Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet Sarajevo
Odsjek za računarstvo i informatiku

Zbirka odabranih zadataka iz Diskretne matematike

Din Švraka

Sarajevo, 2021/2022.

Zadatak 1

Za potrebe neke vitaminske terapije koriste se tri vrste tableta T_1, T_2 i T_3 koje respektivno sadrže 56, 52, odnosno 20 jedinica nekog vitamina. Terapijom je potrebno unijeti 280 jedinica tog vitamina. Odredite sve moguće načine kako se može realizirati ta terapija pomoću raspoloživih tableta ukoliko se tablete ne smiju lomiti, tj. može se uzeti samo cijela tableta.

Rješenje:

Uvedimo intuitivniju notaciju za T_1, T_2 i T_3, odnosno x, y, z respektivno. Na osnovu podataka iz zadatka formulacija postavke glasi (Diofantova jednačina):

$$56x + 52y + 20z = 280, \text{ uz uslov: } x, y, z \geq 0$$
$$NZD(56, 52, 20) = 4 \mid 280$$

Budući da $NZD(56, 52, 20)$ dijeli broj 280 možemo cijeli izraz podijeliti brojem 4.

$$56x + 52y + 20z = 280 \; /: 4$$
$$14x + 13y + 5z = 70$$
$$14x + 13y = 70 - 5z \tag{1}$$

Primjenom proširenog Euklidovog algoritma izračunamo $NZD(14, 13)$

$$14 = 13 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = 14 - 13 \cdot 1$$
$$13 = 13 \cdot 1$$
$$\text{Dakle, } NZD(14, 13) = 1 \mid 70 - 5z, \;\; \forall z \in \boldsymbol{Z}$$
$$70 - 5z = 1 \cdot k$$
$$1 \cdot k + 5 \cdot z = 70$$
$$NZD(1, 5) = 1 \mid 70$$
$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5$$

Očitamo λ_1 i λ_2 , a zatim odredimo k i z, pri čemu nam k neće biti od koristi u nastavku.

$$k = \lambda_1 \cdot b + a_2 \cdot t$$
$$z = \lambda_2 \cdot b - a_1 \cdot t$$
$$k = 1 \cdot 70 + 5 \cdot t = 70 + 5t$$
$$z = 0 \cdot 70 - 1 \cdot t = -t, \forall t \in \boldsymbol{Z}$$

Sada, $z = -t$ uvrstimo u izraz (1) i dobijemo:

$$14x + 13y = 70 - 5 \cdot (-t)$$
$$14x + 13y = 70 + 5t$$
$$NZD(14, 13) = 1$$
$$1 = 1 \cdot 14 - 1 \cdot 13$$

Analogno, prethodnom postupku određujemo x i y.

$$x = 1 \cdot (70 + 5t) + 13 \cdot s = 70 + 5t + 13s$$

$$y = (-1) \cdot (70 + 5t) - 14 \cdot s = -70 - 5t - 14s, \forall s \in \boldsymbol{Z}$$

Budući da je dat uslov $x, y, z \geq 0$, krećemo redom sa rješavanjem dobivenih nejednačina.

$$x \geq 0 \Rightarrow 70 + 5t + 13s \geq 0 \Rightarrow 13s \geq -70 - 5t \Rightarrow s \geq \frac{-70 - 5t}{13}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow -70 - 5t - 14s \geq 0 \Rightarrow -14s \geq 70 + 5t \Rightarrow s \leq -\frac{70 + 5t}{14}$$

$$z \geq 0 \Rightarrow -t \geq 0 \Rightarrow t \leq 0$$

Nakon što izvršimo uklije̋štanje, izračunamo potrebnu nejednakost:

$$\frac{-70 - 5t}{13} \leq s \leq -\frac{70 + 5t}{14}$$

$$\frac{-70 - 5t}{13} \leq -\frac{70 + 5t}{14}$$

$$-980 - 70t \leq -910 - 65t$$

$$-70 \leq 5t$$

$$t \geq -14$$

Na osnovu dva uslova $t \geq -14$ i $t \leq 0 \Rightarrow t \in \{-14, -13, -12, -10, \dots, -1, 0\}$

Vrijednost s dobijemo uvrštavanjem svakog karakterističnog t.

za $t = -14$,

$$\frac{-70 - 5 \cdot (-14)}{13} \leq s \leq \frac{-70 - 5 \cdot (-14)}{14}$$

$0 \leq s \leq 0$, dakle $s = 0$

za $t = -13$,

$$\frac{-70 - 5 \cdot (-13)}{13} \leq s \leq \frac{-70 - 5 \cdot (-13)}{14}$$

$-0.38 \leq s \leq -0.36$, dakle s nema vrijednost

za $t = -12$,

$$\frac{-70 - 5 \cdot (-12)}{13} \leq s \leq \frac{-70 - 5 \cdot (-12)}{14}$$

$-0.77 \leq s \leq -0.71$, dakle s nema vrijednost

za $t = -11$,

$$\frac{-70 - 5 \cdot (-11)}{13} \leq s \leq \frac{-70 - 5 \cdot (-11)}{14}$$

$-1.15 \leq s \leq -1.07$, dakle s nema vrijednost

za $t = -10$,

$$\frac{-70 - 5 \cdot (-10)}{13} \leq s \leq \frac{-70 - 5 \cdot (-10)}{14}$$

$-1.54 \leq s \leq -1.43$, dakle s nema vrijednost

za $t = -9$,

$$\frac{-70-5\cdot(-9)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-9)}{14}$$
$$-1.92\leq s\leq -1.79,\text{ dakle } s \text{ nema vrijednost}$$

za $t=-8$,

$$\frac{-70-5\cdot(-8)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-8)}{14}$$
$$-2.31\leq s\leq -2.14,\text{ dakle } s \text{ nema vrijednost}$$

za $t=-7$,

$$\frac{-70-5\cdot(-7)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-7)}{14}$$
$$-2.69\leq s\leq -2.5,\text{ dakle } s \text{ nema vrijednost}$$

za $t=-6$,

$$\frac{-70-5\cdot(-6)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-6)}{14}$$
$$-3.08\leq s\leq -2.85,\text{ dakle } s=-3$$

za $t=-5$,

$$\frac{-70-5\cdot(-5)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-5)}{14}$$
$$-3.46\leq s\leq -3.21,\text{ dakle } s \text{ nema vrijednost}$$

za $t=-4$,

$$\frac{-70-5\cdot(-4)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-4)}{14}$$
$$-3.85\leq s\leq -3.57,\text{ dakle } s \text{ nema vrijednost}$$

za $t=-3$,

$$\frac{-70-5\cdot(-3)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-3)}{14}$$
$$-4.23\leq s\leq -3.93,\text{ dakle } s=-4$$

za $t=-2$,

$$\frac{-70-5\cdot(-2)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-2)}{14}$$
$$-4.62\leq s\leq -4.29,\text{ dakle } s \text{ nema vrijednost}$$

za $t=-1$,

$$\frac{-70-5\cdot(-1)}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot(-1)}{14}$$
$$-5\leq s\leq -4{,}64,\text{ dakle } s=-5$$

za $t=0$,

$$\frac{-70-5\cdot 0}{13}\leq s\leq\frac{-70-5\cdot 0}{14}$$
$$-5.38\leq s\leq -5,\text{ dakle } s=-5$$

Radi jednostavnosti predstavljanja rezultata formirat ćemo tabelu sa vrijednostima t, s, x, y, z na osnovu koje ćemo moći izvući zaključak.

T	S	X	Y	Z
-14	0	0	0	14
-6	-3	1	2	6
-3	-4	3	1	3
-1	-5	0	5	1
0	-5	5	0	0

Zaključak:
Iz dobivene tabele se jasno vidi da postoji pet načina realiziranja terapije bez lomljenja tablete i to:

1) 14 tableta od 20 jedinica nekog vitamina ili
2) 1 tableta od 56, 2 od 52 i 6 od 20 jedinica nekog vitamina ili
3) 3 tablete od 56, 1 od 52 i 3 od 20 jedinica nekog vitamina ili
4) 5 tableta od 52 i 1 od 20 jedinica nekog vitamina ili
5) 5 tableta od 56 jedinica nekog vitamina.

Zadatak 2

Čopor majmuna je skupljao banane. Kada su skupljene banane pokušali razmjestiti u 11 jednakih gomila, ispostavilo se da preostaje 9 banana koje je nemoguće rasporediti tako da gomile budu jednake. Slično, kada su probali rasporediti banane u 26 jednakih gomila, preostale su 3 banane. Međutim, uspjeli su skupljene banane razmjestiti u 29 jednakih gomila. Odredite koliki je najmanji mogući broj banana za koji je ovakav scenario moguć (uz pretpostavku da su majmuni u stanju uraditi ovo što je opisano, što je prilično diskutabilno).

Rješenje:

Na osnovu teksta zadatka možemo za svaku rečenicu formirati jednu linearnu kongruenciju pri čemu će njih tri skupa činiti sistem linearnih kongruencija.

$$x \equiv 9 (\text{mod} 11) \quad (1)$$
$$x \equiv 3 (\text{mod} 26) \quad (2)$$
$$x \equiv 0 (\text{mod} 29) \quad (3)$$

Krenimo sa rješavanjem linearne kongruencije (1)

$$x = 9 (\text{mod} 11)$$
$$x - 9 = -11y$$
$$x + 11y = 9$$
$$NZD(1,11) = 1$$
$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 11$$
$$x = \lambda_1 \cdot b + a_2 \cdot t_1$$
$$y = \lambda_2 \cdot b - a_1 \cdot t_1$$
$$x = 1 \cdot 9 + 11 \cdot t_1 = 9 + 11t_1$$
$$y = 0 \cdot 9 - 1 \cdot t_1 = -t_1$$

Tipično rješenje nađemo uz uslov $0 \leq x < 11$, pri čemu je to moguće za $t_1 = 0$.

$$x = 9, \text{odnosno } \boldsymbol{x \equiv 9 (\text{mod} 11)} \quad (4)$$

Analogno prethodnom postupku možemo riješiti linearnu kongruenciju (2), a kasnije i (3)

$$x = 3 (\text{mod} 26)$$
$$x - 3 = -26y$$
$$x + 26y = 3$$
$$NZD(1,26) = 1$$
$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 26$$
$$x = \lambda_1 \cdot b + a_2 \cdot t$$
$$x = 1 \cdot 3 + 26 \cdot t = 3 + 26t$$

Tipično rješenje nađemo uz uslov $0 \leq x < 26$, pri čemu je očigledno da je to moguće za $t = 0$.

$$x = 3, \text{odnosno } \boldsymbol{x = 3 (\text{mod} 26)} \quad (5)$$

Naravno, preostala nam je linearna kongruencija (3)

$$x \equiv 0(\mathrm{mod}29)$$
$$x + 29y = 0$$
$$NZD(1{,}29) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 29$$
$$x = \lambda_1 \cdot b + a_2 \cdot t$$
$$x = 1 \cdot 0 + 29 \cdot t = 29t$$

Tipično rješenje nađemo uz uslov $0 \leq x < 29$, pri čemu je očigledno da je to moguće za $t = 0$.

$$x = 0, \text{odnosno } \boldsymbol{x = 0(\mathrm{mod}29)} \tag{6}$$

Sada uvrštavamo izraz iz (4) u linearnu kongruenciju (5) i dobijamo:

$$9 + 11t_1 = 3(\mathrm{mod}26)$$
$$11t_1 = -6(\mathrm{mod}26)$$
$$11t_1 + 26y = -6$$
$$NZD(11{,}26) = 1$$
$$1 = -7 \cdot 11 + 3 \cdot 26$$
$$t_1 = \lambda_1 \cdot b + a_2 \cdot t_2$$
$$t_1 = -7 \cdot (-6) + 26 \cdot t_2 = \boldsymbol{42 + 26t_2}$$

Dobiveni izraz uvrštavamo natrag u $x = 9 + 11t_1$

$$x = 9 + 11 \cdot (42 + 26t_2) = 471 + 286t_2$$

Sada izraz $x = 471 + 286t_2$ uvrštavamo u linearnu kongruenciju (6) i dobijamo:

$$471 + 286t_2 = 0(\mathrm{mod}29)$$
$$286t_2 = -471(\mathrm{mod}29)$$
$$286t_2 + 29y = -471$$
$$NZD(286{,}29) = 1$$
$$1 = 7 \cdot 286 - 69 \cdot 29$$
$$t_2 = \lambda_1 \cdot b + a_2 \cdot t_3$$
$$t_2 = 7 \cdot (-471) + 29 \cdot t_3 = \boldsymbol{-3297 + 29t_3}$$

Dobiveni izraz uvrštavamo natrag u $x = 471 + 286t_2$

$$x = -942471 + 8294t_2$$
$$x \equiv -942471(\mathrm{mod}8294)$$
$$\mathrm{mod}(x, 8294) = \mathrm{mod}(-942471{,}8294)$$
$$\mathrm{mod}(x, 8294) = 3045$$
$$x \equiv 3045(\mathrm{mod}8294)$$

Dakle tipično rješenje je $x = 3045$ što ujedno predstavlja i broj potrebnih banana.

NAPOMENA: Zadatak se mogao riješiti i primjenom ***kineske teoreme o ostacima*** (čiji će postupak biti objašnjen u zadatku 6 pod c) pri čemu bi se dobio isti rezultat.

Zadatak 3

Tajna špijunska organizacija HABER SPY, zadužena za prisluškivanje razgovora na ETF Haber kutiji u cilju sprečavanja dogovaranja jezivih terorističkih aktivnosti koje se sastoje u podvaljivanju pokvarene (ukisle) kafe neposlušnim djelatnicima ETF-a, jednog dana uhvatila je tajanstvenu poruku koja je glasila

SMRBOBUJIJMVMXNHMMJUZBUHIDPUJULUSUHOLBOZUGORXUGILIJIGSBOLHOCULOCULI
SO

Ova poruka smjesta je analizirana uz pomoć HEPEK superkvantnog kompjutera, koji nije uspio dešifrirati poruku, ali je došao do sljedećih spoznaja:

- Izvorna poruka je u cijelosti pisana bosanskim jezikom, isključivo velikim slovima unutar engleskog alfabeta (ASCII kodovi u opsegu od 65 do 91);
- Za šifriranje je korišten algoritam prema kojem se svaki znak izvorne poruke čiji je ASCII kod x mijenja znakom sa ASCII kodom y prema formuli $y = \mathrm{mod}(a\,x + b, 26) + 65$, gdje su a i b neke cjelobrojne konstante u opsegu od 0 do 25.

Međutim, HEPEK nije uspio do kraja probiti algoritam šifriranja i dešifrirati poruku. Stoga je vaš zadatak sljedeći:

a. Odredite konstante a i b ukoliko je poznata činjenica da se u bosanskom jeziku ubjedljivo najviše puta pojavljuje slovo A, a odmah zatim po učestanosti pojavljivanja slijedi slovo E;
b. Odredite funkciju dešifriranja, tj. funkciju kojom se vrši rekonstrukcija x iz poznatog y;
c. Na osnovu rezultata pod b), dešifrirajte uhvaćenu poruku (za tu svrhu, napišite kratku funkciju od dva reda u C-u, C++-u ili nekom drugom sličnom programskom jeziku, jer bi Vam ručno računanje oduzelo cijeli dan; uz zadaću, priložite listing te funkcije).

NAPOMENA: U ovom zadatku nije posebno naglašeno detaljnije rješavanje proširenog Euklidovog algoritma budući da je on detaljno opisan prilikom izrade zadatka 1.

Rješenje:

a. Prebrojavanjem lako utvrđujemo da se u šifrovanoj poruci najviše puta pojavljuje slovo U (11 puta), a zatim slovo O (8 puta). Stoga je razumno pretpostaviti da je šifriranje dovelo do zamjene slova A slovom U, i slova E slovom O. Budući da slova A, U, E i O imaju ASCII šifre 65, 85, 69 i 79 respektivno, onda uz navedenu pretpostavku a i b moraju zadovoljavati sljedeći sistem jednačina:

$$\mathrm{mod}(65a + b, 26) + 65 = 85$$
$$\mathrm{mod}(69a + b, 26) + 65 = 79$$

odnosno sistem

$$\mathrm{mod}(65a + b, 26) = 20$$
$$\mathrm{mod}(69a + b, 26) = 14$$

Ove jednačine možemo zapisati kao sljedeće linearne kongruencije:

$$65a + b \equiv 20(\mathrm{mod}26) \qquad (1)$$
$$69a + b \equiv 14(\mathrm{mod}26)$$

Oduzimanjem prve linearne kongruencije od druge dobijemo:

$$4a \equiv -6(\mathrm{mod}26)$$

Odnosno

$$4a + 26k = -6$$

$NZD(4{,}26) = 2 \mid -6$, pa imamo dva tipična rješenja

$$2a + 13k = -3$$
$$NZD(2, 13) = 1 = -6 \cdot 2 + 1 \cdot 13$$
$$a = -6 \cdot (-3) + 13t = 18 + 13t$$

Tipična rješenja jednostavno odredimo iz relacije $0 \leq a < 26$

$$0 \leq 18 + 13t < 26$$
$$-1{,}38 \leq t < 0{,}62$$

Dakle tipična rješenja imamo za $t = -1$ i $t = 0$, odnosno

Za $t = -1 \;\Rightarrow\; a = 5$;

Za $t = 0 \;\Rightarrow\; a = 18$;

Sada moramo izvršiti uvrštavanja za obje vrijednosti *a*. To ćemo uraditi uvrštavanjem u linearnu kongruenciju (1)

za $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$

$$65a + b \equiv 20(\mathrm{mod}26)$$
$$65 \cdot 5 + b \equiv 20(\mathrm{mod}26)$$
$$b \equiv -305(\mathrm{mod}26)$$
$$b \equiv 7(\mathrm{mod}26) \qquad *$$

* Izvršena redukcija da bi se izbjegao rad sa velikim brojevima. Princip reduciranja detaljno opisan u sljedećem zadatku.

$$b + 26k = 7$$
$$NZD(1, 26) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 26$$
$$b = 1 \cdot 7 + 26t = 7 + 26t$$

Tipično rješenje b dobijemo na ukliještanjem

$$0 \leq 7 + 26t < 26$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{7}$$

za $\boldsymbol{a} = \mathbf{18}$

$$65a + b \equiv 20(\text{mod}26)$$
$$65 \cdot 18 + b \equiv 20(\text{mod}26)$$
$$b \equiv -1150(\text{mod}26)$$
$$b \equiv 20(\text{mod}26)$$
$$b + 26k = 20$$
$$NZD(1,26) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 26$$
$$b = 1 \cdot 20 + 26t = 20 + 26t$$

Tipično rješenje b dobijemo na ukliještanjem

$$0 \leq 20 + 26t < 26$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{20}$$

Dolazimo do zaključka da postoje dva moguća rješenja za a i b koja dovode do toga da se A preslikava u U, a E u O. Jedna mogućnost je $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{7}$, dok je druga moqućnost $\boldsymbol{a} = \mathbf{18}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{20}$. Međutim, uzimamo rješenja $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{7}$ zato što će druga rješenja uvijek davati neparne rezultate.

b. Konačno smo kompletirali formulu koju ćemo dati u nastavku, te ćemo dati izraz riješiti korištenjem odgovarajuće smjene

$$y = \text{mod}(ax + b, 26) + 65$$
$$y - 65 = \text{mod}(5x + 7, 26)$$

Uvedimo smjenu $x = x' + 65$, pa imamo

$$\text{y} - 65 = \text{mod}(5(x' + 65) + 7, 26)$$
$$y - 65 = \text{mod}(5x' + 332, 26)$$
$$y - 65 = \text{mod}(5x' + 20, 26)$$
$$y - 65 \equiv 5x' + 20(\text{mod}26)$$
$$5x' = y - 85(\text{mod}26)$$
$$5x' + 26k = y - 85$$
$$NZD(5,26) = 1 = -5 \cdot 5 + 1 \cdot 26$$
$$x' = -5 \cdot (y - 85) + 26t = 425 - 5y + 26t\ , \ \forall t \in \boldsymbol{Z}$$
$$x' \equiv 425 - 5y(\text{mod}26)$$
$$x' \equiv 9 - 5y(\text{mod}26)$$
$$x' \equiv \text{mod}(9 - 5y, 26)$$

Sada možemo dodati 26y kako bi nam rješenja bila pozitivna, pa imamo

$$x' \equiv \text{mod}(9 + 21y, 26)$$

Vraćanjem smjene $x = x' + 65$ dobijamo našu funkciju dešifrovanja koja glasi:

$$x = \text{mod}(9 + 21y, 26) + 65$$

c.

```
main.cpp ×

#include <iostream>
#include <string>

typedef std::string String;

int main() {
  String tajanstvena_poruka(
      "SMRBOBUJIJMVMXNHMMJUZBUHIDPUJULUSUHOLBOZUGORXUGILIJIGSBOLHOCULOCULISO");
  for (int i = 0; i < tajanstvena_poruka.length(); i++)
    std ::cout << char((9 + 21 * tajanstvena_poruka.at(i)) % 26 + 65);
  return 0;
}
```

```
>_ Task: Run /DM2021/main.cpp ×

=== Running main.cpp (Mon Nov 1 12:20:31 UTC 2021)
KOPRERADIDOVOLJNOODABRANIHZADATAKANETREBASEPLASITIDISKRETNEMATEMATIKE
=== Program finished with code 0
```

Slika 1. C++ kod sa formulom za dešifrovanje tajanstvene poruke

Dešifrovana poruka sa razmacima, radi lakšeg čitanja, glasi:
KO PRERADI DOVOLJNO ODABRANIH ZADATAKA NE TREBA SE PLASITI DISKRETNE MATEMATIKE

Zadatak 4

Riješite sljedeće sisteme linearnih kongruencija i izdvojite im tipična rješenja:
NAPOMENA: U ovom zadatku nije posebno naglašeno detaljnije rješavanje proširenog Euklidovog algoritma budući da je on detaljno opisan prilikom izrade zadatka 1.

Rješenje:

a.

$$4\,x + 14\,y + 2\,z \equiv 63\ (\mathrm{mod}\ 93) \qquad (1)$$
$$13\,x + 4\,y + 5\,z \equiv 54\ (\mathrm{mod}\ 93) \qquad (2)$$
$$19\,x + 10\,y + 8\,z \equiv 18\ (\mathrm{mod}\ 93) \qquad (3)$$

Pomnožimo linearnu kongruenciju (1) s brojem 5, a (2) s brojem -2, te nakon toga te izraze saberemo:

$$20x + 70y + 10z \equiv 315(\mathrm{mod}93)$$
$$-26x - 8y - 10z \equiv -108(\mathrm{mod}93)$$

$$-6x + 62y \equiv 207(\mathrm{mod}93)$$

Da bismo izbjegli rad sa velikim brojevima možemo izvršiti redukciju $\mathbf{mod(207, 93) = 21}$

$$-6x + 62y \equiv 21(\mathrm{mod}93) \qquad (4)$$

Sada na isti način možemo pomnožiti linearnu kongruenciju (2) s brojem 8, a (3) s brojem -5 nakon čega dobivene izraze saberemo:

$$104x + 32y + 40z \equiv 432(\mathrm{mod}93)$$
$$-95x - 50y - 40z \equiv -90(\mathrm{mod}93)$$

$$9x - 18y \equiv 342(\mathrm{mod}93)$$

Da bismo izbjegli rad sa velikim brojevima možemo izvršiti redukciju $\mathbf{mod(342, 93) = 63}$

$$9x - 18y \equiv 63(\mathrm{mod}93) \qquad (5)$$

Sada linearne kongruencije (4) i (5) možemo dodatno pojednostaviti na sljedeći način: izraz (4) pomnožimo s brojem 9, a (5) s 6 te ih takve saberemo:

$$-54x + 558y \equiv 189(\mathrm{mod}93)$$
$$54x - 108y \equiv 378(\mathrm{mod}93)$$

$$450y \equiv 567(\mathrm{mod}93)$$

Da bismo izbjegli rad sa velikim brojevima možemo izvršiti redukcije:

$$\mathbf{mod(450, 93) = 78, mod(567, 93) = 9}$$

$$78y \equiv 9(\text{mod}93) \tag{6}$$

Sada možemo zapisati sistem linearnih kongruencija na osnovu izraza (4), (6) i (3) respektivno:

$$-6x + 62y \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$78y \equiv 9(\text{mod}93)$$
$$19\text{ x} + 10\text{ y} + 8\text{ z} \equiv 18\text{ (mod 93)}$$

Budući da linearna kongruencija (6) sadrži samo nepoznatu y, pogodno ju je riješiti:

$$78y \equiv 9(\text{mod}93)$$
$$78y + 93p = 9$$

Budući da je $NZD(78,93) = 3 \mid 9$ zaključujemo da ćemo imati tri tipična rješenja pri čemu se trenutni oblik Diofantove jednačine može podijeliti sa 3.

$$26y + 31p = 3$$
$$NZD(26,31) = 1 = 6 \cdot 26 - 5 \cdot 31$$
$$y = 6 \cdot 3 + 31t = 18 + 31t$$

Tipična rješenja dobijemo iz uslova $0 \leq y < 93$ na sljedeći način:

$$0 \leq 18 + 31t < 93$$
$$-18 \leq 31t < 75$$
$$-0{,}58 \leq t < 2{,}41$$

$$\text{Za } t = 0 \;\Rightarrow\; y = 18;$$
$$\text{Za } t = 1 \;\Rightarrow\; y = 49;$$
$$\text{Za } t = 2 \;\Rightarrow\; y = 80;$$

Uradimo sva tri slučaja y.

za $y = 18$

Uvrstimo y u izraz (4)

$$-6x + 62y \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x + 62 \cdot 18 \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x \equiv -1095(\text{mod}93)$$
$$-6x \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x + 93p = 21$$
$$NZD(-6,93) = NZD(6,93) = 3 \mid 21 \text{ (3 tipična rješenja)}$$
$$-2x + 31p = 7$$
$$NZD(-2,31) = NZD(2,31) = 1 = 15 \cdot (-2) + 1 \cdot 31$$
$$x = 15 \cdot 7 + 31t = 105 + 31t$$
$$x \equiv 105(\text{mod}31)$$
$$x \equiv 12(\text{mod}31)$$

Tipična rješenja dobijemo iz uslova $0 \leq x < 93$ na sljedeći način:

$$0 \leq 105 + 31t < 93$$
$$-105 \leq 31t < -12$$
$$-3{,}39 \leq t < -0{,}39$$

$$\text{Za } t = -3 \;\Rightarrow\; x = -81;$$
$$\text{Za } t = -2 \;\Rightarrow\; x = -50;$$
$$\text{Za } t = -1 \;\Rightarrow\; x = -19;$$

za $\boldsymbol{x = -81}$

Uvrstimo x i y u izraz (3)

$$19\,x + 10\,y + 8\,z \equiv 18 \pmod{93}$$
$$19 \cdot (-81) + 10 \cdot 18 + 8\,z \equiv 18 \pmod{93}$$
$$8z \equiv 1377 (\mathrm{mod} 93)$$
$$8z \equiv 75 (\mathrm{mod} 93)$$
$$8z + 93p = 75$$
$$NZD(8{,}93) = 1 = 35 \cdot 8 - 3 \cdot 93$$
$$z = 35 \cdot 75 + 93t = 2625 + 93t$$

Tipično rješenje dobijemo iz uslova $0 \leq z < 93$ na sljedeći način:

$$0 \leq 2625 + 93t < 93$$
$$-28{,}23 \leq t < -27{,}23$$
$$t = -28 \;\Rightarrow \boldsymbol{z = 21}$$

za $\boldsymbol{x = -50}$

Uvrstimo x i y u izraz (3)

$$19 \cdot (-50) + 10 \cdot 18 + 8\,z \equiv 18 \pmod{93}$$
$$8z \equiv 788 (\mathrm{mod} 93)$$
$$8z \equiv 44 (\mathrm{mod} 93)$$
$$8z + 93t = 44$$
$$NZD(8{,}93) = 1 = 35 \cdot 8 - 3 \cdot 93$$
$$z = 35 \cdot 44 + 93t = 1540 + 93t$$

Tipično rješenje dobijemo iz uslova $0 \leq z < 93$ na sljedeći način:

$$0 \leq 1540 + 93t < 93$$
$$-16{,}56 \leq t < -15{,}56$$
$$t = -16 \;\Rightarrow \boldsymbol{z = 52}$$

za $\boldsymbol{x = -19}$

Uvrstimo x i y u izraz (3)

$$19 \cdot (-19) + 10 \cdot 18 + 8\,z \equiv 18 \pmod{93}$$
$$8z \equiv 199 (\mathrm{mod} 93)$$
$$8z \equiv 13 (\mathrm{mod} 93)$$
$$8z + 93t = 13$$

$$NZD(8,93) = 1 = 35 \cdot 8 - 3 \cdot 93$$
$$z = 35 \cdot 13 + 93t = 455 + 93t$$

Tipično rješenje dobijemo iz uslova $0 \leq z < 93$ na sljedeći način:

$$0 \leq 455 + 93t < 93$$
$$-4{,}89 \leq t < -3{,}89$$
$$t = -4 \ \Rightarrow \boldsymbol{z} = \mathbf{83}$$

za $\boldsymbol{y} = \mathbf{49}$

Uvrstimo y u izraz (4)

$$-6x + 62y \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x + 62 \cdot 49 \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x \equiv -3017(\text{mod}93)$$
$$-6x \equiv 52(\text{mod}93)$$
$$-6x + 93p = 52$$
$$NZD(-6,93) = NZD(6,93) = 3 \text{ što ne dijeli broj } 52$$

Možemo zaključiti da slučaj za $y = 49$ nema rješenja.

za $\boldsymbol{y} = \mathbf{80}$

Uvrstimo y u izraz (4)

$$-6x + 62y \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x + 62 \cdot 80 \equiv 21(\text{mod}93)$$
$$-6x \equiv -4939(\text{mod}93)$$
$$-6x \equiv 83(\text{mod}93)$$
$$-6x + 93p = 83$$
$$NZD(-6,93) = NZD(6,93) = 3 \text{ što ne dijeli broj } 83$$

Možemo zaključiti da slučaj za $y = 80$ nema rješenja.

Zaključak:
Rješenje sistema linearne kongruencije se može zapisati u sljedećem obliku pri čemu smo, da bismo izbjegli negativne vrijednosti x, uvrstili 93+x vrijednosti:

$$(\mathbf{12}, \mathbf{18}, \mathbf{21}) \wedge (\mathbf{43}, \mathbf{18}, \mathbf{52}) \wedge (\mathbf{74}, \mathbf{18}, \mathbf{83})$$

b.

$$8\text{ x} + 2\text{ y} \equiv 14 \text{ (mod 66)} \tag{1}$$
$$27\text{ x} + 27\text{ y} \equiv 12 \text{ (mod 66)} \tag{2}$$

Pomnožimo linearnu kongruenciju (1) s brojem -13 i saberimo sa (2)

$$8\text{ x} + 2\text{ y} \equiv 14(\text{mod}66) \tag{3}$$
$$-77x + y \equiv -170(\text{mod}66) \tag{4}$$

Pomnožimo linearnu kongruenciju (4) s brojem -2 i saberemo sa (3)

$$162x \equiv 354 (\mathrm{mod} 66) \tag{5}$$

$$-77x + y \equiv -170 (\mathrm{mod} 66) \tag{6}$$

Reducirajmo sada linearnu kongruenciju (5), dakle:

$$\mathbf{mod(162, 66) = 30,\ mod(354, 66) = 24}$$

$$30x \equiv 24 (\mathrm{mod} 66) \tag{7}$$

Reducirajmo sada linearnu kongruenciju (6), dakle:

$$\mathbf{mod(-77, 66) = 55,\ mod(-170, 66) = 28}$$

$$55x + y \equiv 28 (\mathrm{mod} 66) \tag{8}$$

Sada je najpogodnije riješiti izraz (7), a nakon toga uvrstiti tipično rješenje u linearnu kongruenciju (8)

$$30x \equiv 24 (\mathrm{mod} 66)$$

$$30x + 66y = 24$$

$$NZD(30, 66) = 6 \mid 24$$

Očigledno je da je Diofantova jednačina rješiva, djeljiva sa 6 i ima 6 tipičnih rješenja

$$5x + 11y = 4$$

$$NZD(5, 11) = 1 = -2 \cdot 5 + 1 \cdot 11$$

$$x = -2 \cdot 4 + 11t = -8 + 11t$$

Tipična rješenja dobijemo iz uslova $0 \leq x < 66$ na sljedeći način:

$$0 \leq -8 + 11t < 66$$

$$8 \leq 11t < 74$$

$$0{,}73 \leq t < 6{,}73$$

Dakle, tipična rješenja dobijamo za $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

za $t = 1 \Rightarrow x = 3$

za $t = 2 \Rightarrow x = 14$

za $t = 3 \Rightarrow x = 25$

za $t = 4 \Rightarrow x = 36$

za $t = 5 \Rightarrow x = 47$

za $t = 6 \Rightarrow x = 58$

Uradimo sada svih šest slučajeva u kojima uvrštavamo odgovarajuće vrijednosti x u linearnu kongruenciju (8)

za $x = 3$

$$55x + y \equiv 28 (\mathrm{mod} 66)$$

$$55 \cdot 3 + y \equiv 28 (\mathrm{mod} 66)$$

$$y \equiv -137(\text{mod}66)$$
$$y \equiv 61(\text{mod}66)$$
$$y + 66p = 61$$
$$NZD(1, 66) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 66$$
$$y = 61 + 66t$$
$$0 \leq 61 + 66t < 66$$
$$-0{,}92 \leq t < 0{,}08$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = 61}$$

za $\boldsymbol{x = 14}$

$$55x + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$55 \cdot 14 + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$y \equiv -742(\text{mod}66)$$
$$y \equiv 50(\text{mod}66)$$
$$y + 66p = 50$$
$$NZD(1, 66) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 66$$
$$y = 50 + 66t$$
$$0 \leq 50 + 66t < 66$$
$$-0{,}76 \leq t < 0{,}24$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = 50}$$

za $\boldsymbol{x = 25}$

$$55x + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$55 \cdot 25 + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$y \equiv -1347(\text{mod}66)$$
$$y \equiv 39(\text{mod}66)$$
$$y + 66p = 39$$
$$NZD(1, 66) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 66$$
$$y = 39 + 66t$$
$$0 \leq 39 + 66t < 66$$
$$-0{,}59 \leq t < 0{,}41$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = 39}$$

za $\boldsymbol{x = 36}$

$$55x + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$55 \cdot 36 + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$y \equiv -1952(\text{mod}66)$$
$$y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$y + 66p = 28$$
$$NZD(1, 66) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 66$$
$$y = 28 + 66t$$
$$0 \leq 28 + 66t < 66$$
$$-0{,}42 \leq t < 0{,}58$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = 28}$$

za $\boldsymbol{x = 47}$

$$55x + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$55 \cdot 47 + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$y \equiv -2557(\text{mod}66)$$
$$y \equiv 17(\text{mod}66)$$
$$y + 66p = 17$$
$$NZD(1,66) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 66$$
$$y = 17 + 66t$$
$$0 \leq 17 + 66t < 66$$
$$-0{,}26 \leq t < 0{,}74$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = 17}$$

za $\boldsymbol{x = 58}$

$$55x + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$55 \cdot 58 + y \equiv 28(\text{mod}66)$$
$$y \equiv -3162(\text{mod}66)$$
$$y \equiv 6(\text{mod}66)$$
$$y + 66p = 6$$
$$NZD(1,66) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 66$$
$$y = 6 + 66t$$
$$0 \leq 6 + 66t < 66$$
$$-0{,}09 \leq t < 0{,}91$$
$$t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = 6}$$

Zaključak:
Rješenje sistema linearne kongruencije se može zapisati u sljedećem obliku:

$$(\mathbf{3}, \mathbf{61}), (\mathbf{14}, \mathbf{50}), (\mathbf{25}, \mathbf{39}), (\mathbf{36}, \mathbf{28}), (\mathbf{47}, \mathbf{17}), (\mathbf{58}, \mathbf{6})$$

Zadatak 5 [0.8 poena]

Ispitajte rješivost i odredite broj rješenja sljedećih kvadratnih kongruencija (u slučaju da su rješive):

Rješenje:

a.

$$x^2 \equiv 268 \ (\mathrm{mod}\ 627)$$

Veoma je očigledno da broj 627 nije prost budući da mu je zbir cifara djeljiv sa 3, te je i on sam, između ostalog, djeljiv sa 3, ali se on može zapisati kao proizvod prostih brojeva:

$$627 = 3 \cdot 11 \cdot 19$$

Budući da je uslov $NZD(a, m) = NZD(268, 627) = 1$ zaključujemo da je isti ispunjen. Korištenjem pogodnih osobina ispitat ćemo problem rješivosti date kvadratne kongruencije. Budući da $m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 3 \cdot 11 \cdot 19$ onda vidimo da su vrijednosti p_1, p_2 i p_3 respektivno 3, 11 i 19. S obzirom na uvjete rješivosti, da bi ova kvadratna kongruencija bila rješiva moramo u nastavku dobiti (268 | 3) = 1, (268 | 11) = 1 i (268 | 19) = 1.

$$(268|3) = (\mathrm{mod}(268, 3)|3) = (1|3) = \mathbf{1}$$

$$(268|11) = (\mathrm{mod}(268, 11)|11) = (4|11) = (2 \cdot 2|11) = (2|11)(2|11) =$$

$$(-1)^{\frac{11^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{11^2-1}{8}} = (-1)^{15} \cdot (-1)^{15} = (-1)^{30} = \mathbf{1}$$

$$(268|19) = (\mathrm{mod}(268, 19)|19) = (2|19) = (-1)^{\frac{19^2-1}{8}} = (-1)^{45} = \mathbf{-1}$$

Možemo zaključiti da nisu ispunjeni svi uslovi rješivosti, što implicira da ni zadata kvadratna kongruencija **nije rješiva**.

b.

$$x^2 \equiv 881 \ (\mathrm{mod}\ 2200)$$

Veoma je očigledno da je broj 2200 djeljiv sa 2 te da nije prost, ali se može zapisati kao:

$$2200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Budući da je uslov $NZD(a, m) = NZD(881, 2200) = 1$ zaključujemo da je isti ispunjen. Vodeći se uslovima rješivosti kvadratnih kongruencija oblika $x^2 \equiv a(\mathrm{mod} m)$ u općem slučaju nastavljamo sa ispitivanjem rješivosti date kvadratne kongruencije.

$$(881|5) = (\mathrm{mod}(881, 5)|5) = (1|5) = \mathbf{1}$$

$$(881|11) = (\mathrm{mod}(881, 11)|11) = (1|11) = \mathbf{1}$$

Naravno, morat ćemo ispitati i dopunski uvjet. Budući da je $e = 3$ onda je potrebno ispitati $a \equiv 1(\mathrm{mod} 8)$, odnosno dovoljno je pokazati da je $\mathrm{mod}(a, 8) = 1$.

$$\text{Zaista, } \mathrm{mod}(881, 8) = \mathbf{1}.$$

Uočavamo da su ispunjeni svi uvjeti, pa je zadata kvadratna kongruencija **rješiva.**

Sada možemo odrediti broj rješenja zadate kvadratne kongruencije. Budući da je $e = 3$ onda kvadratna kongruencija ima 2^{k+2} tipičnih rješenja.

