С. М. Власьев, С. В. Востоков, А. А. Горшков
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ В ОДНОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

1 Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных p-х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным.* Эта задача была решена З. И. Боревичем в работе [3]. Основной результат этой работы, доказательство которого было упрощено Д. К. Фаддеевым, является следующим.

Теорема 1.1. (З. И. Боревич, 1962). Для того, чтобы локальное поле K было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы показатель ветвления e расширения $K/\mathbb{Q}_p$ не делился на $p-1$.

Аналогичная задача возникает в арифметике формальных модулей. Она и решается в настоящей работе. Чтобы сформулировать эту задачу в общем случае, введем необходимые обозначения.

Пусть K — локальное поле, $\mathfrak{O}_K$ — его кольцо целых, $\mathfrak{M}_K$ — максимальный идеал в $\mathfrak{O}_K$, $F(X,Y)$ — одномерная коммутативная формальная группа над $\mathfrak{O}_K$ (далее мы будем писать просто формальная группа), $i(X)$ — ее обратный элемент. Заметим, что на множестве $\mathfrak{M}_K$ можно задать структуру группы:

$$(\alpha +_F \beta)(X) = F(\alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_K$$
$$(-_F \alpha)(X) = i(\alpha),\ \alpha \in \mathfrak{M}_K.$$

Теперь пусть π_0 — простой элемент в подполе K_0 поля K, $F(X,Y)$ — формальная группа над $\mathfrak{O}_K$ такая, что $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K}(F) \cong \mathfrak{O}_{K_0}$.

Определение 1.1. Под *формальным $\mathfrak{O}_{K_0}$-модулем $F(\mathfrak{M}_K)$* мы будем понимать $\mathfrak{O}_{K_0}$-модуль, построенный на максимальном идеале $\mathfrak{M}_K$ кольца целых $\mathfrak{O}_K$ с помощью следующих операций:

$$\alpha +_F \beta := F(\alpha, \beta), \quad a \cdot \alpha := [a]_F(\alpha), \quad a \in \mathfrak{O}_{K_0}, \alpha, \beta \in \mathfrak{M}_K.$$

Определение 1.2. Обобщая определение регулярного локального поля в работе З. И. Боревича, мы называем локальное поле K (а вместе с ним и формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$) *регулярным относительно формальной группы* F, если K (а значит и $F(\mathfrak{M}_K)$) не содержит нетривиальных корней изогении $[\pi_0]_F$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00393.

Определение 1.3. Будем называть локальное поле K (а вместе с ним и формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$) ***вполне*** *регулярным относительно формальной группы* F, если любое его конечное неразветвленное расширение L/K (а значит и $F(\mathfrak{M}_L)$) является регулярным относительно формальной группы F.

Например, пусть $F_m = X + Y + XY$ — мультипликативная формальная группа. Эндоморфизмы умножения в F_m имеют вид: для $r \in \mathbb{N}$

$$[r]_{F_m}(x) = (1+x)^r - 1,$$

$$\mathrm{Ker}[p]_{F_m} = \{\xi = (\zeta - 1)\},$$

где ζ — первообразный корень p-ой степени из 1. Диаграмма полей выглядит в этом случае так:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & L = K \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K \\ p & \longrightarrow & \pi \end{array}$$

Сформулируем теорему 1.1 в терминах регулярного формального модуля.

Теорема 1.2. Пусть K — регулярное локальное поле, $F_m(X,Y)$ — мультипликативная группа над $\mathbb{Z}_p$. Тогда поле K (а значит и формальный модуль $F_m(\mathfrak{M}_K)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$ не делится на $p-1$.

Таким образом, мы перенесли постановку задачи на область арифметики формальных модулей. Далее эта задача будет решаться для различных одномерных формальных групп (формальных модулей).

