А. А. Горшков, С. В. Востоков, С. М. Власьев
РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ В ПОЛНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯХ

Введение

При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, т.е не содержащими нетривиальных p-х корней из 1 (где p — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным*. Эта задача была решена З.И. Боревичем в работе [3]. Основной результат этой работы, доказательство которого было упрощено Д.К. Фадеевым, является следующим.

Теорема 0.1. (З.И. Боревич, 1962). Для того, чтобы локальное поле K было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы показатель ветвления e расширения $K/\mathbb{Q}_p$ не делился на $p-1$.

Встает естественный вопрос — является ли ограничение на индекс ветвления исходного поля, которое не является регулярным, т.е. содержит нетривиальный корень степени p из 1, достаточным для того, чтобы круговое расширение $K(\zeta_{p^n})$, $n \geqslant 2$, было бы неразветвлено. Этот вопрос решается в первом параграфе работы.

Задача о регулярных и вполне регулярных полях возникает в арифметике формальных модулей и она решается во втором параграфе настоящей работы.

1 Пример поля K, которое содержит ζ_p, но $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено

K — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),
ζ_{p^m} — первообразный корень степени p^m из 1,
e — абсолютный индекс ветвления поля K,
$\mathfrak{R}$ — мультипликативная система Тейхмюллера в поле K,
$\mathfrak{O}$ — кольцо целых подполя инерции T в $K/\mathbb{Q}_p$,
$E(f(X)) = exp(1+\frac{\Delta}{p}+\frac{\Delta^2}{p^2}+\ldots)(f(X))$, где $\Delta f(X) = f(X^p)$, для $f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]X$. Считаем, что $\zeta_p \in K$ и индекс ветвления делится на p.

Докажем, что существуют поля, для которых расширение $K(\zeta_{p^2})$ будет вполне разветвленным над K.

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ и $K = K_0(\sqrt[p]{\pi})$, где $\pi = 1-\zeta_p$. Пусть $\Pi = \sqrt[p]{\pi}$.

Теорема 1.1. Расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено.

Доказательство. В нашем случае $e = e(K/\mathbb{Q}_p) = p(p-1)$. Рассмотрим разложение корня ζ_p по образующим мультипликативной группы K^*. Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и $\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^p - 1))|_{X=\Pi}$, где $\underline{\zeta}(X) = (1 - X^p)^p$.

В работе [3] было доказано, что $\omega(a) - p$ — примарный элемент поля K (т.е. расширение $K(\sqrt[p]{\omega(a)})/K$ неразветвлено), и при этом значение символа Гильберта в поле K, $(\,,)_p : K^* \times K^* \to \langle\zeta_p\rangle$ на паре $\Pi, \omega(a)$ равно $(\Pi, \omega(a)) = \zeta_p^a$.

Образующими K^* будут элементы $\{\Pi, \omega(a), 1-\theta\pi^b \mid \theta \in \mathfrak{R}, 1 \leqslant b < p^2, p \nmid b\}$ и корень ζ_p, тем самым, раскладывается в виде

$$\zeta_p = \omega(a)^\beta \prod_{\substack{p\nmid b\\ 1\leqslant b\leqslant p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}}, \tag{1}$$

где $\beta, \alpha_{\theta,b} \in \mathbb{Z}_p$.

Докажем сперва, что

$$\beta \equiv 0 \mod p. \tag{2}$$

Для этого подсчитаем значение символа Гильберта на паре Π, ζ_p. Нетрудно видеть, что из соотношения Стейнберга $(\alpha, 1-\alpha) = 1$, $\alpha \neq 0$ для символа Гильберта следует равенство

$$(\Pi, 1 - \theta\Pi^b) = 1, p \nmid b. \tag{3}$$

Действительно, $1 = (\theta\Pi^b, 1-\theta\Pi^b) = (\theta, 1-\theta\Pi^b)\cdot(\Pi, 1-\theta\Pi^b)^b$. При этом $\theta = \theta_1^p$ при некотором $\theta_1 \in \mathfrak{R}$, так как группа $\mathfrak{R}$ p-делима. Значит, $(\Pi, 1-\theta\Pi^b)^b = 1$, откуда $(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = 1$, так как, если $(\Pi, 1-\theta\Pi^b) = \zeta^k$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то $\zeta^{bk} = 1$, что противоречит $p \nmid bk$.