$2^{2+2} = 2^4 = 16$ jer je $k = 2$ budući da imamo dva prosta faktora različita od 2.

Dakle, zadata kvadratna kongruencija je rješiva i ima **16** tipičnih rješenja.

c.

$$x^2 \equiv 1411 \ (\mathrm{mod}\ 168)$$

Veoma je očigledno da je broj 168 djeljiv sa 2 te da nije prost, ali se može zapisati kao:

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Budući da je uslov $NZD(a, m) = NZD(1411, 168) = 1$ zaključujemo da je isti ispunjen. Vodeći se uslovima rješivosti kvadratnih kongruencija oblika $x^2 \equiv a(\mathrm{mod}m)$ u općem slučaju nastavljamo sa ispitivanjem rješivosti date kvadratne kongruencije.

$$(1411|3) = (\mathrm{mod}(1411, 3)|3) = (1|3) = \mathbf{1}$$

$$(1411|7) = (\mathrm{mod}(1411, 7)|7) = (4|7) = (2|7)(2|7) = (-1)^{\frac{7^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{7^2-1}{8}} = (-1)^6 \cdot (-1)^6 = (-1)^{12} = \mathbf{1}$$

Naravno, morat ćemo ispitati i dopunski uvjet. Budući da je $e = 3$ onda je potrebno ispitati $a \equiv 1(\mathrm{mod}8)$, odnosno dovoljno je pokazati da je $\mathrm{mod}(a, 8) = 1$.

$$\mathrm{mod}(1411, 8) = \mathbf{3} \neq \mathbf{1}$$

Dakle, zaključujemo da zadata kvadratna kongruencija **nije rješiva.**

d.

$$x^2 \equiv 375 \ (\mathrm{mod}\ 40425)$$

Ukoliko pogledamo zadanu kvadratnu kongruenciju, odmah na samome početku, možemo primijetiti da su zadnje cifre brojeva 375 i 40425 broj 5 te da će oba sigurno biti djeljiva sa brojem 5. Iz toga zaključujemo da će njihov NZD sigurno biti različit od 1. Stoga, prva stvar koju radimo jeste računanje NZD-a za ova dva broja. Treba napomenuti da je prilikom traženja NZD-a primijenjen prošireni Euklidov algoritam, koji je detaljno opisan u zadatku 1.

$$NZD(375, 40425) = 75 = d \neq 1$$

Kvadratna kongruencija je rješiva ako i samo ako vrijedi $NZD\left(\frac{a}{q^2}, \frac{m}{d}\right) = 1$ i ako je rješiva kongruencija $y^2 \equiv \frac{a}{q^2}(\mathrm{mod}\frac{m}{d})$ pri čemu su p i q prosti brojevi takvi da je $d = pq^2$, potrebno je izvršiti zapis $d = pq^2$.

$$d = 3 \cdot 5^2$$
$$p = 3 \wedge q = 5$$
$$NZD\left(\frac{a}{q^2}, \frac{m}{d}\right) = NZD\left(\frac{375}{5^2}, \frac{40425}{75}\right) = NZD(15, 539) = 1$$

Budući da je uvjet $NZD\left(\frac{a}{q^2}, \frac{m}{d}\right) = 1$ zadovoljen, početna kvadratna kongruencija će biti rješiva ako i samo ako je rješiva novodobijena kvadratna kongruencija:

$$y^2 \equiv 15(\mathrm{mod} 539)$$

Broj 539 je, između ostalog, djeljiv sa brojem 11 te nije prost, ali se može zapisati kao:

$$539 = 7^2 \cdot 11$$

Budući da je uslov $NZD(a, m) = NZD(15, 539) = 1$ zaključujemo da je isti ispunjen.
Vodeći se uslovima rješivosti kvadratnih kongruencija oblika $y^2 \equiv \frac{a}{q^2}(\mathrm{mod}\, \frac{m}{d})$ u općem slučaju nastavljamo sa ispitivanjem rješivosti date kvadratne kongruencije.

$$(15|7) = (\mathrm{mod}(15, 7)|7) = (1|7) = \mathbf{1}$$
$$(15|11) = (\mathrm{mod}(15, 11)|11) = (4|11) = (2 \cdot 2|11) = (2|11)(2|11) =$$
$$(-1)^{\frac{11^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{11^2-1}{8}} = (-1)^{15} \cdot (-1)^{15} = (-1)^{30} = \mathbf{1}$$

Uočavamo da su ispunjeni svi uvjeti, pa je zadata kvadratna kongruencija **rješiva**.
Sada možemo odrediti broj rješenja zadate kvadratne kongruencije. Taj broj dobijamo množenjem n i q, pri čemu je n broj tipičnih rješenja kvadratne kongruencije $y^2 \equiv \frac{a}{q^2}(\mathrm{mod}\, \frac{m}{d})$
Budući da je $e = 0$, broj rješenja n je 2^k, pri čemu je očigledno da je $k = 2$. Samim tim, ukupan broj rješenja inicijalno zadane kvadratne kongruencije je:

$$n \cdot q = 2^k \cdot q = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Dakle, zadata kvadratna kongruencija je rješiva i ima **20** tipičnih rješenja.

Zadatak 6 [1.2 poena]

Nađite sve diskretne kvadratne korijene sljedećih klasa ostataka, formiranjem odgovarajućih kvadratnih kongruencija i njihovim rješavanjem (rješavanje "grubom silom" neće biti prihvaćeno):

NAPOMENA: Nađena rješenja možete lako provjeriti modularnim kvadriranjem.

Rješenje:

NAPOMENA: U zadatku će na pojedinim mjestima biti potrebno koristiti pseudokod Tonelli algoritma koji će iz tog razloga biti dat na sljedećoj slici.

```
t ← (p − 1)/2; v ← 1; w ← a; h ← inv(g, p)
while mod(t, 2) = 0 do
  t ← t/2; h ← mod(h^2, p)
  if mod(w^t, p) ≠ 1 then
    v ← mod(v · g, p); w ← mod(w · h, p)
  g ← mod(g^2, p)
x ← mod(v · w^((t+1)/2), p)        // ili, pogodnije, x ← mod(v · mod(w^((t+1)/2), p), p)
```

Slika 2. Pseudokod Tonelli algoritma

a.

$$[8]_{193}$$

Odgovarajuća kvadratna kongruencija je data kao:

$$x^2 \equiv 8(\text{mod}193)$$

Analogno postupku iz zadatka 5 vršimo provjeru rješivosti date kvadratne kongruencije.

Broj 193 je prost iz čega slijedi da je $NZD(8, 193) = 1$

$$(8|193) = (2|193)(2|193)(2|193) = (-1)^{\frac{193^2-1}{8}}(2|193)(2|193) = (-1)^{4656+4656+4656} = \mathbf{1}$$

Dakle, uvjeti rješivosti su ispunjeni pa je zadata kvadratna kongruencija **rješiva.**
Budući da je broj 193 prost i različit od 2 potrebno je provjeriti da li vrijedi $\text{mod}(p, 4) = 3$ ili $\text{mod}(p, 8) = 5$. Kako je $\text{mod}(193,4) = 1$, odnosno $\text{mod}(193,8) = 1$ očigledno je da nećemo koristiti ***Lagrangeovu*** i ***Legendrovu*** formulu. Naime, zadatku ćemo pristupiti korištenjem ***Tonelli algoritma***.
Prvo što treba uraditi jeste naći kvadratni neostatak g po modulu p, odnosno g za koje vrijedi $(g|p) = -1$. Jednostavno pogađamo vrijednost g za koju je ovo ispunjeno uz uvjet da se vrijednost uzima između 1 i p-1.
Pokušajmo ispuniti uvjet za g = 5

$$(5|193) = (193|5) \cdot (-1)^{\frac{(193-1)(5-1)}{4}} = (193|5) = (3|5) = (5|3) \cdot (-1)^2 = (2|3) = (-1)^1 = \mathbf{-1}$$

Zaista, vidimo da je $\mathbf{g = 5}$

Rješavanje se svodi na korištenje Tonelli algoritma. Budući da će biti jednostavno odrediti t, v i w, potrebno je odrediti h, što ćemo u nastavku i učiniti:

$$h = inv(g,p) \text{ je isto što i } [h]_p = ([g]_p)^{-1}$$
$$[h]_p = [5]_{193}^{-1} = ?$$
$$5x \equiv 1(\text{mod}193)$$
$$5x + 193y = 1$$
$$NZD(5,193) = 1 = -77 \cdot 5 + 2 \cdot 193$$
$$x = -77 \cdot 1 + 193t = -77 + 193t$$
$$0 \leq x < 193$$
$$77 \leq 193t < 270$$
$$0{,}399 \leq t < 1{,}399$$
$$t = 1 \Rightarrow x = 116$$
$$[h]_p = [5]_{193}^{-1} = [116]_{13}$$
$$\boldsymbol{h} = \mathbf{116}$$

Na početku algoritma znamo vrijednosti h, t, v i w:

$$t = \frac{p-1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \mathbf{96}$$
$$\boldsymbol{v} = \mathbf{1}$$
$$w = a \Rightarrow \boldsymbol{w} = \mathbf{8}$$

Prvi prolazak kroz algoritam:

t=48, h=139, v=5, w=147, g=25

Primijetimo da su se vrijednosti v i w promijenile budući da je uslov $\text{mod}(w^t, p) \neq 1$ ispunjen. Postupak kojim se to zaključilo ćemo prikazati sada korištenjem algoritma ***kvadriraj i množi***. Međutim u narednim prolascima nećemo detaljno pisati postupak ovog algoritma budući da će na ovom primjeru biti objašnjen.

$$\text{mod}(8^{48}, 193) \text{ je isto što i } ([8]_{193})^{48}$$

Kako je $48 = 16 + 32$, onda je $([8]_{193})^{48} = ([8]_{193})^{16+32} = ([8]_{193})^{16} \cdot ([8]_{193})^{32}$

$$([8]_{193})^2 = [8 \cdot 8]_{193} = [64]_{193}$$
$$([8]_{193})^4 = ([64]_{193})^2 = [4096]_{193} = [\text{mod}(4096, 193)]_{193} = [43]_{193}$$
$$([8]_{193})^8 = ([43]_{193})^2 = [1849]_{193} = [\text{mod}(1849, 193)]_{193} = [112]_{193}$$
$$([8]_{193})^{16} = ([112]_{193})^2 = [12544]_{193} = [\text{mod}(12544, 193)]_{193} = [192]_{193}$$
$$([8]_{193})^{32} = ([192]_{193})^2 = [36864]_{193} = [\text{mod}(36864, 193)]_{193} = [1]_{193}$$
$$([8]_{193})^{48} = ([8]_{193})^{16+32} = ([8]_{193})^{16} \cdot ([8]_{193})^{32} = [192]_{193} \cdot [1]_{193} = [192]_{193}$$

Dakle, $\text{mod}(192, 193) = 192 \neq 1$

Drugi prolazak kroz algoritam:
t=24, h=21, v=125, w=192, g=46

Primijetimo da su se vrijednosti v i w promijenile budući da je uslov $\mathrm{mod}(w^t, p) \neq 1$ ispunjen. Zaista, $\mathrm{mod}(147^{24}, 193) = 192 \neq 1$

Treći prolazak kroz algoritam:
t=12, h=55, v=125, w=192, g=186

Primijetimo da se vrijednosti v i w nisu promijenile budući da uslov $\mathrm{mod}(w^t, p) \neq 1$ nije ispunjen. Zaista, $\mathrm{mod}(192^{12}, 193) = 1$. Ovo se jednostavno zaključuje i ukoliko pogledamo peti red detaljnog prolaska kroz algoritam *kvadriraj i množi* gdje vidimo da je već $([192]_{193})^2 = 1$.

Četvrti prolazak kroz algoritam:
t=6, h=130, v=125, w=192, g=49

Primijetimo da se vrijednosti v i w nisu promijenile iz istog razloga kao i u prethodnom prolasku.

Peti prolazak kroz algoritam:
t=3, h=109, v=142, w=84, g=85

Primijetimo da su se vrijednosti v i w promijenile budući da je uslov $\mathrm{mod}(w^t, p) \neq 1$ ispunjen. Zaista, $\mathrm{mod}(192^3, 193) = 192 \neq 1$

Sada možemo odrediti prvo tipično rješenje, a nakon toga i drugo kao $x_2 = p - x_1$

$$x_1 = \mathrm{mod}\left(v \cdot w^{\frac{t+1}{2}}, p\right) = \mathrm{mod}\left(142 \cdot 84^{\frac{3+1}{2}}, 193\right) = \mathrm{mod}(1001952{,}193) = 89$$

$$x_2 = p - x_1 = 193 - 89 = 104$$

Dakle, rješenja su $\boldsymbol{x_1 = 89 \wedge x_2 = 104}$

b.

$[1210]_{2809}$

Odgovarajuća kvadratna kongruencija je data kao:

$$x^2 \equiv 1210 (\mathrm{mod} 2809)$$

Analogno postupku iz zadatka 5 vršimo provjeru rješivosti date kvadratne kongruencije.

$$NZD(1210, 2809) = 1$$
$$2809 = 53^2$$
$$(268|3) = (1|3) = \mathbf{1}$$

Dakle, uvjeti rješivosti su ispunjeni pa je zadata kvadratna kongruencija **rješiva.**
Primijetimo da je riječ o primjeru $x^2 \equiv a(\mathrm{mod} m)$ gdje je $m = p^k$, p je prost broj različit od 2, a k prirodan broj. Također, budući da je zadata kvadratna kongruencija rješiva imat će dva tipična rješenja.
Prvo je potrebno riješiti kvadratnu kongruenciju oblika $x^2 \equiv a(\mathrm{mod} m)$

$$x^2 \equiv 1210(\mathrm{mod} 53)$$
$$x^2 \equiv 44(\mathrm{mod} 53)$$

Potrebno je provjeriti da li vrijedi $\mathrm{mod}(p, 4) = 3$ ili $\mathrm{mod}(p, 8) = 5$.

$$\mathrm{mod}(53, 4) = 1 \neq 3$$
$$\mathrm{mod}(53, 8) = 5$$

Dakle, koristit ćemo ***Legrendrovu formulu*** $x = \mathrm{mod}(a^{\frac{p+3}{8}}, p)$ budući da direktnom provjerom vidimo da je njeno rješenje tačno.

$$x = x_1 = \mathrm{mod}\left(44^{\frac{53+3}{8}}, 53\right) = 16$$

Sada ćemo koristiti ***Henselovu lemu***

$$x_i = \mathrm{mod}\big(x_{i-1} - h \cdot (x_{i-1}^2 - a), p^i\big) \text{ gdje se h dobija iz izraza } [h]_p = ([2x_1]_p)^{-1}$$
$$([2x_1]_p)^{-1} = ([32]_{53})^{-1}$$
$$32x \equiv 1(\mathrm{mod} 53)$$
$$32x + 53y = 1$$
$$NZD(32, 53) = 1 = 5 \cdot 32 - 3 \cdot 53$$
$$x = 5 + 53t$$
$$0 \leq 5 + 53t < 53$$
$$-0{,}09 \leq t < 0{,}9$$
$$t = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \boldsymbol{h} = \mathbf{5}$$
$$x_2 = \mathrm{mod}(x_1 - h \cdot (x_1^2 - a), p^2)$$
$$x_2 = \mathrm{mod}(16 - 5 \cdot (16^2 - 1210), 53^2) = \mathrm{mod}(4786, 2809) = 1977$$
$$x_1 = m - x_2 = 2809 - 1977 = 832$$

Dakle, rješenja su $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{832} \wedge \boldsymbol{x_2} = \mathbf{1977}$

c.

$$[449]_{469}$$

Odgovarajuća kvadratna kongruencija je data kao:

$$x^2 \equiv 449(\text{mod}469)$$

Veoma je očigledno da je broj 469 složen. Međutim, moguće ga je predstaviti kao proizvod prostih brojeva.

$$469 = 7 \cdot 67$$

Sada ćemo rastaviti zadanu kvadratnu kongruenciju na sistem dvije kvadratne kongruencije

$$x^2 \equiv 449(\text{mod}7) \ \land \ x^2 \equiv 449(\text{mod}67)$$
$$x^2 \equiv 1(\text{mod}7) \ \land \ x^2 \equiv 47(\text{mod}67)$$

Obratimo pažnju na lijevu kvadratnu kongruenciju iz sistema iznad. Rješenje je i više nego očigledno, čak i bez pogađanja.

$$\boldsymbol{x_1 = 1}$$
$$x_2 = 7 - 1 = \mathbf{6}$$

Sada možemo pristupiti rješavanju desne kvadratne kongruencije iz sistema čije rješenje, ipak nije toliko očigledno kao što je za prvu. Potrebno je provjeriti da li vrijedi

$$\text{mod}(p,4) = 3 \text{ ili } \text{mod}(p,8) = 5.$$
$$\text{mod}(67{,}4) = 3$$

Zaista, jednakost je zadovoljena pa koristimo ***Lagrangeovu formulu***:

$$x = \text{mod}\left(a^{\frac{p+1}{4}}, p\right)$$
$$x = \text{mod}\left(47^{\frac{67+1}{4}}, 67\right) = \text{mod}(47^{17}, 67) = \mathbf{39}$$
$$x_2 = 67 - 39 = \mathbf{28}$$

Zaključujemo da imamo četiri sistema linearnih kongruencija koje ćemo zapisati u nastavku uz odgovarajuće oznake.

$$x \equiv 1(\text{mod}7) \ \land x \equiv 39(\text{mod}67) \quad (1)$$
$$x \equiv 1(\text{mod}7) \ \land x \equiv 28(\text{mod}67) \quad (2)$$
$$x \equiv 6(\text{mod}7) \ \land x \equiv 39(\text{mod}67) \quad (3)$$
$$x \equiv 6(\text{mod}7) \ \land x \equiv 28(\text{mod}67) \quad (4)$$

Sisteme ćemo rješavati pomoću ***kineske teoreme o ostacima.***

(1)

$$x \equiv 1(\text{mod}7) \ \land x \equiv 39(\text{mod}67)$$
$$n_1 = 7$$
$$n_2 = 67$$

$$n_1 \cdot n_2 = 469$$
$$\lambda_1 = \frac{469}{7} = 67$$
$$\lambda_2 = \frac{469}{67} = 7$$
$$x \equiv 67x_1 + 7x_2 (\text{mod} 469)$$

$$\boldsymbol{67x_1 \equiv 1(\text{mod}7)}$$
$$\boldsymbol{4x_1 \equiv 1(\text{mod}7)}$$
$$\boldsymbol{4x_1 + 7y = 1}$$
$$\boldsymbol{NZD(4,7) = 1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 2 + 7t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq 2 + 7t < 7}$$
$$\boldsymbol{-0,29 \leq t < 0,71}$$
$$\boldsymbol{t = 0}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$

$$\boldsymbol{7x_2 \equiv 39(\text{mod}67)}$$
$$\boldsymbol{7x_2 + 67y = 39}$$
$$\boldsymbol{NZD(7,67) = 1 = -19 \cdot 7 + 2 \cdot 67}$$
$$\boldsymbol{x_2 = -19 \cdot 39 + 67t = -741 + 67t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq -741 + 67t < 67}$$
$$\boldsymbol{11,06 \leq t < 12,06}$$
$$\boldsymbol{t = 12}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 63}$$

Rješenje:
$$x \equiv 67 \cdot 2 + 7 \cdot 63 = 575 (\text{mod} 469)$$
$$\boldsymbol{x \equiv 106(\text{mod}469)}$$

(2)

$$x \equiv 1(\text{mod}7) \ \wedge x \equiv 28(\text{mod}67)$$
$$\lambda_1 = 67$$
$$\lambda_2 = 7$$
$$x \equiv 67x_1 + 7x_2 (\text{mod} 469)$$

$$\boldsymbol{67x_1 \equiv 1(\text{mod}7)}$$
$$\boldsymbol{4x_1 \equiv 1(\text{mod}7)}$$
$$\boldsymbol{4x_1 + 7y = 1}$$
$$\boldsymbol{NZD(4,7) = 1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 2 + 7t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq 2 + 7t < 7}$$
$$\boldsymbol{-0,29 \leq t < 0,71}$$
$$\boldsymbol{t = 0 \ \Rightarrow x_1 = 2}$$

$$\boldsymbol{7x_2 \equiv 28(\text{mod}67)}$$
$$\boldsymbol{7x_2 + 67y = 28}$$
$$\boldsymbol{NZD(7,67) = 1 = -19 \cdot 7 + 2 \cdot 67}$$
$$\boldsymbol{x_2 = -19 \cdot 28 + 67t = -741 + 67t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq -532 + 67t < 67}$$
$$\boldsymbol{7,94 \leq t < 8,94}$$
$$\boldsymbol{t = 8}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 4}$$

Rješenje:
$$x \equiv 67 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 162 (\text{mod} 469)$$
$$\boldsymbol{x \equiv 162(\text{mod}469)}$$

(3)

$$x \equiv 6(\text{mod}7) \ \wedge x \equiv 39(\text{mod}67)$$
$$\lambda_1 = 67$$
$$\lambda_2 = 7$$
$$x \equiv 67x_1 + 7x_2 (\text{mod} 469)$$

$$\boldsymbol{67x_1 \equiv 6(\text{mod}7)}$$

$$\boldsymbol{7x_2 \equiv 39(\text{mod}67)}$$

$$\mathbf{4x_1 \equiv 6(mod7)}$$
$$\mathbf{4x_1 + 7y = 6}$$
$$\boldsymbol{NZD(4,7) = 1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 12 + 7t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq 12 + 7t < 7}$$
$$\boldsymbol{-1,71 \leq t < -0,71}$$
$$\boldsymbol{t = 0}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 12}$$

$$\boldsymbol{7x_2 + 67y = 39}$$
$$\boldsymbol{NZD(7,67) = 1 = -19 \cdot 7 + 2 \cdot 67}$$
$$\boldsymbol{x_2 = -19 \cdot 39 + 67t = -741 + 67t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq -741 + 67t < 67}$$
$$\boldsymbol{11,06 \leq t < 12,06}$$
$$\boldsymbol{t = 12}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 63}$$

Rješenje:
$$x \equiv 67 \cdot 12 + 7 \cdot 63 = 1245(\text{mod}469)$$
$$\boldsymbol{x \equiv 307(\mathbf{mod469})}$$

(4)

$$x \equiv 6(\text{mod}7) \ \wedge x \equiv 28(\text{mod}67)$$
$$\lambda_1 = 67$$
$$\lambda_2 = 7$$
$$x \equiv 67x_1 + 7x_2(\text{mod}469)$$

$$\boldsymbol{67x_1 \equiv 6(\mathbf{mod7})}$$
$$\boldsymbol{4x_1 \equiv 6(\mathbf{mod7})}$$
$$\boldsymbol{4x_1 + 7y = 6}$$
$$\boldsymbol{NZD(4,7) = 1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 12 + 7t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq 12 + 7t < 7}$$
$$\boldsymbol{-1,71 \leq t < -0,71}$$
$$\boldsymbol{t = 0}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 12}$$

$$\boldsymbol{7x_2 \equiv 28(\mathbf{mod67})}$$
$$\boldsymbol{7x_2 + 67y = 28}$$
$$\boldsymbol{NZD(7,67) = 1 = -19 \cdot 7 + 2 \cdot 67}$$
$$\boldsymbol{x_2 = -19 \cdot 28 + 67t = -741 + 67t}$$
$$\boldsymbol{0 \leq -532 + 67t < 67}$$
$$\boldsymbol{7,94 \leq t < 8,94}$$
$$\boldsymbol{t = 8}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 4}$$

Rješenje:
$$x \equiv 67 \cdot 12 + 7 \cdot 4 = 832(\text{mod}469)$$
$$\boldsymbol{x \equiv 363(\mathbf{mod469})}$$

d.

$$[918]_{1674}$$

Odgovarajuća kvadratna kongruencija je data kao:
$$x^2 \equiv 918(\text{mod}1674)$$

$$NZD(918, 1674) = d = 54 \neq 1$$
$$54|918 \ \wedge 54|1674 \Rightarrow 54|x^2$$
$$d = p \cdot q^2 \Rightarrow d = 6 \cdot 3^2$$

Uvedimo smjenu: $x = pqy$
$$p^2q^2y^2 \equiv 918(\text{mod}1674)$$

Podijelimo cijeli izraz sa brojem d

$$py^2 \equiv \frac{918}{54}(\text{mod}\frac{1674}{54})$$
$$6 \cdot y^2 \equiv 17(\text{mod}31)$$

Budući da je $NZD(6,31) = 1$ prethodna kvadratna kongruencija je rješiva

Uvedimo novu smjenu: $z = y^2$

$$6z \equiv 17(\text{mod}31)$$
$$6z + 31k = 17$$
$$NZD(6,31) = 1 = -5 \cdot 6 + 1 \cdot 31$$
$$z = -5 \cdot 17 + 31t = -85 + 31t$$
$$0 \leq -85 + 31t < 31$$
$$2{,}74 \leq t < 3{,}74$$
$$t = 3$$
$$\boldsymbol{z = 8}$$
$$\boldsymbol{z = 8(\text{mod}31)}$$

Vratimo smjenu $z = y^2$

$$y^2 = 8(\text{mod}31)$$

Sada rješavamo pomoćnu kvadratnu kongruenciju $y^2 = 8(\text{mod}31)$

$$NZD(8,31) = 1$$
$$\text{mod}(p,4) = \text{mod}(31,4) = 3$$
$$y = \text{mod}\left(a^{\frac{p+1}{4}}, p\right) = \text{mod}\left(8^{\frac{31+1}{4}}, 31\right) = \text{mod}(8^8, 31) = 16$$
$$y_2 = 31 - 16 = 15$$

Svakom y rješenju odgovara q rješenja za x koji se računaju prema formuli:

$$x \equiv pqy\left(\text{mod}\frac{m}{q}\right), \text{ odnosno } x = pqy + \left(\frac{m}{q}\right)i$$

Dakle, imat ćemo za svako y po 3 rješenja i vrijedi $i \in \{0,1,2\}$

$i = 0$

$$x_1 = 6 \cdot 3 \cdot 16 = \mathbf{288}$$
$$x_2 = 6 \cdot 3 \cdot 15 = \mathbf{270}$$

$i = 1$

$$x_3 = 6 \cdot 3 \cdot 16 + \frac{1674}{3} = \mathbf{846}$$
$$x_4 = 6 \cdot 3 \cdot 15 + \frac{1674}{3} = \mathbf{828}$$

$i = 2$

$$x_5 = 6 \cdot 3 \cdot 16 + \frac{1674}{3} \cdot 2 = \mathbf{1404}$$

$$x_6 = 6 \cdot 3 \cdot 15 + \frac{1674}{3} \cdot 2 = \mathbf{1386}$$

Zaključujemo da smo dobili ukupno **6** rješenja.

Zadatak 7

Aleksandra i Berin žele da razmjenjuju poruke šifrirane nekim algoritmom koji zahtijeva tajni ključ, ali nemaju sigurnog kurira preko kojeg bi mogli prenijeti ključ. Zbog toga su odlučili da razmijene ključ putem Diffie-Hellmanovog protokola. Za tu svrhu, oni su se preko ETF Haber kutije dogovorili da će koristiti prost broj $p = 941$ i generator $g = 23$. Nakon toga, Aleksandra je u tajnosti slučajno izabrala broj $a = 222$, dok se Berin u tajnosti odlučio za broj $b = 558$. Odredite koje još informacije Aleksandra i Berin moraju razmijeniti preko ETF Haber kutije da bi se dogovorili o vrijednosti ključa, te kako glasi ključ koji su oni dogovorili.

Rješenje:

Prvo ćemo popisati listu poznatih stvari:

$$p = 941$$
$$g = 23$$
$$a = 222$$
$$b = 558$$

Aleksandra bira slučajni broj a u opsegu od 0 do 940, odnosno bira broj 222. Nakon toga računa $\alpha = \mathrm{mod}(g^a, p)$ i šalje tu vrijednost Berinu.

$$\alpha = \mathrm{mod}(23^{222}, 941)$$

Postupak računanja $\alpha = \mathrm{mod}(23^{222}, 941)$ prikazujemo u nastavku

$$\alpha = \mathrm{mod}(23^{222}, 941) = ([23]_{941})^{222}$$
$$\varphi(941) = 941 - 1 = 940 > 222$$

Budući da nije moguća redukcija stepena korištenjem algoritma ***kvadriraj i množi,*** koji je detaljno opisan u zadatku 6 pod a, dobijamo:

$$[529]_{941}, \text{ odnosno } \boldsymbol{\alpha = 529}$$

Berin bira slučajni broj b u opsegu od 0 do 940, odnosno bira broj 558. Nakon toga računa $\beta = \mathrm{mod}(g^b, p)$ i šalje tu vrijednost Berinu.

$$\beta = \mathrm{mod}(23^{558}, 941)$$

Primjenom algoritma ***kvadriraj i množi,*** koji je detaljno opisan u zadatku 6 pod a, dobijamo:

$$[185]_{941}, \text{ odnosno } \boldsymbol{\beta = 185}$$

Poslije razmjene informacija Aleksandra (odnosno Berin) računa ključ k prema formuli

$$k = \mathrm{mod}(\beta^a, p) \text{ (odnosno } k = \mathrm{mod}(\alpha^b, p)).$$
$$k = \mathrm{mod}(\beta^a, p) = \mathrm{mod}(185^{222}, 941) = \mathbf{349}$$
$$k = \mathrm{mod}(\alpha^b, p) = \mathrm{mod}(529^{558}, 941) = \mathbf{349}$$

Zaključujemo da su Aleksandra i Berin dobili istu vrijednost ključa, a to je **349.**

Zadatak 8

Amela i Branko međusobno razmjenjuju poruke preko Facebook-a. Kako je poznato da takva komunikacija nije pouzdana, oni su odlučili da će primati samo šifrirane poruke. Amela je na svoj profil postavila informaciju da prima samo poruke šifrirane pomoću RSA kriptosistema s javnim ključem (557, 943), dok je Branko postavio informaciju da prima samo poruke šifrirane RSA kriptosistemom s javnim ključem (323, 851).

a. Odredite kako glase tajni ključevi koje koriste Amela i Branko za dešifriranje šifriranih poruka koje im pristižu.
b. Odredite kako glase funkcije šifriranja i dešifriranja koje koriste Amela i Branko za šifriranje poruka koje šalju jedno drugom, odnosno za dešifriranje šifriranih poruka koje im pristižu.
c. Odredite kako glasi šifrirana poruka y koju Amela šalje Branku ako izvorna poruka glasi $x = 5546$. Kako glasi digitalni potpis z u slučaju da Amela želi Branku dokazati da poruka potiče baš od nje?
d. Pokažite kako će Branko dešifrirati šifriranu poruku y koju mu je Amela poslala (tj. primijenite odgovarajuću funkciju za dešifriranje na šifriranu poruku) i na osnovu primljenog digitalnog potpisa z utvrditi da je poruka zaista stigla od Amele.

NAPOMENA: Obratite pažnju da je poruka veća od modula enkripcije!

Rješenje:

Postavka zadatka glasi:

Amela prima samo poruke s javnim ključem (557, 943)
Branko prima samo poruke s javnim ključem (323, 851)

a.

Amelina funkcija enkripcije je $E_A(x) = \mathrm{mod}(x^{557}, 943)$
Brankova funkcija enkripcije je $E_B(x) = \mathrm{mod}(x^{323}, 851)$

Da bismo izračunali tajni ključ, potrebni su nam b_A i b_B koje ćemo izračunati u nastavku

$\boldsymbol{\varphi(943) = \varphi(23 \cdot 41) = 880}$	$\boldsymbol{\varphi(851) = \varphi(23 \cdot 37) = 792}$
$\boldsymbol{557 b_A = 1(\mathrm{mod} 880)}$	$\boldsymbol{323 b_B = 1(\mathrm{mod} 792)}$
$\boldsymbol{NZD(557, 880) = 1 \vert 1}$	$\boldsymbol{NZD(323, 792) = 1 \vert 1}$
$\boldsymbol{1 = -267 \cdot 557 + 169 \cdot 880}$	$\boldsymbol{1 = 179 \cdot 323 - 73 \cdot 792}$
$\boldsymbol{b_A = -267 + 880t}$	$\boldsymbol{b_A = 179 + 792t}$
$\boldsymbol{0 \leq -267 + 880t < 880}$	$\boldsymbol{0 \leq 179 + 792t < 792}$
$\boldsymbol{0,3 \leq t < 1,3}$	$\boldsymbol{-0,23 \leq t < 0,77}$
$\boldsymbol{t = 1 \Rightarrow b_A = 613}$	$\boldsymbol{t = 0 \Rightarrow b_B = 179}$

Dakle, **Amelin** tajni ključ je **(613, 943)**, a **Brankov (179, 851)** .
b, c. i d.

Amelina funkcija dešifrovanja je $D_A(y) = \mathrm{mod}(y^{613}, 943)$
Brankova funkcija dešifrovanja je $D_B(y) = \mathrm{mod}(y^{179}, 851)$

Izvorna poruka je $\boldsymbol{x} = \mathbf{5546}$. Budući da je $5546 > 851$, morat ćemo razbiti poruku na dijelove:

$$5546 = 6 \cdot 851 + 440$$

Dakle, cifre su 6 i 440.

$$E_B(6) = \text{mod}(6^{323}, 851) = 31$$
$$E_B(440) = \text{mod}(440^{323}, 851) = 564$$
$$y = 31 \cdot 851 + 564 = 26945$$

Sada određujemo digitalni potpis:

$$z = E_B\big(D_A(5546)\big) = ?$$
$$u = D_A(5546) = ?$$

Budući da je $5546 > 943$, morat ćemo razbiti poruku na dijelove:

$$5546 = 5 \cdot 943 + 831$$
$$D_A(5) = \text{mod}(5^{613}, 943) = 490$$
$$D_A(831) = \text{mod}(831^{613}, 943) = 581$$
$$u = D_A(5546) = 490 \cdot 943 + 581 = \mathbf{462651}$$
$$z = E_B(462651) = ?$$

Budući da je $462651 > 851$, morat ćemo razbiti poruku na dijelove:

$$462651 = 543 \cdot 851 + 558$$
$$E_B(543) = \text{mod}(543^{323}, 851) = 40$$
$$E_B(558) = \text{mod}(558^{323}, 851) = 284$$
$$z = 40 \cdot 851 + 284 = \mathbf{34324}$$

Branko dešifruje $y = 26945$ prema formuli $x = D_B(y)$
Budući da je $26945 > 851$, morat ćemo razbiti poruku na dijelove:

$$26945 = 31 \cdot 851 + 564$$
$$D_B(31) = \text{mod}(31^{179}, 851) = 6$$
$$D_B(564) = \text{mod}(564^{179}, 851) = 440$$
$$x = 6 \cdot 851 + 440 = \mathbf{5546}$$

Zaključujemo da je Branko uspio da dešifruje poruku budući da se poklapaju. Sada je potrebno provjeriti digitalni potpis prema formuli $E_A(D_B(z))$
Budući da je $z = 34324 > 851$, morat ćemo razbiti poruku na dijelove:

$$34324 = 40 \cdot 851 + 284$$
$$D_B(40) = \text{mod}(40^{179}, 851) = 543$$
$$D_B(284) = \text{mod}(284^{179}, 851) = 558$$
$$u = 543 \cdot 851 + 558 = \mathbf{462651}$$

Na kraju računamo $E_A\big(D_B(z)\big)$, odnosno $E_A(u) = ?$ Budući da je $462651 > 943$ morat ćemo razbiti poruku na dijelove:

$$462651 = 490 \cdot 943 + 581$$
$$E_A(490) = \text{mod}(490^{557}, 943) = 5$$
$$E_A(581) = \text{mod}(581^{557}, 943) = 831$$
$$E_A(u) = 5 \cdot 943 + 831 = \mathbf{5546}$$

Zaključujemo da je potpis isti te da Branko može biti siguran da mu je Amela poslala poruku.

Zadatak 9

Nakon što su završene prijave semestra, 24 studenata se dolazi naknadno prijaviti. S obzirom da je broj studenata na izbornim predmetima ograničen, ispostavilo se da samo tri izborna predmeta imaju slobodna mjesta. Prvi ima 9, drugi 10 i posljednji 5 slobodnih mjesta. Na koliko različitih načina se ovi studenti mogu rasporediti na predmete?

