

Лабораторна робота №3

Розв'язання оптимізаційних задач

Мета: Вивчити основні бібліотеки для розв'язання оптимізаційних задач на мові програмування Python.

2. Завдання:

1. Моделювання та розв'язання задачі лінійного програмування:
 - a. Оберіть завдання за номером журналу групи
 - b. Опишіть введені змінні.
 - c. Створіть математичну модель задачі.
 - d. Знайдіть рішення, використовуючи графічне представлення задачі лінійного програмування. Малюнок повинен містити лінії з їх рівняннями, виділеною напівплощиною, що задовольняє вихідним нерівностям, область допустимих рішень, точку оптимального рішення, лінію рівня.
 - e. Розв'яжіть задачу за допомогою `scipy.optimize`.
 - f. Розв'яжіть задачу за допомогою `pulp.LpProblem`.
 - g. Порівняйте рішення за допомогою `np.allclose()`.
 - h. Порівняйте час для розв'язання задачі за допомогою `scipy.optimize` та `pulp.LpProblem`.
 - i. Поясніть отриманий результат.
2. Розв'язання транспортної задачі.
 - a. Опишіть введені змінні.
 - b. Створіть математичну модель задачі.
 - c. Вирішіть проблему за допомогою `scipy.optimize`.
 - d. Поясніть отриманий результат.

Варіанти завдань

1. План випуску деталей 1 типу – не менш, ніж 1100 одиниць, 2 типу – 900 одиниць та 3 типу – 700 одиниць. При розкрої стандартного листа одним варіантом отримують 7 деталей 1 типу, 5 – 2 типу, 9 – третього типу та 0,2 ум. одиниць залишків. Другий варіант розкрою дає 3 деталі 1 типу, 4 – другого типу, 2 – 3 типу та 0,3 ум. од. залишків. Визначити, скільки листів треба кроїти кожним із варіантів так, щоб був виконаним план випуску, а сума залишків була мінімальною..

2 При виготовленні продукції двох видів P_1 і P_2 використовується 4 типа сировини: C_1 , C_2 , C_3 і C_4 , умовні одиниці записів яких та норми їх споживання для випуску одиниці продукції приведені у таблиці. Прибуток від реалізації одиниці P_1 дорівнює 7 ум. од., а P_2 – 5 ум. од. Скласти такий план випуску продукції, який забезпечує \max прибутку від її реалізації.

Вигляд продукції	P_1	P_2	Запас сировини
------------------	-------	-------	----------------

C_1	2	8	19
C_2	2	1	13
C_3	0	3	15
C_4	3	0	18
Здобуток від реалізації одиниці продукції	7	5	

3. Для виготовлення бетонної суміші необхідно не менш, ніж 300 ум. од. цементу і 850 ум. од. гранітної крихти. У сировині двох видів C_1 і C_2 , яку пропонують підприємству, наявність складових суміші така: C_1 – 12 і 24 ум. од., C_2 – 25 і 13 ум. од. Скільки треба придбати сировини кожного виду, щоб сумарні витрати були мінімальними, якщо умовна одиниця сировини C_1 коштує 18 ум. од., а C_2 – 13 ум. од.

4. Для збереження здоров'я та працездатності людина повинна отримувати за добу не менш, ніж: 12 ум. од. білків, 10 ум. од. жирів, 16 ум. од. вуглеводів, 10 ум. од. води та 3 ум. од. вітамінів. Місткість цих елементів у двох типах їжі P_1 і P_2 та вартість їжі наведені у таблиці. Скласти раціон харчування так, щоб споживач отримав необхідну кількість усіх наведених елементів і при цьому його витрати були б мінімальними.

	Білки	Жири	Вуглеводи	Вода	Вітаміни	Вартість
P_1	3	1	2	2	1	2
P_2	2	5	4	2	0,5	3

5. Для складання 1 виробу необхідні 2 деталі D_1 та 1 деталь D_2 . Їх можна отримати двома способами: 1 спосіб дає 6 деталей D_1 та 4 деталі D_2 із одиниці сировини: 0,06 ум. од. відходів; 2 спосіб, відповідно, 1 деталь D_1 та 2 деталі D_2 і 0,05 ум. од. відходів. Скільки одиниць сировини і якими способами треба обробити, щоб виготовити не менш, ніж 70 виробів. При цьому відходи повинні бути мінімальними

6. Для підживлення рослин необхідно внести на один гектар: не менш, ніж 24 ум. од. хімічної речовини B_1 , 30 ум. од. – B_2 і 15 ум. од. – B_3 . Усі ці речовини містяться у комбінованих добавках Y_1 та Y_2 у кількостях, які наведені у таблиці. Яку кількість комбінованих добрив кожного типу треба придбати, щоб забезпечити внесення необхідної кількості хімічних речовин, зробивши при цьому мінімальні витрати.

