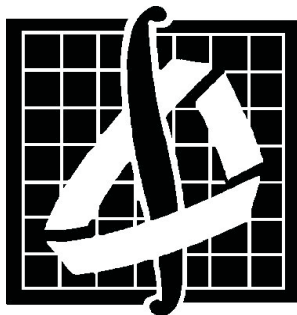


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет



Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

И.В. Васинёва, А.В. Козлов,
под ред. А.А. Голована

Компьютерный практикум по прикладной механике

Определение траектории по показаниям инерциальных датчиков

Москва – 2017

1 Инерциальная навигация

*«Когда человек не знает, к какой пристани он держит
путь, для него ни один ветер не будет попутным»*

Сенека

Термин «навигация» (от латинского *nāvigō* — плыву на корабле) может быть переведен как искусство кораблевождения¹. Важность дальних плаваний для человечества когда-то выразил римский полководец Помпей, отправляясь в морской поход в сильную бурю, словами «*Nāvigāre necesse est, vīvēre nōn est necesse!*», что в переводе значит «Плыть необходимо, а жить — нет!» Навигационные приборы, то есть устройства, которые используются для определения координат и направления движения, создавались и совершенствовались вместе с развитием нашей цивилизации.

Каждому из нас приходилось в своей жизни неоднократно решать старые как мир вопросы: «Где я нахожусь?» и «Куда я направляюсь?» Наверное, каждому знакомо неприятное чувство страха и неуверенности, когда, очутившись в неизвестном месте, вдруг начинаешь понимать, что сбился с пути, заблудился и не знаешь, в какую сторону нужно двигаться. Из-за многочисленных аномалий магнитного поля Земли и магнитных бурь магнитный компас является весьма капризным устройством, а звезды и Солнце в любой момент могут спрятаться в густом тумане или за черными тучами штормового неба.

Долгое время отсутствие точной информации о местоположении было серьёзным препятствием на пути развития авиации. Многие поколения моряков и летчиков мечтали о навигационной системе, которая бы не зависела от видимости звезд и земных ориентиров, от капризов погоды и искусства штурмана, и действительно могла бы быть путеводной звездой, «светящей в тумане».

Становилось все более очевидным, что решение навигационных задач не менее важно для современных подвижных объектов, чем вопросы создания новых конструкций, двигателей и тому подобных. Создание автономной навигационной аппаратуры стало одним из важнейших направлений в развитии авиационной и космической техники, при создании подводного флота.

В настоящее время, когда стали широко доступны средства спутниковой навигации, тем не менее, инерциальные навигационные системы (ИНС) остаются актуальными там, где

¹Здесь и далее текст введения частично приведён по статье д.ф.-м.н., профессора Ю.Г. Мартыненко «Инерциальная навигация», *Соросовский образовательный журнал*, №8, 1998 г.

требуется определять не только координаты объекта, но и его ориентацию в пространстве, а также в случаях, когда невозможен приём спутниковых навигационных сигналов или когда навигационное решение не должно зависеть от работоспособности навигационных спутников: под водой, в нефте- и газопроводах, подземных туннелях, при управлении роботами в помещении, в авиации, космических полётах, и в некоторых других областях.

Автономное счисление траектории возможно благодаря наличию в составе ИНС двух типов инерциальных датчиков:

- 1) ньютонометров (акселерометров), измеряющих проекции удельной (на единицу массы) силы реакции, действующей на объект со стороны других тел, на оси чувствительности датчиков;
- 2) датчиков угловой скорости (ДУС), часто называемых гироскопами, измеряющих проекции вектора абсолютной угловой скорости объекта на оси чувствительности датчиков.

Имея уравнения движения и указанные измерения можно было бы далее численно интегрировать их, вычисляя ориентацию, вектор скорости и положение объекта в каждый момент времени. Однако, дело обстоит не так просто.

Существенной особенностью измерений ньютонометров является тот факт, что ими измеряются только силы реакции со стороны других тел. Между тем на движение объекта относительно Земли влияют, например, гравитация и так называемые «силы инерции», связанные с неинерциальностью опорной системы отсчёта. Эти эффекты не измеряются ньютонометрами непосредственно. Поэтому в инерциальной навигации приходится дополнительно вводить в уравнения модель движения Земли и модель её гравитационного поля.

Второй особенностью инерциальной навигации является отсутствие полного набора начальных условий для уравнений движения. Если координаты точки начала движения, как правило, известны, то ориентацию требуется определять автономно по показаниям всё тех же инерциальных датчиков.

Здесь и далее под решением навигационной задачи будем понимать определение координат, вектора скорости и ориентации объекта, движущегося вблизи поверхности Земли, по показаниям ньютонометров и датчиков угловой скорости при известных координатах точки начала движения. Данный компьютерный практикум состоит в имитации полёта воздушного судна, получении модельных показаний инерциальных датчиков во время этого полёта, и решении навигационной задачи по ним.

