \theta\Pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{R}$, так как группа $\mathfrak{R}$ p-делима. Значит, $(\Pi, 1 - \theta\Pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant p - 1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$(\Pi, \zeta_p) = (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p \nmid b \\ 1 \leqslant b < p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} =$$

$$= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{то есть}$$

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{a\beta}. \tag{4}$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [2, (12)]). Обозначим через $l(1 + f(X)))$ обратную функцию к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [2, §1, п. 1]:

$$l(1 + f(X)) = (1 - \frac{\Delta}{p}) \log(1 + f(X))$$

для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1)}.$$

Вычислим значение $\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1) \mod p$ для $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(X) = 1 - X^p$. Ясно, что

$$(1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \mod p. \tag{5}$$

Кроме того,

$$l(\underline{\zeta}) = (1 - \frac{\Delta}{p})\log(1 - X^p) =$$

$$= \sum_{p\nmid m} \frac{X^{pm}}{m} + \sum_{m\geqslant 1} \frac{X^{p^{m+1}} - X^{p^{m+1}}}{p^m} = \sum_{p\nmid m} \frac{X^{pm}}{m}.$$

Среди степеней X^{pm}, $p \nmid m$ нет степени p^2, поэтому

$$\operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{\zeta}) / - \underline{\zeta}^{p^2} \equiv 0 \mod p,$$

значит
$(\Pi, \zeta_p) = 1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p \equiv \prod\limits_{\substack{p\nmid b \\ 1\leqslant b<p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} \mod K^{*p}$. Пусть степень b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta,b} \not\equiv 0 \mod p$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p \in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $K(\zeta_{p^2}) = K(\sqrt[p]{\zeta_p}) = K(\sqrt[p]{\varepsilon})$, где $\varepsilon = 1 - c\Pi^b$, а c — некоторая единица поля K, то есть $c = c_0 + c_1\Pi + c_2\Pi^2 + \ldots$, $c_i \in \mathbb{Z}_p$ и $p \nmid c_0$, $1 \leqslant b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$.

Таким образом $K(\zeta_{p^2})$ получается присоединением корня уравнения $X^p = \varepsilon$. Заменим переменную $X = Y + 1$, тогда $Y^p + C_p^{p-1}Y^{p-1} + \dots + pY = -c\Pi^b$. Пусть χ — корень последнего уравнения. Предположим, что $K(\zeta_{p^2})/K$ неразветвлено, тогда возможны три случая для нормирования $\mathfrak{v}(\chi) = \mathfrak{v}_{K(\zeta_{p^2})}(\chi)$.

1. $\mathfrak{v}(\chi) = 0$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \dots + p\chi) = 0$, но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b > 0$.

2. $1 \leqslant \mathfrak{v}(\chi) \leqslant \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \dots + p\chi) = \mathfrak{v}(\chi^p) = p\mathfrak{v}(\chi)$ делится на p, но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b$ не делится на p.

3. $\mathfrak{v}(\chi) > \frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\chi^p + \dots + p\chi) \geqslant \frac{pe}{p-1}$, так как $\mathfrak{v}(\chi^p) = p\mathfrak{v}(\chi) > \frac{pe}{p-1}$ и $\mathfrak{v}(p\chi) = e + \mathfrak{v}(\chi) = \frac{pe}{p-1}$. Но это невозможно, так как $\mathfrak{v}(-c\Pi^b) = b < \frac{pe}{p-1}$.

Мы предположили неразветвленность расширения $K(\zeta_{p^2})/K$ и получили противоречие.

Отсюда вытекает, что $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. □

3 Формальные модули в многомерных локальных полях

В этом разделе формальный модуль будет строиться только для формальной группы Хонды высоты h.

Пусть поле K — полное многомерное (n-мерное) поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательность полей,

$$K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_n = K$$

таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p, а K_{i-1} — поле вычетов для $K_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
В дальнейшем мы предполагаем, что последнее поле вычетов конечно. Также, следуя изложению работы [**?**], мы будем рассматривать только *стандартные* многомерные поля для интересующего нас разнохарактеристического случая n-мерного локального поля (то есть $char K = 0$, $char K_{n-1} = p > 0$). Последовательность полей тогда выглядит следующим образом:

$$\mathbb{F}_q - \mathbb{F}_q((t_1)) - \ldots - \mathbb{F}_q((t_1))\ldots((t_{n-1}))-$$

$$-k\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\} := K,$$

где k — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, а $q = \#\overline{k}$.