	B_1	B_2	B_3	Вартість 1 ум. од.
Y_1	3	4	1	3
Y_2	2	5	3	5

7. Для виготовлення залізобетонних конструкцій двох типів P_1 і P_2 , вартість яких 25 та 15 ум. од. відповідно, використовуються металеві конструкції трьох типів: K_1 , K_2 та K_3 , запаси яких на виробництві відповідно 40, 65 та 80

ум. од. Для виготовлення конструкції P_1 необхідні 2 ум. од. K_1 , 3 ум. од. K_2 і 4 ум. од. K_3 , а для виготовлення конструкції P_2 необхідні 1 ум. од. K_1 , 2 ум. од. K_2 і 2 ум. од. K_3 . Скласти план випуску залізобетонних конструкцій, який би забезпечив підприємству максимальний прибуток.

8. Місячний план цеху крою є 1000 одиниць деталей P_1 та 6000 одиниць деталей P_2 . При кроєнні 1 ум. од. матеріалу 1 способом отримують 10 одиниць деталей P_1 і 90 одиниць P_2 . 2 спосіб крою дає, відповідно, 30 одиниць P_1 і 40 одиниць P_2 . Визначити число ум. од. матеріалу, які треба кроїти кожним із способів, щоб забезпечити сумарний мінімум відходів, якщо 1 спосіб із кожної ум. од. матеріалу дає 0,2 ум. од. відходів, а 2 спосіб – 0,31 ум. од.

9. На обладнанні, яке є на підприємстві, за зміну можна виготовити або 400 виробів типу P_1 , або 100 виробів типу P_2 , вартість одиниці кожного з яких відповідно 18 та 54 ум. од. Скласти план випуску продукції, який би забезпечив максимальний прибуток, якщо цех фарбування може за зміну обробити не більш, ніж 300 виробів будь-якого типу.

10. Для виробництва двох типів бетонних сумішей B_1 і B_2 використовується сировина, яку добувають у трьох кар'єрах C_1 , C_2 і C_3 , потужність яких відповідно дорівнює 34, 42 і 60 ум. од. Виготовлення 1 ум. од. B_1 потребує 3 ум. од. сировини із C_1 , 1 ум. од. сировини із C_2 та 4 ум. од. сировини із C_3 . Для B_2 це, відповідно, 1, 4 і 5 ум. од. Скласти план випуску бетонних сумішей, який забезпечує максимальний прибуток, якщо 1 ум. од. B_1 коштує 3 ум. од., а B_2 – 5 ум. од.

11. Для виготовлення двох видів виробів A та B використовується токарне, фрезерне та зварювальне обладнання. Витрати часу на обробку одного з виробів для кожного з типів обладнання указані у таблиці. У ній же вказані загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу (станок/годин)		Загальний фонд робочого часу обладнання (годин)
	A	B	
фрезерне	2	4	120
токарне	1	8	280
зварювальне	7	4	240
Прибуток	10	14	

Визначити, скільки виробів та якого виду треба виготовити, щоб мати максимальний прибуток.

12. Кондитерська фабрика для виготовлення двох видів карамелі A і B на новому обладнанні використовує три види сировини: цукор, патоку та

фруктове пюре. Норми витрати сировини кожного виду приведені в таблиці (на виготовлення 1 т карамелі даного виду). У ній же вказана загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також наведений приріст продуктивності праці на 1 т карамелі даного виду. Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний приріст продуктивності праці на новому обладнанні.

Види сировини	Норми витрат (т) на 1 т карамелі		Загальна кількість сировини (т)
	А	В	
цукор	0,8	0,5	800
патока	0,4	0,4	600
фруктове пюре	-	0,1	120
Приріст продукції на 1 т сировини (%)	108	112	

Варіанти для завдання 2

Транспортна задача: задано 4 постачальники і 5 замовників для перевезення однорідного вантажу. Кожен i -й постачальник має a_i ($i=1, 2, \dots, m$) одиниць вантажу, а кожному j -му замовнику потрібно доставити b_j ($j=1, 2, \dots, n$) одиниць вантажу. Задані тарифи (вартості) c_{ij} перевезення одиниці вантажу від будь-якого i -го постачальника до будь-якого j -го замовника. Транспортному підприємству, яке виконує перевезення вантажів, необхідно визначити скільки одиниць вантажу x_{ij} потрібно перевезти від кожного i -го постачальника до кожного j -го замовника щоб здійснити перевезення усіх вантажів з мінімально-можливою загальною вартістю усіх перевезень

	1						2						3					
i/j	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i
1	12	8	7	10	9	85	12	5	7	10	9	85	10	8	7	12	9	85
2	4	5	11	3	14	110	4	5	11	3	10	110	4	6	5	3	14	110
3	15	10	6	5	9	65	15	12	6	5	9	65	15	10	6	5	7	65
4	16	8	6	4	5	80	16	8	6	4	5	80	11	3	6	4	5	80
b_i	90	70	70	60	50	340	90	70	70	60	50	340	90	70	70	60	50	340
	4						5						6					
i/j	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i
1	12	6	7	5	9	85	17	8	3	9	5	85	14	8	7	15	9	85
2	4	5	11	3	16	110	4	5	4	3	18	110	4	5	11	8	14	110
3	15	9	6	5	9	65	11	10	6	5	9	65	15	12	6	5	9	65
4	12	10	6	4	5	80	7	8	9	4	5	80	10	8	6	4	5	80
b_i	90	70	70	60	50	340	90	70	70	60	50	340	90	70	70	60	50	340
	7						8						9					
i/j	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i
1	9	5	7	10	9	90	11	3	7	10	9	85	19	4	7	10	9	85
2	8	15	11	3	12	70	4	5	11	3	7	110	4	5	11	3	14	110
3	10	14	6	11	9	65	15	10	6	5	8	65	15	10	6	5	9	65
4	16	5	7	4	8	75	6	8	6	4	5	80	12	8	9	8	5	80