2 Навигационная модель Земли и системы координат

Для околоземной навигации в качестве навигационной модели формы Земли используется эллипсоид вращения, малая ось которого совпадает с осью вращения Земли. Параметры наиболее широко используемого в мире модельного эллипсоида WGS-84 таковы:

$a = 6\,378\,137\text{ м}$ — большая полуось,

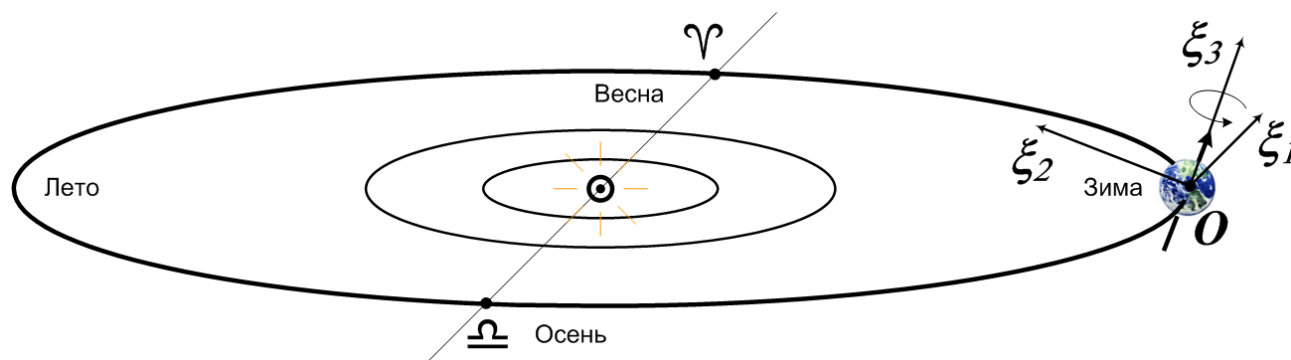
$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 6.6943799901413 \cdot 10^{-3}$ — квадрат эксцентриситета,

$b \approx 6\,356\,752\text{ м}$ — малая полуось.

Следует отметить, что эксцентриситет эллипсоида Земли невелик (её форма действительно близка к шару), однако разница в длине полуосей составляет примерно 22 км — величину, которую нельзя не учитывать при решении современных навигационных задач.

С модельным эллипсоидом Земли и с объектом, для которого решается навигационная задача, связаны системы координат: инерциальная $O\xi$, географическая Ox , приборная Mz , а также географические координаты.

Инерциальная система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Начало O — геометрический центр эллипсоида Земли. Ось $O\xi_3$ направлена по оси вращения Земли к северному полюсу. Ось $O\xi_1$ лежит в плоскости Земного экватора и сонаправлена с вектором, соединяющим точки осеннего и весеннего равноденствия. Ось $O\xi_2$ дополняет систему координат до правой ортогональной.

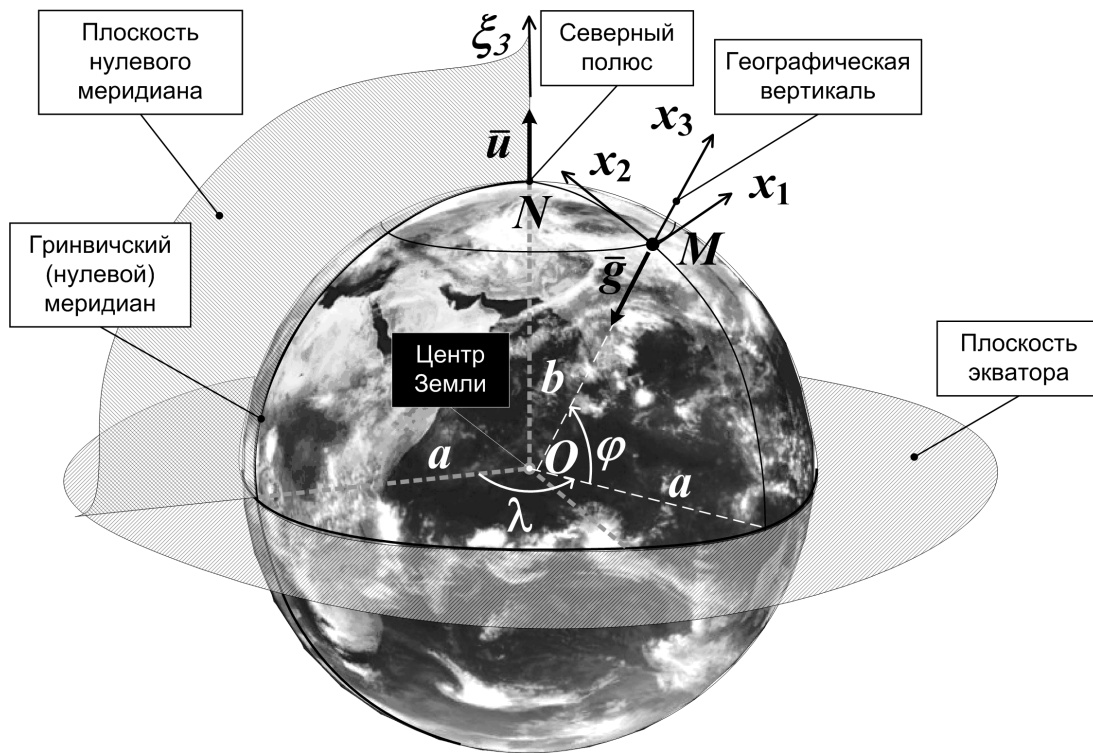


Географический трёхгранник $Mx_1x_2x_3$ ($Ox_1x_2x_3$). Пусть объект, для которого решается навигационная задача, расположен в точке M . Кратчайшая нормаль к поверхности эллипсоида, проходящая через точку M , называется географической вертикалью.