3.1 Случай двумерного локального поля для формальной группы Хонды

Чтобы не усложнять процедуру доказательства общей теоремы техническими выкладками, докажем её для двумерного поля

$$\mathbb{F}_p - \mathbb{F}_p((t_0)) - k\{\{t_0\}\} := K,$$

где k — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$.

Пусть T — подполе инерции в k, $T' := T\{\{t_0\}\}$, $\mathcal{O}_{T'}$ — его кольцо целых относительно двумерного нормирования. Тогда имеем такую схему двумерных полей:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Q}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & T\{\{t_0\}\} = T' & \longrightarrow & k\{\{t_0\}\} = K \\
\mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K \\
\{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, \pi\}
\end{array}$$

Определим формальнцую группу Хонды над $\mathcal{O}_{T'}$. Для этого фиксируем эндоморфизм $\sigma : \mathcal{O}_{T'} \to \mathcal{O}_{T'}$, определенный следующим образом:

$$\sigma(\sum a_i t_0^i) = \sum a_i^{Fr} t_0^{p\cdot i},\ a_i \in \mathcal{O}_T,$$

и обладающий свойством:

$$\forall x \in \mathcal{O}_{T'} \quad \sigma(x) \equiv x^p \pmod{\mathcal{M}_{T'}},$$

где Fr — продолжение автоморфизма Фробениуса на $T/\mathbb{Q}_p$.

Определим действие оператора Фробениуса на рядах из $\mathcal{O}'_T[|X|]$ следующим образом:

$$\triangle(\sum b_i x^i) = \sum \sigma(b_i) x^{p\cdot i},\ b_i \in \mathcal{O}_{T'}.$$

Множество операторов $\sum\limits_{i\geqslant 0} b_i \triangle^i$, где $b_i \in \mathcal{O}_{T'}$, образуют некоммутативное кольцо $\mathcal{O}_{T'}[|\triangle|]$ формальных степенных рядов от $\triangle$, для которого $\triangle b = \sigma(b)\triangle$ для $b \in \mathcal{O}_{T'}$. Формальная группа Хонды над $\mathcal{O}_{T'}$ с логарифмом $\log_F(X) \in T'[|X|]$ задается также, как и в параграфе **??**.

Пусть теперь $F(X, Y)$ — формальная группа Хонды над $\mathcal{O}_{T'}$ высоты h, $\operatorname{End}_{\mathcal{O}_K} F \cong \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}$. Пусть поле L — расширение поля K такое, что $\operatorname{Ker}_F[p]$ (без нуля) не содержится в L, $e = e(L/T') = (e_1, e_2)$ — 2-мерный индекс ветвления, $\{T_0, \Pi\}$ — система локальных параметров поля L.

Тогда T_0 и Π являются делителями t_0 и π соответственно. Диаграмма полей в этом случае выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\
\mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_L \\
\{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, p\} & \longrightarrow & \{t_0, \pi\} & \longrightarrow & \{T_0, \Pi\}
\end{array}$$

Теорема 3.1. Поле L (а значит и $F(\mathcal{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда первый индекс e_1 в 2-мерном индексе ветвления $e = (e_1, e_2)$ расширения L/T' не делится на $p^h - 1$.

Доказательство. Из определения высоты формальной группы следует, что

$$[p]_F(X) \equiv cX^{p^h} \mod (\pi_0, deg(p^h + 1)), \quad c \in \mathcal{O}^*_{T'},$$

при этом c является рядом

$$c = c_0 + c_1\pi + \ldots, \quad c_i \in \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\},\ c_0 \in \mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}^* \cap \mathcal{O}^*_{T'},$$

то есть его коэффициенты сами являются рядами с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$. Однако обратимость c_0 в $\mathcal{O}_{T'}$ выполнена только в том случае, когда c_0 начинается со свободного коэффициента. Действительно, пусть

$$c_0 = a_m t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \ldots,\ m \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z}_p, a_m \in \mathbb{Z}^*_p$$