Из равенства (3) следует

$$(\Pi, \zeta_p) = (\Pi, \omega(a))^\beta \cdot \prod_{\substack{p\nmid b\\ 1\leqslant b\leqslant p^2}} (1 - \theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} =$$

$$= (\Pi, \omega(a))^\beta = \zeta_p^{a\beta}, \text{то есть}$$

$$(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{a\beta}. \tag{4}$$

Подсчитаем теперь значение (Π, ζ_p) по явной формуле для символа Гильберта (см. [**?**, 12]). Пусть $l(1 + f(X)))$ — обратная функция к функции Артина-Хассе $E(f(X))$. Она была определена в [**?**, §1, п. 1].: $l(1+f(X)) = (1-\frac{\Delta}{p})\log(1+f(X))$ для $f(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ и $\Delta f(X) = f(X^p)$.

Тогда имеет место формула $(\Pi, \zeta_p) = \zeta_p^{res_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p - 1)}$. Вычислим для $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(X) = 1 - X^p$ $res_X X^{-1} l(\underline{\zeta})/((1-\underline{\zeta}^p)^p - 1) \mod p$. Ясно, что

$$(1 - \underline{\zeta}^p)^p - 1 \equiv -\underline{\zeta}^{p^2} \mod p \tag{5}$$

Кроме того, $l(\underline{\zeta}) = (1-\frac{\Delta}{p})\log(1-X^p) = \sum\limits_{p\nmid m} \frac{X^{pm}}{m} + \sum\limits_{m\geqslant 1} \frac{X^{p^{m+1}}-X^{p^m}}{p^m} = \sum\limits_{p\nmid m} \frac{X^{p^m}}{m}$. Среди степеней X^{pm}, $p\nmid m$ нет степени p^2, значит $(\Pi, \zeta_p) = 1$. Отсюда и из (4) следует (2).

Значит $\zeta_p = \prod\limits_{\substack{p\nmid b\\ 1\leqslant b\leqslant p^2}} (1-\theta\Pi^b)^{\alpha_{\theta,b}} \mod K^{*p}$. Пусть степень b — наименьшая, для которой $\alpha_{\theta,b} \not\equiv 0 \mod p$. Если такой нет, то это означает, что $\zeta_p \in K^{*p}$, что невозможно. Тогда $\zeta_p = 1 - c\Pi^b$, где c — некоторая единица поля K, то есть $c = c_0 + c_1\Pi + c_2\Pi^2 + \ldots$, $c_i \in \mathbb{Z}_p$ и $p \nmid c_0$, $1 \leqslant b < \frac{pe}{p-1}$, $p \nmid b$.

Несложно видеть (!!!!!!! доказать !!!!!!!), что расширение $K(\zeta_{p^2})/K$ вполне разветвлено. $\square$

Список литературы

[1] Fesenko I.B., Vostokov S.V, *Local Fields and Their Extensions*, Second edition, 2002.

[2] Востоков С.В, Волков П.П., Пак Г.К, *Символ Гильберта для многочленных формальных групп*, Зап. науч. сем. ПОМИ, том 400, 2012, стр. 127-132.

[3] Боревич З.И., *О регулярных локальных полях*, Вестник ЛГУ, 1962, стр. 142-145.

[4] Бенуа Д.Г., Востоков С.В. *Арифметика группы точек формальной группы*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 191 (1991), стр. 9–23.

[5] Zhukov I. B., *Higher dimensional local fields*, Invitation to higher local fields, 2000, стр. 5-18.

[6] Honda T., *On the theory of commutative formal groups*, J. Math Soc. Japan, 1970, стр. 213-246.

[7] Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.