Введём трёхгранник $Mx_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Mx_3 совпадала с географической вертикалью (в направлении от центра Земли). Ось Mx_2 направим касательно к поверхности эллипсоида на Север, Mx_1 — на Восток. На полюсах Земли эта система координат не определена.

Одновременно с трёхгранником Mx рассмотрим систему координат Ox с началом в точке O , оси которой параллельны соответствующим осям трёхгранника Mx . Систему Ox назовем системой, связанной с географической вертикалью. Она изменяет свою ориентацию (вращается) относительно Земли при движении точки M .

Декартовы координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 и x_1, x_2, x_3 . Положение точки M относительно трёхгранников $O\xi$ и Ox будем задавать тройками координат — столбцами $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.



Географические координаты φ, λ, h . Исторически для точек вблизи поверхности Земли приняты географические координаты: северная широта φ — угол между географической вертикалью и плоскостью экватора; восточная долгота λ — угол между проекцией географической вертикали на плоскость экватора и плоскостью нулевого меридиана (сечения эллипса, проходящего через ось вращения и Гринвичскую обсерваторию в Великобритании); географическая высота h — координата вдоль географической вертикали, измеряемая от поверхности эллипсоида.

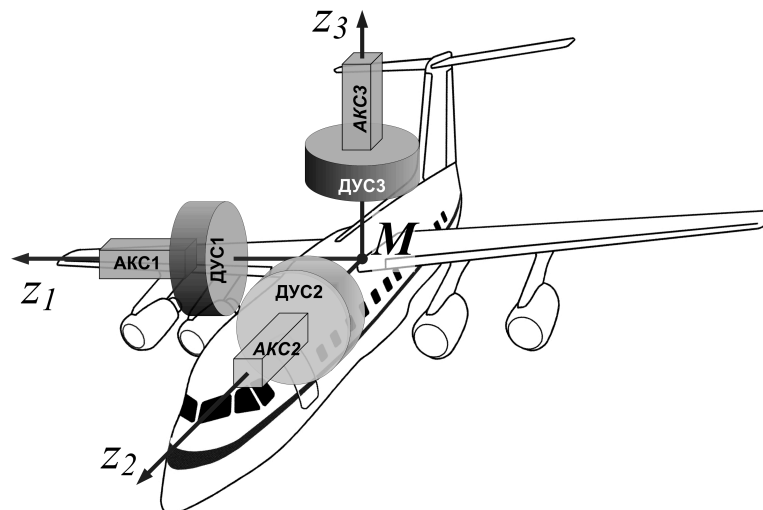
Модель силы тяжести \bar{g} . В географических осях проще всего записать модель силы тяжести Земли. По построению модельного эллипсоида Земли модельная сила тяжести направлена перпендикулярно его поверхности, т.е. вдоль географической вертикали. Это значит, что в географическом трёхграннике так называемое *нормальное* (без учёта аномалий) поле удельной силы тяжести (т.е. ускорения силы тяжести) есть $g_x = (0, 0, -g)^T$. Модельное значение g' ускорения силы тяжести определяется с учётом её зависимости от широты и высоты, например, по формуле, названной в честь немецкого геодезиста Фридриха Роберта Гельмерта с поправкой, введённой Институтом физики Земли РАН:

$$g' = g_e \left(1 + \beta_1 \sin^2 \varphi - \beta_2 \sin^2 2\varphi - 2\frac{h}{a} \right) - \Delta g, \quad (2.1)$$

где $g_e = 9.78030 \text{ м/с}^2$, $\beta_1 = 5.302 \cdot 10^{-3}$, $\beta_2 = 7 \cdot 10^{-6}$, $\Delta g = 14 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Вращение Земли За сутки Земля делает полный оборот вокруг своей оси вращения, и ещё приблизительно $1/365.25$ часть полного круга (дуга орбиты, пройденная за сутки), т.к. этот интервал по определению равен времени между моментами, когда произвольная точка на земной поверхности одинаково расположена по отношению к направлению на Солнце. Таким образом определяется модельная величина угловой скорости Земли.

Приборный трёхгранник Mz . Пусть удельная сила реакции, измеряемая ньютонометрами, и вектор абсолютной угловой скорости, измеряемый датчиками угловой скорости, измеряются в проекциях на оси правого ортогонального трёхгранника $Mz_1z_2z_3$, жестко связанного с самолётом и называемого *приборным*. Без ограничения общности для опре-



делённости будем рассматривать решение навигационной задачи для самолёта со следующим расположением приборных осей. Ось Mz_2 направлена от хвоста к носу и является пересечением плоскости симметрии самолёта и плоскости крыльев. Ось Mz_3 перпендикулярна плоскости крыльев и направлена вверх для самолёта, стоящего на Земле. Ось Mz_1

перпендикулярна первым двум и направлена в сторону правого крыла. Для самолёта, стоящего на поверхности Земли строго горизонтально и направленного на Север («нулевой курс»), такая приборная система координат совпадает с географической.