b_i	70	90	50	60	30	300	90	70	70	60	50	340	90	70	70	60	50	340
	10						11						12					
i/j	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i	1	2	3	4	5	a_i
1	16	4	7	10	15	85	5	17	7	10	9	85	12	8	7	10	9	85
2	4	5	11	3	10	110	4	5	11	3	14	110	4	5	11	3	14	110
3	15	12	6	5	9	65	12	10	6	5	9	65	15	10	6	5	9	65
4	10	8	12	4	5	80	11	8	6	4	16	80	16	8	6	4	5	80
b_i	90	70	70	60	50	340	90	70	70	60	50	340	80	80	70	60	50	340

3. Зміст звіту

1. Титульна сторінка звіту.
2. Тема та мета лабораторії.
3. Хід роботи:
 - a. Постановка задачі;
 - b. Таблиця для більш зручного подання постановки задачі;
 - c. Пояснення змінних задачі;
 - d. Математичні моделі для задач 1 і 2;
 - e. Графічне зображення для задачі 1;
 - f. Переліки вхідних комірок;
 - g. Відповіді у вихідних комірках;
 - h. Пояснення рішень.
4. Посилання на створений блокнот Jupyter на GitHub, наданий nbviewer.
5. Висновки.

Додаток 1

Приклад графічного рішення

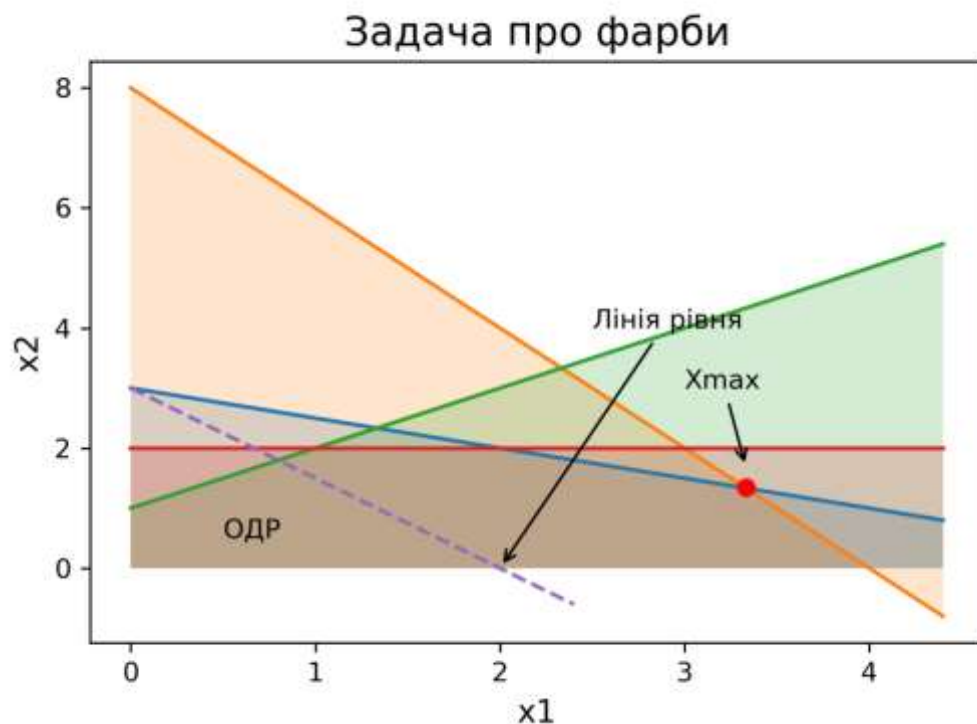


Рис. 1. Приблизний вигляд графічного рішення

Додаток 2.

Приклад пояснення розв'язання задачі.

```
con: array([], dtype=float64)
fun: -12.666666666666667
message: 'Optimization terminated successfully.'
nit: 5
slack: array([9.946e-12, 1.994e-11, 3.000e+00, 6.667e-01])
status: 0
success: True
x: array([3.333, 1.333])
Time :
0.014000892639160156
```

Рис. 2. Рішення, отримане за допомогою `scipy.optimize()`

Пояснення: Для того, щоб отримати максимальний прибуток, який дорівнює 12,667, нам потрібно виготовити перший тип фарб у кількості 3,333, а фарби другого типу у розмірі 1,3333. Причому сировина першого та другого типів є дефіцитною, тобто повністю (без залишків) використовується.