Rješenje:

Prilikom analize zadatka ne možemo ne primijetiti da je isti moguće uraditi na dva veoma jednostavna načina koja ćemo prezentovati u nastavku. Međutim, prije njihove prezentacije, uradit ćemo postavku koja je ista za oba načina.

Označimo skup od 24 elementa slovom S, a u njemu elemente koji predstavljaju prvi, drugi i treći izborni predmet oznakama P, D, T respektivno.

$$S = \{P, P, P, P, P, P, P, P, P, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{D}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T}\}$$

<u>1. način</u>

Budući da uzimamo sve elemente iz početnog skupa, da poredak elemenata jeste bitan te da se elementi ponavljaju, radi se o permutacijama sa ponavljanjem.

$$\overline{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{24;9,10,5}} = \frac{\mathbf{24!}}{\mathbf{9!10!5!}} = \mathbf{3926434512} \text{ načina}$$

<u>2. način</u>

Veoma je očigledno da se na prvi predmet mogu rasporediti studenti korištenjem kombinacija bez ponavljanja budući da od 24 studenta biramo 9 te da nam poredak tih studenata nije bitan.

$$C_{24}^{9} = \binom{24}{9} = \frac{24!}{9!(24-9)!} = \frac{24!}{9!15!} = \mathbf{1307504} \text{ načina}$$

Sada nam je u skupu učenika ostalo njih 15 od kojih na isti način biramo 10 na drugi predmet.

$$C_{15}^{10} = \binom{15}{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15!}{10!5!} = \mathbf{3003} \text{ načina}$$

Preostalo nam je 5 studenata koje biramo na **1** način (ili $\binom{5}{5}$) na treći predmet.

Koristeći *multiplikativni princip* dobijamo ukupan broj načina, odnosno:

$$1307504 \cdot 3003 \cdot 1 = \mathbf{3926434512} \text{ načina}$$

Zadatak 10

Potrebno je formirati osmočlanu ekipu za međunarodno softversko-hardversko takmičenje. Uvjeti su da ekipa mora imati barem tri studenta sa smjera RI, dok su studenti drugih smjerova poželjni (zbog većeg hardverskog znanja) ali ne i obavezni. Za takmičenje se prijavilo 7 studenata smjera RI i 9 studenata smjera AiE (dok studenti drugih smjerova nisu bili zainteresirani). Odredite na koliko načina je moguće odabrati traženu ekipu. Koliko će iznositi broj mogućih ekipa ukoliko se postavi dodatno ograničenje da ekipa mora imati i barem tri studenta smjera AiE?

Rješenje:

Ovaj zadatak predstavlja klasičan primjer zadataka u kojima je potrebno odrediti sve moguće slučajeve, a zatim primijeniti *aditivni princip*. Prvo ćemo postaviti zadatak tako što ćemo izdvojiti ključne informacije za njegovo rješavanje.

- Potrebno je formirati skup S od 8 elemenata
- **Skup mora imati barem (minimalno) 3 elementa iz skupa RI, a može ih imati i više**
- Skup RI ima 7 elemenata (označit ćemo ih sa R)
- Skup AiE ima 9 elemenata (označit ćemo ih sa A)

Pristupit ćemo izradi prvog dijela zadatka, odnosno određivanju broja načina na koje je moguće odabrati traženu ekipu.

1. slučaj raspodjele

- $S = \{R, R, R, A, A, A, A, A\}$, odnosno 3 od 7 studenta sa RI smjera i 5 od 9 sa AiE smjera

Koristimo kombinacije bez ponavljanja i *multiplikativni princip*.

$$\boldsymbol{C_7^3 \cdot C_9^5} = \binom{7}{3} \cdot \binom{9}{5} = \mathbf{4410} \text{ načina}$$

2. slučaj raspodjele

- $S = \{R, R, R, R, A, A, A, A\}$, odnosno 4 od 7 studenta sa RI smjera i 4 od 9 sa AiE smjera

Koristimo kombinacije bez ponavljanja i *multiplikativni princip*.

$$\boldsymbol{C_7^4 \cdot C_9^4} = \binom{7}{4} \cdot \binom{9}{4} = \mathbf{4410} \text{ načina}$$

3. slučaj raspodjele

- $S = \{R, R, R, R, R, A, A, A\}$, odnosno 5 od 7 studenta sa RI smjera i 3 od 9 sa AiE smjera

Koristimo kombinacije bez ponavljanja i *multiplikativni princip*.

$$\boldsymbol{C_7^5 \cdot C_9^3} = \binom{7}{5} \cdot \binom{9}{3} = \mathbf{1764} \text{ načina}$$

4. slučaj raspodjele

- $S = \{R, R, R, R, R, R, A, A\}$, odnosno 6 od 7 studenta sa RI smjera i 2 od 9 sa AiE smjera

Koristimo kombinacije bez ponavljanja i *multiplikativni princip*.

$$\boldsymbol{C_7^6 \cdot C_9^2} = \binom{7}{6} \cdot \binom{9}{2} = \mathbf{252} \text{ načina}$$

5. slučaj raspodjele

- $S = \{R, R, R, R, R, R, R, A\}$, odnosno 7 od 7 studenta sa RI smjera i 1 od 9 sa AiE smjera

Koristimo kombinacije bez ponavljanja i *multiplikativni princip*.

$$\boldsymbol{C_7^7 \cdot C_9^1} = \binom{7}{7} \cdot \binom{9}{1} = \mathbf{9} \text{ načina}$$

Sada ćemo primijeniti *aditivni princip* i sabrati rezultate prethodnih 5 slučajeva.

$$4410 + 4410 + 1764 + 252 + 9 = \mathbf{10845} \text{ načina}$$

Potrebno je pristupiti i izradi drugog dijela zadatka, odnosno određivanju broja načina na koje je moguće odabrati traženu ekipu uz dodatno ograničenje: *Skup mora imati barem (minimalno) 3 elementa iz skupa AiE, a može ih imati i više*. Veoma je jednostavno primijititi da su uz ovaj dodatni uslov mogući prethodno izračunati slučajevi 1, 2 i 3, pa primjenom *aditivnog principa* dobijamo:

$$4410 + 4410 + 1764 = \mathbf{10584} \text{ načina}$$

Zadatak 11

Ploča veličine 17 x 17 je podijeljena na jednake kvadrate. Dva kvadrata su obojena žutom bojom, a ostali su obojeni zelenom bojom. Dvije kolor šeme ploče su ekvivalentne ako rotiranjem jedne možemo dobiti drugu. Koliko različitih kolor šema ploče se može napraviti?

Rješenje:

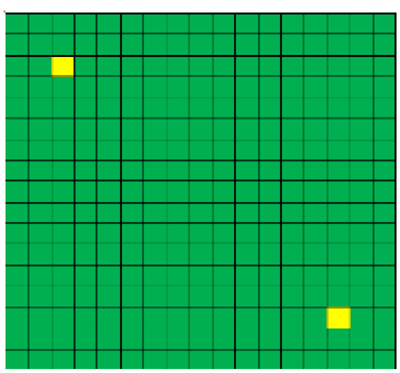
Vrlo je jasno da se ploča sastoji od $17 \cdot 17 = \mathbf{289}$ kvadratića. Također, dva žuta od 289 kvadratića možemo izabrati primjenom kombinacija bez ponavljanja klase 2, gdje je $n = 289$ budući da ne uzimamo sve elemente iz početnog skupa elemenata, kao i da nam nije bitan poredak među izabranim elementima.

$$\boldsymbol{C_{289}^{2}} = \binom{289}{2} = \frac{289!}{2!(289-2)!} = \frac{289 \cdot 288}{2 \cdot 1} = \mathbf{41616}$$

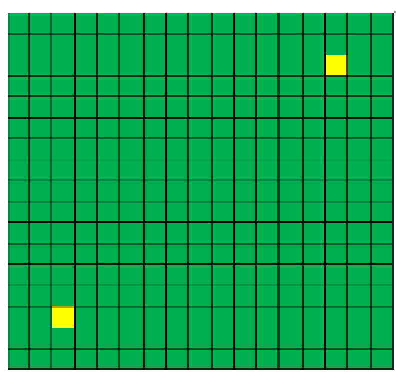
Dakle, imamo ukupno 41616 kolor šema. Jednostavno je zaključiti da postoje dva slučaja, prvi da su žuti kvadratići postavljeni simetrično u odnosu na centar i drugi da žuti kvadratići nisu postavljeni simetrično u odnosu na centar. Prezentovat ćemo slikovito oba slučaja u nastavku.

1. slučaj: Žuti kvadratići su postavljeni simetrično u odnosu na centar

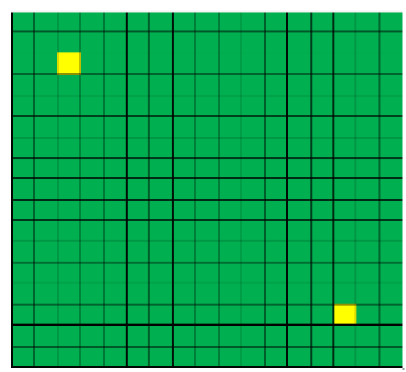
Početna postavka



Prva rotacija



Druga rotacija

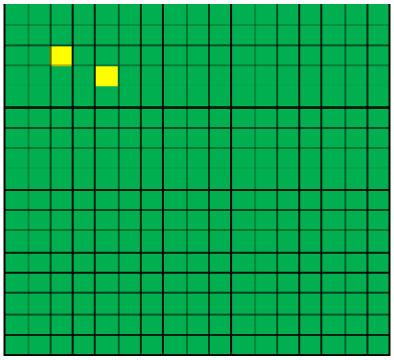


Jednostavno je primijetiti da već prilikom druge rotacije dobijamo ekvivalentnu kolor šemu onoj iz početne postavke. Naime, to znači da će za slučaj kada su žuti kvadratići postavljeni simetrično u odnosu na centar, poslije dvije rotacije doći do istog rasporeda, odnosno da će rotacijom, u slučaju ovakvog rasporeda, iz jedne kolor šeme nastati dvije ekvivalentne kolor šeme. Shodno tome, zaključak o broju šema sa simetričnim žutim kvadratićima se sam nameće:

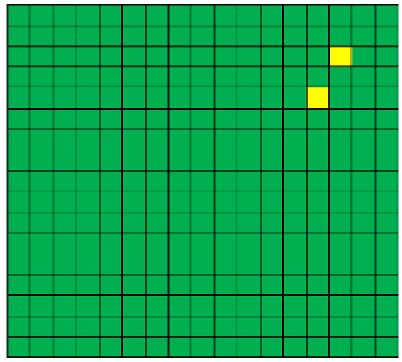
$$\frac{17 \cdot 17 - 1}{2} = \frac{288}{2} = \mathbf{144}$$

2. slučaj: Žuti kvadratići nisu postavljeni simetrično u odnosu na centar

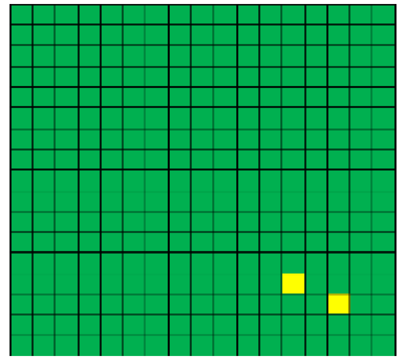
Početna postavka



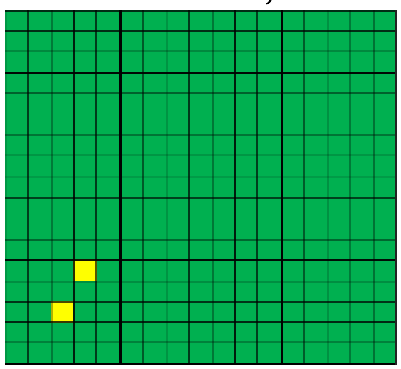
Prva rotacija



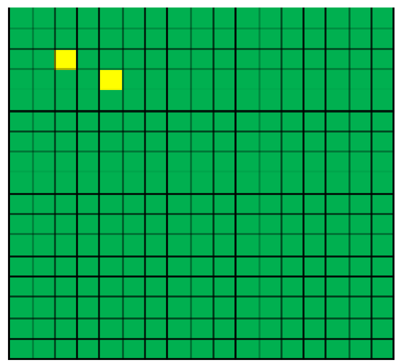
Druga rotacija



Treća rotacija



Četvrta rotacija



Primijetimo da prilikom četvrte rotacije dobijamo ekvivalentnu kolor šemu onoj iz početne postavke. Dakle, iz jedne kolor šeme, kada žuti kvadratići nisu postavljeni simetrično u odnosu na centar, nastaju četiri ekvivalente kolor šeme.
Budući da smo na samome početku rekli da imamo ukupno 41616 kolor šema, kao da smo izračunali da je broj šema sa simetričnim žutim kvadratićima 144, očigledan je način računanja broja šema koje nemaju simetrične žute kvadratiće:

$$41616 - 144 = \mathbf{41472}$$

Analizom onoga što se uradilo, te na osnovu činjenica da rotacijom kolor šeme sa dva simetrična žuta kvadratića (u odnosu na centar šeme) dobijamo dvije ekvivalentne šeme, te da rotacijom kolor šeme sa dva žuta kvadratića koji nisu simetrični (u odnosu na centar) dobijamo četiri ekvivalentne šeme, broj različitih kolor šema dobijamo na sljedeći način:

$$\frac{41472}{4} + \frac{144}{2} = \mathbf{10440}$$

Zadatak 12

Na stolu se nalazi određena količina papirića, pri čemu se na svakom od papirića nalazi po jedno slovo. Na 4 papirića se nalazi slovo I, na 3 papirića se nalazi slovo T, na 4 papirića slovo N i na 2 papirića slovo W. Odredite koliko se različitih četveroslovnih riječi može napisati slažući uzete papiriće jedan do drugog (nebitno je imaju li te riječi smisla ili ne).

Rješenje:

Prvo što možemo primijetiti jeste da se neće uzeti svi papirići, kao i da je poredak među izabranim elementima bitan budući da drugačiji sastav istih slova daje drugu riječ. Kako se slova mogu ponavljati, tako se ovdje radi o varijacijama sa ponavljanjem klase 4 (ovaj podatak smo dobili na osnovu informacije da treba napisati četveroslovne riječi) od 4 elementa iz skupa $S = \{I, T, N, W\}$ koji predstavlja četiri ponuđena slova. Prvo ćemo zapisati ograničenja broja elemenata, odnosno slova koja su nam na rapolaganju.

I – 4 elementa (slova/papirića)
T – 3 elementa (slova/papirića)
N – 4 elementa (slova/papirića)
W – 2 elementa (slova/papirića)

Dakle, potrebno je izračunati:

$$\boldsymbol{\overline{P}^{4}_{4;4,3,4,2}}$$

Ovo je pogodno riješiti uz pomoć eksponencijalne funkcije izvodnice, pri čemu tražimo koeficijent λ_k koji stoji uz član t^k njenog razvoja, jer znamo da je $\boldsymbol{\overline{P}^{k}_{n;S_1,S_2,\ldots,S_n} = k!\,\lambda_k}$. Dakle, koristit ćemo sljedeću formulu:

$$\boldsymbol{\psi_{n;\,S_1,S_2,\ldots,S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j\in S_i} \frac{t^j}{j!}}$$

Odnosno tražili bismo koeficijent λ_4 uz član t^4. Međutim, ovdje bi ipak jednostavniji put ka rješenju bio onaj formalni gdje za k – permutacije skupa $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_n \cdot a_n)$ vrijedi da njihov broj $\overline{P}^{k}_{n;m_1,m,\ldots,m_n}$ iznosi

$$\boldsymbol{\overline{P}^{k}_{n;m_1,m,\ldots,m_n} = \sum_{\substack{\lambda_1 i_1+\lambda_2 i_2+\cdots+\lambda_s i_s=k\\ M\geq i_1>i_2>\cdots>i_s\geq 1\\ \lambda_1+\ldots+\lambda_p\leq c_{i_p},p=1,\ldots,s}} \binom{c_{i_1}}{\lambda_1}\binom{c_{i_2}-\lambda_1}{\lambda_1}\cdots\binom{c_{i_s}-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\frac{k!}{i_1!^{\lambda_1}i_2!^{\lambda_2}\ldots i_s!^{\lambda_s}}}$$

Sada ćemo prikazati postupak rješavanja ovog zadatka korištenjem prethodne formule.

$$n = 4, k = 4, m_1 = 4, m_2 = 3, m_3 = 4, m_4 = 2$$
$$M = \max\{4, 3, 4, 2\} = 4$$
$$c_1 = 4, c_2 = 4, c_3 = 3, c_4 = 2$$

Sve moguće rastave dobijamo preko $k = \boldsymbol{\lambda_1} i_1 + \boldsymbol{\lambda_2} i_2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda_s} i_s$ odakle imamo:

$$\mathbf{1} \cdot 4, \mathbf{1} \cdot 3 + \mathbf{1} \cdot 1, \mathbf{2} \cdot 2, \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{2} \cdot 1, \mathbf{4} \cdot 1$$

$$\bar{P}^{4}_{4;4,3,4,2} = \binom{c_4}{1}\frac{4!}{4!^1} + \binom{c_3}{1}\binom{c_1 - 1}{1}\frac{4!}{3!^1\,1!^1} + \binom{c_2}{2}\frac{4!}{2!^2} + \binom{c_2}{1}\binom{c_1 - 1}{2}\frac{4!}{2!^1\,1!^2} + \binom{c_1}{4}\frac{4!}{1!^4} =$$
$$= \binom{2}{1}\frac{4!}{4!^1} + \binom{3}{1}\binom{3}{1}\frac{4!}{3!^1\,1!^1} + \binom{4}{2}\frac{4!}{2!^2} + \binom{4}{1}\binom{3}{2}\frac{4!}{2!^1\,1!^2} + \binom{4}{4}\frac{4!}{1!^4} =$$
$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 12 + 1 \cdot 24 = 2 + 36 + 36 + 144 + 24 = \mathbf{242}$$

Zadatak 13

Odredite koliko se različitih paketa koji sadrže 5 voćki može napraviti ukoliko nam je raspolaganju 5 krušaka, 4 breskve, 2 smokve, 2 kajsije i 1 naranča (pri čemu se pretpostavlja da ne pravimo razliku između primjeraka iste voćke).

Rješenje:

$S = \{kruška, breskva, smokva, kajsija, naranča)$ je skup od pet vrsta voćki. Budući da trebamo formirati pakete od po 5 voćki, da se voćke smiju ponavljati, kao i da nije bitan poredak odabira voćki (elemenata skupa), zaključujemo da se radi o kombinacijama sa ponavljanjem klase 5 skupa od 5 elemenata. Budući da nam je na raspolaganju 5 krušaka, 4 breskve, 2 smokve, 2 kajsije i 1 naranča, potrebno je odrediti sljedeće:

$$\boldsymbol{\overline{C}^{5}_{5;5,4,2,2,1}}$$

Za rješavanje nam je najpogodnije koristiti funkciju izvodnice.

$$\boldsymbol{\varphi_{n;\, m_1, m_2, \ldots, m_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in S_i}^{m_i} t^j}$$

Sada ćemo razviti oblik funkcije izvodnice, a za rješenje uzeti koeficijent λ_5 koji predstavlja ono što stoji uz t^5.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5)(1 + t + t^2 + t^3 + t^4)(1 + t + t^2)^2(1 + t) = \\ &= (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 5t^5 + \ldots)(1 + 3t + 5t^2 + 5t^3 + 3t^4 + t^5) = \\ &= 1 + 5t + 14t^2 + 28t^3 + 45t^4 + \boldsymbol{62}t^5 + \ldots \end{aligned}$$

Dakle, možemo napraviti **62** različita paketa.

Zadatak 14

Odredite na koliko načina se može rasporediti 31 identičnih kuglica u 6 različitih kutija, ali tako da u svakoj kutiji bude najviše 6 kuglica.

Rješenje:

Odmah na početku primijetimo tri važne i ključne činjenice za rješavanje ovog zadatka.

1) Kuglice se ne razlikuju
2) Kutije se razlikuju
3) Broj kuglica po kutijama ograničen je na najviše 6

Očigledno je da je riječ o kombinacijama s ponavljanjem klase 31 skupa od 6 kutija uz dodatno ograničenje da se svaka kuglica (element) javlja najviše 6 puta. Dakle, potrebno je izračunati:

$$\boldsymbol{\overline{C}^{31}_{6;\{0,\dots,6\},\{0,\dots,6\},\{0,\dots,6\},\{0,\dots,6\},\{0,\dots,6\},\{0,\dots,6\}}}$$

Za rješavanje nam je najpogodnije koristiti funkciju izvodnice.

$$\boldsymbol{\varphi_{n;\,s_1,s_2,\dots,s_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in S_i} t^j}$$

Sada ćemo razviti oblik funkcije izvodnice, a za rješenje uzeti koeficijent λ_{31} koji predstavlja ono što stoji uz t^{31}.

$$\varphi(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)^6$$

Suma $1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6$ se može izraziti u kompaktnom obliku kao konačni geometrijski red $\boldsymbol{\frac{1-t^7}{1-t}}$, pa je $\varphi(t)$ predstavljena sljedećim izrazom

$$\left(\frac{1-t^7}{1-t}\right)^6 = (1-t^7)^6(1-t)^{-6} = \left(\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}(-t^7)^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-6}{i}(-t)^i\right) =$$

$$= \left(\binom{6}{0} - \binom{6}{1}t^7 + \binom{6}{2}t^{14} - \binom{6}{3}t^{21} + \binom{6}{4}t^{28} + \dots\right)\left(\binom{-6}{0} - \binom{-6}{1}t + \binom{-6}{2}t^2 - \binom{-6}{3}t^3 + \dots\right)$$

Koeficijent uz t^{31} računamo na sljedeći način

$$\lambda_{31} = -\binom{6}{0}\binom{-6}{31} - \binom{6}{1}\binom{-6}{24} - \binom{6}{2}\binom{-6}{17} - \binom{6}{3}\binom{-6}{10} - \binom{6}{4}\binom{-6}{3} =$$

$$= -1 \cdot (-376992) - 6 \cdot 118755 - 15 \cdot (-26334) - 20 \cdot 3003 - 15 \cdot (-56) = \mathbf{252}$$

Dakle, kuglice možemo rasporediti na **252** načina.

Zadatak 15

Odredite na koliko načina se 14 različitih predmeta upakovati u 7 identičnih vreća (koje nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogle razlikovati), pri čemu se dopušta i da neke od vreća ostanu prazne.

Rješenje:

Odmah na početku primijetimo tri važne i ključne činjenice za rješavanje ovog zadatka.

1) Predmeti se razlikuju
2) Vreće se ne razlikuju
3) Broj predmeta u vrećama nije ograničen

Na osnovu navedenog, zaključujemo da se problem svodi na problem prebrojavanja na koliko se načina skup od *n* predmeta može razbiti na *k* disjunktnih podskupova, ali koji više nisu nužno neprazni. S obzirom da oni nemaju nikakav identitet, prazne podskupove (vreće) možemo prosto isključiti iz razmatranja, nakon čega se problem svodi na prebrojavanje na koliko se načina skup od *n* predmeta može razbiti na *najviše k* disjunktnih podskupova. Dakle, traženo rješenje se može predstaviti u vidu zbira:

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{k} S_n^i = S_n^0 + S_n^1 + \ldots + S_n^k}$$

Znamo rekurzivnu formulu za *Stirlingove brojeve druge vrste* $\boldsymbol{S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k}$. Međutim eksplicitna formula za računanje S_n^k u vidu konačne sume je praktičnija za računanje od rekurzivne formule. Shodno tome koristit ćemo formulu:

$$\boldsymbol{S_n^k = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\,(k-i)^n}$$

$$\sum_{i=0}^{7} S_{14}^i = S_{14}^0 + S_{14}^1 + S_{14}^2 + S_{14}^3 + S_{14}^4 + S_{14}^5 + S_{14}^6 + S_{14}^7 \tag{1}$$

Iz početnih uslova znamo:

$S_{14}^0 = 0$ jer je $14 > 0$

$S_{14}^1 = 1$ jer je $14 > 0$

Prikazat ćemo način na koji dobijemo S_{14}^2 , dok ćemo za ostale sabirke iz izraza (1) samo napisati konačna rješenje, uz komentar da je način za njihovo dobijanje analogan načinu na koji ćemo dobiti S_{14}^2 .

$$S_{14}^2 = \frac{1}{2!}\left[\binom{2}{0}2^{14} - \binom{2}{1}1^{14} + \binom{2}{2}0^{14}\right] = \frac{1}{2}\cdot[16384 - 2] = 8191$$

$S_{14}^{3} = 788970$
$S_{14}^{4} = 10391745$
$S_{14}^{5} = 40075035$
$S_{14}^{6} = 63436373$
$S_{14}^{7} = 49329280$

$$\sum_{i=0}^{7} S_{14}^{i} = 0 + 1 + 8191 + 788970 + 10391745 + 40075035 + 63436373 + 49329280 =$$

$$= \mathbf{164029595}$$

Zadatak 16

Odredite na koliko se načina može 13 kamenčića razvrstati u 4 gomilica. Pri tome se i kamenčići i gomilice smatraju identičnim (odnosno ni kamenčići ni gomilice nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogli razlikovati).

Rješenje:

Očigledno je da se ovdje radi o slučaju kada se niti kamenčići niti gomilice ne razlikuju međusobno. Također, uslov je i da gomilice ne budu prazne jer kada bi neka od njih, kojim slučajem, bila prazna, tada ta gomilica ne bi ni postojala. Upravo zato, problem se može modelirati kao problem nalaženja broja *particija* broja n na *tačno k sabiraka*, odnosno potrebno je odrediti p_n^k , za čije računanje ćemo koristiti formulu $\boldsymbol{p_n^k = q_n^k - q_n^{k-1}}$, gdje je q_n^k broj particija broja n koje sadrže *najviše k sabiraka*.

n\k	1	2	3	4
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	3	4	5
5	1	3	5	6
6	1	4	7	9
7	1	4	8	11
8	1	5	10	15
9	1	5	12	18
10	1	6	14	23
11	1	6	16	27
12	1	7	19	34
13	1	7	21	39

$$n = 13, k = 4$$
$$p_{13}^4 = q_{13}^4 - q_{13}^3$$

Koristeći rekurzivnu relaciju za računanje q_n^k možemo formirati tabelu iz koje očitamo vrijednosti koje su nam potrebne.

$$q_n^k = q_n^{k-1} + q_{n-k}^k$$

Očitavanjem vrijednosti iz tabele imamo:

$$q_{13}^4 = 39$$
$$q_{13}^3 = 21$$

$$p_{13}^4 = 39 - 21$$
$$p_{13}^4 = \mathbf{18}$$

Dakle, 13 kamenčića možemo razvrstati u 4 gomilice na 18 načina.

Zadatak 17

Odredite na koliko načina se broj 16 može rastaviti na sabirke koji su prirodni brojevi, pri čemu njihov poredak nije bitan, ali pod dodatnim uvjetom da se sabirak 3 smije pojaviti najviše 3 puta, dok se sabirak 4 smije pojaviti samo neparan broj puta.

Rješenje:

Iz skupa kojeg čini 16 brojeva ne uzimamo sve brojeve koji čine sabirke, poredak uzetih brojeva nije bitan, te se sabirci mogu ponavljati. Međutim, postoje i određena dodatna ograničenja, a to su da se sabirak 3 smije pojaviti najviše 3 puta, dok se sabirak 4 smije pojaviti samo neparan broj puta. Očigledno je da trebamo odrediti vrijednost kombinacija sa ponavljanjem što je najjednostavnije učiniti primjenom funkcije izvodnice.

$$\boldsymbol{\varphi_{n;\,S_1,S_2,\dots,S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j\in S_i} t^j}$$

$$n = 16$$

Skupovi $S_1, S_2, \dots, S_{16}$ predstavljaju mogućnosti broja ponavljanja sabiraka brojeva koji su jednaki indeksu svakog od skupa.

$S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 16\}$	$S_9 = \{0, 1\}$
$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$S_{10} = \{0, 1\}$
$S_3 = \{0, 1, 2, 3\}$	$S_{11} = \{0, 1\}$
$S_4 = \{1, 3\}$	$S_{12} = \{0, 1\}$
$S_5 = \{0, 1, 2, 3\}$	$S_{13} = \{0, 1\}$
$S_6 = \{0, 1, 2\}$	$S_{14} = \{0, 1\}$
$S_7 = \{0, 1, 2\}$	$S_{15} = \{0, 1\}$
$S_8 = \{0, 1, 2\}$	$S_{16} = \{0, 1\}$

Tražimo koeficijent λ_{16} uz t^{16}

$$\varphi(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{11} + t^{12} + t^{13} + t^{14} + t^{15} + t^{16})(1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + t^{10} + t^{12} + t^{14} + t^{16})(1 + t^3 + t^6 + t^9)(t^4 + t^{12})(1 + t^5 + t^{10} + t^{15})(1 + t^6 + t^{12})(1 + t^7 + t^{14})(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (1 + t + 2\,t^2 + 2\,t^3 + 3\,t^4 + 3\,t^5 + 4\,t^6 + 4\,t^7 + 5\,t^8 + 5\,t^9 + 6\,t^{10} + 6\,t^{11} + 7\,t^{12} + 7\,t^{13} + 8\,t^{14} + 8\,t^{15} + 9\,t^{16} \dots)(1 + t^3 + t^6 + t^9)(t^4 + t^{12})(1 + t^5 + t^{10} + t^{15})(1 + t^6 + t^{12})(1 + t^7 + t^{14})(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + 7t^6 + 8t^7 + 10t^8 + 12t^9 + 14t^{10} + 16t^{11} + 18t^{12} + 20t^{13} + 22t^{14} + 24t^{15} + 26t^{16} \dots)(t^4 + t^{12})(1 + t^5 + t^{10} + t^{15})(1 + t^6 + t^{12})(1 + t^7 + t^{14})(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 5t^9 + 7t^{10} + 8t^{11} + 11t^{12} + 13t^{13} + 16t^{14} + 19t^{15} + 22t^{16} \dots)(1 + t^5 + t^{10} + t^{15})(1 + t^6 + t^{12})(1 + t^7 + t^{14})(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 8t^{10} + 10t^{11} + 14t^{12} + 17t^{13} + 22t^{14} + 27t^{15} + 32t^{16} \dots)(1 + t^6 + t^{12})(1 + t^7 + t^{14})(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 11t^{11} + 16t^{12} + 20t^{13} + 26t^{14} + 33t^{15} + 41t^{16} \dots)(1 + t^7 + t^{14})(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 12t^{11} + 17t^{12} + 22t^{13} + 29t^{14} + 37t^{15} + 47t^{16} \dots)(1 + t^8 + t^{16})(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 12t^{11} + 18t^{12} + 23t^{13} + 31t^{14} + 40t^{15} + 51t^{16} \dots)(1 + t^9)(1 + t^{10})(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 12t^{11} + 18t^{12} + 24t^{13} + 33t^{14} + 43t^{15} + 56t^{16} \dots)(1 + t^{11})(1 + t^{12})(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 12t^{11} + 18t^{12} + 24t^{13} + 33t^{14} + 44t^{15} + 58t^{16} \dots)(1 + t^{13})(1 + t^{14})(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = (t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 12t^{11} + 18t^{12} + 24t^{13} + 33t^{14} + 44t^{15} + 58t^{16} \dots)(1 + t^{15})(1 + t^{16})$$

$$\varphi(t) = t^4 + t^5 + 2t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 6t^9 + 9t^{10} + 12t^{11} + 18t^{12} + 24t^{13} + 33t^{14} + 44t^{15} + \mathbf{58}\,t^{16} \dots$$

Broj načina na koje se broj 16 može rastaviti na sabirke koji su prirodni brojevi, pri čemu njihov poredak nije bitan, ali pod dodatnim uvjetom da se sabirak 3 smije pojaviti najviše 3 puta, dok se sabirak 4 smije pojaviti samo neparan broj puta je **58**.

Zadatak 18

Ana i Boris parkiraju auta na praznom parkiralištu koje se sastoji od 24 mjesta u jednom redu. Vjerovatnoća parkiranja na mjesta je jednaka. Koja je vjerovatnoća da su parkirali auta tako da se između auta nalazi najviše jedno prazno mjesto za parkiranje?

Rješenje:

Možemo razmotriti broj načina odabira dva parking mjesta od 24 ponuđenih na koje mogu da se parkiraju automobili. Budući da je poredak bitan, ukupan **broj mogućih načina** da se dva automobila parkiraju u red od 24 mjesta dobijamo primjenom varijacija bez ponavljanja klase 2 od 24 elementa.

$$\boldsymbol{P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$P_{24}^2 = \frac{24!}{22!} = 24 \cdot 23 = \mathbf{552}$$

Sada možemo proanalizirati slučajeve parkiranja. Naime, ukoliko se jedan od dva automobila parkira na početak, odnosno kraj reda, tada se drugi automobil može parkirati na dva načina i to da se parkira odmah pored prvog automobila, ili da jedno mjesto između njih ostane prazno. Druga mogućnost parkiranja bi se desila kada bi se prvi automobil parkirao na drugo od početka, odnosno predzadnje mjesto u redu. U toj situaciji drugi automobil ima tri načina da se parkira, na početak, odnosno kraj reda, pored prvog automobila prema unutrašnjosti reda, te na drugom po redu mjestu prema unutrašnjosti reda od prvog automobila. Treća varijanta bi bila kada bi se prvi automobil parkirao negdje prema sredini reda, odnosno tako da je udaljen od početka, odnosno kraja reda, minimalno dva parking mjesta. Tada će se drugi automobil moći parkirati na četiri načina. Na osnovu izvedene analize, možemo odrediti **broj povoljnih načina**.

$$(2 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (24 - 4) \cdot 4 = \mathbf{90}$$

Konačno, vjerovatnoća da su Ana i Boris parkirali auta tako da se između auta nalazi najviše jedno prazno mjesto za parkiranje, računa se kao količnik povoljnih i mogućih događaja.

$$p = \frac{90}{552} = \mathbf{0.163} \cdot 100\% \approx \mathbf{16.3}\%$$

Zadatak 19

U nekoj kutiji nalazi se 100 kuglica, od kojih je 14 kuglica crne boje, dok su ostale kuglice bijele. Ukoliko nasumice izaberemo 8 kuglica iz kutije, nađite vjerovatnoću da će

a. sve izabrane kuglice biti bijele;
b. tačno jedna izabrana kuglica biti crna;
c. barem jedna izabrana kuglica biti crna;
d. tačno dvije izabrane kuglice biti crne;
e. barem dvije izabrane kuglice biti crne;
f. najviše dvije izabrane kuglice biti crne;
g. najviše dvije izabrane kuglice biti bijele;
h. sve izabrane kuglice biti crne.

Rješenje:

a. **Broj mogućih događaja** računamo na sljedeći način. Budući da od 100 kuglica (14 crnih i 86 bijelih) biramo njih 8, da poredak nije bitan, te da nema ponavljanja, koristit ćemo kombinacije bez ponavljanja.

$$\boldsymbol{C_n^k} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

$$C_{100}^8 = \binom{100}{8} = \frac{\mathbf{100}!}{\mathbf{8}! \cdot \mathbf{92}!}$$

Broj povoljnih događaja zavisi od postavke upita, a to je da će sve izabrane kuglice biti bijele. Kako znamo da bijelih kuglica ima 86, tako ćemo na analogan način prethodnom primijeniti formulu za kombinacije bez ponavljanja.

$$C_{86}^8 = \binom{86}{8} = \frac{\mathbf{86}!}{\mathbf{8}! \cdot \mathbf{78}!}$$

Konačno, vjerovatnoća da će sve izabrane kuglice biti bijele, računa se kao količnik povoljnih i mogućih događaja, odnosno:

$$p = \frac{\frac{86!}{8! \cdot 78!}}{\frac{100!}{8! \cdot 92!}} = \frac{86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdot 79}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93} = \mathbf{0.2851} \cdot 100\% \approx \mathbf{28.51}\%$$

b. Kako je **broj mogućih događaja** isti kao i pod a, odmah ćemo preći na pronalazak **broja povoljnih događaja.** Budući da imamo 14 kuglica crne boje od kojih biramo jednu kuglicu, to možemo učiniti na C_{14}^1 načina, dok ćemo preostalih sedam kuglica uzeti iz skupa od 86 bijelih kuglica na C_{86}^7 . Nakon toga primijenimo *multiplikativni princip* da izračunamo broj povoljnih događaja.

$$C_{14}^{1} \cdot C_{86}^{7} = \binom{14}{1}\binom{86}{7} = \mathbf{14} \cdot \frac{\mathbf{86}!}{\mathbf{7}!\,\mathbf{79}!}$$

Konačno, vjerovatnoća da će tačno jedna izabrana kuglica biti crna, računa se kao količnik povoljnih i mogućih događaja, odnosno:

$$p = \frac{14 \cdot \frac{86!}{7!\,79!}}{\frac{100!}{8! \cdot 92!}} = \frac{\frac{14 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80}{7!}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93}{8 \cdot 7!}} =$$

$$= \frac{14 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdot 8}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93} = \mathbf{0.4042} \cdot 100\% \approx \mathbf{40.42}\%$$

c. Slučaj vjerovatnoće da je barem jedna izabrana kuglica crna najjednostavnije je rješavati ako posmatramo njegov komplementaran događaj koji kaže da nijedna izabrana kuglica ne smije biti crna. **Broj mogućih događaja** je isti kao i pod a, a **broj povoljnih događaja** je $C_{14}^{0} \cdot C_{86}^{8}$, pa je vjerovatnoća komplementarnog događaja ekvivalentna vjerovatnoći da su sve izabrane kuglice bijele (koju smo izračunali pod a), odnosno $\mathbf{0.2851}$. Sada je jednostavno odrediti vjerovatnoću da će barem jedna izabrana kuglica biti crna.

$$p = 1 - 0.2851 = \mathbf{0.7149} \approx \mathbf{71.49}\%$$

d. Vjerovatnoću da će tačno dvije izabrane kuglice biti crne dobijamo na sljedeći način.

$$p = \frac{C_{14}^{2} \cdot C_{86}^{6}}{C_{100}^{8}} = \frac{\binom{14}{2}\binom{86}{6}}{\binom{100}{8}} = \mathbf{0.2299} \approx \mathbf{22.99}\%$$

e. Vjerovatnoća da će barem dvije izabrane kuglice biti crne može se izračunati slično kao pod c, i to na način da od 1 (odnosno 100% vjerovatnoće) oduzmemo vjerovatnoću da se crna kuglica neće pojaviti nijednom (sve izabrane kuglice će biti bijele, izračunato pod a) i vjerovatnoću da će se crna kuglica pojaviti tačno jednom (izračunato pod b).

$$p = 1 - 0.2851 - 0.4042 = \mathbf{0.3107} \approx \mathbf{31.07}\%$$

f. Vjerovatnoća da će najviše dvije izabrane kuglice biti crne jednaka je sumi vjerovatnoće da se crna kuglica neće pojaviti nijednom (sve izabrane kuglice će biti bijele, izračunato pod a), da će se crna kuglica pojaviti tačno jednom (izračunato pod b) i vjerovatnoće da će se crna kuglica pojaviti tačno dvaput prilikom odabira (izračunato pod d).

$$p = 0.2851 + 0.4042 + 0.2299 = \mathbf{0.9192} \approx \mathbf{91.92}\%$$

g. i h. Vjerovatnoća da će najviše dvije izabrane kuglice biti bijele jednaka je sumi vjerovatnoće da se bijela kuglica neće pojaviti nijednom (sve izabrane kuglice će biti crne, izračunat ćemo odmah time i vjerovatnoću pod h jer nam je njena vrijednost ovdje potrebna), da će se bijela kuglica pojaviti tačno jednom i vjerovatnoće da će se bijela kuglica pojaviti tačno dvaput prilikom odabira.