Углы ориентации ψ, θ, γ . Ориентацию трёхгранника Mz относительно трёхгранника Mx зададим тремя углами Эйлера — истинного курса ψ , тангажа θ и крена γ . Углом истинного курса ψ назовем угол между осью Mx_2 (направлением на Север) и проекцией продольной оси Mz_2 летательного аппарата на горизонтальную плоскость Mx_1x_2 , отсчитываемый к Западу. Истинный курс не определён, когда продольная ось совпадает с географической вертикалью. Тангаж θ — угол между продольной осью Mz_2 и горизонтальной плоскостью Mx_1x_2 , отсчитываемый от этой плоскости вверх. Крен γ — угол поворота плоскости Mz_2z_3 вокруг оси Mz_2 в положительном направлении относительно плоскости Mx_3z_2 . Угол крена также не определён, когда продольная ось самолёта совпадает с географической вертикалью. Таким образом введённые углы Эйлера определяют следующую последовательность поворотов:

$$Mx \xrightarrow[3]{\psi} \xrightarrow[1]{\theta} \xrightarrow[2]{\gamma} Mz,$$

где для каждого поворота над стрелкой указан угол, а под стрелкой — ось, вокруг которой происходит поворот. Для определённости примем

$$-\pi < \psi \leq +\pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2, \quad -\pi < \gamma \leq +\pi.$$

Матрица ориентации L . Введем матрицу, определяющую ориентацию трёхгранника Mz относительно трёхгранника Mx так, чтобы для любого вектора \bar{l} , заданного в приборных и географических осях тройками координат l_z и l_x соответственно, было бы выполнено $l_z = L l_x$:

$$L = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \theta \sin \gamma & \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \theta \cos \gamma & \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Очевидно, при $\psi = 0, \theta = 0, \gamma = 0$ имеем $L = E$ и два трёхгранника (приборный и географический) совпадают. Из определения углов ориентации и выражения (2.2) для матрицы L обратный переход от матрицы к углам производится исходя из следующих соотношений:

$$\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = -\frac{L_{13}}{L_{33}}, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{L_{23}}{\sqrt{L_{21}^2 + L_{22}^2}} = \frac{L_{23}}{\sqrt{L_{13}^2 + L_{33}^2}}, \quad \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = -\frac{L_{21}}{L_{22}}. \quad (2.3)$$

Значения углов можно получить взятием арктангенсов от правых частей с учётом знаков числителя и знаменателя, а также возможного равенства нулю знаменателя. Для этого в большинстве программных пакетов существуют функция `atan2(s, c)` с двумя аргументами — числителем и знаменателем дробей в формулах (2.3).

3 Решение навигационной задачи

3.1 Приборная основа инерциальной навигации

Инерциальная навигационная система состоит из:

- трёх ньютометров с взаимно перпендикулярными осями чувствительности; считаем их совпадающими с приборными осями Mz_1, Mz_2, Mz_3 ; каждый из ньютометров измеряет соответствующую проекцию удельной силы реакции чувствительной массы, действующей на неё со стороны других тел; например, для неподвижного относительно Земли самолёта удельная сила реакции противоположна ускорению силы тяжести;
- трёх датчиков угловой скорости (ДУС) с взаимно перпендикулярными осями чувствительности, также совпадающими с приборными осями; ДУС измеряют проекции абсолютной угловой скорости самолёта на свои оси чувствительности;
- бортового вычислителя, решающего навигационную задачу.

В составе ИНС, конечно, имеется и другая вспомогательная аппаратура, но для настоящей работы это несущественно. Исторически первые инерциальные навигационные системы строились на базе гиросtabilизированной платформы в кардановом подвесе. Однако современные системы такой платформы не содержат и называются *бескарданными* (БИНС).

Как упоминалось во введении, с помощью показаний инерциальных датчиков в бортовом вычислителе необходимо решить следующие задачи:

- определение начальных условий для уравнений движения, а именно начальной ориентации объекта относительно Земли (*задача начальной выставки*);
- определение ориентации объекта относительно Земли в процессе движения (*числение ориентации*);
- определение координат и вектора скорости объекта в процессе движения (*интегрирование динамических уравнений движения*).

Рассмотрим перечисленные задачи по очереди.

3.2 Начальная выставка

Перед началом движения самолёт некоторое время неподвижен. Это значит, в частности, что приборный трехгранник Mz неподвижен относительно вращающейся Земли. Также известны начальные значения φ_0 , λ_0 , h_0 — широты, долготы и высоты точки M . При этом ньютонометры измеряют силу реакции опоры, компенсирующую силу тяжести. Реакция опоры и гравитационное ускорение в сумме дают круговое движение объекта вместе с Землёй вокруг её оси вращения, что и означает неподвижность относительно Земли. Сила реакции опоры измеряется в проекциях на приборные оси Mz . Обозначим тройку измерений ньютонометров f_z . Имеем $f_z = -g_z$, где g_z — вектор силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника.