2 Основные обозначения

K — конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}_p$,
K_0 — подполе в K,
T — подполе инерции в K со степенью инерции f_0,
$\mathfrak{O}_K$ — кольцо целых K, $\mathfrak{O}_{K_0}$ — кольцо целых K_0,
π — простой элемент $\mathfrak{O}_K$,
π_0 — простой элемент $\mathfrak{O}_{K_0}$,
$F(X,Y)$ — одномерная коммутативная формальная группа над $\mathfrak{O}_K$,
причем $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K}(F) \cong \mathfrak{O}_{K_0}$,
L — расширение поля K, не содержащее $\mathrm{Ker}_F[\pi_0]$ (без нуля),
$\mathfrak{O}_L$ — кольцо целых L,

Π — простой элемент $\mathfrak{O}_L$.
Общая диаграмма (башня) полей выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_{K_0} & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

3 Многочленная формальная группа

Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ и c — некоторая единица в K.

Определение 3.1. Формальную группу вида $F_c(X,Y) = X + Y + cXY$ назовем *многочленной формальной группой.*

Замечание 3.1. Известно, что $\mathrm{End}(F_c) \cong \mathbb{Z}_p$ (см. [7]), то есть в общем случае эта формальная группа не является группой Любина-Тейта. Однако, например, для $c \in \mathbb{Z}_p$ она таковой является.

Легко видеть, что

$$F_c(X,Y) = c^{-1}((1+cX)(1+cY)-1).$$

Тогда несложно доказать, что (см. например [2])

$$[p]_{F_c}(X) = c^{-1}([p]_{F_m}(cX)) = c^{-1}((1+cX)^p - 1),$$

$$\mathrm{Ker}[p]_{F_c} = \{\xi = c^{-1}(\zeta - 1)\},$$

где ζ — первообразный корень p-ой степени из 1.
Пусть $\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{F_c}(X),\ \xi \neq 0$.

Лемма 3.1.

$$-p = ((\varepsilon(X)c)X)^{p-1}|_{X=\xi}, \text{ где } \quad \varepsilon \in 1 + \mathbb{Z}_p[c][|X|] \qquad (1)$$

Доказательство. Действительно, из определения $[p]_{F_c}(X)$ получаем

$$\frac{[p]_{F_c}(X)}{X} = p + C_p^2 cX + \ldots + C_p^{p-1} c^{p-2} X^{p-2} + (cX)^{p-1} =$$

$$= p\eta(X) + (cX)^{p-1},$$

где $\eta(X) = 1 + \frac{C_p^2}{p} cX + \ldots + \frac{C_p^{p-1}}{p} c^{p-2} X^{p-2} \in \mathbb{Z}[c][X]$. Поэтому

$$-p = \eta(X)^{-1}(cX)^{p-1}|_{X=\xi}$$

Так как $\eta(X)^{-1} \equiv 1 \bmod (X)$, то найдется ряд $\varepsilon(X) \in \mathbb{Z}[c][|X|]$, $\varepsilon(X) \equiv 1 \bmod (X)$, такой что $\varepsilon(X)^{p-1} = \eta(X)^{-1}$. Тогда

$$-p = ((\varepsilon(X)c)X)^{p-1}|_{X=\xi}$$

$\square$

Пусть L — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ и c — некоторая единица в L. Пусть $F_c(X,Y)$ — многочленная формальная группа над $\mathbb{Z}_p[c]$. Пусть $\xi \neq 0$ — корень изогении $[p]_{F_c}(X)$, причем $\xi \notin L$. Тогда диаграмма полей выглядит так:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p[c] & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p[c] & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

Теорема 3.2. Поле L (а значит и $F_c(\mathfrak{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы $F_c(X,Y)$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/\mathbb{Q}_p)$ не делится на $p-1$.

Доказательство. Из равенства (1) леммы 3.1 следует, что

$$-p = (\varepsilon(\xi)c)^{p-1}\xi^{p-1},$$

то есть. $\sqrt[p-1]{-p} = (\varepsilon(\xi)c)\xi$. Отсюда получаем, что

$$L(\mathrm{Ker}[p]_{F_c}) = L(\xi) = L(\sqrt[p-1]{-p}) \tag{2}$$

Пусть $-p = \Pi^e \theta u$, где Π — простой элемент в L, $\theta \in \mathfrak{R}$ — представитель Тейхмюллера в поле L, u — главная единица поля L.