- Vjerovatnoća da se bijela kuglica neće pojaviti nijednom (sve izabrane kuglice će biti crne). Primijetimo da će dobivena vjerovatnoća biti izuzetno mala.

$$p_1 = \frac{C_{14}^8}{C_{100}^8} = \frac{\binom{14}{8}}{\binom{100}{8}} = \mathbf{1.6138 \cdot 10^{-8}} \approx \mathbf{1.6138 \cdot 10^{-6}}\% \qquad \text{(h.)}$$

- Vjerovatnoća da će se bijela kuglica pojaviti tačno jednom.

$$p_2 = \frac{C_{86}^1 C_{14}^7}{C_{100}^8} = \frac{\binom{\mathbf{86}}{\mathbf{1}}\binom{\mathbf{14}}{\mathbf{7}}}{\binom{\mathbf{100}}{\mathbf{8}}}$$

- Vjerovatnoća da će se bijela kuglica pojaviti tačno dvaput.

$$p_3 = \frac{C_{86}^2 C_{14}^6}{C_{100}^8} = \frac{\binom{\mathbf{86}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}}{\binom{\mathbf{100}}{\mathbf{8}}}$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 \approx \mathbf{0.00006058} \cdot 100\% \approx \mathbf{0.006058}\%$$

Zadatak 20

Neka je dat pravičan novčić, tj. novčić kod kojeg je jednaka vjerovatnoća pojave glave ili pisma prilikom bacanja. Ako bacimo takav novčić 40 puta, očekujemo da će otprilike 20 puta pasti glava i isto toliko puta pismo. Međutim, to naravno ne znači da će sigurno biti tačno 20 pojava glave ili pisma (štaviše, vjerovatnoća da se tačno to desi je prilično mala). Odredite:

a. Vjerovatnoću da će se zaista pojaviti 20 puta glava i 20 puta pismo;
b. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 18 a manje od 22 puta;
c. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 14 a manje od 26 puta.
d. Vjerovatnoću da se glava neće pojaviti dva puta zaredom.

Rješenje:

a. Nakon što bacimo novčić 40 puta, broj mogućih kombinacija 2 ponuđena ishoda računamo primjenom kombinacija bez ponavljanja klase 20, gdje je $n = 40$, odnosno:

$$C_{40}^{20} = \binom{40}{20} = \mathbf{137846528820}$$

Sada možemo izračunati vjerovatnoću tako što ukupan broj kombinacija pomnožimo sa vjerovatnoćom svakog ishoda $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$$p = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx \mathbf{0.125371} \approx \mathbf{12.54}\%$$

b. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 18 a manje od 22 puta možemo računati primjenom sljedeće formule

$$\boldsymbol{p = \sum_{i=19}^{21} C_{40}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{40-i}}$$

$$p = C_{40}^{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{21} + C_{40}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + C_{40}^{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \binom{40}{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \binom{40}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \binom{40}{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} + \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} + \binom{40}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \left(\frac{1}{2}\right)^{40}\left(\binom{40}{19} + \binom{40}{20} + \binom{40}{21}\right) = \mathbf{0.3642} \approx \mathbf{36.42}\%$$

c. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 14 a manje od 26 puta možemo računati primjenom sljedeće formule, uz napomenu da smo formulu pojednostavili.

$$\boldsymbol{p = \sum_{i=15}^{25} C_{40}^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{40}}$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{40} \left(\binom{40}{15} + \binom{40}{16} + \binom{40}{17} + \binom{40}{18} + \binom{40}{19} + \binom{40}{20} + \binom{40}{21} + \binom{40}{22} + \binom{40}{23} + \binom{40}{24} + \binom{40}{25}\right) = \mathbf{0.9193 \approx 91.93}\%$$

d. Vjerovatnoću da se glava neće pojaviti dva puta zaredom računamo primjenom formule za *Fibonnacijeve brojeve*, odnosno primjenom rekurzivne formule $\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$. Razlog primjene ove formule se ogleda u sljedećem objašnjenju. Naime, ako prvo bacanje rezultira pismom, a drugo glavom, uz pretpostavku da je x_n vjerovatnoća koju trebamo izračunati, svako naredno bacanje novčića se može nastaviti bilo kojim ishodom traženih bacanja x_{n-2}. Navedene dvije mogućnosti se međusobno isključuju, pa primjenom *aditivnog principa* dobijamo odgovarajuću formulu ekvivalentnu formuli za *n-ti Fibonnacijev broj*, pri čemu mi za *n* uzimamo 40+2, odnosno broj 42 budući da su u datoj formuli početne vrijednosti pomjerene za dva mjesta prema naprijed. Budući da smo zaključili o kakvim se brojevima radi, možemo primijeniti sljedeći oblik za dobivanje *Fibonnacijevog broja*.

$$\boldsymbol{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$F_{42} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{42} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{42}\right] = \mathbf{267914296}$$

Tražena vjerovatnoća se dobije na sljedeći način

$$p = F_{42} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \mathbf{0.0002437 \approx 0.02437}\%$$

Zadatak 21

Odredite vjerovatnoću da će u skupini od 9 nasumično izvučenih karata iz dobro izmješanog špila od 52 karte dvije karte biti sa slikom i pet karata crvene boje (herc ili karo).

Rješenje:

Univerza svih karata ima $n = 52\ i\ m = 9$, te je možemo podijeliti na

klasu sa crnom slikom	$n_1 = 6$	$m_1 = 0\ ili\ m_1 = 1\ ili\ m_1 = 2$
klasu sa crvenom slikom	$n_2 = 6$	$m_2 = 2\ ili\ m_2 = 1\ ili\ m_2 = 0$
klasu crvenih karata koje nisu slike	$n_3 = 20$	$m_3 = 3\ ili\ m_3 = 4\ ili\ m_3 = 5$
klasu crnih karata koje nisu slike	$n_4 = 20$	$m_4 = 4\ ili\ m_4 = 3\ ili\ m_4 = 2$

Sada ćemo prikazati način na koji smo dobili vrijednosti m_i

$$m_1 + m_2 = 2$$
$$m_2 + m_3 = 5$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + m_3 = 9$$

Rješavanjem sistema možemo sve promjenjive izraziti preko m_2 , a kasnije uz poštivanje uslova da m_2 može uzeti vrijednosti od 0 do 2, dobijemo vrijednosti iz tabele iznad.

$$m_1 = 2 - m_2$$
$$m_2$$
$$m_3 = 5 - m_2$$
$$m_4 = 2 + m_2$$

Za računanje vjerovatnoće koristit ćemo formulu za vjerovatnoću izvlačenja uzoraka u slučaju kada ponavljanje elemenata nije dopušteno

$$\boldsymbol{p = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}}$$

$$p = \frac{C_6^0 C_6^2 C_{20}^3 C_{20}^4 + C_6^1 C_6^1 C_{20}^4 C_{20}^3 + C_6^2 C_6^0 C_{20}^5 C_{20}^2}{C_{52}^9} = \frac{\binom{6}{0}\binom{6}{2}\binom{20}{3}\binom{20}{4} + \binom{6}{1}\binom{6}{1}\binom{20}{4}\binom{20}{3} + \binom{6}{2}\binom{6}{0}\binom{20}{5}\binom{20}{2}}{\binom{52}{9}} =$$

$$\mathbf{0.0886 \approx 8.86\%}$$

Zadatak 22

Profesor Greškić često griješi u naučnim činjenicama i na pitanja studenata odgovara netačno s vjerovatnoćom 0.25, neovisno od pitanja. Na svakom predavanju profesora Greškića pitaju ili 1 ili 2 pitanja, pri čemu imamo jednaku vjerovatnoću pojave 1 ili 2 pitanja.

a. Koja je vjerovatnoća da će profesor Greškić odgovoriti netačno na sva pitanja?
b. Koja je vjerovatnoća da su postavljena dva pitanja, ako je profesor Greškić odgovorio na sva pitanja netačno?

Rješenje:

Prije početka izrade slučajeva pod a i pod b, potrebno je napisati poznate podatke.
A – „Profesor je dao netačan odgovor na postavljeno pitanje“, $p(A) = 0.25 = 25\%$
B – „Na predavanju je profesoru postavljeno jedno pitanje“, $p(B) = 0.5 = 50\%$
C – „Na predavanju su profesoru postavljena dva pitanja“, $p(C) = 0.5 = 50\%$
Vjerovatnoća da profesor nije tačno odgovorio na jedno pitanje $p(A/B) = 0.25$
Vjerovatnoća da profesor nije tačno odgovorio na dva pitanja $p(A/C) = 0.25 \cdot 0.25 = 0.0625$

a.
Vjerovatnoća da će profesor Greškić odgovoriti netačno na sva pitanja $p(D)$ jednaka je vjerovatnoći da će profesor dati netačan odgovor na jedno postavljeno pitanje ili vjerovatnoći da će profesor dati netačan odgovor na dva postavljena pitanja. Dakle, totalna vjerovatnoća je data kao:

$$p(D) = p(A/B)p(B) + p(A/C)p(C)$$
$$p(D) = 0.25 \cdot 0.5 + 0.0625 \cdot 0.5 = \mathbf{0.15625} \approx \mathbf{15.63}\%$$

b.
Vjerovatnoća da su postavljena dva pitanja, ako je profesor Greškić odgovorio na sva pitanja netačno može se izračunati primjenom *Bayesove teoreme.*

$$p(C/D) = \frac{p(C)p(D/C)}{p(D)} = \frac{p(C)p(A/C)}{p(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.0625}{0.15625} = \mathbf{0.2} = \mathbf{20}\%$$

Zadatak 23

Muzičari Aria i Bolero su jedine osobe koje su se prijavile na takmičenje za novi jingle. Svaki takmičar može priložiti samo jedan jingle. Sudac Libretto proglašava pobjednika čim dobije dovoljno besmislen jingle, što se uopšte ne mora desiti. Aria piše besmislene jingle-ove brzo, ali loše. Vjerovatnoća da će prva predati je 0.74. Ako Bolero nije već pobijedio, Aria će biti proglašena pobjednikom sa vjerovatnoćom 0.25. Bolero sporo piše, ali je talentovan za ovo. Ako Aria nije pobijedila do vremena Bolerovog slanja jingla, Bolero će pobijediti s vjerovatnoćom 0.51.

a. Kolika je vjerovatnoća da niko neće pobijediti?
b. Kolika je vjerovatnoća da će Aria pobijediti?
c. Ako je Aria pobijedila, koja je vjerovatnoća da je Bolero prvi poslao jingle?
d. Koja je vjerovatnoća da će prvi poslani jingle biti pobjednički?

Rješenje:

Prije početka izrade slučajeva, potrebno je napisati poznate podatke.
A – „Aria će prva predati jingle“, $p(A) = 0.74 = 74\%$
B – „Bolero će prvi predati jingle“, $p(B) = 1 - 0.74 = 0.26 = 26\%$
C – „Aria će pobijediti, ako Bolero nije već pobijedio“, $p(C) = 0.25 = 25\%$
D – „Bolero će pobijediti ako Arija nije već pobijedila“, $p(D) = 0.51 = 51\%$

a. Vjerovatnoću da niko neće pobijediti možemo odrediti tako da prvo nađemo komplementarne događaje događaja C i D, a nakon toga njihove vjerovatnoće pomnožimo, zbog osobine nezavisnosti među njima.

$$p(C) = 0.25 \Longrightarrow p(\bar{C}) = 0.75$$

$$p(D) = 0.51 \Longrightarrow p(\bar{D}) = 0.49$$

$$p(\bar{C}\bar{D}) = p(\bar{C}) \cdot p(\bar{D}) = 0.75 \cdot 0.49 = 0.3675 = \mathbf{36.75}\%$$

b. Vjerovatnoća da će Aria pobijediti se računa prema sljedećim dvjema situacijama. Prva moguća situacija nastupa ukoliko Aria prva preda svoj jingle. U tom slučaju Aria je predala prva i pobijedila. Druga situacija bi bila kada bi Aria predala druga svoj jingle. Tada imamo slučaj da je Aria predala druga, da Bolero nije već pobijedio i da je Aria pobijedila.

$$p(E) = p(A)p(C) + p(B)p(\bar{D})p(C) = 0.74 \cdot 0.25 + 0.26 \cdot 0.49 \cdot 0.25 \approx 0.2169 = \mathbf{21.69}\%$$

c. Vjerovatnoća da je Bolero prvi poslao jingle ako je Aria pobijedila se svodi na računanje uvjetne vjerovatnoće.

$$p(B/E) = \frac{p(B)p(\bar{D})p(C)}{p(E)} = \frac{0.26 \cdot 0.49 \cdot 0.25}{0.2169} \approx 0.1468 = \mathbf{14.68}\%$$

d. Vjerovatnoća da će prvi poslani jingle biti pobjednički može se posmatrati prema sljedećim dvjema situacijama. Prva bi situacija bi bila da Aria prva preda svoj jingle i pobijedi, dok bi druga situacija bila da Bolero prvi preda svoj jingle i pobijedi.

$$p(F) = p(AC) + p(BD) = p(A)p(C) + p(B)p(D) = 0.74 \cdot 0.25 + 0.26 \cdot 0.51 = 0.3176 = \mathbf{31.76}\%$$

Zadatak 24

Prije nego ode na posao, Viktor provjeri vremensku prognozu, kako bi odlučio da li da nosi kišobran ili ne. Ako prognoza kaže da će padati kiša, vjerovatnoća da će ona zaista padati iznosi 83%. Ako prognoza kaže da kiše neće biti, vjerovatnoća da će ona ipak padati iznosi 12%. Za vrijeme jeseni i zime, vjerovatnoća pojave prognoze kiše iznosi 85%, a za vrijeme ljeta i proljeća pojava prognoze kiše iznosi 22%.

a. Jedan dan Viktor nije pogledao vremensku prognozu i kiša je padala. Koja je vjerovatnoća da je prognozirana kiša ako se ovo desilo za vrijeme zime? Koja je vjerovatnoća da je prognozirana kiša ako se ovo desilo za vrijeme ljeta?
b. Vjerovatnoća da će Viktor propustiti prognozu iznosi 0.16 bilo koji dan u godini. U slučaju da propusti prognozu on baca pravedni novčić da odluči hoće li nositi kišobran ili ne. Ako prognoza kaže da će padati kiša, on će sigurno ponijeti kišobran, a ako prognoza kaže da neće biti kiše, on neće ponijeti kišobran. Primijećen je Viktor kako nosi kišobran, ali kiša ne pada. Koja je vjerovatnoća da je vidio vremensku prognozu?

Rješenje:

Prije početka izrade slučajeva pod a i pod b, potrebno je napisati poznate podatke.
A – „Padat će kiša"
B – „Padanje kiše je najavljeno"
C – „Padat će kiša, ako se najavi da će padati", $p(C) = p(A/B) = 0.83 = 83\%$
D – „Padat će kiša, ako se najavi da neće padati", $p(D) = p(A/\bar{B}) = 0.12 = 12\%$
E – „Najava da će padati kiša za vrijeme jeseni i zime", $p(E) = 0.85 = 85\%$
F - „Najava da će padati kiša za vrijeme proljeća i ljeta", $p(F) = 0.22 = 22\%$

a.
<u>1. slučaj</u> – Potrebno je odrediti vjerovatnoću da je padanje kiše najavljeno za odgovarajući dan, ako znamo da je to zimski dan te da je zaista padala kiša. Prvo ćemo odrediti vjerovatnoću da je to zimski dan te da je zaista padala kiša $p(G)$

$$p(G) = p(E) \cdot p(C) + p(\bar{E}) \cdot p(D) = 0.85 \cdot 0.83 + (1 - 0.85) \cdot 0.12 = \mathbf{0.7235} = \mathbf{72.35}\%$$

Sada traženu vjerovatnoću tražimo primjenjujući izraz za uvjetnu vjerovatnoću.

$$p(B/G) = \frac{p(C) \cdot p(E)}{p(G)} = \frac{0.83 \cdot 0.85}{0.7235} \approx \mathbf{0.9751} = \mathbf{97.51}\%$$

<u>2. slučaj</u> – Potrebno je odrediti vjerovatnoću da je padanje kiše najavljeno za odgovarajući dan, ako znamo da je to ljetni dan te da je zaista padala kiša. Prvo ćemo odrediti vjerovatnoću da je to ljetni dan te da je zaista padala kiša $p(H)$

$$p(H) = p(F) \cdot p(C) + p(\bar{F}) \cdot p(D) = 0.22 \cdot 0.83 + (1 - 0.22) \cdot 0.12 = \mathbf{0.2762} = \mathbf{27.62}\%$$

Sada traženu vjerovatnoću tražimo primjenjujući izraz za uvjetnu vjerovatnoću.

$$p(B/H) = \frac{p(C) \cdot p(F)}{p(H)} = \frac{0.83 \cdot 0.22}{0.2762} \approx \mathbf{0.6611 = 66.11}\%$$

b.
I – „Viktor je propustio prognozu“, $p(I) = 0.16 = 16\%$
J – „Viktor nije propustio prognozu“, $p(J) = p(\bar{I}) = 1 - 0.16 = 0.84 = 84\%$
K – „Viktor će ponijeti kišobran“
L – „Viktor će ponijeti kišobran, ako je propustio prognozu“, $p(L) = p(K/I) = 0.5 = 50\%$
M – „Viktor neće ponijeti kišobran, ako je propustio prognozu“, $p(M) = p(\bar{K}/I) = 0.5 = 50\%$
N – „Viktor će ponijeti kišobran, ako je čuo prognozu da će pasti kiša“, $p(N) = 1 = 100\%$
O – „Viktor će ponijeti kišobran, ako je čuo prognozu da neće pasti kiša“, $p(N) = 0 = 0\%$

Jako je važno naglasiti da je Viktor viđen kako **nosi kišobran**, kao i to da **kiša nije padala.** Prva stvar koju je potrebno primijetiti jeste da imamo dva slučaja, prvi da Viktor nije pogledao prognozu, da kiša nije padala, a on je ponio kišobran i drugi da je Viktor pogledao prognozu koja je rekla da će kiša padati, da je ponio kišobran, ali da kiša ipak nije pala. Budući da smo rekli da imamo dva slučaja, pristupit ćemo njihovom rješavanju odvojeno.

<u>1. slučaj</u> – Viktor nije pogledao prognozu, kiša nije padala, Viktor je ponio kišobran.
Budući da smo u ovom zadatku posebno posmatrali jesen/zimu, a posebno proljeće/ljeto, onda sada trebamo odrediti vjerovatnoću da kiša nije padala na jesen/zimu, odnosno proljeće/ljeto. Vjerovatnoće da kiša nije padala možemo dobiti na način da podatke koje smo dobili pod a, odnosno vjerovatnoće da je kiša padala iskoristimo kao komplementarne događaje za vjerovatnoće da kiša nije padala. Shodno tome vjerovatnoća da kiša nije padala na jesen/zimu, odnosno proljeće/ljeto jeste $p(P)$, odnosno $p(R)$ respektivno.

$$p(P) = 1 - p(G) = 1 - 0.7235 = \mathbf{0.2765 = 27.65}\%$$
$$p(R) = 1 - p(H) = 1 - 0.2762 = \mathbf{0.7238 = 72.38}\%$$

Jednostavno je primijetiti da su vjerovatnoće da se radi o jeseni/zimi, odnosno proljeću/ljetu jednako moguće (vjerovatne) odnosno iznose po 50% , a budući da je riječ o disjunktnim događajima, vjerovatnoću da kiša neće padati bilo koji dan u godini $p(S)$ dobijamo jednostavno, na sljedeći način:

$$p(S) = p(P) \cdot 0.5 + p(R) \cdot 0.5 = 0.2765 \cdot 0.5 + 0.7238 \cdot 0.5 \approx \mathbf{0.5002 = 50.02}\%$$

Sada je veoma jednostavno odrediti vjerovatnoću za 1. slučaj $p(T)$ budući da su nam poznate vjerovatnoće $p(I)$, $p(S)$ i $p(L)$. Dakle primjenom multiplikativnog pristupa imamo:

$$p(T) = p(I) \cdot p(S) \cdot p(L) = 0.16 \cdot 0.5002 \cdot 0.5 \approx \mathbf{0.04 = 4}\%$$

<u>2. slučaj</u> – Viktor je pogledao prognozu, kiša nije padala (dakle radi se o netačnoj prognozi koja ga je navela da ponese kišibran), Viktor je ponio kišobran.

Analogno prethodnom slučaju računamo vjerovatnoću da je Viktor pogledao prognozu koja je dala netačnu informaciju za jesen/zimu $p(U)$, odnosno proljeće/ljeto $p(V)$.

$$p(U) = \big(1 - p(C)\big) \cdot p(G) = (1 - 0.83) \cdot 0.7235 \approx \mathbf{0.123 = 12.3}\%$$

$$p(V) = \big(1 - p(C)\big) \cdot p(H) = (1 - 0.83) \cdot 0.2762 \approx \mathbf{0.047 = 4.7}\%$$

Veoma jednostavno odredimo vjerovatnoću da kiša nije pala, iako je prognoza bila drugačija.

$$p(Z) = p(U) \cdot 0.5 + p(V) \cdot 0.5 = 0.123 \cdot 0.5 + 0.047 \cdot 0.5 = \mathbf{0.085 = 8.5}\%$$

Dakle, budući da su nam poznate vjerovatnoće $p(J)$ i $p(Z)$, vjerovatnoću $p(X)$ za 2. slučaj računamo na sljedeći način:

$$p(X) = p(J) \cdot p(Z) = 0.84 \cdot 0.085 = \mathbf{0.0714 = 7.14}\%$$

Konačno, vjerovatnoća da je Viktor ponio kišobran, ali da kiša nije padala $p(Y)$ jednaka je zbiru vjerovatnoće da Viktor nije pogledao prognozu, da kiša nije padala i da je Viktor ponio kišobran $p(T)$ i vjerovatnoće da je Viktor pogledao prognozu, da kiša nije padala i da je Viktor ponio kišobran $p(X)$.

$$p(Y) = p(T) + p(X) = 0.04 + 0.0714 \approx \mathbf{0.1114 = 11.14}\%$$

Vjerovatnoća da je Viktor pogledao vremensku prognozu se može izračunati na sljedeći način, budući da nam je poznata vjerovatnoća $p(X)$ i vjerovatnoća $p(Y)$.

$$p(W) = \frac{p(X)}{p(Y)} = \frac{0.0714}{0.1114} \approx \mathbf{0.6409 = 64.09}\%$$

Zadatak 25

Neki eksperiment može dovesti do tri moguća događaja A_1, A_2 ili A_3 iz skupa događaja X. Ova tri događaja imaju respektivno vjerovatnoće 0.2, 0.4 i 0.4. Rezultati tog eksperimenta nisu dostupni direktno, ali se može izvesti testni eksperiment koji daje događaje B_1, B_2, B_3, B_4 ili B_5 iz skupa događaja Y, koji su u određenoj vezi sa događajima A_1, A_2 i A_3. Vjerovatnoće da testni eksperiment rezultira događajem B_j, j = 1, 2, 3, 4, 5 ukoliko je izvorni eksperiment rezultirao događajem A_i, i = 1, 2, 3 date su u sljedećoj tabeli:

$p(B_j /A_i)$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0.5	0.1	0.1	0.2	0.1
A_2	0.2	0.1	0.2	0.4	0.1
A_3	0.35	0.1	0.35	0.05	0.15

Odredite entropije skupa izvornih i testnih događaja H(X) i H(Y), uvjetne entropije H(X/Y) i H(Y/X), zajedničku entropiju H(X,Y) te srednju količinu informacije I(X,Y) koju testni događaji nose o izvornim događajima.

Rješenje:

Iz uslova zadatka možemo zapisati vjerovatnoće $p(A_1) = 0.2$, $p(A_2) = 0.4$ i $p(A_3) = 0.4$. Kako su nam date uvjetne vjerovatnoće u tabeli, onda možemo, primjenom teoreme o totalnoj vjerovatnoći, izračunati vjerovatnoće $p(B_1)$, $p(B_2)$, $p(B_3)$, $p(B_4)$ i $p(B_5)$.

$$p(B_1) = p(A_1)p(B_1/A_1) + p(A_2)p(B_1/A_2) + p(A_3)p(B_1/A_3)$$
$$= 0.2 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35 = \mathbf{0.32}$$
$$p(B_2) = p(A_1)p(B_2/A_1) + p(A_2)p(B_2/A_2) + p(A_3)p(B_2/A_3)$$
$$= 0.2 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.1 = \mathbf{0.1}$$
$$p(B_3) = p(A_1)p(B_3/A_1) + p(A_2)p(B_3/A_2) + p(A_3)p(B_3/A_3)$$
$$= 0.2 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35 = \mathbf{0.24}$$
$$p(B_4) = p(A_1)p(B_4/A_1) + p(A_2)p(B_4/A_2) + p(A_3)p(B_4/A_3)$$
$$= 0.2 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.05 = \mathbf{0.22}$$
$$p(B_5) = p(A_1)p(B_5/A_1) + p(A_2)p(B_5/A_2) + p(A_3)p(B_5/A_3)$$
$$= 0.2 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.15 = \mathbf{0.12}$$

Sada možemo izračunati entropije $H(X)$ i $H(Y)$:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(A_i) log_2 p(A_i) = -0.2 log_2 0.2 - 0.4 log_2 0.4 - 0.4 log_2 0.4 \approx \mathbf{1.5219}$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{5} p(B_i) log_2 p(B_i) = -0.32 log_2 0.32 - 0.1 log_2 0.1 - 0.24 log_2 0.24$$
$$- 0.22 log_2 0.22 - 0.12 log_2 0.12 \approx \mathbf{2.2}$$

Uvjetne entropije je mnogo lakše izračunati ukoliko najprije odredimo zajedničku (združenu) entropiju. Budući da ćemo združenu entropiju izračunati koristeći formulu koja je data u nastavku, najprije je nužno odrediti odgovarajuće $p(A_i B_j), i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5$.

$$H(X,Y) = -\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{3} p(A_i B_j)\, log_2 p(A_i B_j)$$

$$p(A_i B_j) = p(A_i)p(B_j/A_i)$$

$p(A_1B_1) = p(A_1)p(B_1/A_1) = 0.2 \cdot 0.5 = \mathbf{0.1}$ $p(A_2B_1) = p(A_2)p(B_1/A_2) = 0.4 \cdot 0.2 = \mathbf{0.08}$ $p(A_3B_1) = p(A_3)p(B_1/A_3) = 0.4 \cdot 0.35 = \mathbf{0.14}$

$p(A_1B_2) = p(A_1)p(B_2/A_1) = 0.2 \cdot 0.1 = \mathbf{0.02}$ $p(A_2B_2) = p(A_2)p(B_2/A_2) = 0.4 \cdot 0.1 = \mathbf{0.04}$ $p(A_3B_2) = p(A_3)p(B_2/A_3) = 0.4 \cdot 0.1 = \mathbf{0.04}$

$p(A_1B_3) = p(A_1)p(B_3/A_1) = 0.2 \cdot 0.1 = \mathbf{0.02}$ $p(A_2B_3) = p(A_2)p(B_3/A_2) = 0.4 \cdot 0.2 = \mathbf{0.08}$ $p(A_3B_3) = p(A_3)p(B_3/A_3) = 0.4 \cdot 0.35 = \mathbf{0.14}$

$p(A_1B_4) = p(A_1)p(B_4/A_1) = 0.2 \cdot 0.2 = \mathbf{0.04}$ $p(A_2B_4) = p(A_2)p(B_4/A_2) = 0.4 \cdot 0.4 = \mathbf{0.16}$ $p(A_3B_4) = p(A_3)p(B_4/A_3) = 0.4 \cdot 0.05 = \mathbf{0.02}$

$p(A_1B_5) = p(A_1)p(B_5/A_1) = 0.2 \cdot 0.1 = \mathbf{0.02}$ $p(A_2B_5) = p(A_2)p(B_5/A_2) = 0.4 \cdot 0.1 = \mathbf{0.04}$ $p(A_3B_5) = p(A_3)p(B_5/A_3) = 0.4 \cdot 0.15 = \mathbf{0.06}$

Sada možemo formirati tablicu dobivenih vrijednosti:

$p(A_i B_j)$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0.1	0.02	0.02	0.04	0.02
A_2	0.08	0.04	0.08	0.16	0.04
A_3	0.14	0.04	0.14	0.02	0.06

Dobro bi bilo napomenuti da smo i sada mogli izračunati vrijednosti vjerovatnoća $p(B_1)$, $p(B_2)$, $p(B_3)$, $p(B_4)$ i $p(B_5)$ budući da je događaj $A_1 + A_2 + A_2$ siguran.

$$p(B_1) = p\big((A_1 + A_2 + A_2)B_1\big) = p(A_1B_1) + p(A_2B_1) + p(A_3B_1) = \mathbf{0.32}$$

$$p(B_2) = p\big((A_1 + A_2 + A_2)B_2\big) = p(A_1B_2) + p(A_2B_2) + p(A_3B_2) = \mathbf{0.1}$$

$$p(B_3) = p\big((A_1 + A_2 + A_2)B_3\big) = p(A_1B_3) + p(A_2B_3) + p(A_3B_3) = \mathbf{0.24}$$

$$p(B_4) = p\big((A_1 + A_2 + A_2)B_4\big) = p(A_1B_4) + p(A_2B_4) + p(A_3B_4) = \mathbf{0.22}$$

$$p(B_5) = p\big((A_1 + A_2 + A_2)B_5\big) = p(A_1B_5) + p(A_2B_5) + p(A_3B_5) = \mathbf{0.12}$$

Konačno možemo izračunati zajedničku entropiju $H(X,Y)$, uvjetne entropije $H(X/Y)$ i $H(Y/X)$ te srednju količinu informacija $I(X,Y)$ koju testni događaji nose o izvornim događajima.

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) = -0.1log_2 0.1 - 0.02log_2 0.02 - 0.02log_2 0.02 - 0.04log_2 0.04 \\
- 0.02log_2 0.02 - 0.08log_2 0.08 - 0.04log_2 0.04 - 0.08log_2 0.08 \\
- 0.16log_2 0.16 - 0.04log_2 0.04 - 0.14log_2 0.14 - 0.04log_2 0.04 \\
- 0.14log_2 0.14 - 0.02log_2 0.02 - 0.06log_2 0.06 \approx \mathbf{3.5705}
\end{aligned}
$$

$$H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) \approx 3.5705 - 2.2 = \mathbf{1.3705}$$

$$H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) \approx 3.5705 - 1.5219 = \mathbf{2.0486}$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) \approx 1.5219 - 1.3705 = \mathbf{0.1514}$$

Zadatak 26

Na nekom fakultetu, troškove studija za 30% studenata plaća država, dok su ostali studenti samofinansirajući. Među studentima koji se školuju o trošku države, 42% studenata stanuje u studentskom domu, dok među samofinansirajućim studentima 33% studenata stanuje u studentskom domu. Svi studenti koji stanuju u studentskom domu ujedno posjeduju i iskaznicu za subvencionirani javni prevoz, dok među studentima koji ne stanuju u studentskom domu istu iskaznicu posjeduje i 57% studenata čiji studij plaća država te 41% samofinansirajućih studenata.

Odredite koliku prosječnu količinu informacije saznanje o tome posjeduje li student iskaznicu za subvencionirani javni prevoz ili ne nosi o načinu finansiranja njegovog studija (tj. da li ga finansira država ili troškove snosi sam).

Rješenje:

Na osnovu informacija koje su date u zadatku možemo postaviti spisak događaja, što ćemo i učiniti u nastavku.

$X_1 - troškove\ studija\ plaća\ država$
$X_2 - troškove\ studija\ ne\ plaća\ država$
$Y_1 - studenti\ stanuju\ u\ studenstkom\ domu$
$Y_2 - studenti\ ne\ stanuju\ u\ studentskom\ domu$
$Z_1 - studenti\ posjeduju\ iskaznicu\ za\ subvencionirani\ javni\ prevoz$
$Z_2 - studenti\ ne\ posjeduju\ iskaznicu\ za\ subvencionirani\ javni\ prevoz$

Sada, na osnovu prethodnog spiska događaja možemo postaviti i spisak vjerovatnoća koje zaključujemo na osnovu teksta zadatka.

Troškove studija za 30% studenata plaća država	$p(X_1) = 0.3$
Troškove studija za 70% studenata ne plaća država	$p(X_2) = 0.7$
42% studenata stanuje u studentskom domu, troškove plaća država	$p(Y_1/X_1) = 0.42$
58% studenata ne stanuje u studentskom domu, troškove plaća država	$p(Y_2/X_1) = 0.58$
33% studenata stanuje u studentskom domu, troškove ne plaća država	$p(Y_1/X_2) = 0.33$
67% studenata ne stanuje u studentskom domu, troškove ne plaća država	$p(Y_2/X_2) = 0.67$
Studenti koji stanuju u studentskom domu, posjeduju iskaznicu za javni prevoz	$p(Z_1/Y_1) = 1$
Studenti koji stanuju u studentskom domu, ne posjeduju iskaznicu za javni prevoz	$p(Z_2/Y_1) = 0$
Studenti posjeduju iskaznicu za javni prevoz, troškove plaća država	$p(Z_1/X_1) = 0.7506$
Studenti posjeduju iskaznicu za javni prevoz, troškove ne plaća država	$p(Z_1/X_2) = 0.6578$

U nastavku ćemo pojasniti način na koji smo izračunali posljednje dvije vjerovatnoće. Naime, vjerovatnoća $p(Z_1/X_1)$ govori o tome da studenti posjeduju iskaznicu za javni prevoz, uz uslov da troškove plaća država. Treba napomenuti da je za računanje ove vjerovatnoće potrebno primijetiti da nju definišu ili vjerovatnoća da studenti stanuju u studentskom domu, uz uslov da troškove plaća država ili vjerovatnoća da studenti ne stanuju u studentskom domu, uz uslov da troškove plaća država i posjeduju iskaznicu za subvencionirani javni prevoz. Analogno se računa i vjerovatnoća $p(Z_1/X_2)$.

$$p(Z_1/X_1) = p(Y_1/X_1) + p(Y_2/X_1) \cdot 0.57 = 0.42 + 0.58 \cdot 0.57 = \mathbf{0.7506}$$
$$p(Z_1/X_2) = p(Y_1/X_2) + p(Y_2/X_2) \cdot 0.41 = 0.33 + 0.67 \cdot 0.41 = \mathbf{0.6047}$$

Sada je potrebno odrediti prosječnu količinu informacije $I(X,Z)$, pri čemu ćemo prvo primijeniti teoremu o totalnoj vjerovatnoći i izračunati vjerovatnoće $p(Z_1)$ i $p(Z_2)$.

$$p(Z_1) = p(X_1)p(Z_1/X_1) + p(X_2)p(Z_1/X_2) = 0.3 \cdot 0.7506 + 0.7 \cdot 0.6047 = \mathbf{0.64847}$$
$$p(Z_2) = p(X_1)p(Z_2/X_1) + p(X_2)p(Z_2/X_2) = 0.3 \cdot (1 - 0.7506) + 0.7 \cdot (1 - 0.6047) = \mathbf{0.35153}$$

Očigledno je da možemo izračunati entropije $H(X)$ i $H(Z)$ koje će nam biti potrebne za određivanje prosječne količine informacija.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(X_i) log_2 p(X_i) = -0.3 log_2 0.3 - 0.7 log_2 0.7 \approx \mathbf{0.8813}$$
$$H(Z) = -\sum_{i=1}^{2} p(Z_i) log_2 p(Z_i) = -0.64847 log_2 0.64847 - 0.35153 log_2 0.35153 \approx \mathbf{0.9354}$$

Potrebno je najprije odrediti zajedničku (združenu) entropiju. Budući da ćemo združenu entropiju izračunati koristeći formulu koja je data u nastavku, najprije je nužno odrediti odgovarajuće $p\left(A_i B_j\right), i = 1,2; j = 1,2$.

$$H(X,Z) = -\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} p\left(X_i Z_j\right) log_2 p(X_i Z_j)$$
$$p\left(X_i Z_j\right) = p(X_i) p(Z_j/X_i)$$

$$p(X_1 Z_1) = p(X_1)p(Z_1/X_1) = \mathbf{0.22518} \qquad p(X_2 Z_1) = p(X_2)p(Z_1/X_2) = \mathbf{0.42329}$$
$$p(X_1 Z_2) = p(X_1)p(Z_2/X_1) = \mathbf{0.07482} \qquad p(X_2 Z_2) = p(X_2)p(Z_2/X_2) = \mathbf{0.27671}$$

Odnosno, tabelarni prikaz bi bio:

$p(X_i Z_j)$	Z_1	Z_2
X_1	0.22518	0.07482
X_2	0.42329	0.27671

$$H(X,Z) = -0.22518 log_2 0.22518 - 0.07482 log_2 0.07482 - 0.42329 log_2 0.42329 - 0.27671 log_2 0.27671 \approx \mathbf{1.8021}$$
$$I(X,Z) = H(X) + H(Z) - H(X,Z) = 0.8813 + 0.9354 - 1.8021 = \mathbf{0.0146}$$

Zadatak 27

Markovljev izvor informacija prvog reda emitira četiri različite poruke a, b, c i d. Ovisno od toga koja je poruka posljednja emitirana, izvor se nalazi u jednom od 4 moguća stanja S_a, S_b, S_c i S_d koja redom odgovaraju emitiranim porukama a, b, c odnosno d. Vjerovatnoće da će izvor emitirati neku od ove 4 poruke ovisno od stanja u kojem se nalazi date su u sljedećoj tablici:

$p(x_j/S_i)$	a	b	c	d
S_a	0.3	0.1	0.25	0.35
S_b	0.2	0.05	0.5	0.25
S_c	0.15	0.25	0.05	0.55
S_d	0.35	0.05	0.15	0.45

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 4 te vjerovatnoću pojave sekvence abdada.