Датчиками угловой скорости измеряется абсолютная угловая скорость ω_z в проекциях на оси трехгранника Mz . Очевидно, что во время начальной выставки $\omega_z = u_z$, где u_z — вектор угловой скорости Земли, записанный в проекциях на оси приборного трёхгранника.

Координаты тех же самых векторов известны в географическом трёхграннике. Если только эти векторы не коллинеарны, то такой информации достаточно для восстановления матрицы ориентации одной системы координат относительно другой. Выведем необходимые соотношения. Здесь также необходимо учитывать, что сигналы с ньютонометров и ДУС, помимо полезного сигнала (измеряемой величины) содержат ещё и случайные погрешности. Для хорошо откалиброванных датчиков среднее значение погрешности близко к нулю, и тем ближе, чем больше измерений используется при осреднении. Обычная длительность начальной выставки составляет 3–5 минут.

Пусть \tilde{u}_z и \tilde{f}_z — результат осреднения измерений ω_z и f_z за время начальной выставки. Тогда для матрицы ориентации $L(0)$ в начальный момент времени имеем уравнения

$$\tilde{u}_z = L(0)u_x, \quad \tilde{f}_z = L(0)f_x. \quad (3.1)$$

Поскольку $f_x = (0, 0, +g)^T$, то можно определить третий столбец матрицы $L(0)$:

$$L_{i3}(0) = \frac{\tilde{f}_i}{g} = \frac{\tilde{f}_i}{\|\tilde{f}\|}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

После определения третьего столбца $L(0)$ можно при необходимости найти начальные углы крена и тангажа самолёта, исходя из (2.2). Далее из выражения для $u_x = [0, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T$ определяется второй столбец матрицы $L(0)$:

$$L_{i2}(0) = \frac{\tilde{u}_i - L_{i3}(0)u \sin \varphi}{u \cos \varphi}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Наконец, первый столбец определяется из условия ортогональности ко второму и третьему — как их векторное произведение. При необходимости вычисляется угол истинного курса.

Итак, начальная матрица ориентации получена.

3.3 Счисление ориентации

Матрица A_z ориентации приборного трёхгранника относительно инерциальной системы отсчёта подчиняется так называемому кинематическому уравнению Пуассона:

$$\dot{A}_z = \hat{\omega}_z A_z, \quad \hat{\omega}_z = \begin{bmatrix} 0 & +\omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & +\omega_1 \\ +\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты вектора абсолютной угловой скорости приборного трёхгранника в подвижной системе координат. Аналогичное утверждение верно для любого трёхгранника (см. Приложение). Это уравнение равносильно определению угловой скорости и формуле для поля скоростей точек твёрдого тела, так как умножение матрицы $\hat{\omega}_z$ на координатный орт есть векторное произведение угловой скорости на него с обратным знаком.

Для матрицы ориентации A_x географического трёхгранника относительно инерциальной системы отсчёта, учитывая формулу сложения угловых скоростей, аналогично выполнено

$$\dot{A}_x = (\hat{\Omega}_x + \hat{u}_x) A_x, \quad (3.5)$$

где Ω_x — вектор угловой скорости географического трёхгранника относительно Земли. При движении самолёта вдоль поверхности Земли имеем

$$\Omega_1 = \frac{-V_2}{R_N + h}, \quad \Omega_2 = \frac{V_1}{R_E + h}, \quad \Omega_3 = \frac{V_1 \operatorname{tg} \varphi}{R_E + h}, \quad (3.6)$$

где V_i — компоненты вектора скорости самолёта относительно Земли в географических осях, а радиусы кривизны R_N и R_E соответствующих сечений модельного эллипсоида Земли равны

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad R_N = \frac{a(1 - e^2)}{\left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\right)^3}. \quad (3.7)$$

При этом, очевидно, что $L = A_z A_x^T$. Т.е. зная матрицы A_z и A_x всегда можно вычислить матрицу ориентации приборного трёхгранника относительно Земли, а значит при необходимости и углы ориентации самолёта — истинный курс, тангаж, крен.

В качестве инерциальной системы отсчёта при решении навигационной задачи можно принять начальное положение географического трёхгранника. В этом случае $A_x(0) = E$, $A_z(0) = L(0)$. Далее необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения (3.4) и (3.5) с этими начальными условиями. Однако здесь имеется особенность, делающая нежелательным применение стандартных численных методов интегрирования.