1. Если $e \equiv 0 \mod (p-1)$, то

   $$\sqrt[p-1]{-p} = \sqrt[p-1]{\Pi^e \theta} u_1,$$

   где $u_1^{p-1} = u, u_1 \in L$. Откуда

   $$L(\sqrt[p-1]{-p}) = L(\sqrt[p-1]{\theta}),$$

   то есть расширение $L(\sqrt[p-1]{-p})/L$ неразветвлено, а значит, согласно (2), расширение $L(\mathrm{Ker}[p]_{F_c})/L$ тоже неразветвлено, следовательно $F_c(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2. Если $e \not\equiv 0 \mod (p-1)$, то

   $$\sqrt[p-1]{-p} = \sqrt[p-1]{\Pi^e \theta} u_1,$$

   и $L(\sqrt[p-1]{-p}) = L(\sqrt[p-1]{\Pi^e \theta})$ разветвлено над L, откуда $F_c(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный модуль.

$\square$

Замечание 3.2. Условие неразветвленности получилось таким же, как и в случае мультипликативной формальной группы F_m.

4 Формальная группа Любина-Тейта

Определение 4.1. Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Введем $\mathfrak{F}_\pi$ как множество формальных степенных рядов $f(X) \in \mathfrak{O}_K[|X|]$ таких, что

$$f(X) \equiv \pi X \mod deg\ 2,\ f(X) \equiv X^q \mod \pi,$$

где π — простой элемент в K и q — количество элементов поля частных поля K.
Тогда по известной теореме (см. [1]) для каждого $f(X)$ из $\mathfrak{F}_\pi$ однозначно строится формальная группа F_π над $\mathfrak{O}_K$, которая называется *формальной группой Любина-Тейта.* При этом отображение $\mathfrak{O}_K \to \mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K}(F_\pi)$: $\alpha \mapsto [\alpha]_{F_\pi}$ является кольцевым гомоморфизмом и $f = [\pi]_{F_\pi}$.

Пусть формальная группа Любина-Тейта $F_\pi(X,Y)$ построена по изогении

$$[\pi](X) = \pi X + \pi a_2 X^2 + \ldots + X^q + \ldots \tag{3}$$

Заметим, что в этом случае $\mathfrak{O}_{K_0} = \mathfrak{O}_K, K_0 = K, \pi_0 = \pi$. Пусть L — расширение поля K такое, что $\mathrm{Ker}_{F_\pi}[\pi]$ (без нуля) не содержится в L. Тогда диаграмма полей имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\ p & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi \end{array}$$

Теорема 4.1. Поле L (а значит и $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F_π тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q-1$.

Доказательство. Так как $F_\pi(X,Y)$ построена по изогении (3), то $[\pi](X)$ можно представить в виде:

$$[\pi](X) = \pi X \varepsilon(X) + X^q,$$

где $\varepsilon(X) \equiv 1 \mod X$. Заметим, что так как $q-1$ и p взаимно просты, то из ряда $\varepsilon(X)^{-1}$ в этом случае можно извлечь в кольце $\mathfrak{O}_K[|X|]$ корень степени $q-1$. То есть существует ряд $u(X) \in 1 + X\mathfrak{O}_K[|X|]$ такой, что $u(X)^{q-1} = \varepsilon(X)^{-1}$, поэтому

$$\frac{[\pi](X)}{X} = \pi u(X)^{-(q-1)} + X^{q-1}.$$

Получаем уравнение для корня изогении $X \neq 0$:

$$-\pi = (Xu(X))^{q-1} = Y^{q-1}.$$

Так как L — расширение поля K, Π — простой в L, то для $e = e(L/K)$:
$$-\pi = \Pi^e \theta \eta(\Pi),$$
где $\eta(\Pi) \equiv 1 \mod \Pi$ — главная единица.
1) Если $e = (q-1)e'$, то получим, что
$$-\pi = (\Pi^{e'} \eta_1(\Pi))^{q-1} \theta,$$
где $\eta_1^{q-1} = \eta$. И, значит,
$$Y = \Pi^{e'} \eta_1 \sqrt[q-1]{\theta},$$
где $\Pi^{e'} \eta_1 \in L$, а θ из неразветвленного расширения поля L. Таким образом, $L(Y)/L$ — неразветвлено, а значит $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.
2) Если e не делится на $q-1$, то $L(Y) = L(\sqrt[q-1]{-\pi}) = L(\sqrt[q-1]{\Pi^e \theta})$ разветвлено над L, откуда $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный относительно группы F модуль. □