Rješenje:

Kako je red izvora $r = 1$, izvor možemo modelirati pomoću 4 stanja S_a, S_b, S_c i S_d koja redom odgovaraju prethodno emitiranim porukama a, b, c i d. Stanje S_a može nastati prelazom iz stanja S_a, S_b, S_c ili S_d, svaki put uz emitiranje poruke a. Stoga, možemo primijeniti teoremu o totalnoj vjerovatnoći. Bitno je napomenuti da analognim rezonovanjem za stanje S_b i S_c možemo formirati odgovarajuće jednakosti koje će također biti prezentovane u nastavku. Uz dodatni zapis očigledne jednačine $p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) + p(S_d) = 1$ imat ćemo sistem od četiri linearne jednačine sa četiri nepoznate $p(S_i), i = a, b, c, d$.

$$p(S_a) = p(S_a)p(a/S_a) + p(S_b)p(a/S_b) + p(S_c)p(a/S_c) + p(S_d)p(a/S_d)$$
$$p(S_b) = p(S_a)p(b/S_a) + p(S_b)p(b/S_b) + p(S_c)p(b/S_c) + p(S_d)p(b/S_d)$$
$$p(S_c) = p(S_a)p(c/S_a) + p(S_b)p(c/S_b) + p(S_c)p(c/S_c) + p(S_d)p(c/S_d)$$
$$p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) + p(S_d) = 1$$

$$p(S_a) = 0.3 \cdot p(S_a) + 0.2 \cdot p(S_b) + 0.15 \cdot p(S_c) + 0.35 \cdot p(S_d)$$
$$p(S_b) = 0.1 \cdot p(S_a) + 0.05 \cdot p(S_b) + 0.25 \cdot p(S_c) + 0.05 \cdot p(S_d)$$
$$p(S_c) = 0.25 \cdot p(S_a) + 0.5 \cdot p(S_b) + 0.05 \cdot p(S_c) + 0.15 \cdot p(S_d)$$
$$p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) + p(S_d) = 1$$

$$p(S_a) \approx \mathbf{0.281523}$$
$$p(S_b) \approx \mathbf{0.103024}$$
$$p(S_c) \approx \mathbf{0.194737}$$
$$p(S_d) \approx \mathbf{0.420717}$$

Entropije pojedinih stanja iznose:

$$H(S_a) = -p(a/S_a)log_2 p(a/S_a) - p(b/S_a)log_2 p(b/S_a) - p(c/S_a)log_2 p(c/S_a) - p(d/S_a)log_2 p(d/S_a) = -0.3log_2 0.3 - 0.1log_2 0.1 - 0.25log_2 0.25 - 0.35log_2 0.35 \approx \mathbf{1.8834}$$

$$H(S_b) = -p(a/S_b)log_2 p(a/S_b) - p(b/S_b)log_2 p(b/S_b) - p(c/S_b)log_2 p(c/S_b) - p(d/S_b)log_2 p(d/S_b) = -0.2log_2 0.2 - 0.05log_2 0.05 - 0.5log_2 0.5 - 0.25log_2 0.25 \approx \mathbf{1.6805}$$

$$H(S_c) = -p(a/S_c)log_2 p(a/S_c) - p(b/S_c)log_2 p(b/S_c) - p(c/S_c)log_2 p(c/S_c) - p(d/S_c)log_2 p(d/S_c) = -0.15log_2 0.15 - 0.25log_2 0.25 - 0.05log_2 0.05 - 0.55log_2 0.55 \approx \mathbf{1.601}$$

$$H(S_d) = -p(a/S_d)log_2 p(a/S_d) - p(b/S_d)log_2 p(b/S_d) - p(c/S_d)log_2 p(c/S_d) - p(d/S_d)log_2 p(d/S_d) = -0.35log_2 0.35 - 0.05log_2 0.05 - 0.15log_2 0.15 - 0.45log_2 0.45 \approx \mathbf{1.6751}$$

Za entropiju izvora dobijamo:

$$H(X/X^\infty) = p(S_a)H(S_a) + p(S_b)H(S_b) + p(S_c)H(S_c) + p(S_d)H(S_d) = 0.281523 \cdot 1.8834 + 0.103024 \cdot 1.6805 + 0.194737 \cdot 1.601 + 0.420717 \cdot 1.6751 \approx \mathbf{1.7199}$$

Njegova redudansa je:

$$R = \frac{H_{max} - H(X/X^\infty)}{H_{max}} = \frac{log_2 n - H(X/X^\infty)}{log_2 n} = \frac{log_2 4 - 1.7199}{log_2 4} = \frac{2 - 1.7199}{2} \approx \mathbf{0.14005 = 14.005\%}$$

Da bismo izračunali entropiju sekvenci dužine 4, prvenstveno trebamo izračunati $H(X^1)$, odnosno $H(X)$.

$$H(X) = -\sum_{i=a}^{d} p(S_i)log_2 p(S_i) = -0.281523log_2 0.281823 - 0.103024log_2 0.103024 - 0.194737log_2 0.194737 - 0.420717log_2 0.420717 \approx \mathbf{1.8374}$$

Entropija sekvenci dužine 4 je:

$$H(X^m) = H(X^r) + (m - r)H(X/X^\infty)$$

$$H(X^4) = H(X^1) + 3 \cdot H(X/X^\infty) \approx 1.8374 + 3 \cdot 1.7199 = \mathbf{6.9971}$$

Vjerovatnoću pojave sekvence *abdada* možemo izračunati kao:

$$p(abdada) = p(a)p(b/a)p(d/b)p(a/d)p(d/a)\,p(a/d) = 0.281523 \cdot 0.1 \cdot 0.25 \cdot 0.35 \cdot 0.35 \cdot 0.35 \approx \mathbf{0.0003017575}$$

Zadatak 28

Markovljev izvor informacija drugog reda emitira dvije različite poruke 0 i 1. Ovisno od toga koje su dvije poruke posljednje emitirane, izvor se može naći u jednom od 4 moguća stanja S_{00}, S_{01}, S_{10} odnosno S_{11} (recimo, ukoliko su posljednje dvije emitirane poruke 0 i 1 tim redom, izvor će se nalaziti u stanju S_{01}). Vjerovatnoće emitiranja poruke 0 u svakom od tih stanja iznose:

$p(0/S_{00}) = 0.8$
$p(0/S_{01}) = 0.2$
$p(0/S_{10}) = 0.7$
$p(0/S_{11}) = 0.9$

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 7 te vjerovatnoću pojave sekvence 00000111.

Rješenje:

Kako je red izvora $r = 2$, izvor možemo modelirati pomoću 4 stanja S_{00}, S_{01}, S_{10} i S_{11}. Uz dodatni zapis očigledne jednačine $p(S_{00}) + p(S_{01}) + p(S_{10}) + p(S_{11}) = 1$ sistem jednačina će biti prezentovan u nastavku.

$$p(S_{00}) = p(S_{00})p(0/S_{00}) + p(S_{10})p(0/S_{10})$$
$$p(S_{01}) = p(S_{00})p(1/S_{00}) + p(S_{10})p(1/S_{10})$$
$$p(S_{10}) = p(S_{01})p(0/S_{01}) + p(S_{11})p(0/S_{11})$$
$$p(S_{11}) = p(S_{01})p(1/S_{01}) + p(S_{11})p(1/S_{11})$$
$$p(S_{00}) + p(S_{01}) + p(S_{10}) + p(S_{11}) = 1$$

$$p(S_{00}) = 0.8 \cdot p(S_{00}) + 0.7 \cdot p(S_{10})$$
$$p(S_{01}) = 0.2 \cdot p(S_{00}) + 0.3 \cdot p(S_{10})$$
$$p(S_{10}) = 0.2 \cdot p(S_{01}) + 0.9 \cdot p(S_{11})$$
$$p(S_{11}) = 0.8 \cdot p(S_{01}) + 0.1 \cdot p(S_{11})$$
$$p(S_{00}) + p(S_{01}) + p(S_{10}) + p(S_{11}) = 1$$

$$p(S_{00}) \approx \mathbf{0.547826}$$
$$p(S_{01}) \approx \mathbf{0.156522}$$
$$p(S_{10}) \approx \mathbf{0.156522}$$
$$p(S_{11}) \approx \mathbf{0.13913}$$

Entropije pojedinih stanja iznose:

$$H(S_{00}) = -p(0/S_{00})log_2 p(0/S_{00}) - p(1/S_{00})log_2 p(1/S_{00}) = -0.8log_2 0.8 - 0.2log_2 0.2 \approx \mathbf{0.7219}$$

$$H(S_{01}) = -p(0/S_{01})log_2 p(0/S_{01}) - p(1/S_{01})log_2 p(1/S_{01}) = -0.2log_2 0.2 - 0.8log_2 0.8 \approx \mathbf{0.7219}$$

$$H(S_{10}) = -p(0/S_{10})log_2p(0/S_{10}) - p(1/S_{10})log_2p(1/S_{10}) = -0.7log_2 0.7 - 0.3log_2 0.3 \approx \mathbf{0.8813}$$

$$H(S_{11}) = -p(0/S_{11})log_2p(0/S_{11}) - p(1/S_{11})log_2p(1/S_{11}) = -0.8log_2 0.8 - 0.2log_2 0.2 \approx \mathbf{0.468996}$$

Za entropiju izvora dobijamo:

$$H(X/X^\infty) = p(S_{00})H(S_{00}) + p(S_{01})H(S_{01}) + p(S_{10})H(S_{10}) + p(S_{11})H(S_{11}) = 0.547826 \cdot 0.7219 + 0.156522 \cdot 0.7219 + 0.156522 \cdot 0.8813 + 0.13913 \cdot 0.468996 \approx \mathbf{0.7117}$$

Njegova redudansa je:

$$R = \frac{H_{max} - H(X/X^\infty)}{H_{max}} = \frac{log_2 n - H(X/X^\infty)}{log_2 n} = \frac{log_2 2 - 0.7117}{log_2 2} = \frac{1 - 0.7117}{1} = \mathbf{0.2883} = \mathbf{28.83}\%$$

Da bismo izračunali entropiju sekvenci dužine 7, prvenstveno trebamo izračunati $H(X^2)$.

$$H(X^2) = -\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} p(S_{ij})log_2\, p(S_{ij}) =$$

$$-p(S_{00})log_2p(S_{00}) - p(S_{01})log_2p(S_{01}) - p(S_{10})log_2p(S_{10}) - p(S_{11})log_2p(S_{11}) = -0.547826 \cdot log_2 0.547826 - 0.156522log_2 0.156522 - 0.156522log_2 0.156522 - 0.13913log_2 0.13913 \approx \mathbf{1.7091}$$

Entropija sekvenci dužine 7 je:

$$H(X^m) = H(X^r) + (m - r)H(X/X^\infty)$$

$$H(X^7) = H(X^2) + 5 \cdot H(X/X^\infty) \approx 1.7091 + 5 \cdot 0.7117 = \mathbf{5.2676}$$

Vjerovatnoću pojave sekvence 00000111 možemo izračunati kao:

$$p(00000111) = p(S_{00})p(0/S_{00})\,p(0/S_{00})\,p(0/S_{00})\,p(1/S_{00})p(1/S_{01})\,p(1/S_{11}) = 0.547826 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.1 \approx \mathbf{0.00448779}$$

Zadatak 29

Ergodični izvor informacija bez memorije emitira 10 poruka A, B, C, D, E, F, G, H, I i J. Proučavanjem sekvence dužine 644 koju je emitirao ovaj izvor, uočena je sljedeća učestalost pojavljivanja pojedinih poruka:

Poruka:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Učestalost:	70	89	73	83	26	27	67	69	96	44

Za ovaj izvor informacija formirajte

a. Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1;
b. Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1;
c. Ternarni Huffmanov kod sa simbolima 0, 1 i 2.

Za sva tri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka FACGIGJCI.

VAŽNA NAPOMENA:
Kodiranje može da ne bude jednoznačno u slučaju kada postoje poruke s istim vjerovatnoćama, ili objedinjene grupe poruka s istim vjerovatnoćama kao druge poruke ili grupe poruka. Da biste kodiranje učinili jednoznačnim i olakšali automatsku evaluaciju, pridržavajte se sljedećih dodatnih pravila:

- Prilikom sortiranja, poruke jednakih vjerovatnoća sortirajte leksikografski (tj. poruke koje dolaze prije po abecedi trebaju biti prije onih koje dolaze kasnije);
- Kod Huffmanovog kodiranja, ukoliko novoformirana grupa nakon objedinjavanja dobije istu vjerovatnoću kao i neke već postojeće grupe ili poruke, novoformiranu grupu treba smjestiti nakon njih (slično kao što je urađeno u Iteraciji 2 i Iteraciji 4 Zadatka 3 s Tutorijala 8).

Rješenje:

Na samome početku potrebno je napraviti listu odgovarajućih vjerovatnoća.

$p(A) = 70/644 \approx \mathbf{0.1087}$ $\quad$ $p(F) = 27/644 \approx \mathbf{0.0419}$
$p(B) = 89/644 \approx \mathbf{0.1382}$ $\quad$ $p(G) = 67/644 \approx \mathbf{0.1040}$
$p(C) = 73/644 \approx \mathbf{0.1134}$ $\quad$ $p(H) = 69/644 \approx \mathbf{0.1071}$
$p(D) = 83/644 \approx \mathbf{0.1289}$ $\quad$ $p(I) = 96/644 \approx \mathbf{0.1491}$
$p(E) = 26/644 \approx \mathbf{0.0404}$ $\quad$ $p(J) = 44/644 \approx \mathbf{0.0683}$

a. Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1 predstavit ćemo tabelom u nastavku uz napomenu da ćemo koristiti učestalost umjesto vjerovatnoće zbog jednostavnosti.

<table>
<tr><td>I</td><td>96</td><td rowspan="4">341/0</td><td rowspan="2">185/00</td><td>96/000</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td>89</td><td>89/001</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td>83</td><td rowspan="2">156/01</td><td>83/010</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>73</td><td>73/011</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td>70</td><td rowspan="6">303/1</td><td rowspan="2">139/10</td><td>70/100</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td>69</td><td>69/101</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>67</td><td rowspan="4">164/11</td><td>67/110</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>J</td><td>44</td><td rowspan="3">97/111</td><td>44/1110</td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>27</td><td rowspan="2">53/1111</td><td>27/11110</td></tr>
<tr><td>E</td><td>26</td><td>26/11111</td></tr>
</table>

Da bismo izračunali protok informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal, potrebno je prethodno izračunati entropiju izvora $H(X/X^{\infty})$ i srednju dužinu kodne riječi n_{sr}.

$$\boldsymbol{H(X/X^{\infty}) = -\sum_{i=1}^{10} p_i log_2 p_i}$$

$$H(X/X^{\infty}) \approx -0.1087log_2 0.1087 - 0.1382log_2 0.1382 - 0.1134log_2 0.1134$$

$$-0.1289log_2 0.1289 - 0.0404log_2 0.0404 - 0.0419log_2 0.0419 - 0.1040log_2 0.1040$$

$$-0.1071log_2 0.1071 - 0.1491log_2 0.1491 - 0.0683log_2 0.0683 \approx \mathbf{3.2171}$$

$$\boldsymbol{n_{sr} = \sum_{i=1}^{10} p_i n_i}$$

$$n_{sr} = 0.1491 \cdot 3 + 0.1382 \cdot 3 + 0.1289 \cdot 3 + 0.1134 \cdot 3 + 0.1087 \cdot 3 + 0.1071 \cdot 3 +$$

$$0.1040 \cdot 3 + 0.0683 \cdot 4 + 0.0419 \cdot 5 + 0.0404 \cdot 5 \approx \mathbf{3.2329}$$

$$\boldsymbol{\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau}}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{3.2171}{3.2329 \cdot \tau} = \frac{0.9951}{\tau}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko $\mathbf{99.51}\%$.

Poruka $FACGIGJCI$ kodira se kao **111101000111100001101110011000**.

b. Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1 predstavit ćemo tabelom u nastavku uz napomenu da ćemo koristiti učestalost umjesto vjerovatnoće zbog jednostavnosti.

<table>
<tr><th colspan="2">Početak</th><th colspan="2">Iteracija 1</th><th colspan="2">Iteracija 2</th><th colspan="2">Iteracija 3</th><th colspan="2">Iteracija 4</th><th colspan="2">Iteracija 5</th><th colspan="2">Iteracija 6</th><th colspan="2">Iteracija 7</th><th colspan="2">Iteracija 8</th><th colspan="2">Kraj</th></tr>
<tr><td>I</td><td>96</td><td>I</td><td>96</td><td rowspan="3">F/00
E/01
J/1</td><td rowspan="3">97</td><td rowspan="2">H/0
G/1</td><td rowspan="2">136</td><td rowspan="2">C/0
A/1</td><td rowspan="2">143</td><td rowspan="2">B/0
D/1</td><td rowspan="2">172</td><td rowspan="4">F/000
E/001
J/01
I/1</td><td rowspan="4">193</td><td rowspan="4">C/00
A/01
H/10
G/11</td><td rowspan="4">279</td><td rowspan="6">F/0000
E/0001
J/001
I/01
B/10
D/11</td><td rowspan="6">365</td><td rowspan="10">F/00000
E/00001
J/0001
I/001
B/010
D/011
C/100
A/101
H/110
G/111</td><td rowspan="10">644</td></tr>
<tr><td>B</td><td>89</td><td>B</td><td>89</td></tr>
<tr><td>D</td><td>83</td><td>D</td><td>83</td><td rowspan="3">F/00
E/01
J/1</td><td rowspan="3">97</td><td rowspan="2">H/0
G/1</td><td rowspan="2">136</td><td rowspan="2">C/0
A/1</td><td rowspan="2">143</td></tr>
<tr><td>C</td><td>73</td><td>C</td><td>73</td><td>I</td><td>96</td></tr>
<tr><td>A</td><td>70</td><td>A</td><td>70</td><td>B</td><td>89</td><td rowspan="3">F/00
E/01
J/1</td><td rowspan="3">97</td><td rowspan="2">H/0
G/1</td><td rowspan="2">136</td><td rowspan="2">B/0
D/1</td><td rowspan="2">172</td><td rowspan="4">F/000
E/00
1
J/01
I/1</td><td rowspan="4">193</td></tr>
<tr><td>H</td><td>69</td><td>H</td><td>69</td><td>D</td><td>83</td><td>I</td><td>96</td></tr>
<tr><td>G</td><td>67</td><td>G</td><td>67</td><td>C</td><td>73</td><td>B</td><td>89</td><td rowspan="3">F/00
E/01
J/1</td><td rowspan="3">97</td><td rowspan="2">C/0
A/1</td><td rowspan="2">143</td><td rowspan="4">C/00
A/01
H/10
G/11</td><td rowspan="4">279</td></tr>
<tr><td>J</td><td>44</td><td rowspan="2">F/0
E/1</td><td rowspan="2">53</td><td>A</td><td>70</td><td>D</td><td>83</td><td>I</td><td>96</td></tr>
<tr><td>F</td><td>27</td><td>H</td><td>69</td><td>C</td><td>73</td><td>B</td><td>89</td><td rowspan="2">H/0
G/1</td><td rowspan="2">136</td><td rowspan="2">B/0
D/1</td><td rowspan="2">172</td></tr>
<tr><td>E</td><td>26</td><td>J</td><td>44</td><td>G</td><td>67</td><td>A</td><td>70</td><td>D</td><td>83</td><td>I</td><td>96</td></tr>
</table>

Da bismo izračunali protok informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal, potrebno je prethodno izračunati entropiju izvora $H(X/X^{\infty})$ i srednju dužinu kodne riječi n_{sr}. Kako smo entropiju izvora $H(X/X^{\infty})$ već izračunali u dijelu pod a, u nastavku ćemo samo izračunati srednju dužinu kodne riječi n_{sr}, a nakon toga protok informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal. Međutim, srednju dužinu kodne riječi n_{sr} također već znamo jer su nam vjerovatnoće ostale iste kao u slučaju pod a, a odgovarajuće n vrijednosti odgovaraju vrijednostima dobivenim pod a u potpunosti. Iz svega navedenog slijedi da je i $\overline{I(X)} = \frac{0.9951}{\tau}$, odnosno da je iskorištenost kanala veze oko $\mathbf{99.51}\%$. Poruka $FACGIGJCI$ kodira se kao **00000101100111001110001100001**.

c. Ternarni Huffmanov kod sa simbolima 0, 1 i 2 predstavit ćemo tabelom u nastavku uz napomenu da ćemo koristiti učestalost umjesto vjerovatnoće zbog jednostavnosti.

<table>
<tr><th colspan="2">Početak</th><th colspan="2">Iteracija 1</th><th colspan="2">Iteracija 2</th><th colspan="2">Iteracija 3</th><th colspan="2">Iteracija 4</th><th colspan="2">Kraj</th></tr>
<tr><td>I</td><td>96</td><td>I</td><td>96</td><td rowspan="4">G/0
F/10
E/11
J/2</td><td rowspan="4">164</td><td rowspan="3">C/0
A/1
H/2</td><td rowspan="3">212</td><td rowspan="3">I/0
B/1
D/2</td><td rowspan="3">268</td><td rowspan="10">I/00
B/01
D/02
C/10
A/11
H/12
G/20
F/210
E/211
J/22</td><td rowspan="10">644</td></tr>
<tr><td>B</td><td>89</td><td>B</td><td>89</td></tr>
<tr><td>D</td><td>83</td><td>D</td><td>83</td></tr>
<tr><td>C</td><td>73</td><td>C</td><td>73</td><td rowspan="4">G/0
F/10
E/11
J/2</td><td rowspan="4">164</td><td rowspan="3">C/0
A/1
H/2</td><td rowspan="3">212</td></tr>
<tr><td>A</td><td>70</td><td>A</td><td>70</td><td>I</td><td>96</td></tr>
<tr><td>H</td><td>69</td><td>H</td><td>69</td><td>B</td><td>89</td></tr>
<tr><td>G</td><td>67</td><td>G</td><td>67</td><td>D</td><td>83</td><td rowspan="4">G/0
F/10
E/11
J/2</td><td rowspan="4">164</td></tr>
<tr><td>J</td><td>44</td><td rowspan="2">F/0
E/1</td><td rowspan="2">53</td><td>C</td><td>73</td><td>I</td><td>96</td></tr>
<tr><td>F</td><td>27</td><td>A</td><td>70</td><td>B</td><td>89</td></tr>
<tr><td>E</td><td>26</td><td>J</td><td>44</td><td>H</td><td>69</td><td>D</td><td>83</td></tr>
</table>

Bitno je napomenuti da je ovdje $m = 3$, a $n = 10$, pa je $m^* = 2 + mod(n-2, m-1)$, odnosno $m^* = 2 + mod(10-2, 3-1) = 2 + mod(8, 2) = 2$, što objašnjava razlog zbog kojeg je

Huffmanov algoritam u prvoj iteraciji uzeo posljednje 2 poruke, dok je u narednim iteracijama vršeno grupisanje 3 posljednje poruke. Da bismo izračunali protok informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal, potrebno je prethodno izračunati entropiju izvora $H(X/X^{\infty})$ i srednju dužinu kodne riječi n_{sr}. Kako smo entropiju izvora $H(X/X^{\infty})$ već izračunali u dijelu pod a, u nastavku ćemo samo izračunati srednju dužinu kodne riječi n_{sr}, a nakon toga protok informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal.

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{10} p_i n_i = 0.1491 \cdot 2 + 0.1382 \cdot 2 + 0.1289 \cdot 2 + 0.1134 \cdot 2 + 0.1087 \cdot 2 +$$

$$0.1071 \cdot 2 + 0.1040 \cdot 2 + 0.0683 \cdot 2 + 0.0419 \cdot 3 + 0.0404 \cdot 3 \approx \mathbf{2.0823}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau} = \frac{3.2171}{2.0823 \cdot \tau} \approx \frac{1.54497}{\tau}$$

Vidimo da smo dobili veću brzinu prenosa informacija nego s binarnim kanalom veze. Međutim, kapacitet ternarnog kanala veze iznosi $C_c = (log_2 3)/\tau \approx 1.5850/\tau$, tako da je iskoristivost kanala veze oko $1.54497/1.5850 \approx 0.9747 = \mathbf{97.47}\%$**.** Dakle, iako je brzina prenosa veća, relativna iskoristivost kanala je manja u ovom slučaju. Poruka $FACGIGJCI$ kodira se kao **2101110200020221000**.

Zadatak 30

Izvor informacija bez memorije emitira 4 poruke A, B, C i D. Vjerovatnoće pojavljivanja ovih poruka iznose:
p(A) = 0.1
p(B) = 0.05
p(C) = 0.15
p(D) = 0.7

Za ovaj izvor informacija formirajte

a. Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1;
b. Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1;
c. Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka;
d. Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka.

Za sva četiri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka AACBBDADABCD.

VAŽNA NAPOMENA:
Vrijedi ista napomena kao u prethodnom zadatku, uz dodatnu primjedbu da prilikom kodiranja parova poruka parove istih vjerovatnoća treba sortirati leksikografski (tj. prvo po prvom, a zatim po drugom znaku).

Rješenje:

a. Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1 predstavit ćemo tabelom u nastavku.

<table>
<tr><td>D</td><td>0.7</td><td>0.7/0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>0.15</td><td rowspan="3">0.3/1</td><td>0.15/10</td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td>0.1</td><td rowspan="2">0.15/11</td><td>0.1/110</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0.05</td><td>0.05/111</td></tr>
</table>

Analogno slučaju pod a iz zadatka broj 5, vršit ćemo računanje protoka informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal, entropije izvora $H(X/X^{\infty})$ i srednje dužine kodne riječi n_{sr}.

$$H(X/X^{\infty}) = -\sum_{i=1}^{4} p_i log_2 p_i = -0.7log_2 0.7 - 0.15log_2 0.15 - 0.1log_2 0.1 - 0.05log_2 0.05$$

$$\approx \mathbf{1.3190}$$

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{4} p_i n_i = 0.7 \cdot 1 + 0.15 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.05 \cdot 3 = \mathbf{1.45}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau} = \frac{1.3190}{1.45 \cdot \tau} \approx \frac{\mathbf{0.9097}}{\tau}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko $\mathbf{90.97}\%$.

Poruka $AACBBDADABCD$ kodira se kao **1101101011111101100110111100**.

b. Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1 predstavit ćemo tabelom u nastavku.

<table>
<tr><th colspan="2">Početak</th><th colspan="2">Itearcija 1</th><th colspan="2">Iteracija 2</th><th>Kraj</th></tr>
<tr><td>D</td><td>0.7</td><td>D</td><td>0.7</td><td>D</td><td>0.7</td><td rowspan="4">D/0
C/10
A/110
B/111</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0.15</td><td>C</td><td>0.15</td><td rowspan="3">C/0
A/10
B/11</td><td rowspan="3">0.3</td></tr>
<tr><td>A</td><td>0.1</td><td rowspan="2">A/0
B/1</td><td rowspan="2">0.15</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0.05</td></tr>
</table>

Analogno slučaju pod b iz zadatka broj 5, vršit ćemo računanje protoka informacija $\overline{I(X)}$ kroz komunikacioni kanal, entropije izvora $H(X/X^{\infty})$ i srednje dužine kodne riječi n_{sr}.

$$H(X/X^{\infty}) = -\sum_{i=1}^{4} p_i log_2 p_i \approx \mathbf{1.3190}$$

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{4} p_i n_i = 0.7 \cdot 1 + 0.15 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.05 \cdot 3 = \mathbf{1.45}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau} = \frac{1.3190}{1.45 \cdot \tau} \approx \frac{\mathbf{0.9097}}{\tau}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko $\mathbf{90.97}\%$.

Poruka $AACBBDADABCD$ kodira se kao **1101101011111101100110111100**.

c. Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1, uz kodiranje parova poruka umjesto individualnih poruka dato je u tabeli u nastavku. Najprije ćemo izračunati odgovarajuće vjerovatnoće.

$p(AA) = \mathbf{0.01}$	$p(BA) = \mathbf{0.005}$	$p(CA) = \mathbf{0.015}$	$p(DA) = \mathbf{0.07}$
$p(AB) = \mathbf{0.005}$	$p(BB) = \mathbf{0.0025}$	$p(CB) = \mathbf{0.0075}$	$p(DB) = \mathbf{0.035}$
$p(AC) = \mathbf{0.015}$	$p(BC) = \mathbf{0.0075}$	$p(CC) = \mathbf{0.0225}$	$p(DC) = \mathbf{0.105}$
$p(AD) = \mathbf{0.07}$	$p(BD) = \mathbf{0.035}$	$p(CD) = \mathbf{0.105}$	$p(DD) = \mathbf{0.49}$

DD	0.49	0.49/0							
CD	0.105	0.51/1	0.28 /10	0.105/100					
DC	0.105			0.175/101	0.105/1010				
AD	0.07				0.07/1011				
DA	0.07		0.23 /11	0.105/110	0.07/1100				
BD	0.035				0.035/1101				
DB	0.035			0.125/111	0.0575 /1110	0.035/11100			
CC	0.0225					0.0225/11101			
AC	0.015				0.0675 /1111	0.03 /11110	0.015/111100		
CA	0.015						0.015/111101		
AA	0.01					0.0375 /11111	0.0175 /111110	0.01/1111100	
BC	0.0075							0.0075/1111101	
CB	0.0075						0.02/111111	0.0125 /1111110	0.0075/11111100
AB	0.005								0.005/11111101
BA	0.005							0.0075 /1111111	0.005/11111110
BB	0.0025								0.0025/11111111

Entropija izvora je ovdje faktički entropija sekvenci dužine 2, s obzirom da ne postoji zavisnost unazad. Zbog nepostojanja zavisnosti unazad također vrijedi i $H(X^2) = 2H(X)$, tako da za protok informacija dobijamo:

$$\overline{\boldsymbol{I(X)}} = \frac{\boldsymbol{H(X^2)}}{\boldsymbol{n_{sr}\tau}} = \frac{\boldsymbol{2H(X)}}{\boldsymbol{n_{sr}\tau}}$$

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{i,j}n_{i,j} = 0.49 \cdot 1 + 0.105 \cdot 3 + 0.105 \cdot 4 + 0.07 \cdot 4 + 0.07 \cdot 4 + 0.035 \cdot 4 +$$

$$0.035 \cdot 5 + 0.0225 \cdot 5 + 0.015 \cdot 6 + 0.015 \cdot 6 + 0.01 \cdot 7 + 0.0075 \cdot 7 + 0.0075 \cdot 8 + 0.005 \cdot 8$$

$$+0.005 \cdot 8 + 0.0025 \cdot 8 = \boldsymbol{2.675}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{2 \cdot 1.319}{2.675 \cdot \tau} \approx \frac{\boldsymbol{0.9862}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je porasla na oko **98.62%.**

Poruka $AACBBDADABCD$ kodira se kao **11111001111110011011011111111101100**.

d. Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1, uz kodiranje parova poruka umjesto individualnih poruka dato je u tabeli u nastavku (na sljedećoj stranici) uz napomenu da je tabela podijeljena u tri dijela zbog nedostatka papira.

Početak	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD	0.035
DB	0.035
CC	0.0225
AC	0.015
CA	0.015
AA	0.01
BC	0.0075
CB	0.0075
AB	0.005
BA	0.005
BB	0.0025

Iteracija 1	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD	0.035
DB	0.035
CC	0.0225
AC	0.015
CA	0.015
AA	0.01
BC	0.0075
BA/0 BB/1	0.0075
CB	0.0075
AB	0.005

Iteracija 2	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD	0.035
DB	0.035
CC	0.0225
AC	0.015
CA	0.015
CB/0 AB/1	0.0125
AA	0.01
BC	0.0075
BA/0 BB/1	0.0075

Iteracija 3	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD	0.035
DB	0.035
CC	0.0225
BC/0 BA/10 BB/11	0.015
AC	0.015
CA	0.015
CB/0 AB/1	0.0125
AA	0.01

Iteracija 4	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD	0.035
DB	0.035
CB/00 AB/01 AA/1	0.0225
CC	0.0225
BC/0 BA/10 BB/11	0.015
AC	0.015
CA	0.015

Iteracija 5	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD	0.035
DB	0.035
AC/0 CA/1	0.03
CB/00 AB/01 AA/1	0.0225
CC	0.0225
BC/0 BA/10 BB/11	0.015

Iteracija 6	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
CC/0 BC/10 BA/110 BB/111	0.0375
BD	0.035
DB	0.035
AC/0 CA/1	0.03
CB/00 AB/01 AA/1	0.0225

Iteracija 7	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
AC/00 CA/01 CB/100 AB/101 AA/11	0.0525
CC/0 BC/10 BA/110 BB/111	0.0375
BD	0.035
DB	0.035

Iteracija 8	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AD	0.07
DA	0.07
BD/0 DB/1	0.07
AC/00 CA/01 CB/100 AB/101 AA/11	0.0525
CC/0 BC/10 BA/110 BB/111	0.0375

Iteracija 9	
DD	0.49
CD	0.105
DC	0.105
AC/000 CA/001 CB/0100 AB/0101 AA/011 CC/10 BC/110 BA/1110 BB/1111	0.09
AD	0.07
DA	0.07
BD/0 DB/1	0.07

Iteracija 10	
DD	0.49
DA/0 BD/10 DB/11	0.14
CD	0.105
DC	0.105
AC/000 CA/001 CB/0100 AB/0101 AA/011 CC/10 BC/110 BA/1110 BB/1111	0.09
AD	0.07

Iteracija 11	
DD	0.49
AC/0000 CA/0001 CB/00100 AB/00101 AA/0011 CC/010 BC/0110 BA/01110 BB/01111 AD/1	0.16
DA/0 BD/10 DB/11	0.14
CD	0.105
DC	0.105

Iteracija 12	
DD	0.49
CD/0 DC/1	0.21
AC/0000 CA/0001 CB/00100 AB/00101 AA/0011 CC/010 BC/0110 BA/01110 BB/01111 AD/1	0.16
DA/0 BD/10 DB/11	0.14

<table>
<tr><th colspan="2">Iteracija 13</th><th colspan="2">Iteracija 14</th><th>Kraj</th></tr>
<tr><td>DD</td><td>0.49</td><td rowspan="2">AC/000000
CA/000001
CB/0000100
AB/0000101
AA/000011
CC/00010
BC/000110
BA/0001110
BB/0001111
AD/001
DA/010
BD/0110
DB/0111
CD/10
DC/11</td><td rowspan="2">0.51</td><td rowspan="3">AC/0000000
CA/0000001
CB/00000100
AB/00000101
AA/0000011
CC/000010
BC/0000110
BA/00001110
BB/00001111
AD/0001
DA/0010
BD/00110
DB/00111
CD/010
DC/011
DD/1</td></tr>
<tr><td>AC/00000
CA/00001
CB/000100
AB/000101
AA/00011
CC/0010
BC/00110
BA/001110
BB/001111
AD/01
DA/10
BD/110
DB/111</td><td>0.3</td></tr>
<tr><td>CD/0
DC/1</td><td>0.21</td><td>DD</td><td>0.49</td></tr>
</table>

Analogno postupku objašnjenom u dijelu pod c određujemo protok informacija.

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{i,j} n_{i,j} = 0.49 \cdot 1 + 0.105 \cdot 3 + 0.105 \cdot 3 + 0.07 \cdot 4 + 0.07 \cdot 4 + 0.035 \cdot 5 +$$

$$0.035 \cdot 5 + 0.0225 \cdot 6 + 0.015 \cdot 7 + 0.015 \cdot 7 + 0.01 \cdot 7 + 0.0075 \cdot 7 + 0.0075 \cdot 8 +$$

$$0.005 \cdot 8 + 0.005 \cdot 8 + 0.0025 \cdot 8 = \mathbf{2.6575}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{2 \cdot 1.319}{2.6575 \cdot \tau} \approx \frac{\mathbf{0.9927}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je porasla na oko **99.27%.**

Poruka $AACBBDADABCD$ kodira se kao **00000110000010000110000100000101010**.