Дело в том, что матрицы ориентации в процессе вычислений должны оставаться ортогональными. Однако стандартные методы численного интегрирования не гарантируют

этого. Поэтому в инерциальной навигационной системе при счислении ориентации следует воспользоваться тем, что дифференциальные уравнения имеют специальный вид, а именно:

$$\dot{A} = \hat{\omega}A, \quad A(0) = A_0. \quad (3.8)$$

Предположим, что матрица ориентации $A(t_i)$ уже известна, требуется найти матрицу $A(t_{i+1})$, и при этом координаты вектора угловой скорости ω в подвижной системе координат не изменяются на интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$. Обычно в инерциальных навигационных системах показания датчиков считываются с частотой 100–500 Гц, т.е. достаточно часто ($t_{i+1} - t_i = \Delta t \leq 0.01$ сек), и предположение о постоянстве вектора угловой скорости на столь коротком интервале времени близко к истине. В этом случае уравнение (3.8) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, и его решение может быть записано как матричная экспонента:

$$A(t_{i+1}) = e^{\hat{\omega}\Delta t} A(t_i) = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{\omega}^k \Delta t^k \right) A(t_i). \quad (3.9)$$

Данная формула бесполезна для практического вычисления, так как содержит бесконечную сумму матриц. Однако можно заметить, что для степеней матрицы $\hat{\omega}$ выполнено следующее:

$$\forall k \geq 3 \quad \hat{\omega}^k = -\|\omega\|^2 \hat{\omega}^{k-2}. \quad (3.10)$$

Сгруппировав слагаемые с чётными и нечётными степенями $\hat{\omega}$, получим

$$A(t_{i+1}) = \left(E + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\|\omega\| \Delta t)^{2m+1}}{(2m+1)!} - \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\|\omega\| \Delta t)^{2m}}{(2m)!} \right) A(t_i). \quad (3.11)$$

Бесконечные суммы в скобках есть ряды Тейлора-Маклорена для функций $\sin(\|\omega\| \Delta t)$ и $\cos(\|\omega\| \Delta t) - 1$. Заменяя ряды на тригонометрические функции, окончательно получим

$$A(t_{i+1}) = \left(E + \frac{\sin(\|\omega\| \Delta t)}{\|\omega\|} \hat{\omega} + \frac{1 - \cos(\|\omega\| \Delta t)}{\|\omega\|^2} \hat{\omega}^2 \right) A(t_i). \quad (3.12)$$

Теперь ясно, что необходимо при помощи полученной формулы¹ численно интегрировать уравнения (3.4), (3.5) с указанными выше начальными условиями, а затем вычислять искомую матрицу L . Такой способ гарантирует её ортогональность, и кроме того будет аналитически точным при постоянной угловой скорости².

¹При $\omega \approx 0$ следует умножать матрицу ориентации на матрицу поворота на углы $\omega_j \Delta t$.

²На самом деле аналитически точным это решение будет и в более общем случае — всегда, когда вектор абсолютной угловой скорости не меняет своего направления в приборных осях.

3.4 Динамические уравнения движения

В инерциальном пространстве уравнения движения точки M имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= v_{\xi}, & \xi(0) &= \xi_0, \\ \dot{v}_{\xi} &= g_{\xi}^0 + f_{\xi}, & v_{\xi}(0) &= v_0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

где в правой части второго уравнения специально выделены два слагаемых — вектор g_{ξ}^0 гравитационного ускорения (не следует путать его с ускорением силы тяжести³), *не измеряемого* ньютонометрами, и вектор f_{ξ} удельной силы реакции, действующей на объект со стороны других тел и *измеряемой* ньютонометрами.

Так как при решении навигационной задачи требуется описать движение самолёта *относительно Земли*, то, переходя в подвижные географические оси для координат x и вектора скорости V_x самолёта относительно Земли⁴, записанного в проекциях на оси географического трёхгранника, а также учитывая, что удельная сила реакции измеряется ньютонометрами в приборных осях и в начале движения самолёт неподвижен для начальной выставки, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_x + \hat{\Omega}_x x, & x(0) &= x_0, \\ \dot{V}_x &= (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)V_x + g_x + L^T f_z, & V(0) &= 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Теперь, чтобы не приходилось вычислять достаточно абстрактные координаты точки M в системе координат Ox , будет удобнее заменить первое уравнение в системе (3.14) на уравнения для географических координат:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{V_2}{R_N + h}, & \dot{\lambda} &= \frac{V_1}{(R_E + h) \cos \varphi}, & \dot{h} &= V_3, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, & \lambda(0) &= \lambda_0, & h(0) &= h_0.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Уравнения (3.15), совместно со вторым уравнением системы (3.14) теперь можно численно интегрировать. Поскольку правая часть уравнения может быть вычислена только в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots , в которые поступает информация от инерциальных датчиков, а вычисления необходимо производить в реальном времени, не дожидаясь поступления следующих показаний датчиков, то здесь допустимо применить самый простой одношаговый метод Эйлера (см. Приложение).

³Ускорение силы тяжести отличается от гравитационного ускорения центробежным слагаемым, которое в инерциальном трёхграннике можно записать в виде $\hat{u}_{\xi}^2 \xi$.

⁴Не следует путать скорость относительно Земли со скоростью относительно географической системы координат, которая сама является подвижной относительно Земли.