5 Формальная группа Хонды

Пусть K — конечное неразветвленное расширение $\mathbb{Q}_p$. Рассмотрим $\triangle$ — оператор Фробениуса в $\mathfrak{O}_K[|X|]$:
$$\triangle(\sum a_i x^i) = \sum a_i^{Fr} x^{p \cdot i}, \ a_i \in \mathfrak{O}_K,$$
где Fr — продолжение автоморфизма Фробениуса на $K/\mathbb{Q}_p$. Множество операторов $\sum_{i \geqslant 0} a_i \triangle^i$, где $a_i \in \mathfrak{O}_K$, образуют некоммутативное кольцо $\mathfrak{O}_K[| \triangle |]$ формальных степенных рядов от $\triangle$, для которого $\triangle a = a^{Fr} \triangle$ для $a \in \mathfrak{O}_K$.

Определение 5.1. Пусть K_0 — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, q — количество элементов поля частных поля K_0, K — конечное неразветвленное расширение K_0, π_0 — простой элемент в K_0. Формальная группа F над $\mathfrak{O}_K$ с логарифмом $\log_F(X) \in K[|X|]$ называется *формальной группой Хонды*, если
$$u \circ \log_F \equiv 0 \mod \pi_0$$
для некоторого оператора $u = \pi_0 + a_1 \triangle + \ldots \in \mathfrak{O}_K[| \triangle |]$. Оператор u называется *типом* формальной группы F.

Пусть опять K_0 — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, K — конечное неразветвленное расширение K_0. Рассмотрим $F(X,Y)$ — группу Хонды над $\mathfrak{O}_K$ высоты h такую, что $\mathfrak{O}_{K_0} \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K} F$. Пусть L — расширение K такое, что $\mathrm{Ker}_F[\pi_0]$ (без нуля) не содержится в L. Тогда диаграмма полей имеет вид:
$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\
\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_{K_0} & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L \\
p & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \Pi
\end{array}$$

Теорема 5.1. Поле L (а значит и $F(\mathfrak{M}_L)$) являются вполне регулярными относительно формальной группы F тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q^h - 1$.

Доказательство. Заметим, что $e = e(L/K) = e(L/K_0)$, так как расширение K/K_0 неразветвлено по условию.
Пусть π_0 — простой элемент в K_0. Рассмотрим эндоморфизм формальной группы F умножения на π_0:

$$[\pi_0]_F(X) = \pi_0 X + a_2\pi_0 X^2 + \ldots + a_{q^h} X^{q^h} + \ldots, \quad a_i \in \mathfrak{O}_K$$

и $a_{q^h} \in \mathfrak{O}_K^*$, так как высота F равна h. Все коэффициенты $a_i \in \pi_0\mathfrak{O}_K$, так как по условию расширение $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{O}_{K_0}$ неразветвлено.
По подготовительной лемме Вейерштрасса существует $\varepsilon(X) \in 1 + X\mathfrak{O}_{K_0}[|X|]$ такой, что

$$f(X) := \frac{[\pi_0](X)}{X}\varepsilon(X) =$$

$$= \pi_0 + \pi_0 c_1 X^1 + \ldots + \pi_0 c_{q^h-2} X^{q^h-2} + c_{q^h-1} X^{q^h-1},$$