Пусть $a'_{m+k} = \dfrac{a_{m+k}}{a_m}$. Тогда

$$c_0 = a_m t^m (1 + a'_{m+1}t^{m+1} + \ldots),$$

откуда

$$c_0^{-1} = a_m^{-1} t^{-m} (1 + a'_{m+1}t^{m+1} + \ldots)^{-1}.$$

Этот ряд лежит в $\mathbb{Z}_p\{\{t_0\}\}^*$, но не лежит в $\mathcal{O}^*_{T'}$ и даже $\mathcal{O}_{T'}$, поскольку

$$\mathcal{O}_K = \{\alpha \mid \mathfrak{v}_K(\alpha) \geqslant (0,0)\},$$

а $\mathfrak{v}_K(t^{-m}) = (-m, 0) < (0,0)$. Таким образом, $m = 0$ и тогда

$$c = (\theta_{0,0} + \theta_{0,1}t + \ldots) + (\theta_{1,0}t^{-m_1} + \ldots)\pi + (\theta_{2,0}t^{-m_2} + \ldots)\pi^2 + \ldots,$$

где $\theta_{0,0} \in \mathbb{Z}^*_p, \theta_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$.
Далее действуем аналогично случаю одномерного поля. Переобозначим для удобства $K_0 := \mathbb{Q}_p\{\{t_0\}\}$.

По подготовительной лемме Вейерштрасса существует $\varepsilon(X) \in 1 + X\mathcal{O}_{K_0}[|X|]$ такой, что

$$f(x) := \frac{[p](X)}{X}\varepsilon(X) =$$

$$= p + pd_1X^1 + \ldots + pd_{p^h-2}X^{p^h-2} + d_{p^h-1}X^{p^h-1},$$

где $d_{p^h-1} := d_{p^h-1}(X) \in \mathcal{O}^*_{T'}$.
Ясно, что

$$\operatorname{Ker}[p]_F(X) = \operatorname{Ker} f(X).$$

Далее, сводим присоединение корня π многочлена $f(X)$ к присоединению корня π' уравнения $X^{p^h-1} + p' = 0$, то есть имеем

$$L(\operatorname{Ker}[p]_F) = L(\pi'),$$

где $p' = p \cdot d^{-1}_{p^h-1}$ — простой в K_0.

1. Пусть первый индекс e_1 в двумерном индексе ветвления $(e_1, e_2) = e = e(L/T') = e(L/K_0)$ делится на $p^h - 1$, то есть $e_1 = (p^h - 1)e'$, и пусть Π — простой элемент в L. Тогда

$$-p' = \Pi^e \theta\eta,$$

где θ — представитель Тейхмюллера, а η — главная единица поля L. Тогда

$$\pi' = \sqrt[p^h-1]{-p'} = \Pi^{e'} \sqrt[p^h-1]{\theta}\eta_1,$$

где $\eta_1^{p^h-1} = \eta$ в L.
Поэтому расширение $L(\pi') = L(\sqrt[p^h-1]{\theta})$, а с ним и $L(\operatorname{Ker}[p]_F)$ неразветвлено над L. Это значит, что $F(\mathcal{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2. Если же e_1 не делится на $p^h - 1$, то расширение $L(\pi') = L(\sqrt[p^h-1]{\pi^e\theta})$ будет разветвлено над L, откуда $F(\mathcal{M}_L)$ — вполне регулярный модуль.

$\square$

3.2 Случай многомерного локального поля для формальной группы Хонды

В этом параграфе мы сформулируем общий результат для многомерных локальных полей без доказательства, чтобы не загружать работу техническими выкладками. Идейно оно ничем не отличается от двумерного случая.
Пусть k — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$, T — подполе инерции в k. Рассмотрим стандартное n-мерное локальное поле K:

$$\mathbb{F}_q - \mathbb{F}_q((t_1)) - \ldots - \mathbb{F}_q((t_1))\ldots((t_{n-1}))-$$

$$-k\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\} := K.$$

Переобозначим для удобства $\mathbb{Q}'_p := \mathbb{Q}_p\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$, $T' := T\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}, \mathbb{Z}'_p := \mathbb{Z}_p\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$.
Фиксируем эндоморфизм $\sigma : \mathcal{O}_{T'} \to \mathcal{O}_{T'}$, определенный следующим образом:

$$\sigma(\sum a_i t_1^{i_1}\ldots t_{n-1}^{i_{n-1}}) = \sum a_i^{Fr} t_1^{p\cdot i_1}\ldots t_{n-1}^{p\cdot i_{n-1}},\ a_i \in \mathcal{O}_T,$$