Приложение А

Вывод кинематического уравнения Пуассона Вектор абсолютной угловой скорости некоторого трёхгранника Os относительно инерциального трёхгранника $O\xi$, записанный в подвижных осях, обозначим через ω_s

$$\bar{\omega} = \omega_{s1}s_1 + \omega_{s2}s_2 + \omega_{s3}s_3.$$

Угловую скорость трёхгранника Os относительно Земли обозначим $\bar{\Omega}$. Введем вектор угловой скорости Земли \bar{u} . Очевидно соотношение $\bar{\omega} = \bar{\Omega} + \bar{u}$. Обозначим через \bar{v} вектор абсолютной линейной скорости. Имеем

$$\bar{v} = v_{\xi 1}\xi_1 + v_{\xi 2}\xi_2 + v_{\xi 3}\xi_3 = v_{s1}s_1 + v_{s2}s_2 + v_{s3}s_3.$$

Очевидны соотношения $v_s = A_s v_\xi$, $s = A_s \xi$, $\xi = A_s^T s$, где A_s — матрица перехода от системы координат $O\xi$ к системе координат Os . По формуле сложения скоростей

$$v_s = \dot{s} + \hat{\omega}_s^T s.$$

По правилам дифференцирования произведения $v_\xi = \dot{\xi} = A_s^T \dot{s} + \dot{A}_s^T s$. Умножим последнее равенство слева на матрицу A_s , получим

$$v_s = \dot{s} + A_s \dot{A}_s^T s.$$

Следовательно

$$\hat{\omega}_s = \dot{A}_s A_s^T \Rightarrow \dot{A}_s = \hat{\omega}_s A_s$$

Приложение Б

Метод Эйлера численного интегрирования Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и требуется построить её приближённое численное решение на заданной равномерной сетке времени

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad \dots, \quad t_i = i\Delta t, \quad \dots, \quad t_N = N\Delta t.$$

Аппроксимируя значение производной \dot{x} конечной разностью

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

получаем формулу для вычисления искомого приближённого решения на следующем шаге по значению на предыдущем:

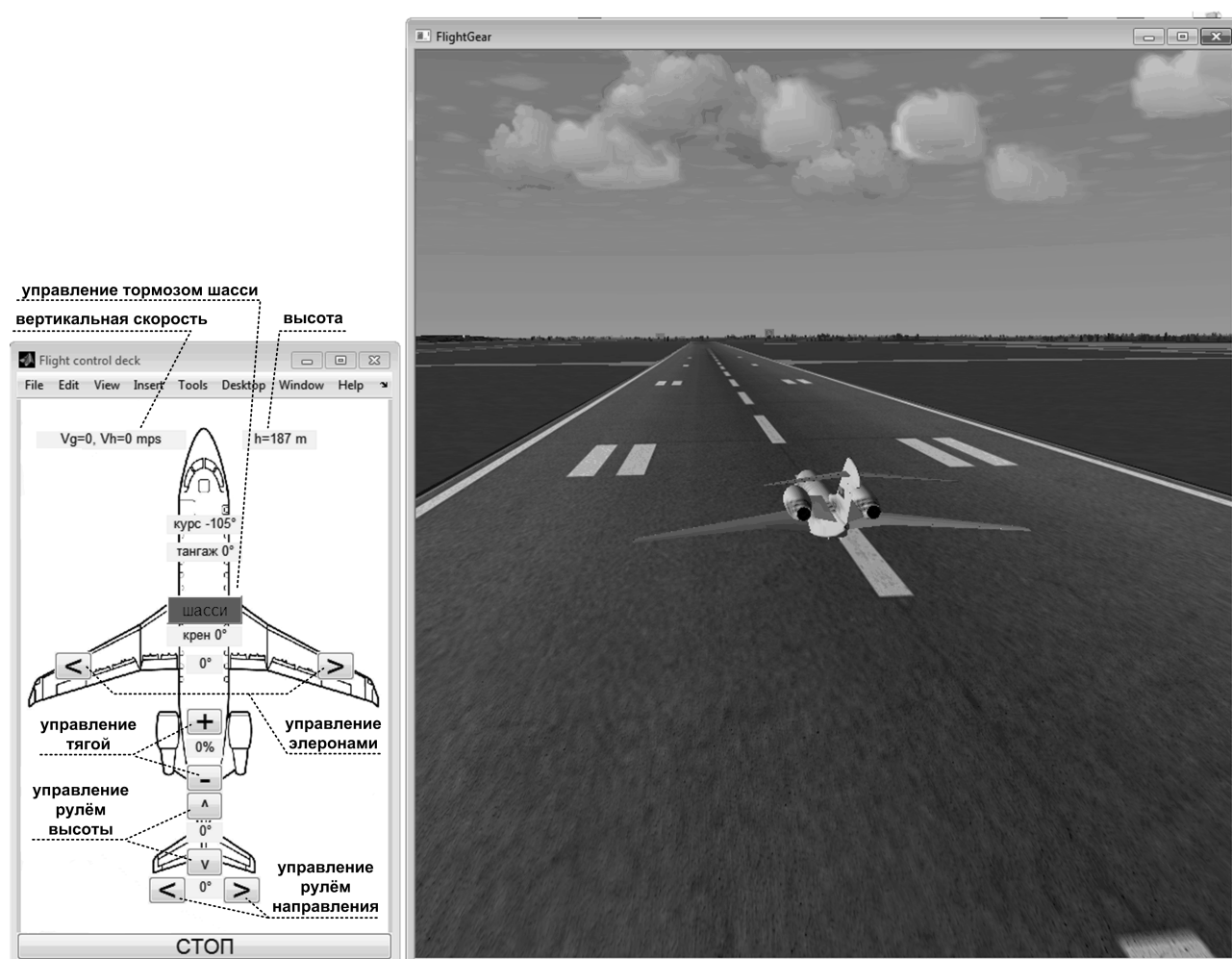
$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + f(t_i, x(t_i)) \Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

4 Выполнение практикума

Выполнение практикума состоит из нескольких этапов: имитация полёта самолёта с записью показаний инерциальных датчиков, построение траектории самолёта по записям показаний инерциальных датчиков, сравнение их с исходной траекторией и зачёт.