Zadatak 31

Markovljev izvor informacija prvog reda emitira tri različite poruke a, b i c. Ovisno od toga koja je poruka posljednja emitirana, izvor se nalazi u jednom od 3 moguća stanja S_a, S_b i S_c koja redom odgovaraju emitiranim porukama a, b odnosno c. Vjerovatnoće da će izvor emitirati neku od ove 3 poruke ovisno od stanja u kojem se nalazi date su u sljedećoj tablici:

$p(x_j/S_i)$	a	b	c
S_a	0.3	0.4	0.3
S_b	0.2	0.4	0.4
S_c	0.3	0.5	0.2

Za ovaj izvor informacija formirajte binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1

a. posmatrajući izvor kao izvor bez memorije;
b. posmatrajući izvor kao izvor bez memorije, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka;
c. koristeći posebno kodiranje za svako stanje;
d. koristeći posebno kodiranje za svako stanje, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka.

Za sva četiri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka acbbacaabacbaa. U posljednja dva slučaja, pretpostavite da izvor započinje rad u stanju S_a.

VAŽNA NAPOMENA: Vrijede iste primjedbe za eventualnu nejednoznačnost kodiranja kao u prethodna dva zadatka.

Rješenje:

Kako je red izvora $r = 1$, izvor možemo modelirati pomoću 3 stanja S_a, S_b i S_c koja redom odgovaraju prethodno emitiranim porukama a, b i c. Stanje S_a može nastati prelazom iz stanja S_a, S_b ili S_c, svaki put uz emitiranje poruke a. Stoga, možemo primijeniti teoremu o totalnoj vjerovatnoći. Bitno je napomenuti da analognim rezonovanjem za stanje S_b možemo formirati odgovarajuću jednakost koja će također biti prezentovana u nastavku. Uz dodatni zapis očigledne jednačine $p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) = 1$ imat ćemo sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate $p(S_i), i = a, b, c$.

$$p(S_a) = p(S_a)p(a/S_a) + p(S_b)p(a/S_b) + p(S_c)p(a/S_c)$$
$$p(S_b) = p(S_a)p(b/S_a) + p(S_b)p(b/S_b) + p(S_c)p(b/S_c)$$
$$p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) = 1$$

$$p(S_a) = 0.3 \cdot p(S_a) + 0.2 \cdot p(S_b) + 0.3 \cdot p(S_c)$$
$$p(S_b) = 0.4 \cdot p(S_a) + 0.4 \cdot p(S_b) + 0.5 \cdot p(S_c)$$
$$p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) = 1$$

$$p(S_a) = \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{109}} \approx \mathbf{0.25688}$$
$$p(S_b) = \frac{\mathbf{47}}{\mathbf{109}} \approx \mathbf{0.43119}$$
$$p(S_c) = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{109}} \approx \mathbf{0.31193}$$

Entropije pojedinih stanja iznose:

$$H(S_a) = -p(a/S_a)log_2p(a/S_a) - p(b/S_a)log_2p(b/S_a) - p(c/S_a)log_2p(c/S_a) =$$
$$-0.3log_2 0.3 - 0.4log_2 0.4 - 0.3log_2 0.3 \approx \mathbf{1.57095}$$
$$H(S_b) = -p(a/S_b)log_2p(a/S_b) - p(b/S_b)log_2p(b/S_b) - p(c/S_b)log_2p(c/S_b) =$$
$$-0.2log_2 0.2 - 0.4log_2 0.4 - 0.4log_2 0.4 \approx \mathbf{1.52193}$$
$$H(S_c) = -p(a/S_c)log_2p(a/S_c) - p(b/S_c)log_2p(b/S_c) - p(c/S_c)log_2p(c/S_c) =$$
$$-0.3log_2 0.3 - 0.5log_2 0.5 - 0.2log_2 0.2 \approx \mathbf{1.48548}$$

Za entropiju izvora dobijamo:

$$H(X/X^\infty) = p(S_a)H(S_a) + p(S_b)H(S_b) + p(S_c)H(S_c) =$$
$$0.25688 \cdot 1.57095 + 0.43119 \cdot 1.52193 + 0.31193 \cdot 1.48548 \approx \mathbf{1.52315}$$

a. U nastavku ćemo formirati binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1 pri čemu posmatramo izvor kao izvor bez memorije. Odgovarajuća tabela je data u nastavku.

b	0.43119	0.43119/0	
c	0.31193	0.56881/1	0.31193/10
a	0.25688		0.25688/11

Analogno postupku objašnjenom u zadatku 6 određujemo protok informacija.

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{3} p_i n_i = 0.25688 \cdot 2 + 0.43119 \cdot 1 + 0.31193 \cdot 2 \approx \mathbf{1.56881}$$

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^\infty)}{n_{sr}\tau} = \frac{1.52315}{1.56881 \cdot \tau} \approx \frac{\mathbf{0.9709}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko $\mathbf{97.09}\%$.

Poruka $acbbacaabacbaa$ kodira se kao $\mathbf{11100011101111011100111 1}$.

b. U nastavku ćemo formirati binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1, pri čemu posmatramo izvor kao izvor bez memorije, ali tako da kodiramo parove poruka umjesto individualnih poruka. Odgovarajuća tabela je data u nastavku. Najprije ćemo izračunati odgovarajuće vjerovatnoće. Treba uzeti u obzir da je $aa \rightarrow S_a S_a$ itd. zbog lakše notacije.

$$p(aa)=\frac{\mathbf{784}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.06599}\quad p(ba)=\frac{\mathbf{1316}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.11077}\quad p(ca)=\frac{\mathbf{952}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.08013}$$
$$p(ab)=\frac{\mathbf{1316}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.11077}\quad p(bb)=\frac{\mathbf{2209}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.18593}\quad p(cb)=\frac{\mathbf{1598}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.13450}$$
$$p(ac)=\frac{\mathbf{952}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.08013}\quad p(bc)=\frac{\mathbf{1598}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.13450}\quad p(cc)=\frac{\mathbf{1156}}{\mathbf{11881}}\approx\mathbf{0.09730}$$

Da bismo dobili na kraju tačniji rezultat, ali i olakšali pisanje Shannon-Fano koda i tabele radit ćemo sa brojnicima vrijednosti vjerovatnoća koje su date iznad, a na kraju pri računanju dodati nazivnike. To je moguće uraditi budući da su svi nazivnici isti.

bb	2209	5405/0	2209/00		
bc	1598		3196/01	1598/010	
cb	1598			1598/011	
ab	1316	6476/1	3788/10	1316/100	
ba	1316			2472/101	1316/1010
cc	1156				1156/1011
ac	952		2688/11	952/110	
ca	952			1736/111	952/1110
aa	784				784/1111

Analogno postupku objašnjenom u zadatku 6 određujemo protok informacija.

$$n_{sr}=\sum_{i=1}^{9}p_i n_i=$$

$$(2209\cdot2+1598\cdot3+1598\cdot3+1316\cdot3+1316\cdot4+1156\cdot4+952\cdot3+952\cdot4+784\cdot4)/11881\approx\mathbf{3.16825}$$

$$\overline{I(X)}=\frac{2\cdot H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau}=\frac{2\cdot1.52315}{3.16825\cdot\tau}\approx\frac{\mathbf{0.9615}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko **96.15**%.

Poruka *acbbacaabacbaa* kodira se kao **11000110111110100111111**.

c. U nastavku ćemo formirati binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1 pri čemu koristimo posebno kodiranje za svako stanje. Odgovarajuće tabele, zajedno sa pratećim postupcima date su u nastavku.

stanje $\boldsymbol{S_a}$

<table>
<tr><td>b</td><td>0.4</td><td>0.4/0</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td>0.3</td><td rowspan="2">0.6/1</td><td>0.3/10</td></tr>
<tr><td>c</td><td>0.3</td><td>0.3/11</td></tr>
</table>

$$n_{sr} = 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.3 \cdot 2 = \mathbf{1.6}$$

stanje $\boldsymbol{S_b}$

<table>
<tr><td>b</td><td>0.4</td><td>0.4/0</td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td>0.4</td><td rowspan="2">0.6/1</td><td>0.4/10</td></tr>
<tr><td>a</td><td>0.2</td><td>0.2/11</td></tr>
</table>

$$n_{sr} = 0.4 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 = \mathbf{1.6}$$

stanje $\boldsymbol{S_c}$

<table>
<tr><td>b</td><td>0.5</td><td>0.5/0</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td>0.3</td><td rowspan="2">0.5/1</td><td>0.3/10</td></tr>
<tr><td>c</td><td>0.2</td><td>0.2/11</td></tr>
</table>

$$n_{sr} = 0.5 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 = \mathbf{1.5}$$

Srednja dužina kodne riječi po svim stanjima može se izračunati kao:

$$n_{sr} = \frac{28}{109} \cdot 1.6 + \frac{47}{109} \cdot 1.6 + \frac{34}{109} \cdot 1.5 \approx \mathbf{1.56881}$$

Konačno, protok informacija kroz komunikacioni kanal računamo u nastavku:

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau} = \frac{1.52315}{1.56881 \cdot \tau} \approx \frac{\mathbf{0.9709}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko $\mathbf{97.09}\%$.

Poruka *acbbacaabacbaa* kodira se kao **1011001111101001111101110**.

d. U nastavku ćemo formirati binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1, pri čemu koristimo posebno kodiranje za svako stanje, ali tako da kodiramo parove poruka umjesto individualnih poruka. Odgovarajuće tabele za svako stanje su date u nastavku. Prije formiranja tabela, napisat ćemo odgovarajuće vjerovatnoće parova za svako stanje posebno.

stanje S_a

$p(aa) = \mathbf{0.09}$ $\quad p(ba) = \mathbf{0.12}$ $\quad p(ca) = \mathbf{0.09}$
$p(ab) = \mathbf{0.12}$ $\quad p(bb) = \mathbf{0.16}$ $\quad p(cb) = \mathbf{0.12}$
$p(ac) = \mathbf{0.09}$ $\quad p(bc) = \mathbf{0.12}$ $\quad p(cc) = \mathbf{0.09}$

bb	0.16	0.52/0	0.28/00	0.16/000	
ab	0.12			0.12/001	
ba	0.12		0.24/01	0.12/010	
bc	0.12			0.12/011	
cb	0.12	0.48/1	0.21/10	0.12/100	
aa	0.09			0.09/101	
ac	0.09		0.27/11	0.18/110	0.09/1100
ca	0.09				0.09/1101
cc	0.09			0.09/111	

$$n_{sr} = (0.16 + 0.12 + 0.12 + 0.12 + 0.12 + 0.09 + 0.09) \cdot 3 + (0.09 + 0.09) \cdot 4 = \mathbf{3.18}$$

stanje S_b

$p(aa) = \mathbf{0.04}$ $\quad p(ba) = \mathbf{0.08}$ $\quad p(ca) = \mathbf{0.08}$
$p(ab) = \mathbf{0.08}$ $\quad p(bb) = \mathbf{0.16}$ $\quad p(cb) = \mathbf{0.16}$
$p(ac) = \mathbf{0.08}$ $\quad p(bc) = \mathbf{0.16}$ $\quad p(cc) = \mathbf{0.16}$

bb	0.16	0.48/0	0.32/00	0.16/000	
bc	0.16			0.16/001	
cb	0.16		0.16/01		
cc	0.16	0.52/1	0.24/10	0.16/100	
ab	0.08			0.08/101	
ac	0.08		0.28/11	0.16/110	0.08/1100
ba	0.08				0.08/1101
ca	0.08			0.12/111	0.08/1110
aa	0.04				0.04/1111

$$n_{sr} = 0.16 \cdot 2 + (0.16 + 0.16 + 0.16 + 0.08) \cdot 3 + (0.08 + 0.08 + 0.08 + 0.04) \cdot 4 = \mathbf{3.12}$$

stanje S_c

$p(aa) = \mathbf{0.09}$ $\quad p(ba) = \mathbf{0.15}$ $\quad p(ca) = \mathbf{0.06}$
$p(ab) = \mathbf{0.15}$ $\quad p(bb) = \mathbf{0.25}$ $\quad p(cb) = \mathbf{0.10}$

$p(ac) = \mathbf{0.06}$ $\quad$ $p(bc) = \mathbf{0.10}$ $\quad$ $p(cc) = \mathbf{0.04}$

bb	0.25	0.55/0	0.25/00		
ab	0.15		0.3/01	0.15/010	
ba	0.15			0.15/011	
bc	0.10	0.45/1	0.2/10	0.1/100	
cb	0.10			0.1/101	
aa	0.09		0.25/11	0.15/110	0.09/1100
ac	0.06				0.06/1101
ca	0.06			0.1/111	0.06/1110
cc	0.04				0.04/1111

$$n_{sr} = 0.25 \cdot 2 + (0.15 + 0.15 + 0.1 + 0.1) \cdot 3 + (0.09 + 0.06 + 0.06 + 0.04) \cdot 4 = \mathbf{3}$$

Srednja dužina kodne riječi po svim stanjima može se izračunati kao:

$$n_{sr} = \frac{28}{109} \cdot 3.18 + \frac{47}{109} \cdot 3.12 + \frac{34}{109} \cdot 3 \approx \mathbf{3.09798}$$

Konačno, protok informacija kroz komunikacioni kanal računamo u nastavku:

$$\overline{I(X)} = \frac{2 \cdot H(X/X^{\infty})}{n_{sr}\tau} = \frac{2 \cdot 1.52315}{3.09798 \cdot \tau} \approx \frac{\mathbf{0.9833}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Dakle, iskorištenost kanala veze je oko $\mathbf{98.33}$%.

Poruka *acbbacaabacbaa* kodira se kao **110000110011000101001111**.

Zadatak 32

Neki binarni kanal veze sa šumom prenosi dva simbola 0 i 1, pri čemu su vjerovatnoće greške nule i jedinice 0.25 i 0.15 respektivno. Odredite količinu prenesene informacije kroz ovaj kanal ukoliko vjerovatnoća pojave nule na ulazu u kanal iznosi 0.3, te odredite njegov kapacitet.

Rješenje:

Ulazne simbole možemo označiti sa $y_1 = 0$ i $y_2 = 1$, a izlazne $z_1 = 0$ i $z_2 = 1$. Iz postavke zadatka imamo $p(z_1/y_1) = 0.75$, $p(z_2/y_1) = 0.25$, $p(z_1/y_2) = 0.15$ i $p(z_2/y_2) = 0.85$. Također ne trebamo zaboraviti da je $p(y_1) = 0.3$ i $p(y_2) = 0.7$. Ukoliko primijenimo teoremu o totalnoj vjerovatnoći, za vjerovatnoće simbola na izlazu iz kanala dobijamo sljedeće vrijednosti.

$$p(z_1) = p(y_1) \cdot p(z_1/y_1) + p(y_2) \cdot p(z_1/y_2) = 0.3 \cdot 0.75 + 0.7 \cdot 0.15 = \mathbf{0.33}$$

$$p(z_1) = 1 - 0.33 = \mathbf{0.67}$$

Entropije ulaznih i izlaznih simbola date su u nastavku.

$$H(Y) = -p(y_1)log_2 p(y_1) - p(y_2)log_2 p(y_2) = -0.3log_2 0.3 - 0.7log_2 0.7 \approx \mathbf{0.8813}$$

$$H(Z) = -p(z_1)log_2 p(z_1) - p(z_2)log_2 p(z_2) = -0.33log_2 0.33 - 0.67log_2 0.67 \approx \mathbf{0.9149}$$

Da bismo izračunali uvjetnu entropiju $H(Z/Y)$, koja nam je potrebna za računanje prenesene količine informacija, prvo ćemo odrediti „djelimično“ uvjetne entropije $H(Z/y_1)$ i $H(Z/y_2)$.

$$H(Z/y_1) = -p(z_1/y_1)\, log_2 p(z_1/y_1) - p(z_2/y_1)log_2 p(z_2/y_1) =$$

$$-0.75log_2 0.75 - 0.25log_2 0.25 \approx \mathbf{0.8113}$$

$$H(Z/y_2) = -p(z_1/y_2)log_2 p(z_1/y_2) - p(z_2/y_2)log_2 p(z_2/y_2) =$$

$$-0.15log_2 0.15 - 0.85log_2 0.85 \approx \mathbf{0.6098}$$

Sada možemo izračunati uvjetnu entropiju $H(Z/Y)$:

$$H(Z/Y) = p(y_1)H(Z/y_1) + p(y_2)H(Z/y_2) \approx 0.3 \cdot 0.8113 + 0.7 \cdot 0.6098 \approx \mathbf{0.6703}$$

Prosječnu prenesenu količinu informacija kroz kanal računamo na način prezentovan u nastavku.

$$I(Y,Z) = H(Z) - H(Z/Y) = 0.9149 - 0.6703 \approx \mathbf{0.2446}$$

Kapacitet kanala veze C_C računamo koristeći formulu koja je data u nastavku. Potrebno je napomenuti da su oznake α, β, H_0, H_1 skraćene oznake za $p(z_2/y_1), p(z_1/y_2), H(Z/y_1)$, $H(Z/y_2)$ respektivno, pri čemu je $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

$$\boldsymbol{C_C = max\, \overline{I(Y,Z)} = \frac{1}{\tau}\left[log_2\left(2^{-\frac{H_0}{\gamma}} + 2^{-\frac{H_1}{\gamma}}\right) + \frac{H_0\beta + H_1\alpha}{\gamma}\right]}$$

Dakle, imamo:

$$\alpha = 0.25$$
$$\beta = 0.15$$
$$H_0 = 0.8113$$
$$H_1 = 0.6098$$
$$\gamma = 1 - \alpha - \beta = 1 - 0.25 - 0.15 = 0.6$$

$$C_C = \frac{1}{\tau}\left[log_2\left(2^{-\frac{0.8113}{0.6}} + 2^{-\frac{0.6098}{0.6}}\right) + \frac{0.8113 \cdot 0.15 + 0.6098 \cdot 0.25}{0.6}\right] \approx \frac{\mathbf{0.2824}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Zaključujemo da je kapacitet ovog kanala svega oko $\mathbf{28.24}$%.

Zadatak 33

Izvor informacija bez memorije emitira dvije poruke a i b, pri čemu vjerovatnoća emitiranja poruke a iznosi p(a) = 0.2. Ove poruke se zatim kodiraju, i prenose kroz binarni kanal veze sa šumom koji koristi dva simbola 0 i 1, pri čemu su vjerovatnoće greške nule i jedinice 0.1 i 0.25 respektivno. Odredite količinu prenesene informacije kroz komunikacioni kanal, brzinu prenosa informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze i vjerovatnoću greške u prenosu ukoliko se koristi

a. Prosto kodiranje a → 0 i b → 1 uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji $S_a = \{0\}$ i $S_b = \{1\}$;
b. Zaštitno kodiranje a → 000 i b → 111 uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji $S_a = \{000, 001, 010, 100\}$ i $S_b = \{011, 101, 110, 111\}$.

Rješenje:

Ulazne simbole možemo označiti sa $y_1 = 0$ i $y_2 = 1$, a izlazne $z_1 = 0$ i $z_2 = 1$. Također, poruke koje prima krajnji korisnik označit ćemo sa w_1 i w_2. Napominjemo da postupak nećemo previše detaljno opisivati budući da smo veoma sličan (na pojedinim mjestima isti) postupak već opisali u prethodnim zadacima. U slučaju potrebe, odnosno nečega što ranije nije bilo pojašnjeno, svakako ćemo prezentovati komentare kao što je to i rađeno do sada.

a. U nastavku rješavamo slučaj prostog kodiranja a → 0 i b → 1 uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji $S_a = \{0\}$ i $S_b = \{1\}$. Ono što najprije trebamo uraditi jeste postaviti odgovarajuće vjerovatnoće, a dalji postupak je analogan prethodnom zadatku.

$$p(a) = 0.2$$
$$p(b) = 0.8$$
$$p(w_1/a) = p(z_1/a) = 0.9$$
$$p(w_2/a) = 0.1$$
$$p(w_1/b) = p(z_1/b) = 0.25$$
$$p(w_2/b) = 0.75$$
$$p(w_1) = p(a)p(w_1/a) + p(b)p(w_1/b) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.25 = \mathbf{0.38}$$
$$p(w_2) = 1 - p(w_1) = \mathbf{0.62}$$
$$H(W) = -p(w_1)log_2p(w_1) - p(w_2)log_2p(w_2) = -0.38log_2 0.38 - 0.62log_2 0.62 = \mathbf{0.9580}$$
$$H(W/a) = -p(w_1/a)log_2p(w_1/a) - p(w_2/a)log_2p(w_2/a) = -0.9log_2 0.9 - 0.1log_2 0.1 \approx \mathbf{0.468996}$$
$$H(W/b) = -p(w_1/b)log_2p(w_1/b) - p(w_2/b)log_2p(w_2/b) = -0.25log_2 0.25 - 0.75log_2 0.75 \approx \mathbf{0.811278}$$
$$H(W/X) = p(a)H(W/a) + p(b)H(W/b) \approx 0.2 \cdot 0.468996 + 0.8 \cdot 0.811278 \approx \mathbf{0.742823}$$
$$I(X,W) = H(W) - H(W/X) \approx 0.9580 - 0.742823 = \mathbf{0.215177}$$
$$\overline{I(X,W)} = \frac{H(W) - H(W/X)}{T_{sr}} = \frac{I(X,W)}{n_{sr}\tau} = \frac{0.215177}{\tau}$$

$$\alpha = p(w_2/a) = 0.1$$
$$\beta = p(w_1/b) = 0.25$$
$$H_0 = H(W/a) = 0.468996$$
$$H_1 = H(W/b) = 0.811278$$
$$\gamma = 1 - \alpha - \beta = 1 - 0.1 - 0.25 = 0.65$$

$$C_C = \frac{1}{\tau}\left[log_2\left(2^{-\frac{H_0}{\gamma}} + 2^{-\frac{H_1}{\gamma}}\right) + \frac{H_0\beta + H_1\alpha}{\gamma}\right]$$
$$= \frac{1}{\tau}\left[log_2\left(2^{-\frac{0.468996}{0.65}} + 2^{-\frac{0.811278}{0.65}}\right) + \frac{0.468996 \cdot 0.25 + 0.811278 \cdot 0.1}{0.65}\right] \approx \frac{\mathbf{0.344249}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Sada možemo izračunati iskorištenost kanala veze koji je dat sljedećom relacijom:

$$\frac{0.215177}{0.344249} \approx \mathbf{0.625062 = 62.5062}\%$$

Konačno, možemo izračunati vjerovatnoću greške u prenosu koristeći formulu koja je prezentovana u nastavku.

$$\boldsymbol{p_e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_i)\, p\left(w_j/x_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot p(w_i/x_i)}$$

$$p_e = 1 - (p(a)p(w_1/a) + p(b)p(w_2/b)) = 1 - (0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.75) \approx \mathbf{0.22}$$

b. U nastavku rješavamo slučaj zaštitnog kodiranja a → 000 i b → 111 uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji $S_a = \{000, 001, 010, 100\}$ i $S_b = \{011, 101, 110, 111\}$. Shodno tome, u nastavku je predstavljen način na koji ćemo vršiti notaciju radi rješavanja zadatka.

$$a \rightarrow y_1y_1y_1$$
$$a \rightarrow y_2y_2y_2$$
$$S_a = \{z_1z_1z_1, z_1z_1z_2, z_1z_2z_1, z_2z_1z_1\}$$
$$S_b = \{z_1z_2z_2, z_2z_1z_2, z_2z_2z_1, z_2z_2z_2\}$$
$$p(w_1/a) = p(z_1z_1z_1/a) + p(z_1z_1z_2/a) + p(z_1z_2z_1/a) + p(z_2z_1z_1/a)$$
$$= p(z_1/y_1)^3 + 3 \cdot p(z_1/y_1)^2 p(z_2/y_1) = 0.9^3 + 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = \mathbf{0.972}$$
$$p(w_2/a) = 1 - p(w_1/a) = 1 - 0.972 = \mathbf{0.028}$$
$$p(w_1/b) = p(z_1/y_2)^3 + 3 \cdot p(z_1/y_2)^2 p(z_2/y_2) = 0.25^3 + 3 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75 = \mathbf{0.15625}$$
$$p(w_2/b) = 1 - p(w_1/b) = 1 - 0.15625 = \mathbf{0.84375}$$
$$p(w_1) = p(a)p(w_1/a) + p(b)p(w_1/b) = 0.2 \cdot 0.972 + 0.8 \cdot 0.15625 = \mathbf{0.3194}$$
$$p(w_2) = 1 - p(w_1) = 1 - 0.3194 = \mathbf{0.6806}$$
$$H(W) = -p(w_1)log_2 p(w_1) - p(w_2)log_2 p(w_2) = -0.3194 log_2 0.3194 - 0.6806 log_2 0.6806$$
$$\approx \mathbf{0.9037}$$
$$H(W/a) = -p(w_1/a)log_2 p(w_1/a) - p(w_2/a)log_2 p(w_2/a)$$
$$= -0.972 log_2 0.972 - 0.028 log_2 0.028 \approx \mathbf{0.1843}$$

$$H(W/b) = -p(w_1/b)log_2p(w_1/b) - p(w_2/b)log_2p(w_2/b)$$
$$= -0.15625log_2 0.15625 - 0.84375log_2 0.84375 \approx \mathbf{0.6253}$$
$$H(W/X) = p(a)H(W/a) + p(b)H(W/b) \approx 0.2 \cdot 0.1843 + 0.8 \cdot 0.6253 = \mathbf{0.5371}$$
$$I(X,W) = H(W) - H(W/X) \approx 0.9037 - 0.5371 = \mathbf{0.3666}$$
$$\overline{I(X,W)} = \frac{H(W) - H(W/X)}{T_{sr}} = \frac{I(X,W)}{n_{sr}\tau} = \frac{0.3666}{3\tau} \approx \frac{\mathbf{0.1222}}{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\alpha = p(w_2/a) = 0.028$$
$$\beta = p(w_1/b) = 0.15625$$
$$H_0 = H(W/a) = 0.1843$$
$$H_1 = H(W/b) = 0.6253$$
$$\gamma = 1 - \alpha - \beta = 1 - 0.028 - 0.15625 = 0.81575$$

$$C_C = \frac{1}{\tau}\left[log_2\left(2^{-\frac{H_0}{\gamma}} + 2^{-\frac{H_1}{\gamma}}\right) + \frac{H_0\beta + H_1\alpha}{\gamma}\right]$$
$$= \frac{1}{\tau}\left[log_2\left(2^{-\frac{0.1843}{0.81575}} + 2^{-\frac{0.6253}{0.81575}}\right) + \frac{0.1843 \cdot 0.15625 + 0.6253 \cdot 0.028}{0.81575}\right] \approx \frac{\mathbf{0.5857}}{\boldsymbol{\tau}}$$

Sada možemo izračunati iskorištenost kanala veze koji je dat sljedećom relacijom:

$$\frac{0.1222}{0.5857} \approx \mathbf{0.2086 = 20.86}\%$$

Konačno, možemo izračunati vjerovatnoću greške u prenosu koristeći formulu koja je prezentovana u nastavku.

$$\boldsymbol{p_e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_i)\, p(w_j/x_i) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot p(w_i/x_i)}$$

$$p_e = 1 - (p(a)p(w_1/a) + p(b)p(w_2/b)) = 1 - (0.2 \cdot 0.972 + 0.8 \cdot 0.84375) \approx \mathbf{0.1306}$$

Zadatak 34

Data su tri neusmjerena grafa:

$\mathcal{G}1$ = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8}, {{x1, x2}, {x1, x3}, {x1, x6}, {x1, x7}, {x2, x4}, {x2, x7}, {x3, x6}, {x3, x7}, {x3, x8}, {x4, x6}, {x4, x8}, {x5, x7}, {x5, x8}, {x6, x8}}}
$\mathcal{G}2$ = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8}, {{x1, x3}, {x1, x7}, {x1, x8}, {x2, x4}, {x2, x5}, {x2, x6}, {x2, x8}, {x3, x4}, {x3, x5}, {x3, x7}, {x4, x5}, {x4, x7}, {x5, x8}, {x6, x7}}}
$\mathcal{G}3$ = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8}, {{x1, x4}, {x1, x6}, {x1, x7}, {x1, x8}, {x2, x3}, {x2, x6}, {x2, x7}, {x2, x8}, {x3, x4}, {x3, x5}, {x3, x8}, {x5, x6}, {x5, x7}, {x6, x8}}}

Za ove grafove potrebno je uraditi sljedeće:

a. Predstavite ih pomoću matrica susjedstva i pomoću listi susjedstva.
b. Utvrdite ima li među ovim grafovima nekih koji su međusobno izomorfni. Ukoliko neka dva jesu izomorfna (ako takvih parova ima), prikažite kako glasi izomorfizam između njih. Ukoliko neka dva nisu izomorfna (ako takvih parova ima), argumentirano objasnite zašto nisu.
c. Utvrdite ima li među ovim grafovima planarnih grafova. Za one koji su planarni (ako ih ima), nacrtajte ih tako da im se grane ne presjecaju. Za one koji nisu planarni (ako ih ima), argumentirano objasnite zašto nisu.
d. Pronađite hromatske brojeve za ova tri grafa. Odgovor mora biti argumentiran.

Rješenje:

a. Predstava pomoću matrica susjedstva i pomoću listi susjedstva prikazana je u nastavku.

1° G_1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = (\{x_2, x_3, x_6, x_7\}, \{x_1, x_4, x_7\}, \{x_1, x_6, x_7, x_8\}, \{x_2, x_6, x_8\}, \{x_7, x_8\}, \{x_1, x_3, x_4, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\})$$

2° G_2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = (\{x_3, x_7, x_8\}, \{x_4, x_5, x_6, x_8\}, \{x_1, x_4, x_5, x_7\}, \{x_2, x_3, x_5, x_7\}, \{x_2, x_3, x_4, x_8\},$$
$$\{x_2, x_7\}, \{x_1, x_3, x_4, x_6\}, \{x_1, x_2, x_5\})$$

3° G_3

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = (\{x_4, x_6, x_7, x_8\}, \{x_3, x_6, x_7, x_8\}, \{x_2, x_4, x_5, x_8\}, \{x_1, x_3\}, \{x_3, x_6, x_7\},$$
$$\{x_1, x_2, x_5, x_8\}, \{x_1, x_2, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3, x_6\})$$

b. Utvrđivanje da li su prvi i drugi graf izomorfni ispitat ćemo odmah na početku. Možemo primijetiti da oba grafa imaju 8 čvorova (odnosno jednak broj čvorova), 14 grana (odnosno jednak broj grana), 1 čvor stepena 2, 2 čvora stepena 3 i 5 čvorova stepena 4. Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da su ispunjeni potrebni uslovi izomorfizma prva dva grafa. Sada je nužno ispitati i dovoljni uslov koji će dokazati da su ovi grafovi međusobno izomorfni ukoliko se navođenjem odgovarajuće promjene obilježavanja čvorova jedan graf svodi na drugi. Prije prenumeracije, skup grana prvog grafa je glasio

$$\mathcal{U}_1 = \{\{x_1,\ x_2\}, \{x_1,\ x_3\}, \{x_1,\ x_6\}, \{x_1,\ x_7\}, \{x_2,\ x_4\}, \{x_2,\ x_7\}, \{x_3,\ x_6\},$$
$$\{x_3,\ x_7\}, \{x_3,\ x_8\}, \{x_4,\ x_6\}, \{x_4,\ x_8\}, \{x_5,\ x_7\}, \{x_5,\ x_8\}, \{x_6,\ x_8\}\}$$

dok je skup grana drugog grafa glasio

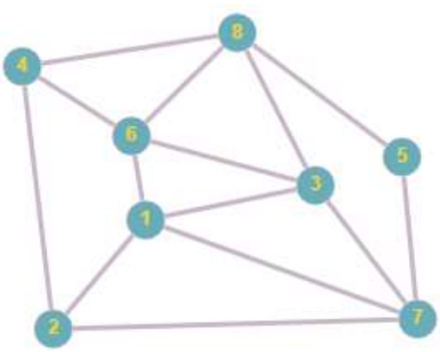
$$\mathcal{U}_2 = \{\{x_1,\ x_3\}, \{x_1,\ x_7\}, \{x_1,\ x_8\}, \{x_2,\ x_4\}, \{x_2,\ x_5\}, \{x_2,\ x_6\}, \{x_2,\ x_8\},$$
$$\{x_3,\ x_4\}, \{x_3,\ x_5\}, \{x_3,\ x_7\}, \{x_4,\ x_5\}, \{x_4,\ x_7\}, \{x_5,\ x_8\}, \{x_6,\ x_7\}\}$$

Prenumeraciju čvorova prvog grafa radimo tako da nakon obavljene prenumeracije skupovi grana oba grafa budu identični. Jedna od mogućnosti je sljedeća:

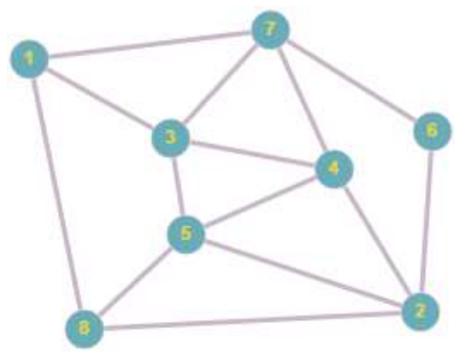
$$x_1 \rightarrow x_5, x_2 \rightarrow x_8, x_3 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_1, x_5 \rightarrow x_6, x_6 \rightarrow x_3, x_7 \rightarrow x_2, x_8 \rightarrow x_7$$

Ovo je svakako pokazano i na slikama koje su date na kraju rješavanja slučaja pod b i na kojim su predstavljeni grafovi 1 i 2, te dokazana izomorfnost istih.

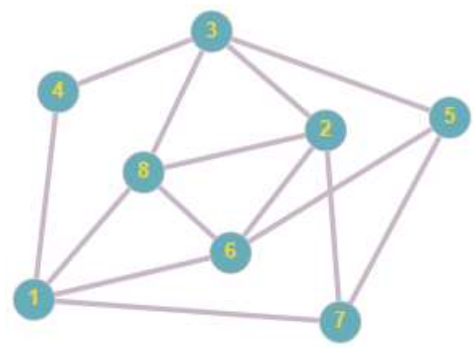
Sada je potrebno izvršiti provjeru da li je i graf 3 izomorfan. Procesu provjere pristupamo tako što provjeravamo da li je graf 3 izomorfan samo sa jednim od grafova 1, odnosno 2, budući da, ukoliko se ispostavi da isti u kombinaciji sa nekim od prva dva grafa nije međusobno izomorfan, onda će se odmah moći izvesti zaključak da nije međusobno izomorfan ni sa onim drugim. Naime, to vrijedi zbog toga što izomorfnost spada u klase ekvivalencije. Mi ćemo u nastavku usporediti grafove 1 i 3. Možemo primijetiti da oba grafa imaju 8 čvorova (odnosno jednak broj čvorova), 14 grana (odnosno jednak broj grana), 1 čvor stepena 2, 2 čvora stepena 3 i 5 čvorova stepena 4. Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da su ispunjeni potrebni uslovi izomorfizma prvog i trećeg grafa. Kada su grafovi izomorfni, oni tada imaju sve iste osobine grafova kao npr. isti broj kontura i istu planarnost. Obratimo li pažnju da broj kontura dužine 4, možemo primijetiti da graf 1 ima 6 kontura dužine 4, dok graf 3 posjeduje 7 kontura dužine 4. Sada zaista možemo reći da grafovi 1 i 3, a samim tim i grafovi 2 i 3 **nisu međusobno izomorfni**. Također, činjenica da je u dijelu pod c ovog zadatka pokazano da graf 3 nije planaran upućuje da isti nije međusobno izomorfan sa grafovima 1 i 2. U nastavku su prikazane tri slike koje prezentuju ova tri grafa.