и обладающий свойством:

$$\forall x \in \mathcal{O}_{T'} \quad \sigma(x) \equiv x^p \pmod{\mathcal{M}_{T'}},$$

где Fr — продолжение автоморфизма Фробениуса на $T/\mathbb{Q}_p$. Оператор Фробениуса и формальную группу Хонды определим также, как и в двумерном случае. Рассмотрим формальную группу Хонды $F(X,Y)$ над $\mathcal{O}_{T'}$ высоты h, $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K} F \cong \mathbb{Z}'_p$. Пусть L — расширение поля K такое, что $\mathrm{Ker}_F[p]$ (без нуля) не содержится в L, $e = e(L/T') = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — n-мерный индекс ветвления, $\mathcal{M}_L$ — максимальный идеал кольца целых поля L, $F(\mathcal{M}_L)$ — формальный $\mathcal{O}_L$-модуль на идеале $\mathcal{M}_L$.
Пусть $\{T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n = \Pi\}$ — система локальных параметров поля L.
Диаграмма полей будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}'_p & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}'_p & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_L \end{array}$$

Теорема 3.2. Поле L (а значит и $F(\mathcal{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда первый индекс e_1 в n-мерном индексе ветвления $e = (e_1, \ldots, e_n)$ расширения L/T' не делится на $p^h - 1$.

4 Формальные модули в многомерном поле

4.1 Формулировка

Пусть K — полное многомерное поле нулевой характеристики, то есть поле, для которого имеется последовательнось полей, $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_n = K$ таких, что K_0 — совершенное поле характеристики p, и K_{i-1} — поле вычетов для K_i, $i \leqslant i \leqslant n$.
$(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = \pi)$ — система локальных параметров поля K,
$\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля K относительно n-мерного нормирования,
$F(X,Y)$ — одномерная формальная группа над $\mathfrak{O}$.
Будем предполагать, что K — разнохарактеристическое полное многомерное поле, то есть $char K = 0$, $char K_{n-1} = p > 0$.

Пусть k — максимальное локальное поле в K (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$), для которого поле $E = k\{\{t_1\}\} \cdots \{\{t_{n-1}\}\}((\pi))$ содерижится в K.
Предполагаем, что K/E — конечное расширение, и кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}} F$ формальной группы F изоморфно кольцу целых $\mathfrak{O}_0$ подрасширения E_0 в E. Считаем при этом, что K/E_0 — конечное расширение.

Пусть $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots t_{n-1}^{(0)}, t_n^{(0)} = \pi_0)$ — система локальных параметров поля E_0, $\pi \in k_0$.
$E_0 = k_0\{\{t_1^{(0)}\}\} \cdots \{\{t_{n-1}^{(0)}\}\}((\pi_0))$, причем k_0 — подполе k. Пусть, далее L — расширение поля K с системой локальных параметров $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n = \Pi)$, и

$$-\pi_0 = T_1^{i_1} \cdots T_{n-1}^{i_{n-1}} \Pi^{e_n} \rho u, \tag{*}$$

где ρ — представитель Тейхмюллера в L, u — главная единица поля L.

Предполагаем, что поле L — регулярно относительно формальной группы F, то есть ядро изогении $\mathrm{Ker}[\pi_0]$ не содрежится в L за исключением нуля.
$h := htF$ — высотра формальной группы F,
$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_L$ — максимальный идеал кольца целых поля L,
$F(\mathfrak{M})$ — формальный $\mathfrak{O}$-модуль на идеале $\mathfrak{M}$.

Будем называть поле L вполне регулярным относительно формальной группы F, если $\mathrm{Ker}[\pi_0]$ не содержится в любом неразветвтленном расширении M поля L.

В настоящей работе доказывается следующий результат

Теорема 4.1. Поле L является вполне регулярным относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда система индексов $(i_1, \dots, i_{n-1}, e_n)$ делится на $p^h - 1$, то есть $i_k \vdots p^h - 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (см. (*)).