4.1 Имитация полёта самолёта

После запуска имитатора на экране появляются панель управления самолётом и окно трёхмерной анимации FlightGear.



Управление обзором

1. Переключение камер в окне FlightGear — клавиша «V».
2. Изменение направления обзора:
 - нажимать клавишу «TAB» до появления надписи «Now mouse is controlling view direction»
 - мышью отрегулировать направление,
 - нажать снова «TAB»

Взлёт

Последовательность действий при взлёте следующая:

- 1) начальная выставка — 3 минуты неподвижности (или больше);
- 2) увеличить тягу до 95%;
- 3) установить руль высоты на +5 градусов;
- 4) выключить тормоз на шасси;
- 5) сразу после отрыва от земли установить руль высоты на 0;
- 6) контролировать тангаж рулём высоты — в пределах от 2 до 8 градусов;
- 7) уменьшить тягу до 40–60%, контролируя вертикальную скорость.

Рекомендации по управлению в полёте

1. **Элероны** управляют моментом вокруг продольной оси самолёта:
 - вращение останавливается за счёт аэродинамического трения не сразу, поэтому вращение продолжается некоторое время после установки элеронов в нулевое положение;
 - рекомендуемые углы установки элеронов для управления углом крена — 5–15 градусов.
2. **Руль высоты** управляет моментом вокруг оси крыльев:
 - так как сила создаётся на хвостовом оперении, её плечо велико, и руль высоты рекомендуется отклонять только кратковременно (на 1–3 секунды);
 - увеличение тангажа происходит за счёт отрицательной подъёмной силы на хвостовом оперении, из-за чего общая подъёмная сила снижается и требуется контроль вертикальной скорости;

- углы тангажа больше 15 градусов крайне опасны для стабильности полёта.

3. **Руль направления** создаёт момент главным образом вокруг оси, перпендикулярной плоскости крыльев, а также вокруг других осей:

- так как сила создаётся на хвостовом оперении, её плечо велико, и руль направления рекомендуется отклонять только кратковременно (на 1–2 секунды);
- из-за наличия моментов по всем трём осям, при использовании руля направления требуется контролировать все три угла ориентации, и, как следствие, вертикальную скорость;
- как правило, для сохранения контролируемого полёта при отклонении руля направления на 5 градусов требуется отклонять элероны с противоположным знаком на 5–15 градусов (зависит от ветра).

4. **Тяга** всегда направлена вдоль продольной оси вперёд:

- тяги недостаточно, чтобы компенсировать вес самолёта; вес самолёта компенсируется главным образом подъёмной силой, а значит если направить самолёт носом вверх, он упадёт вниз;
- достаточная подъёмная сила имеется только при скоростях около 70–90 м/с (значение зависит от ветра);
- подъёмная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев;
- возможен режим планирования, когда тяга отключена, а подъёмная сила создаётся за счёт ветра и разгона самолёта силой тяжести.

4.2 Показания инерциальных датчиков

После завершения полёта в папке с программой компьютерного практикума появляется файл, содержащий записи инерциальных датчиков БИНС во время начальной выставки и полёта. Формат файла текстовый, первая строка — заголовок, содержащий описание содержимого столбцов, вторая и последующие строки содержат показания инерциальных датчиков в каждый момент времени в следующем формате.

t (сек)	ω_{z1} (°/сек)	ω_{z2} (°/сек)	ω_{z3} (°/сек)	f_{z1} (м/сек ²)	f_{z2} (м/сек ²)	f_{z3} (м/сек ²)
2.0000	+0.002510328	-0.000275539	+0.003834880	+0.001894	-0.001865	+9.814624
2.0100	+0.002134865	-0.000180881	+0.003466454	+0.000838	-0.000105	+9.816036
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4.3 Дополнительные задания для подготовки к зачёту

Начальная выставка

1. Предложить и реализовать алгоритм автономного определения широты во время начальной выставки.
2. Внести систематические погрешности в показания инерциальных датчиков. Установить характер зависимости результата начальной выставки от них.

Счисление ориентации

1. Вывести уравнение Пуассона для ошибки счисления ориентации — вектора малого поворота β такого, что $L' \approx (E + \hat{\beta})L$, где L' — модельная (вычисленная) матрица ориентации. Убедиться в его соответствии реальной динамике вектора малого поворота.
2. Внести систематические погрешности в показания датчиков угловой скорости. Установить характер зависимости ошибки ориентации от них.

Динамические уравнения движения

1. Исследовать неустойчивость вертикального канала. Устранить её введением внешней информации о высоте.
2. Внести систематические погрешности в показания инерциальных датчиков. Установить характер зависимости позиционной ошибки от них.

Удачных полётов!