где $c_{q^h-1} \in \mathfrak{O}_K^*$.
Ясно, что

$$\mathrm{Ker}[\pi_0]_F(X) = \mathrm{Ker}\, f(X)$$

Пусть π — корень многочлена $f(X)$ и соответственно, ненулевой корень $[\pi_0](X) = 0$, тогда расширение $K(\pi)/K$ вполне разветвлено и π — простой элемент в нем. Поэтому в поле $K(\pi)$ имеем:

$$-\pi_0(1 + c_1\pi + \ldots + c_{q^h-2}\pi^{q^h-2}) = c_{q^h-1}\pi^{q^h-1},$$

откуда

$$-\pi_0 = c_{q^h-1}\pi^{q^h-1}\varepsilon,$$

где $\varepsilon = (1 + c_1\pi + \ldots + c_{q^h-2}\pi^{q^h-2})^{-1}$.
Пусть ε' — единица в $K(\pi)$ такая, что $(\varepsilon')^{q^h-1} = \varepsilon$, тогда $\pi' = \pi\varepsilon'$ будет корнем уравнения

$$X^{q^h-1} + \pi_0' = 0,$$

где $\pi_0' = \pi_0 c_{q^h-1}^{-1} \in K_0$. При этом

$$L(\mathrm{Ker}[\pi_0]_F) = L(\pi) = L(\pi'),$$

так как $\mathrm{Ker}[\pi_0]_F$ не принадлежит по условию полю L. Но $K \subset L$, а уравнение

$$c_{q^h-1}X^{q^h-1} + \pi_0(1 + c_1X + \ldots + c_{q^h-2}X^{q^h-2}) = 0$$

равносильно уравнению

$$Y^{q^h-1} + \pi_0 c_{q^h-1}^{-1} = 0 \Leftrightarrow Y^{q^h-1} + \pi_0' = 0,$$

где

$$Y = X(1 + c_1 X + \ldots + c_{q^h-2} X^{q^h-2})^{-1}.$$

Итак, мы доказали, что

$$L(\mathrm{Ker}[\pi_0]_F) = L(\pi'),$$

где π' — корень уравнения $X^{q^h-1} + \pi_0' = 0, \pi_0'$ — простой в K_0 (и в K).

1. Пусть индекс ветвления $e = e(L/K)$ делится на $q^h - 1$, то есть $e = (q^h - 1)e'$, и пусть Π — простой элемент в L. Тогда

   $$-\pi_0' = \Pi^e \theta \eta,$$

   где θ — представитель Тейхмюллера, а η — главная единица поля L. Тогда

   $$\pi' = \sqrt[q^h-1]{-\pi_0'} = \Pi^{e'} \sqrt[q^h-1]{\theta} \eta_1,$$

   где $\eta_1^{q^h-1} = \eta$ в L.
   Поэтому расширение $L(\pi') = L(\sqrt[q^h-1]{\theta})$, а с ним и $L(\mathrm{Ker}[\pi_0]_F)$ неразветвлено над L. Это значит, что $F(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

2. Если же e не делится на $q^h - 1$, то расширение $L(\pi') = L(\sqrt[q^h-1]{\pi^e \theta})$ будет разветвлено над L, откуда $F(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный относительно группы F модуль.

□

Заключение

Фактически, исследование регулярных формальных модулей до этого было выполнено только для случая мультипликативной формальной группы одномерного локального поля в работе З. И. Боревича [3]. В данной работе сделан следующий шаг к обобщению результатов – получены свойства для случая многочленной формальной группы, для формальной группы Любина-Тейта и формальной группы Хонды.

Остается открытым вопрос о произвольных формальных модулях как в одномерных, так и в многомерных локальных полях. Кроме того, возникает вопрос об условиях для неразветвленного кругового поля, содержащего все корни p-ой степени из 1. Эти вопросы мы постараемся исследовать в следующих работах.

Список литературы

[1] I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions*, Second edition, 2002.

[2] С. В. Востоков, П. П. Волков, Г. К. Пак, *Символ Гильберта для многочленных формальных групп*, Зап. науч. сем. ПОМИ, том 400, 2012, стр. 127-132.

[3] З. И. Боревич, *О регулярных локальных полях*, Вестник ЛГУ, 1962, стр. 142-145.

[4] Д. Г. Бенуа, С. В. Востоков, *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 191 (1991), стр. 9–23.

[5] I. B. Zhukov, *Higher dimensional local fields*, Invitation to higher local fields, 2000, стр. 5-18.

[6] T. Honda, *On the theory of commutative formal groups*, J. Math Soc. Japan, 1970, стр. 213-246.

[7] M. Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.