4.2 Вспомогательные результаты

Пусть $\xi \in \mathrm{Ker}[\pi_0]$, $\xi \neq 0$, $\xi \in K^{alg}$ — произвольный элемент ядра изогении $[\pi_0]$. $[\pi_0](X) = \pi_0 X \varepsilon(X) + X^{p^h} \theta r(X)$, где $\varepsilon(X), r(X) \in \mathfrak{O}_0[[X]]$, при этом $\varepsilon(X) \equiv r(X) \equiv 1 \mod X$, а θ — представитель система Тейхмюллера в кольце целых поля k_0. Ясно, что

$$\frac{[\pi_0](X)}{X} = \pi_0 \varepsilon_1(X)^{p^h-1} + (X r_1(X))^{p^h-1}\theta,$$

где $\varepsilon_1(X)^{p^h-1} = \varepsilon(X)$, $r_1(X)^{p^h-1} = r(X)$. Поэтому элемент ξ удовлетворяет уравнению $-\pi_0 = (\xi æ(\xi))^{p^h-1}\theta$, где $æ(X) = \varepsilon_1(X)^{-1} r_1(X)$. Поэтому

$$L(\xi) = L(\sqrt[p^h-1]{-\theta^{-1}\pi_0}). \tag{1}$$

Пусть $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$; $1 \leqslant b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$, Π — простой элемент в K, $\varepsilon = 1 + c\Pi^b$, c — единица в K.

Лемма 4.2. Пусть $\zeta_p \in K$, тогда $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ вполне разветвленно.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $X^p = \varepsilon$ и $X = Y + 1$, тогда

$$Y^p + C_p^{p-1} Y^{p-1} + \cdots + pY = c\Pi^b. \tag{*}$$

Пусть расширение $K(\sqrt[p]{\varepsilon})/K$ неразветвлено. Тогда, если корень уравнения (*) α — единица, то получим противоречие: $\mathfrak{v}_L(\alpha)=0 \implies \mathfrak{v}(\alpha^p+\ldots+p\alpha)=0$, но $\mathfrak{v}(c\Pi^b)=b\geqslant 1$. Здесь и далее $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_L$ — нормирование в поле $L=K(\sqrt[p]{\varepsilon})$. Если $\mathfrak{v}(\alpha)\geqslant 1$, то есть два варианта.

1. $1\leqslant\mathfrak{v}(\alpha)\leqslant\frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p+C_p^{p-1}\alpha^{p-1}+\cdots+p\alpha)=p\mathfrak{v}(\alpha)$. Но $\mathfrak{v}(c\Pi^b)=b\not\equiv 0 \mod p$ — противоречие.

2. $\mathfrak{v}(\alpha)>\frac{e}{p-1}$, тогда $\mathfrak{v}(\alpha^p+C_p^{p-1}\alpha^{p-1}+\cdots+p\alpha)\geqslant\frac{pe}{p-1}$. С другой стороны, $\mathfrak{v}(c\Pi^b)=b<\frac{pe}{p-1}$.

Итак, предположение, что L/K неразветвлено приводит к противоречию. □

Следствие 4.3. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

4.3 Доказательство теоремы (4.1)

Доказательство. Пусть $\overline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ делится на p^h-1. Тогда

$$-\pi_0=(T_1^{i_1'}\cdots T_{n-1}^{i_{n-1}'}\rho_1u_1)^{p^h-1},$$

где $i_k'=\frac{i_k}{p^h-1}$, $1\leqslant k\leqslant n-1$; $\rho_1^{p^h-1}=\rho$, $\rho\in\mathfrak{R}$; и $u_1^{p^h-1}=u$, где u_1 — главная единица в L. Отсюда и из (*) получаем $L(\xi)=L(\sqrt[p^h-1]{\theta^{-1}})$ и, значит, расширение L/K неразветвлено.

Если же $\underline{(i_1,\ldots,i_{n-1},e_n)}$ не делится на p^h-1, то $L(\xi)=L(\sqrt[p^h-1]{T_1^{i_1}\cdots T_{n-1}^{i_{n-1}}\Pi^{e_n}})$ и $L(\xi)/L$ поэтому разветвлено. □

Список литературы

[1] З. И. Боревич, «О регулярных локальных полях», *Вестник ЛГУ*, 1962, с. 142—145.

[2] С. В. Востоков, «Явная формула закона взаимности», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1288—1321.

[3] С. М. Власьев, С. В. Востоков, А. А. Горшков, «Регулярные формальные модули в одномерных локальных полях», , .