Graf 1



Graf 2

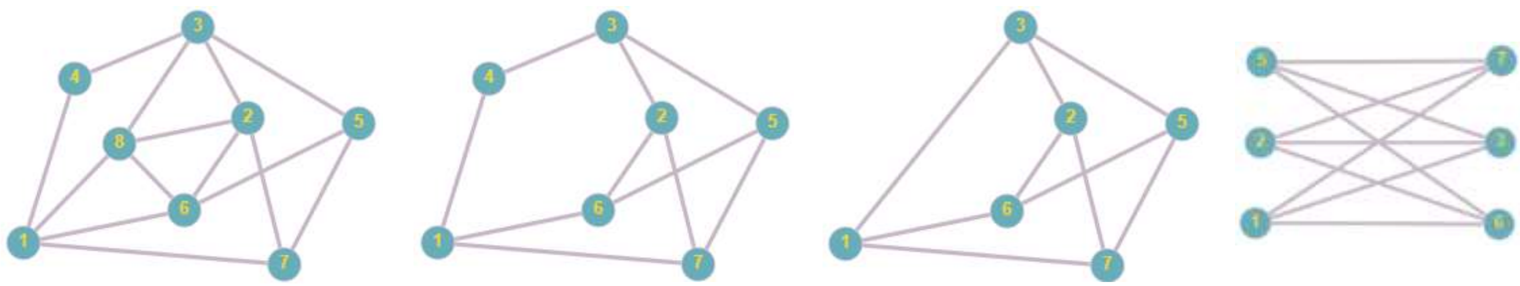


Graf 3

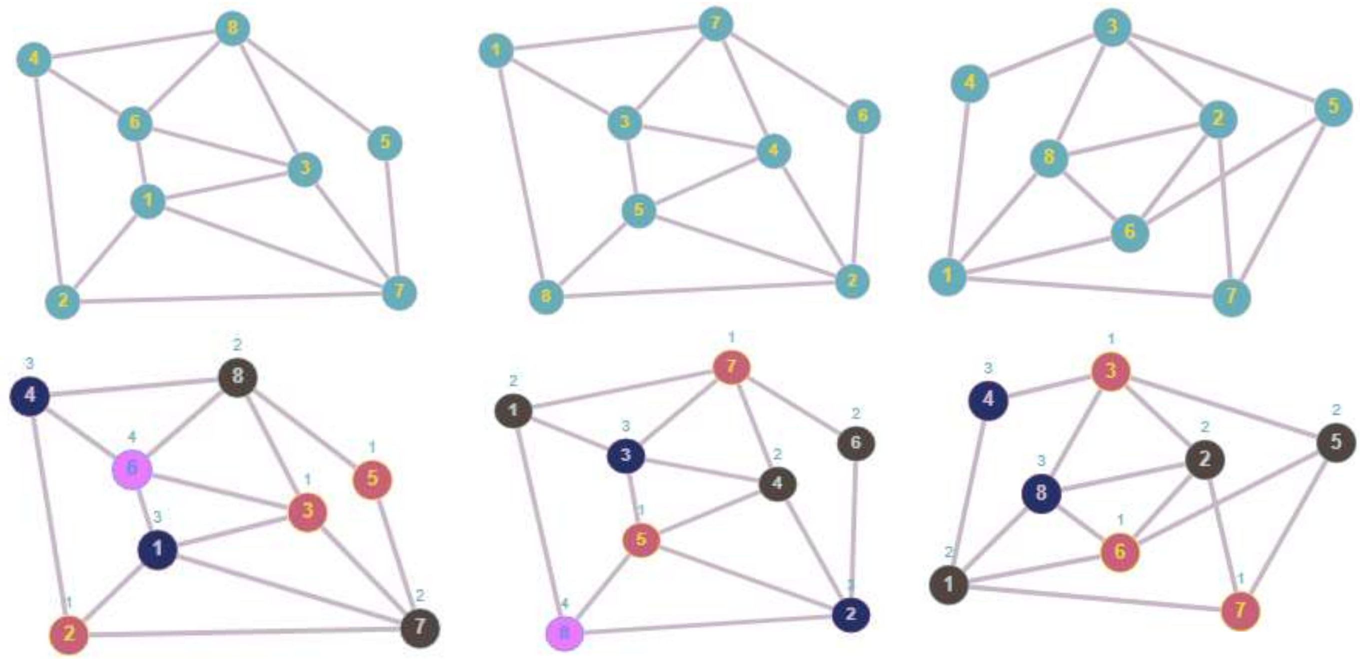
c. Ukoliko pogledamo zadnje tri slike koje predstavljaju grafove 1, 2 i 3 respektivno, možemo se uvjeriti da su grafovi 1 i 2 planarni, budući da su na slikama predstavljene njihove modificirane verzije koje smo dobili premještanjem odgovarajućih čvorova. Sada je potrebno analizirati graf 3 za koji nismo uspjeli logičnim premještanjem čvorova prezentovati isti tako da mu se grane ne presijecaju. Budući da ne možemo sa sigurnošću, samo na osnovu slike, tvrditi da graf 3 nije planaran, iskoristit ćemo Eulerovu teoremu da bismo se uvjerili i provjerili da li je isti planaran. Eulerova teorema ističe da je jedan od potrebnih uslova da graf bude planaran taj da mu je broj grana manji od $3n - 6$, gdje je n broj čvorova. Dakle, za graf 3 imamo:

$$14 < 3 \cdot 8 - 6$$
$$14 < 18$$

Kako je ovo samo neophodan, ali ne i dovoljan uslov za planarnost, te kako nakon mnogo pokušaja nismo uspjeli dobiti graf bez presijecanja grana, pozvat ćemo se na korištenje *Wagnerovog teorema.* Posmatrat ćemo podgraf koji dobijemo ukidanjem čvora 8, a nakon toga stapanjem čvorova 1 i 4 u jedan čvor dobijamo $K_{3,3}$ pri čemu dokazujemo da graf 3 nije planaran. Opisani postupak je prezentovan u nastavku, pri čemu zadnja slika u nizu predstavlja očigledniju verziju $K_{3,3}$.



d. U nastavku je prikazan postupak pronalaska hromatskih brojeva za ova tri grafa. Na slikama su dati odgovarajući grafovi bez bojenja i sa bojenjem. Prva dva grafa smo obojili koristeći četiri boje označene brojevima od 1 do 4, dok smo graf 3 obojili sa bojama 1, 2 i 3.



Graf 1 Graf 2 Graf 3

Potrebno je napomenuti da smo grafove bojili na način da niti jedna grana ne spaja dva čvora kojima je dodijeljena ista boja. Svi grafovi zadovoljavaju hromatsko bojenje grafova, odnosno niti jedan graf nije obojen sa više od četiri boje. Prema Konigovoj teoremi, graf ima hromatski broj manji od 2 ako i samo ako ne sadrži niti jednu konturu sa neparnim brojem čvorova. Kako naši grafovi ne posjeduju takve konture, opravdano odbacujemo mogućnost definisanu Konigovom teoremom. Ako znamo da ukoliko graf sadrži K_3 podgraf tada isti mora biti obojen sa najmanje tri boje, onda možemo izvršiti sljedeću analizu. Grafovi 1 i 2 su dokazano izomorfni i planarni tako da je dovoljno objasniti zašto su korištene četiri boje za samo jedan od njih, budući da je obrazloženje za onaj drugi potpuno analogno prethodnom. Obrazloženje ćemo bazirati na grafu 1. Iako graf 1 ima K_3 podgraf (npr. $x_1 - x_2 - x_7$), primjećujemo da čvor x_6 ne možemo obojiti niti jednom od ponuđene tri boje, koje smo koristili za navedeni podgraf, ukoliko ne prekršimo pravilo da niti jedan susjedni par ne smije imati istu boju. Također, ako formiramo podgraf tako što ukinemo granu $x_7 - x_5 - x_8$, možemo primijetiti da nam za $x_1 - x_2 - x_7$ trebaju tri boje, za $x_1 - x_3 - x_6$ iste tri boje, ali za $x_4 - x_6 - x_8$ je potrebno uvesti na čvoru x_4 četvrtu boju kako bi se ispunilo pravilo o bojama čvorova koji su u susjedstvu. Sada je sasvim opravdano tvrditi da su za bojenje grafa 1, a samim tim i grafa 2, bile neophodne četiri boje. Naravno ukoliko pogledamo malo pažljivije graf 3, na osnovu slike koja ga predstavlja, uočavamo da isti sadrži K_3 podgraf (npr. $x_2 - x_6 - x_8$). Zaključuje se da je opravdano korištenje tri boje za graf 3, jer isti nije bipartitivan pa sigurno ne može biti obojen sa dvije boje.

Zadatak 35

Potrebno je povezati 12 lokacija L_1 – L_{12} u računarsku mrežu. Zbog tehnoloških ograničenja, kablove nije moguće razvesti između proizvoljne dvije lokacije. Sljedeći spisak opisuje sve moguće načine kablovskog povezivanja lokacija, pri čemu trojka oblika (L_i, L_j, d_{ij}) označava da je moguće spojiti lokacije L_i i L_j, i to kablom dužine d_{ij} (u metrima):

(L_1, L_6, 480) (L_1, L_8, 1240) (L_1, L_{10}, 950) (L_1, L_{12}, 560) (L_2, L_5, 950) (L_2, L_7, 370)
(L_2, L_{10}, 430) (L_2, L_{12}, 1340) (L_3, L_4, 600) (L_3, L_9, 580) (L_3, L_{10}, 1300) (L_3, L_{11}, 690)
(L_4, L_5, 360) (L_4, L_6, 470) (L_4, L_9, 910) (L_5, L_6, 500) (L_5, L_7, 490) (L_5, L_{10}, 530)
(L_6, L_7, 1230) (L_6, L_{10}, 1280) (L_6, L_{12}, 570) (L_8, L_9, 960) (L_8, L_{11}, 1150) (L_9, L_{10}, 1050)
(L_{10}, L_{11}, 780)

Dizajnirajte računarsku mrežu u skladu sa navedenim specifikacijama tako da ukupan utrošak kablova bude minimalan i obavezno naznačite koliko iznosi taj utrošak. Dizajn obavite

a. Primjenom Kruskalovog algoritma sa bojenjem čvorova;
b. Primjenom optimalnog Kruskalovog algoritma;
c. Primjenom optimiziranog (kvadratnog) Primovog algoritma.

U sva tri slučaja, nemojte crtati odgovarajući graf, nego sve neophodne radnje obavljajte "naslijepo", koristeći samo raspoložive podatke, eventualno uz bilježenje izvjesnih pomoćnih informacija.

Rješenje:

Rješenje je dato na sljedećoj stranici.

a. Primjenom Kruskalovog algoritma sa bojenjem čvorova

Grana	Težina	Uzeti	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}
L_4, L_5	360	da				1	1							
L_2, L_7	370	da		2					2					
L_2, L_{10}	430	da										2		
L_4, L_6	470	da						1						
L_1, L_6	480	da	1											
L_5, L_7	490	da		1					1			1		
L_5, L_6	500	ne												
L_5, L_{10}	530	ne												
L_1, L_{12}	560	da												1
L_6, L_{12}	570	ne												
L_3, L_9	580	da			3						3			
L_3, L_4	600	da			1						1			
L_3, L_{11}	690	da											1	
L_{10}, L_{11}	780	ne												
L_4, L_9	910	ne												
L_1, L_{10}	950	ne												
L_2, L_5	950	ne												
L_8, L_9	960	da								1				
L_9, L_{10}	1050	ne												
L_8, L_{11}	1150	ne												
L_6, L_7	1230	ne												
L_1, L_8	1240	ne												
L_6, L_{10}	1280	ne												
L_3, L_{10}	1300	ne												
L_2, L_{12}	1340	ne												

Minimalan utrošak dobijamo sabiranjem težina grana koje su označene kao uzete. Nakon sabiranja dobijamo rezultat od 5990 metara, dok je minimalni broj grana koje vežu 11.

b. Primjenom optimalnog Kruskalovog algoritma

Grana	Težina	Uzeti	$L_1/1$	$L_2/1$	$L_3/1$	$L_4/1$	$L_5/1$	$L_6/1$	$L_7/1$	$L_8/1$	$L_9/1$	$L_{10}/1$	$L_{11}/1$	$L_{12}/1$
L_4, L_5	360	da				$L_4/2$	$L_4/1$							
L_2, L_7	370	da		$L_2/2$					$L_2/1$					
L_2, L_{10}	430	da		$L_2/3$								$L_2/1$		
L_4, L_6	470	da				$L_4/3$		$L_4/1$						
L_1, L_6	480	da	$L_4/1$			$L_4/4$								
L_5, L_7	490	da		$L_4/3$		$L_4/7$								
L_5, L_6	500	ne												
L_5, L_{10}	530	ne												
L_1, L_{12}	560	da				$L_4/8$								$L_4/1$
L_6, L_{12}	570	ne												
L_3, L_9	580	da			$L_3/2$						$L_3/1$			
L_3, L_4	600	da			$L_4/2$	$L_4/10$								
L_3, L_{11}	690	da				$L_4/11$							$L_4/1$	
L_{10}, L_{11}	780	ne												
L_4, L_9	910	ne												
L_1, L_{10}	950	ne												
L_2, L_5	950	ne												
L_8, L_9	960	da				$L_4/12$				$L_4/1$				
L_9, L_{10}	1050	ne												
L_8, L_{11}	1150	ne												
L_6, L_7	1230	ne												
L_1, L_8	1240	ne												
L_6, L_{10}	1280	ne												
L_3, L_{10}	1300	ne												
L_2, L_{12}	1340	ne												

Minimalan utrošak dobijamo sabiranjem težina grana koje su označene kao uzete. Nakon sabiranja dobijamo rezultat od 5990 metara, dok je minimalni broj grana koje vežu 11 (isto kao pod a).

c. Primjenom optimiziranog (kvadratnog) Primovog algoritma

Referentni čvor	$L_1/1$	$L_2/1$	$L_3/1$	$L_4/1$	$L_5/1$	$L_6/1$	$L_7/1$	$L_8/1$	$L_9/1$	$L_{10}/1$	$L_{11}/1$	$L_{12}/1$
	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L_1		-	-	-	-	$480/L_1$	-	$1240/L_1$	-	$950/L_1$	-	$560/L_1$
L_6		-	-	$470/L_6$	$500/L_6$		$1230/L_6$	$1240/L_1$	-	$950/L_1$	-	$560/L_1$
L_4		-	$600/L_4$		$360/L_4$		$1230/L_6$	$1240/L_1$	$910/L_4$	$950/L_1$	-	$560/L_1$
L_5		$950/L_5$	$600/L_4$				$490/L_5$	$1240/L_1$	$910/L_4$	$530/L_5$	-	$560/L_1$
L_7		$370/L_7$	$600/L_4$					$1240/L_1$	$910/L_4$	$530/L_5$	-	$560/L_1$
L_2			$600/L_4$					$1240/L_1$	$910/L_4$	$430/L_2$	-	$560/L_1$
L_{10}			$600/L_4$					$1240/L_1$	$910/L_4$		$780/L_{10}$	$560/L_1$
L_{12}			$600/L_4$					$1240/L_1$	$910/L_4$		$780/L_{10}$	
L_3								$1240/L_1$	$580/L_3$		$690/L_3$	
L_9								$960/L_9$			$690/L_3$	
L_{11}								$960/L_9$				
L_8												

Minimalan utrošak dobijamo sabiranjem grana koje odgovaraju crveno osjenčenim dijelovima tabele. Nakon sabiranja dobijamo rezultat od 5990 metara, dok je minimalni broj grana koje vežu 11 (isto kao pod a i b).

Zadatak 36

Turistička agencija "Pljačkaš tours" ima poslovnice u 8 gradova: Zwokim, Urasoto, Oxat, Adifa, Vezqes, Omacodi, Lyapuz i Naxab. U sljedećoj tablici su date cijene direktnih avionskih letova između pojedinih gradova izražene u škafiškafnjacima (crtica znači da direktan let ne postoji):

	Zwokim	Urasoto	Oxat	Adifa	Vezqes	Omacodi	Lyapuz	Naxab
Zwokim	0	450	480	610	1190	270	860	990
Urasoto	450	0	270	1260	670	1410	730	–
Oxat	480	270	0	290	240	860	–	370
Adifa	610	1260	290	0	440	1280	430	–
Vezqes	1190	670	240	440	0	–	340	750
Omacodi	270	1410	860	1280	–	0	890	1350
Lyapuz	860	730	–	430	340	890	0	780
Naxab	990	–	370	–	750	1350	780	0

Međutim, poznato je da direktni letovi nisu uvijek i najjeftiniji način aviotransporta između gradova, nego je nekada povoljnije koristiti presjedanje (pogotovo ako se na taj način mogu koristiti usluge low-cost kompanija. Na primjer, iz Omacodija jeftinije je u Naxab putovati sa presjedanjem u Oxatu nego direktnim letom (sa presjedanjem plaćamo $860 + 370 = 1230$ škafiškafnjaka, dok direktan let košta 1350 škafiškafnjaka). Zbog toga, turistička agencija želi da sastavi tablicu koja sadrži informacije koliko iznose najjeftinije cijene aviotransporta između svakog para gradova u kojima agencija ima poslovnice (uz dopuštanje presjedanja) kao i u kojim gradovima treba eventualno vršiti presjedanja za svaki od tih transporta. Pomozite agenciji "Pljačkaš tours" da sastavi ove tablice. Postupak obavite uz pomoć Dijkstrinog algoritma, ali bez crtanja grafova, nego samo vršeći manipulacije nad zadanom tablicom, uz eventualno bilježenje pomoćnih dopunskih informacija.

NAPOMENA: Umjesto da radite 8 puta Dijkstrin algoritam uzimajući svaki put drugi grad kao početni čvor, znatno je bolje sve to raditi *uporedo*, vodeći u istoj tablici za svaki čvor 8 različitih potencijala, od kojih svaki odgovara drugom početnom čvoru. Na taj način se problem riješi daleko brže.

Rješenje:

Rješenje je dato na sljedećoj stranici.

Prije početka izrade zadatka, potrebno je naglasiti da ćemo, ipak, isti raditi na način da 8 puta radimo Dijkstrin algoritam uzimajući svaki put drugi grad kao početni izvor. Naime, radeći *uporedo* zaključujemo da je postupak zaista brži ali je i lakše napraviti grešku, koja je, kada se 'potkrade', veoma teško uočljiva, što nije slučaj u prvom malo dužem načinu izrade ovog zadatka. Također, napominjemo da ćemo koristiti odgovarajuće skraćenice za gradove, koji su dati u zadatku, kako slijedi:

$$Zwokim - Z, Urasoto - U, Oxat - O, Adifa - A, Vezqes - V, Omacodi - M, Lyapuz - L, Naxab - N$$

U tabelama koje su date sa desne strane, a koje predstavljaju spisak gradova polaska, presjedanja i dolaska aviona, kao i ukupnu cijenu takvog prevoza, koristit ćemo odgovarajuće skraćenice:

$$grad\ polaska - P, prvo\ presjedanje - P1, drugo\ presjedanje - P2, grad\ dolaska - D, ukupna\ cijena - C$$

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Zwokima* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	0	-	-	-	-	-	-	-
Z(0)		450/Z	480/Z	610/Z	1190/Z	270/Z	860/Z	990/Z
M(270)		450/Z	480/Z	610/Z	1190/Z		860/Z	990/Z
U(450)			480/Z	610/Z	1120/U		860/Z	990/Z
O(480)				610/Z	720/O		860/Z	850/O
A(610)					720/O		860/Z	850/O
V(720)							860/Z	850/O
N(850)							860/Z	
L(860)								

P	P1	P2	D	C
Z	-	-	M	270
Z	-	-	U	450
Z	-	-	O	480
Z	-	-	A	610
Z	O	-	V	720
Z	O	-	N	850
Z	-	-	L	860

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Urasotoa* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	0	-	-	-	-	-	-
U(0)	450/U		270/U	1260/U	670/U	1410/U	730/U	-
O(270)	450/U			560/O	510/O	1130/O	730/U	640/O
Z(450)				560/O	510/O	720/Z	730/U	640/O
V(510)				560/O		720/Z	730/U	640/O
A(560)						720/Z	730/U	640/O
N(640)						720/Z	730/U	
M(720)							730/U	
L(730)								

P	P1	P2	D	C
U	-	-	O	270
U	-	-	Z	450
U	O	-	V	510
U	O	-	A	560
U	O	-	N	640
U	Z	-	M	720
U	-	-	L	730

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Oxata* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	-	0	-	-	-	-	-
O(0)	480/O	270/O		290/O	240/O	860/O	-	370/O
V(240)	480/O	270/O		290/O		860/O	580/V	370/O
U(270)	480/O			290/O		860/O	580/V	370/O
A(290)	480/O					860/O	580/V	370/O
N(370)	480/O					860/O	580/V	
Z(480)						750/Z	580/V	
L(580)						750/Z		
M(750)								

P	P1	P2	D	C
O	-	-	V	240
O	-	-	U	270
O	-	-	A	290
O	-	-	N	370
O	-	-	Z	480
O	V	-	L	580
O	Z	-	M	750

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Adifae* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	-	-	0	-	-	-	-
A(0)	610/A	1260/A	290/A		440/A	1280/A	430/A	-
O(290)	610/A	560/O			440/A	1150/O	430/A	660/O
L(430)	610/A	560/O			440/A	1150/O		660/O
V(440)	610/A	560/O				1150/O		660/O
U(560)	610/A					1150/O		660/O
Z(610)						880/Z		660/O
N(660)						880/Z		
M(880)								

P	P1	P2	D	C
A	-	-	O	290
A	-	-	L	430
A	-	-	V	440
A	O	-	U	560
A	-	-	Z	610
A	O	-	N	660
A	Z	-	M	880

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Vezqesa* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	-	-	-	0	-	-	-
V(0)	1190/V	670/V	240/V	440/V		-	340/V	750/V
O(240)	720/O	510/O		440/V		1100/O	340/V	610/O
L(340)	720/O	510/O		440/V		1100/O		610/O
A(440)	720/O	510/O				1100/O		610/O
U(510)	720/O					1100/O		610/O
N(610)	720/O					1100/O		
Z(720)						990/Z		
M(990)								

P	P1	P2	D	C
V	-	-	O	240
V	-	-	L	340
V	-	-	A	440
V	O	-	U	510
V	O	-	N	610
V	O	-	Z	720
V	O	Z	M	990

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Omacodia* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	-	-	-	-	0	-	-
M(0)	270/M	1410/M	860/M	1280/M	-		890/M	1350/M
Z(270)		720/Z	750/Z	880/Z	1460/Z		890/M	1260/Z
U(720)			750/Z	880/Z	1390/U		890/M	1260/Z
O(750)				880/Z	990/O		890/M	1120/O
A(880)					990/O		890/M	1120/O
L(890)					990/O			1120/O
V(990)								1120/O
N(1120)								

P	P1	P2	D	C
M	-	-	Z	270
M	Z	-	U	720
M	Z	-	O	750
M	Z	-	A	880
M	-	-	L	890
M	Z	O	V	990
M	Z	O	N	1120

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Lyapuza* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	-	-	-	-	-	0	-
L(0)	860/L	730/L	-	430/L	340/L	890/L		780/L
V(340)	860/L	730/L	580/V	430/L		890/L		780/L
A(430)	860/L	730/L	580/V			890/L		780/L
O(580)	860/L	730/L				890/L		780/L
U(730)	860/L					890/L		780/L
N(780)	860/L					890/L		
Z(860)						890/L		
M(890)								

P	P1	P2	D	C
L	-	-	V	340
L	-	-	A	430
L	V	-	O	580
L	-	-	U	730
L	-	-	N	780
L	-	-	Z	860
L	-	-	M	890

Najjeftinije cijene aviotransporta od *Naxaba* prema ostalim gradovima (u škafiškafnjacima)

Referentni čvor	Z	U	O	A	V	M	L	N
	-	-	-	-	-	-	-	0
N(0)	990/N	-	370/N	-	750/N	1350/N	780/N	
O(370)	850/O	640/O		660/O	610/O	1230/O	780/N	
V(610)	850/O	640/O		660/O		1230/O	780/N	
U(640)	850/O			660/O		1230/O	780/N	
A(660)	850/O					1230/O	780/N	
L(780)	850/O					1230/O		
Z(850)						1120/Z		
M(1120)								

P	P1	P2	D	C
N	-	-	O	370
N	O	-	V	610
N	O	-	U	640
N	O	-	A	660
N	-	-	L	780
N	O	-	Z	850
N	O	Z	M	1120

Zadatak 37

Dat je usmjereni težinski graf

$\mathcal{G}$ = {{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}, {(A, C, -38), (B, F, 28), (C, B, 20), (C, D, -12), (C, J, 16), (D, E, 26), (D, H, 22), (D, I, 30), (E, F, 24), (E, J, -42), (F, A, 18), (F, C, 24), (G, D, -34), (G, E, 10), (H, B, -26), (H, E, 32), (I, F, 8), (J, I, 26)}}

Koristeći Bellman-Fordov algoritam, dokažite da u ovom grafu postoji kontura sa negativnom sumom težina u konturi. Nakon toga pronađite makar jednu takvu konturu. Postupak obavite "naslijepo", bez crtanja grafa, koristeći samo raspoložive informacije (eventualno uz bilježenje raznih pomoćnih informacija).

Rješenje:

Prva iteracija											
$x_i \backslash x_j$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	λ_i
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
A			-38								0
B											∞, -18, -54
C		-18		-50						-22	∞, -38
D					-24			-28	-20		∞, -50
E						0				-66	∞, -24
F	18		24								∞, 0, -12
G											∞
H		-54			4						∞, -28
I						-12					∞, -20, -40
J									-40		∞, -22, -66

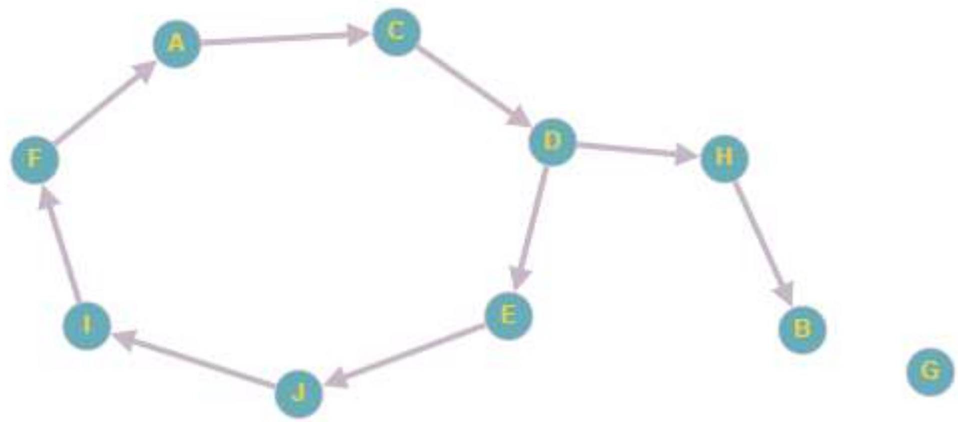
Druga iteracija

$x_i \backslash x_j$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	λ_i
	0	-54	-38	-50	-24	-12	∞	-28	-40	-66	
A			-38								0, -8
B						-26					-54
C		-18		-50						-22	-38
D					-24			-28	-20		-50
E						0				-66	-24
F	-8		-2								-12, -26, -32
G											∞
H		-54			4						-28
I						-32					-40
J									-40		-66

Treća iteracija

$x_i \backslash x_j$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	λ_i
	-8	-54	-38	-50	-24	-32	∞	-28	-40	-66	
A			-46								-8, -14
B						-26					-54, -66
C		-26		-58						-30	-38, -46
D					-32			-36	-28		-50, -58
E						-8				-74	-24, -32
F	-14		-8								-32
G											∞
H		-66			-4						-28, -36
I						-32					-40, -48
J									-48		-66, -74

Budući da smo pokazali da je balans početnog čvora postao negativan, samim time smo dokazali da postoji kontura sa negativnom sumom težina. Također, možemo formirati graf na osnovu posljednje tabele. Napominjemo, da smo mogli već prestati raditi nove iteracije nakon druge, ali smo ipak uradili i treću jer ona odgovara vrijednosti jedne od kontura koju smo prezentovali u nastavku.



Jedna od kontura suma težina je prikazana na slici i glasi:

$$\boldsymbol{A \to C \to D \to E \to J \to I \to F \to A}$$

Vrijednost konture iznosi:

$$-38 - 12 + 26 - 42 + 26 + 8 + 18 = \mathbf{-14}$$

Zadatak 38

Dat je usmjereni težinski graf

$\mathcal{G} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}, \{(x_1, x_3, 6), (x_1, x_9, 34), (x_2, x_4, 34), (x_3, x_7, 36),$
$(x_3, x_{10}, 13), (x_5, x_6, 33), (x_5, x_{11}, 39), (x_6, x_1, 34), (x_6, x_9, 39), (x_7, x_4, 14), (x_7, x_{10}, 13),$
$(x_8, x_5, 21), (x_8, x_6, 40), (x_8, x_{11}, 26), (x_9, x_2, 5), (x_9, x_{10}, 26), (x_{10}, x_2, 33), (x_{10}, x_4, 21),$
$(x_{11}, x_1, 12), (x_{11}, x_3, 38)\}\}$

a. Pokažite da u ovom grafu ima tačno jedan izvor (čvor ulaznog stepena 0) i tačno jedan ponor (čvor izlaznog stepena 0), te da se radi o acikličkom grafu;
b. Izvršite topološko sortiranje čvorova ovog grafa obavljajući DFS pretragu počev od izvora grafa;
c. Primjenom Dijkstrinog algoritma, pronađite najkraći put od izvora do ponora grafa i navedite koliko iznosi dužina tog puta;
d. Primjenom Bellman-Fordovog algoritma, pronađite najkraći put od izvora do ponora grafa i navedite koliko iznosi dužina tog puta;
e. Primjenom Bellman-Fordovog algoritma, pronađite <u>najduži</u> put od izvora do ponora grafa i navedite koliko iznosi dužina tog puta.

Postupak provedite "naslijepo", bez crtanja grafa, koristeći samo raspoložive informacije (eventualno uz bilježenje raznih pomoćnih informacija).

Rješenje:

a. U grafu se nalazi tačno jedan izvor, a to je izvor x_8 budući da je to jedini čvor koji se nikada ne nalazi na drugom mjestu u uređenim parovima, odnosno niti jedna grana ne ulazi u njega (čvor ulaznog stepena 0). Također, u grafu ima tačno jedan ponor x_4 budući da je to jedini čvor koji se nikada ne nalazi na prvom mjestu u uređenim parovima, odnosno niti jedna grana ne izlazi iz njega (čvor izlaznog stepena 0). Ovo je prikazano i težinskom matricom datom u nastavku. Dokaz da je graf acikličan (u njemu ne postoji niti jedan ciklus), odnosno da niti jednim putem nije moguće doći u čvor iz kojeg se krenulo, prezentovan je u dijelu pod b.

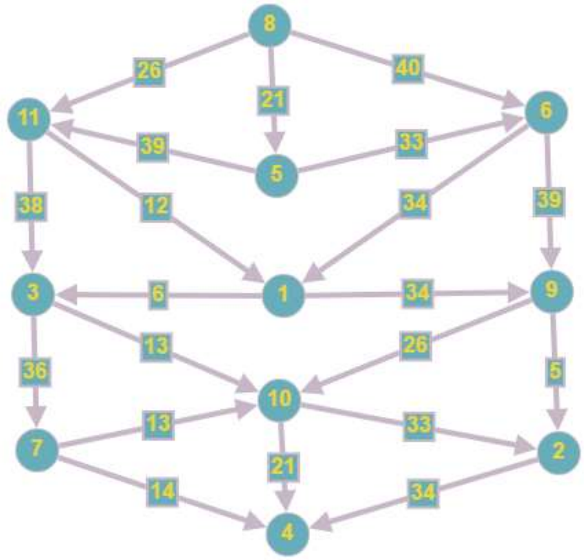
$$W = \begin{pmatrix}
\infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 34 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 34 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 36 & \infty & \infty & 13 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 33 & \infty & \infty & \infty & \infty & 39 \\
34 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 39 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 13 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 21 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty & 26 \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 26 & \infty \\
\infty & 33 & \infty & 21 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
12 & \infty & 38 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty
\end{pmatrix}$$

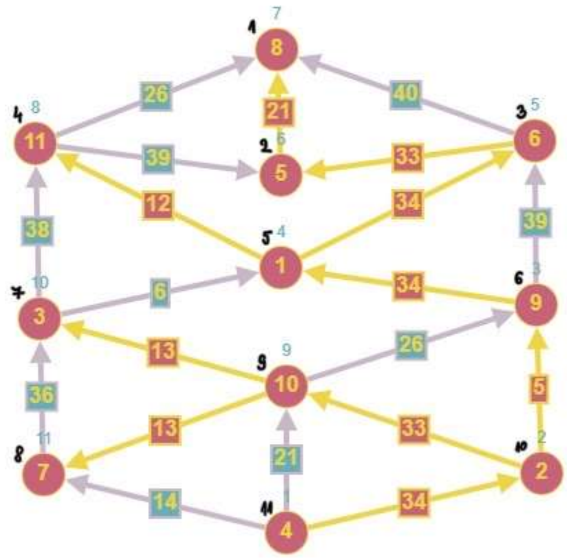
b. Prije početka topološkog sortiranja potrebno je napomenuti razlog zbog kojeg smo rekli da ćemo dokaz da se radi o acikličnom grafu prikazati ovdje. Naime, kako je DFS dovoljan dokaz da je graf acikličan, kao i da DFS pretragom nalazimo topološko sortiranje čvorova jednostavno se zaključuje da ćemo u ovom dijelu ujedno dokazati i da je graf acikličan.
Prvo što ćemo uraditi jeste to da okrenemo sve grane i krenemo od ponora grafa. Zatim, nalazimo njegov najmanji susjed, te kada dođemo do čvora koji više nema susjeda, vraćamo se prema nazad do prvog čvora koji je imao više susjeda (odnosno koji se pojavljuje u više od jednog uređenog para). Sve ćemo ovo nakon detaljnog postupka predstaviti slikovitim prikazom.
Stoga možemo izvući još jedan važan zaključak koji se odnosi na pitanje acikličnosti grafa, a to je da se zaista radi o usmjerenom acikličnom grafu. Prilikom DFS pretrage nismo naišli niti na jedan mogući ciklus, a samo postojanje topološkog sortiranja ukazuje na to da graf mora biti acikličan jer topološko i inverzno sortiranje ne može postojati u grafovima koji sadrže cikluse.

x_4
$x_4 \to x_2$
$x_4 \to x_2 \to x_9$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6 \to x_5$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6 \to x_5 \to x_8$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6 \to x_5 \to x_8 \to x_{11}$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6 \to x_5 \to x_8 \to x_{11} \to x_{10}$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6 \to x_5 \to x_8 \to x_{11} \to x_{10} \to x_3$
$x_4 \to x_2 \to x_9 \to x_1 \to x_6 \to x_5 \to x_8 \to x_{11} \to x_{10} \to x_3 \to x_7$

Sada svakom od njih dodjeljujemo broj od 1 do n

$x_4 \to 11$
$x_2 \to 10$
$x_9 \to 6$
$x_1 \to 5$
$x_6 \to 3$
$x_5 \to 2$
$x_8 \to 1$
$x_{11} \to 4$
$x_{10} \to 9$
$x_3 \to 7$
$x_7 \to 8$





c. Dijkstrin algoritam

Referentni čvor	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
$x_8(0)$	-	-	-	-	$21/x_8$	$40/x_8$	-		-	-	$26/x_8$
$x_5(21)$	-	-	-	-		$40/x_8$	-		-	-	$26/x_8$
$x_{11}(26)$	$38/x_{11}$	-	$64/x_{11}$	-		$40/x_8$	-		-	-	
$x_1(38)$		-	$44/x_1$	-		$40/x_8$	-		$72/x_1$	-	
$x_6(40)$		-	$44/x_1$	-			-		$72/x_1$	-	
$x_3(44)$		-		-			$80/x_3$		$72/x_1$	$57/x_3$	
$x_{10}(57)$		$90/x_{10}$		$78/x_{10}$			$80/x_3$		$72/x_1$		
$x_9(72)$		$77/x_9$		$78/x_{10}$			$80/x_3$				
$x_2(77)$				$78/x_{10}$			$80/x_3$				
$x_4(78)$											

Koristeći Dijkstrin algoritam pronašli smo najkraći put, a njegova dužina je **78**. Očitavanjem iz tabele unazad od ponora do izvora dobijamo:

$$x_4 \leftarrow x_{10} \leftarrow x_3 \leftarrow x_1 \leftarrow x_{11} \leftarrow x_8$$

Odnosno, ako čitamo od početka imamo:

$$\boldsymbol{x_8 \rightarrow x_{11} \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_{10} \rightarrow x_4}$$

d. Bellman – Fordov algoritam za najkraći put

Prva iteracija												
$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	
x_8					21	40					26	0
x_1												∞, 74, 38
x_2												∞, 84
x_3												∞, 64
x_4												∞, 126
x_5						54					60	∞, 21
x_6	74								79			∞, 40
x_7												∞
x_9		84								105		∞, 79
x_{10}		138		126								∞, 105
x_{11}	38		64									∞, 26

Druga iteracija												
$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	38	84	64	126	21	40	∞	0	79	105	26	
x_8					21	40					26	0
x_1			44						72			38
x_2				118								84, 77
x_3							80			57		64, 44
x_4												126, 118, 94, 78
x_5											60	21
x_6	74								79			40
x_7				94						93		∞, 80
x_9		77								98		79, 72
x_{10}		90		78								105, 57
x_{11}	38		64									26

Treća iteracija

$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	38	77	44	78	21	40	80	0	72	57	26	
x_8					21	40					26	0
x_1			44						72			38
x_2				111								77
x_3							80			57		44
x_4												78
x_5						54					60	21
x_6	74								79			40
x_7				94						93		80
x_9		77								98		72
x_{10}		90		78								57
x_{11}	38		64									26

Kako se u trećoj iteraciji niti jedan potencijal nije promijenio, postupak je završen. Sada je jednostavno odrediti najkraći put čija je dužina **78**, a koji je dat u nastavku.

$$\boldsymbol{x_8 \to x_{11} \to x_1 \to x_3 \to x_{10} \to x_4}$$

e. Bellman – Fordov algoritam za najduži put

Prva iteracija

$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	
x_8					-21	-40					-26	0
x_1												∞, -88
x_2												∞, -98, -152
x_3												∞, -98
x_4												∞, -140
x_5						-54					-60	∞, -21
x_6	-88								-93			∞, -40, -54
x_7												∞
x_9		-98								-119		∞, -93
x_{10}		-152		-140								∞, -119
x_{11}	-72		-98									∞, -26, -60

Druga iteracija												
$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	-88	-152	-98	-140	-21	-54	∞	0	-93	-119	-60	
x_8					-21	-40					-26	0
x_1			-94						-122			-88
x_2				-186								-152, -181
x_3							-134			-111		-98
x_4												-140, -186
x_5						-54					-60	-21
x_6	-88								-93			-54
x_7				-148						-147		∞, -134
x_9		-127								-148		-93, -122
x_{10}		-181		-169								-119, -147, -148
x_{11}	-72		-98									-60

Treća iteracija												
$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	-88	-181	-98	-186	-21	-54	-134	0	-122	-148	-60	
x_8					-21	-40					-26	0
x_1			-94						-122			-88
x_2				-215								-181
x_3							-134			-111		-98
x_4												-186, -215
x_5						-54					-60	-21
x_6	-88								-93			-54
x_7				-148						-147		-134
x_9		-127								-148		-122
x_{10}		-181		-169								-148
x_{11}	-72		-98									-60

Četvrta iteracija												
$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	λ_i
	-88	-181	-98	-215	-21	-54	-134	0	-122	-148	-60	
x_8					-21	-40					-26	0
x_1			-94						-122			-88
x_2				-215								-181
x_3							-134			-111		-98
x_4												-215
x_5						-54					-60	-21
x_6	-88								-93			-54
x_7				-148						-147		-134
x_9		-127								-148		-122
x_{10}		-181		-169								-148
x_{11}	-72		-98									-60

Potrebno je napomenuti da smo prilikom izrade ovog dijela zadatka svim težinama promijenili predznak i na taj način omogućili pronalazak najdužeg puta od izvora do ponora. Kako se u četvrtoj iteraciji niti jedan potencijal nije promijenio, postupak je završen. Sada je jednostavno odrediti najduži put čija je dužina **215**, a koji je dat u nastavku.

$$\boldsymbol{x_8 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_1 \rightarrow x_9 \rightarrow x_{10} \rightarrow x_2 \rightarrow x_4}$$

Zadatak 39

Klijentski računar K vrši istovremeni download neke datoteke sa 3 servera S_1, S_2 i S_3. Put od tih servera do klijentskog računara vrši se putem mreže posrednika (rutera) $R_1 - R_8$. Ispod je naveden popis raspoloživih komunikacionih kanala, pri čemu trojka oblika (X, Y, b) označava da je moguća komunikacija od čvorišta X do čvorišta Y maksimalnom brzinom od b Mbita/s:

(S_1, R_2, 120)   (S_2, R_2, 70)   (S_2, R_7, 70)   (S_3, R_3, 50)   (S_3, R_7, 90)   (R_1, K, 110)   (R_2, R_8, 80)
(R_3, R_6, 100)   (R_3, R_7, 110)   (R_4, K, 80)   (R_5, K, 140)   (R_6, R_1, 150)   (R_6, R_5, 150)
(R_7, R_1, 110)   (R_7, R_5, 80)   (R_8, R_4, 120)   (R_8, R_5, 60)

Primjenom Ford-Fulkersonovog algoritma odredite maksimalnu brzinu kojom klijent može izvršiti download posmatrane datoteke kao i kolika će pri tome biti aktuelna brzina prenosa podataka kroz svaki od navedenih raspoloživih komunikacionih kanala. Postupak obavite "naslijepo", bez crtanja grafa, vršeći samo manipulacije sa matricom kapaciteta grana.

Rješenje:

Prva iteracija

	S	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	K	
S		∞	∞	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
S_1						120								$\leftarrow S/1$
S_2						70					70			$\leftarrow S/1$
S_3							50				90			$\leftarrow S/1$
R_1													110	$\leftarrow R_7/3$
R_2												80		$\leftarrow S_1/2$
R_3										100	110			$\leftarrow S_3/2$
R_4													80	$\leftarrow R_8/4$
R_5													140	$\leftarrow R_7/3$
R_6					150				150					$\leftarrow R_3/3$
R_7					110				80					$\leftarrow S_2/2$
R_8								120	60					$\leftarrow R_2/3$
K														$\leftarrow R_1/4$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$S - S_2 - R_7 - R_1 - K \qquad\qquad \Delta_{max} = \min\{\infty, 70, 110, 110\} = 70$$

Druga iteracija

	S	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	K	
S		∞	∞	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
S_1						120								$\leftarrow S/1$
S_2	70					70					0			$\leftarrow S/1$
S_3							50				90			$\leftarrow S/1$
R_1											70		40	$\leftarrow R_7/3$
R_2												80		$\leftarrow S_1/2$
R_3										100	110			$\leftarrow S_3/2$
R_4													80	$\leftarrow R_8/4$
R_5													140	$\leftarrow R_7/3$
R_6					150				150					$\leftarrow R_3/3$
R_7			70		40				80					$\leftarrow S_3/2$
R_8								120	60					$\leftarrow R_2/3$
K					70									$\leftarrow R_1/4$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$S - S_3 - R_7 - R_1 - K \qquad \Delta_{max} = \min\{\infty, 90, 40, 40\} = 40$$

Treća iteracija

	S	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	K	
S		∞	∞	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
S_1						120								$\leftarrow S/1$
S_2	70					70					0			$\leftarrow S/1$
S_3	40						50				50			$\leftarrow S/1$
R_1											110		0	$\leftarrow R_6/4$
R_2												80		$\leftarrow S_1/2$
R_3										100	110			$\leftarrow S_3/2$
R_4													80	$\leftarrow R_8/4$
R_5													140	$\leftarrow R_7/3$
R_6					150				150					$\leftarrow R_3/3$
R_7			70	40	0				80					$\leftarrow S_3/2$
R_8								120	60					$\leftarrow R_2/3$
K					110									$\leftarrow R_5/4$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$S - S_3 - R_7 - R_5 - K \qquad\qquad \Delta_{max} = \min\{\infty, 50, 140, 80\} = 50$$

Četvrta iteracija

	S	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	K	
S		∞	∞	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
S_1						120								$\leftarrow S/1$
S_2	70					70					0			$\leftarrow S/1$
S_3	90						50				0			$\leftarrow S/1$
R_1											110		0	$\leftarrow R_6/3$
R_2												80		$\leftarrow S_1/2$
R_3										100	110			$\leftarrow S_3/2$
R_4													80	$\leftarrow R_8/3$
R_5											50		90	$\leftarrow R_6/3$
R_6					150				150					$\leftarrow R_3/2$
R_7			70	90	0				30					$\leftarrow R_3/2$
R_8								120	60					$\leftarrow R_2/2$
K					110				50					$\leftarrow R_4/4$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$S - S_1 - R_2 - R_8 - R_4 - K \qquad\qquad \Delta_{max} = \min\{\infty, 120, 80, 80, 120\} = 80$$

Nastavak je dat na sljedećoj stranici.

Peta iteracija

	S	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	K	
S		∞	∞	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
S_1	80					40								$\leftarrow S/1$
S_2	70					70					0			$\leftarrow S/1$
S_3	90						50				0			$\leftarrow S/1$
R_1											110		0	$\leftarrow R_6/4$
R_2		80										0		$\leftarrow S_1/2$
R_3										100	110			$\leftarrow S_3/2$
R_4												80	0	$\leftarrow K/6$
R_5											50		90	$\leftarrow R_6/4$
R_6					150				150					$\leftarrow R_3/3$
R_7			70	90	0				30					$\leftarrow R_3/3$
R_8						80		40	60					$\leftarrow R_4/7$
K					110			80	50					$\leftarrow R_5/5$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$S - S_3 - R_3 - R_6 - R_5 - K \qquad \Delta_{max} = \min\{\infty, 50, 100, 90, 150\} = 50$$

Šesta iteracija

	S	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	K	
S		∞	∞	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
S_1	80					40								$\leftarrow S/1$
S_2	70					70					0			$\leftarrow S/1$
S_3	140						0				0			$\leftarrow S/1$
R_1											110		0	
R_2		80										0		$\leftarrow S_1/2$
R_3				50						50	110			
R_4												80	0	
R_5										50	50		40	
R_6					150		50		100					
R_7			70	90	0				30					
R_8						80		40	60					
K					110			80	100					

Ovdje postupak terminira budući da nije moguće pronaći niti jedan povezujući lanac. Stoga, zaključujemo da je maksimalna brzina jednaka

$$80 + 70 + 140 = 290\ Mgb/s$$

odnosno,

$$110 + 80 + 100 = 290\ Mgb/s$$

Aktuelne brzine prenosa podataka kroz svaki od navedenih raspoloživih komunikacionih kanala su:

(S_1, R_2, 80) (S_2, R_2, 0) (S_2, R_7, 70) (S_3, R_3, 50) (S_3, R_7, 90) (R_1, K, 110) (R_2, R_8, 80) (R_3, R_6, 50) (R_3, R_7, 0) (R_4, K, 80) (R_5, K, 100) (R_6, R_1, 0) (R_6, R_5, 50) (R_7, R_1, 110) (R_7, R_5, 50) (R_8, R_4, 80) (R_8, R_5, 0)

Zadatak 40

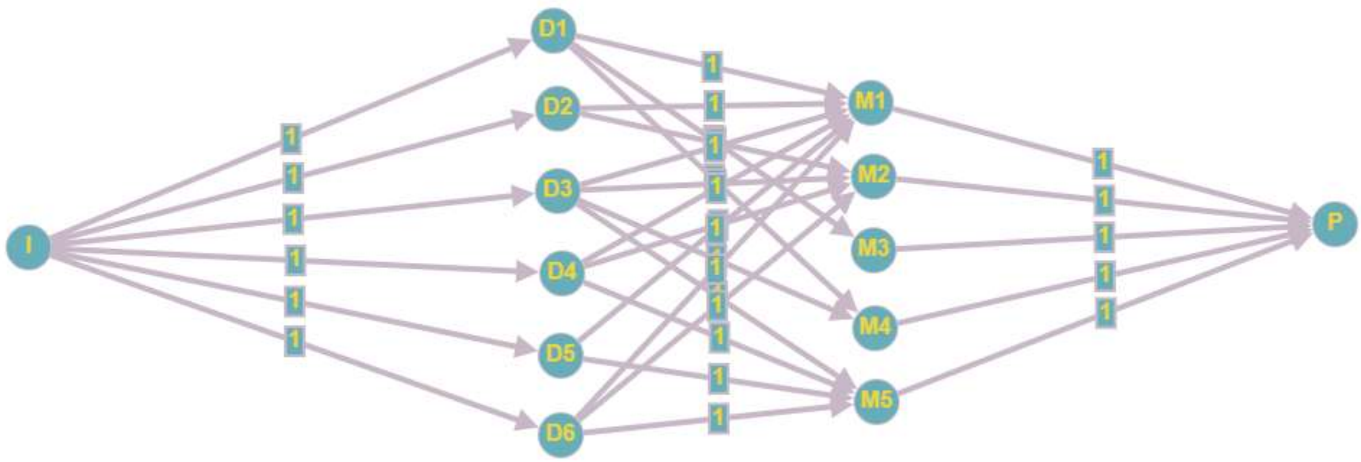
Na nekoj zabavi, šest atraktivnih djevojaka $D_1 - D_6$ upoznalo je pet isto tako atraktivnih momaka $M_1 - M_5$. Tom prilikom rodile su se i uzajamne simpatije. Pri tome, djevojke su se pokazale pomalo neodlučne, jer se svakoj od njih sviđa više momaka. U sljedećoj tablici prikazano je kojoj djevojci se sviđaju koji momci:

Djevojka:	Momci:
D_1	M_1, M_3, M_4
D_2	M_1, M_2
D_3	M_1, M_2, M_4, M_5
D_4	M_1, M_2, M_5
D_5	M_1, M_5
D_6	M_1, M_2, M_5

Što se tiče momaka, oni su se pokazali kao potpuno indiferentni, to jest svakom od njih se sviđa svaka od djevojaka (što se ovdje pokazalo kao dobro, jer se u ovom zadatku oni svakako ništa ne pitaju). Pronađite maksimalan broj parova koji se može formirati tako da ni jedna djevojka ne bude u vezi sa nekim od momaka koji joj se ne sviđa (s obzirom da ima "višak" djevojaka u odnosu na momke, jedna od djevojaka će nažalost morati "izvisiti"). Podrazumijeva se da jedna djevojka može biti u vezi samo sa jednim momkom i obrnuto (tj. poligamija i poliandrija su isključeni). Problem riješite svođenjem ovog problema na problem maksimalnog protoka i primjenom Ford-Fulkersonovog algoritma (bez obzira što se, zbog male dimenzionalnosti, ovaj problem može lako riješiti intuitivno).

Rješenje:

Da bismo riješili ovaj zadatak potrebno je uvesti dva nova čvora, superizvor i superponor, kao i nove grane koje će spajati superizvor sa djevojkama i superponor sa momcima. Grafički prikaz je prezentovan na sljedećoj stranici uz napomenu da svaka grana ima kapacitet 1 budući da je dozvoljeno jednoznačno uparivanje, odnosno jedna djevojka ⟶ jedan momak. Također, važno je istaći da je postupak rješavanja ovog zadatka analogan rješavanju zadatka 6 pri nalasku maksimalnog protoka.



Prva iteracija

	I	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	P	
I		1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
D_1								1		1	1			$\leftarrow I/1$
D_2								1	1					$\leftarrow I/1$
D_3								1	1		1	1		$\leftarrow I/1$
D_4								1	1			1		$\leftarrow I/1$
D_5								1				1		$\leftarrow I/1$
D_6								1	1			1		$\leftarrow I/1$
M_1													1	$\leftarrow D_1/2$
M_2													1	$\leftarrow D_2/2$
M_3													1	$\leftarrow D_1/2$
M_4													1	$\leftarrow D_1/2$
M_5													1	$\leftarrow D_3/2$
P														$\leftarrow M_1/3$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$I - D_1 - M_1 - P$$

Potrebno je napomenuti da nema potrebe za računanjem Δ_{max} budući da će on u svakoj iteraciji imati vrijednost 1.

Druga iteracija

	I	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	P	
I		0	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
D_1	1							0		1	1			$\leftarrow M_1/3$
D_2								1	1					$\leftarrow I/1$
D_3								1	1		1	1		$\leftarrow I/1$
D_4								1	1			1		$\leftarrow I/1$
D_5								1				1		$\leftarrow I/1$
D_6								1	1			1		$\leftarrow I/1$
M_1		1											0	$\leftarrow D_2/2$
M_2													1	$\leftarrow D_2/2$
M_3													1	$\leftarrow D_1/4$
M_4													1	$\leftarrow D_3/2$
M_5													1	$\leftarrow D_3/2$
P								1						$\leftarrow M_2/3$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$I - D_2 - M_2 - P$$

Treća iteracija

	I	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	P	
I		0	0	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
D_1	1							0		1	1			$\leftarrow M_1/3$
D_2	1							1	0					$\leftarrow M_2/3$
D_3								1	1		1	1		$\leftarrow I/1$
D_4								1	1			1		$\leftarrow I/1$
D_5								1				1		$\leftarrow I/1$
D_6								1	1			1		$\leftarrow I/1$
M_1		1											0	$\leftarrow D_3/2$
M_2			1										0	$\leftarrow D_3/2$
M_3													1	$\leftarrow D_1/4$
M_4													1	$\leftarrow D_3/2$
M_5													1	$\leftarrow D_3/2$
P								1	1					$\leftarrow M_4/3$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$I - D_3 - M_4 - P$$

Četvrta iteracija

	I	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	P	
I		0	0	0	1	1	1	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
D_1	1							0		1	1			$\leftarrow M_1/3$
D_2	1							1	0					$\leftarrow M_2/3$
D_3	1							1	1		0	1		$\leftarrow M_4/3$
D_4								1	1			1		$\leftarrow I/1$
D_5								1				1		$\leftarrow I/1$
D_6								1	1			1		$\leftarrow I/1$
M_1		1											0	$\leftarrow D_4/2$
M_2			1										0	$\leftarrow D_4/2$
M_3													1	$\leftarrow D_1/4$
M_4				1									0	$\leftarrow D_1/4$
M_5													1	$\leftarrow D_4/2$
P								1	1		1			$\leftarrow M_5/3$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$I - D_4 - M_5 - P$$

Nastavak je dat na sljedećoj stranici.

Peta iteracija

	I	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	P	
I		0	0	0	0	1	1	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
D_1	1							0		1	1			$\leftarrow M_1/3$
D_2	1							1	0					$\leftarrow M_2/5$
D_3	1							1	1		0	1		$\leftarrow M_4/5$
D_4	1							1	1			0		$\leftarrow M_5/3$
D_5								1				1		$\leftarrow I/1$
D_6								1	1			1		$\leftarrow I/1$
M_1		1											0	$\leftarrow D_5/2$
M_2			1										0	$\leftarrow D_4/4$
M_3													1	$\leftarrow D_1/4$
M_4				1									0	$\leftarrow D_1/4$
M_5					1								0	$\leftarrow D_5/2$
P								1	1		1	1		$\leftarrow M_3/5$

Pronađeni povećavajući lanac je:

$$I - D_5 - M_1 - D_1 - M_3 - P$$

Šesta iteracija

	I	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	P	
I		0	0	0	0	0	1	-	-	-	-	-	-	$\leftarrow -/0$
D_1	1							1		0	1			
D_2	1							1	0					$\leftarrow M_2/3$
D_3	1							1	1		0	1		
D_4	1							1	1			0		$\leftarrow M_5/3$
D_5	1							0				1		$\leftarrow M_1/3$
D_6								1	1			1		$\leftarrow I/1$
M_1		0				1							0	$\leftarrow D_6/2$
M_2			1										0	$\leftarrow D_6/2$
M_3		1											0	
M_4				1									0	
M_5					1								0	$\leftarrow D_6/2$
P								1	1	1	1	1		

Budući da više ne možemo doći do ponora, zaključujemo da algoritam terminira, sve grane su zasićene. Također, izvodimo zaključak da smo dostigli maksimalni protok. U nastavku su dati parovi.

$$(D_1, M_3)$$
$$(D_2, M_2)$$
$$(D_3, M_4)$$
$$(D_4, M_5)$$
$$(D_5, M_1)$$

Nakon što smo nabrojali moguće parove, uočavamo da će šesta djevojka „izvisiti“, odnosno da ona nema svog para.

Zadatak 41

Dat je periodični diskretni signal perioda 6, čije vrijednosti u trenucima 0, 1, 2, 3, 4 i 5 respektivno iznose –9, –2, –2, 7, 7 i –5.

a. Predstavite ovaj diskretni signal formulom u kojoj se javlja cijeli dio broja;
b. Predstavite ovaj signal diskretnim Fourierovim redom;
c. Odredite amplitudni i fazni spektar za ovaj signal i predstavite ga u vidu sume harmonika.

Rješenje:

a. Svaki periodični signal perioda N može se izraziti formulom

$$\boldsymbol{x_n = x_{-n} + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - x_{k-1}) \left\lfloor \frac{n-k}{N} \right\rfloor}$$

U našem primjeru je $x_0 = -9, x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = 7, x_4 = 7$ i $x_5 = -5$. Također, na osnovu periodičnosti imamo da je $x_{-1} = x_5 = -5$, pa je:

$$x_n = x_{-1} + (x_0 - x_{-1}) \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + (x_1 - x_0) \left\lfloor \frac{n-1}{6} \right\rfloor + (x_2 - x_1) \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor +$$

$$(x_3 - x_2) \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + (x_4 - x_3) \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + (x_5 - x_4) \left\lfloor \frac{n-5}{6} \right\rfloor =$$

$$= -5 - 4 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 7 \left\lfloor \frac{n-1}{6} \right\rfloor + 9 \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor - 12 \left\lfloor \frac{n-5}{6} \right\rfloor$$

b. Svaki periodični signal perioda N može se izraziti diskretnim Fourierovim redom

$$\boldsymbol{x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos\frac{2k\pi}{N} n + b_k \sin\frac{2k\pi}{N} n}$$

gdje su koeficijenti a_k i b_k dati formulama

$$\boldsymbol{a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\frac{2k\pi}{N} n, k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$$

$$\boldsymbol{b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\frac{2k\pi}{N} n, k = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$$

uz iznimku što se za parno N pri računanju koeficijenta a_k za $k = N/2$ ispred sume javlja faktor $1/N$ umjesto $2/N$ (pored toga, za parno N je uvijek $b_k = 0$ za $k = N/2$). Za konkretan primjer imamo:

$$a_0 = \frac{2}{6}(-9 \cdot cos0 - 2 \cdot cos0 - 2 \cdot cos0 + 7 \cdot cos0 + 7 \cdot cos0 - 5 \cdot cos0) =$$
$$= \frac{1}{3}(-9 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 5 \cdot 1) = \frac{1}{3}(-9 - 2 - 2 + 7 + 7 - 5) = -\frac{4}{3}$$
$$a_1 = \frac{2}{6}\left(-9 \cdot cos0 - 2 \cdot cos\frac{\pi}{3} - 2 \cdot cos\frac{2\pi}{3} + 7 \cdot cos\pi + 7 \cdot cos\frac{4\pi}{3} - 5 \cdot cos\frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-9 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 7 \cdot (-1) + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{22}{3}$$
$$a_2 = \frac{2}{6}\left(-9 \cdot cos0 - 2 \cdot cos\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot cos\frac{4\pi}{3} + 7 \cdot cos2\pi + 7 \cdot cos\frac{8\pi}{3} - 5 \cdot cos\frac{10\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-9 \cdot 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 7 \cdot 1 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{3}$$
$$a_3 = \frac{1}{6}(-9 \cdot cos0 - 2 \cdot cos\pi - 2 \cdot cos2\pi + 7 \cdot cos3\pi + 7 \cdot cos4\pi - 5 \cdot cos5\pi) =$$
$$= \frac{1}{6}\big(-9 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 - 5 \cdot (-1)\big) = -\frac{2}{3}$$
$$b_1 = \frac{2}{6}\left(-9 \cdot sin0 - 2 \cdot sin\frac{\pi}{3} - 2 \cdot sin\frac{2\pi}{3} + 7 \cdot sin\pi + 7 \cdot sin\frac{4\pi}{3} - 5 \cdot sin\frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-9 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 7 \cdot 0 + 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\sqrt{3}$$
$$b_2 = \frac{2}{6}\left(-9 \cdot sin0 - 2 \cdot sin\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot sin\frac{4\pi}{3} + 7 \cdot sin2\pi + 7 \cdot sin\frac{8\pi}{3} - 5 \cdot sin\frac{10\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-9 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 7 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3}$$

Za b_3 svakako znamo da je 0, jer je N parno. Stoga traženi razvoj u diskretni Fourierov red glasi:

$$x_n = -\frac{2}{3} - \frac{22}{3} \cdot cos\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3} \cdot sin\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot cos\frac{2n\pi}{3} + 2\sqrt{3} \cdot sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{2}{3} \cdot cosn\pi$$

c. Elementarnim trigonometrijskim transformacijama možemo izvesti formule prezentovane u nastavku, a koje opisuju amplitudni i fazni spektar periodičnog diskretnog signala, respektivno.

$$\boldsymbol{A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$
$$\boldsymbol{\varphi_k = arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}$$

Potrebno je naglasiti da prethodno navedene formule vrijede za k od 0 do $\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$ gdje ćemo za b_0 uzeti vrijednost 0. Postupak rješavanja ovog dijela zadatka se svodi na uvrštavanje vrijednosti izračunatih u dijelu pod b.

$$A_0 = \frac{4}{3}$$

$$A_1 = \sqrt{\left(-\frac{22}{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{511}}{3}$$

$$A_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{3}$$

$$A_3 = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{2}{3}$$

$$\varphi_0 = arctg(0) = 0$$

$$\varphi_1 = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-\frac{22}{3}}\right) \approx 0.231938$$

$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{-\frac{1}{3}}\right) \approx -1.474867$$

$$\varphi_3 = arctg(0) = 0$$

Nakon što smo izračunali sve potrebne vrijednosti, iste uvrštavamo u izraz koji je dat u nastavku.

$$\boldsymbol{x_n = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} A_k \cos\left(\frac{2k\pi}{N} n + \varphi_k\right)}$$

Konačno, imamo:

$$x_n = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{511}}{3} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 0.231938\right) + \frac{\sqrt{109}}{3} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3} - 1.474867\right) + \frac{2}{3} \cdot cosn\pi$$

Zadatak 42

Ispitajte koji su od sljedećih diskretnih signala periodični a koji nisu. Za one koji jesu, nađite osnovni period N:

a. $sin(2n\pi/15) + 3cos(5n\pi/21 + \pi/4)$
b. $(-1)^n cos(4n\pi/7)$
c. $sin(2^n \pi/3)$
d. $nsin(2n\pi/5)$

Odgovori moraju biti obrazloženi, inače se neće priznavati!

Rješenje:

Prije početka rješavanja ovog zadatka, potrebno je napomenuti kada su diskretni harmonijski signali periodični, a kada nisu. Naime, diskretni harmonijski signali su periodični ako je moguće pronaći prirodan broj k takav da vrijedi da je $2k\pi/\Omega$ također prirodan broj. Ukoliko je $\Omega = p\pi/q$ gdje su p i q uzajamno prosti prirodni brojevi, tada je diskretni harmonijski signal periodičan sa osnovnim periodom $2q$, ako je p neparan, odnosno q, ako je p paran. U slučaju da navedeni uslov nije zadovoljen, tada signal nije periodičan. Sada možemo pristupiti rješavanju zadanih slučajeva.

a. $\boldsymbol{sin(2n\pi/15) + 3cos(5n\pi/21 + \pi/4)}$
U ovom slučaju, prilikom ispitivanja periodičnosti, prvo ćemo posmatrati $sin(2n\pi/15)$, a nakon toga $3cos(5n\pi/21 + \pi/4)$. Ukoliko detaljnije proučimo $sin(2n\pi/15)$, jednostavno je uočiti da je $\Omega_1 = 2\pi/15$. Kako su $p = 2$ i $q = 15$ uzajamno prosti i p paran, slijedi da je period 15. Sada možemo preći na analizu $3cos(5n\pi/21 + \pi/4)$ gdje odmah primjećujemo da je $\Omega_2 = 5\pi/21$. Kako su $p = 5$ i $q = 21$ uzajamno prosti i p neparan, slijedi da je signal periodičan s osnovnim periodom $2q$, odnosno 42. Konačno možemo zaključiti da signal **jeste periodičan** i izračunati osnovni period ovog diskretnog signala preko najmanjeg zajedničkog sadržioca $N = NZS(15, 42) = 210$.

b. $\boldsymbol{(-1)^n cos(4n\pi/7)}$
Budući da $(-1)^n$ možemo predstaviti u obliku $\cos(n\pi)$, uvrštavanjem navedenog, ekvivalentnog oblika u dati izraz, a kasnije primjenom formule za proizvod dvije kosinusne funkcije, imamo:

$$\cos(n\pi) cos\frac{4n\pi}{7} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(n\pi + \frac{4n\pi}{7}\right) + \cos\left(n\pi - \frac{4n\pi}{7}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[cos\frac{11n\pi}{7} + cos\frac{3n\pi}{7}\right]$$

U navedenom izrazu, oba sabirka su očigledno periodična budući da njihove diskretne frekvencije zadovoljavaju potrebni oblik, odnosno $\Omega_1 = 11n\pi/7$ i $\Omega_2 = 3n\pi/7$. Na osnovu detaljnog obrazloženja datog na početku zadatka, zaključujemo da signal **jeste periodičan**, a ukupni period mu je 14, odnosno $2q$. To je jednostavno provjeriti preko najmanjeg zajedničkog sadržioca $N = NZS(7, 14) = 14$.

c. $\boldsymbol{sin(2^n \pi/3)}$

Možemo primijetiti da se 2^n može predstaviti u obliku reda. U nastavku ćemo predstaviti prvih nekoliko članova tog reda.

$$2^n = 1 + nln2 + \frac{1}{2}n^2ln^2 2 + \frac{1}{6}n^3ln^3 2 + \frac{1}{24}n^4ln^4 2 + \frac{1}{120}n^5ln^5 2$$

Sada, ukoliko uzmemo prva dva člana navedenog reda kako bismo predstavili 2^n, imamo:

$$sin\frac{2^n\pi}{3} = sin\frac{\pi(1 + nln2)}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi nln2}{3}\right)$$

Primjećujemo da je dati signal oblika $Asin(n\Omega + \phi)$, gdje je $\phi = \pi/3$, $A = 1$ i $\Omega = \pi ln2/3$. Kako Ω nema traženi oblik zbog prirodnog logaritma u brojniku, zaključujemo da signal **nije periodičan.**

d. $\boldsymbol{nsin(2n\pi/5)}$

Prvo ćemo ispitati periodičnost same sinusne funkcije $sin(2n\pi/5)$. Da je ona periodična pokazat ćemo preko $n \to n + 5$, odnosno:

$$y_n = sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)$$

$$y_{n+5} = sin\left(\frac{2(n+5)\pi}{5}\right) = sin\left(\frac{2n\pi + 10\pi}{5}\right) = sin\left(\frac{2n\pi}{5} + \frac{10\pi}{5}\right) = sin\left(\frac{2n\pi}{5} + 2\pi\right) = y_n$$

Međutim, iako smo pokazali da je data sinusna funkcija sama po sebi periodična, izraz kojeg čini ista zajedno s faktorom n ispred ne može biti periodičan, odnosno $n \cdot y_n$ **nije periodično.**

Zadatak 43

Odredite i nacrtajte amplitudno-frekventnu i fazno-frekventnu karakteristiku diskretnog sistema opisanog diferentnom jednačinom $y_n + 8y_{n-1} = 6\,x_n + 7\,x_{n-1}$, a nakon toga, odredite odziv ovog sistema na periodični signal iz Zadatka 1.

Rješenje:

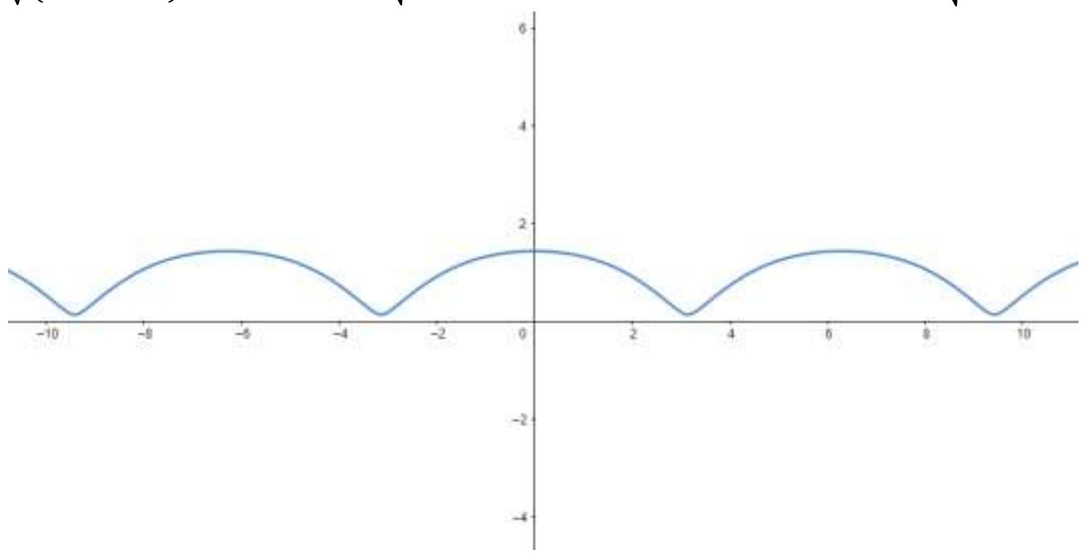
Za diskretne sisteme opisane diferentnim jednačinama, funkciju sistema $H(z)$ dobijamo primjenom smjene $x_n = z^n$, odnosno $y_n = z^n H(z)$.

$$z^n H(z) + 8z^{n-1}H(z) = 6z^n + 7z^{n-1}$$
$$H(z)(z^n + 8z^{n-1}) = 6z^n + 7z^{n-1}$$
$$H(z) = \frac{6z^n + 7z^{n-1}}{z^n + 8z^{n-1}}$$
$$H(z) = \frac{6z + 7}{z + 8}$$

Amplitudno – frekventna karakteristika sistema je data kao:

$$\boldsymbol{A}(\Omega) = \left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{i\Omega})\right|$$
$$\boldsymbol{e}^{i\Omega} = \boldsymbol{cos}\Omega + \boldsymbol{isin}\Omega$$

$$A(\Omega) = \left|\frac{6e^{i\Omega} + 7}{e^{i\Omega} + 8}\right| = \left|\frac{6(cos\Omega + isin\Omega) + 7}{cos\Omega + isin\Omega + 8}\right| = \left|\frac{6cos\Omega + 7 + 6isin\Omega}{cos\Omega + 8 + isin\Omega}\right| =$$
$$= \frac{\sqrt{(6cos\Omega + 7)^2 + (6sin\Omega)^2}}{\sqrt{(cos\Omega + 8)^2 + sin^2\Omega}} = \sqrt{\frac{36cos^2\Omega + 84cos\Omega + 49 + 36sin^2\Omega}{cos^2\Omega + 16cos\Omega + 64 + sin^2\Omega}} = \sqrt{\frac{84cos\Omega + 85}{16cos\Omega + 65}}$$



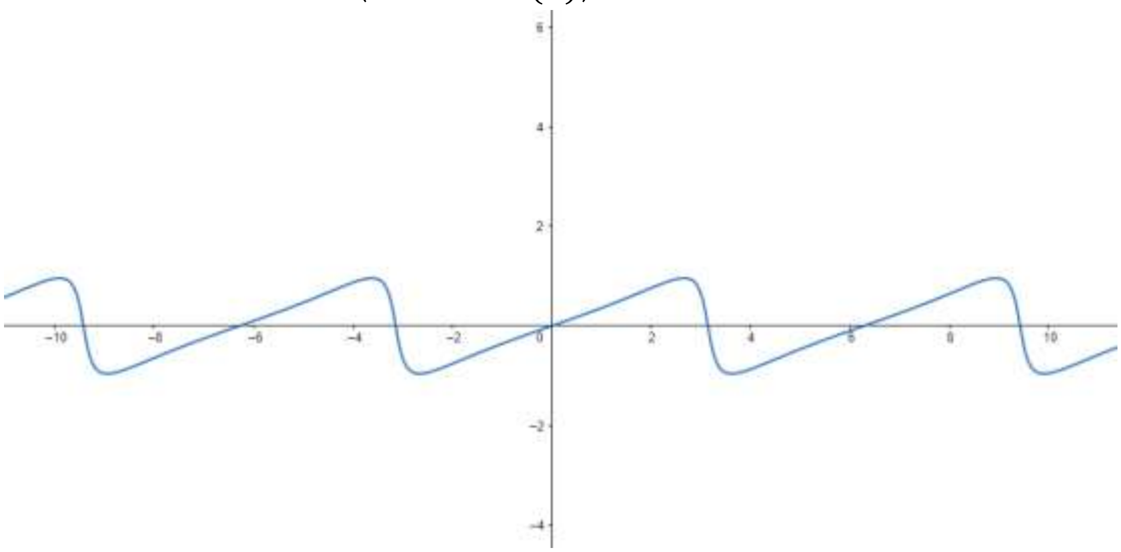
Slika 1. Amplitudno – frekventna karakteristika zadanog sistema

Fazno – frekventna karakteristika sistema je data kao:

$$\boldsymbol{\varphi}(\Omega) = \boldsymbol{argH}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\Omega})$$
$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\Omega} = \boldsymbol{cos}\Omega + \boldsymbol{isin}\Omega$$

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{6e^{i\Omega}+7}{e^{i\Omega}+8} = \frac{6cos\Omega+7+6isin\Omega}{cos\Omega+8+isin\Omega}\cdot\frac{cos\Omega+8-isin\Omega}{cos\Omega+8-isin\Omega} = \frac{62+55\cos(\Omega)+41isin(\Omega)}{65+16\cos(\Omega)}$$
$$= \frac{62+55\cos(\Omega)}{65+16\cos(\Omega)} + i\,\frac{41sin(\Omega)}{65+16\cos(\Omega)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\Omega) = \boldsymbol{argH}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\Omega}) = \boldsymbol{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\Omega}))}{\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\Omega}))}\right)^{*}$$
$$\varphi(\Omega) = arctg\left(\frac{\frac{41sin(\Omega)}{65+16\cos(\Omega)}}{\frac{62+55\cos(\Omega)}{65+16\cos(\Omega)}}\right) = arctg\left(\frac{41sin(\Omega)}{62+55\cos(\Omega)}\right)$$



Slika 2. Fazno – frekventna karakteristika zadanog sistema

U nastavku ćemo prezentovati postupak određivanja odziva ovog sistema na periodični signal iz Zadatka 1. Prvenstveno će nam trebati odgovarajuće vrijednosti izračunate u prvom zadatku.

$$A_0 = \frac{4}{3}\quad A_1 = \frac{\sqrt{511}}{3}\quad A_2 = \frac{\sqrt{109}}{3}\quad A_3 = \frac{2}{3}$$
$$\varphi_0 = 0\quad \varphi_1 \approx 0.231938\quad \varphi_2 \approx -1.474867\quad \varphi_3 = 0$$

* Formula za traženje argumenta kompleksnog broja koja je primijenjena u zadatku može biti korištena samo kada je realni dio kompleksnog broja veći od nule. Kako je kosinusna funkcija definisana na intervalu od -1 do 1, tako će u ovom slučaju čak i ako bude imala najnižu vrijednost (-1) opet realni dio biti pozitivan, pa će i brojnik, ali i nazivnik ostati pozitivni jer se od većeg broja oduzima manji što u konačnici daje pozitivan broj.

Odziv y linearnog stacionarnog sistema sa impulsnim odzivom h na proizvoljnu periodičnu pobudu x može se izraziti u obliku:

$$\boldsymbol{y_n = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} A_k\, A\left(\frac{2k\pi}{N}\right) cos\left(\frac{2k\pi}{N} n + \varphi_k + \varphi\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right)}$$

$$A(0) = \sqrt{\frac{84cos0 + 85}{16cos0 + 65}} = \boldsymbol{\frac{13}{9}} \approx \boldsymbol{1.44444} \qquad \varphi(0) = arctg\left(\frac{41sin0}{62 + 55\cos 0}\right) \approx \boldsymbol{0}$$

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{84cos\frac{\pi}{3} + 85}{16cos\frac{\pi}{3} + 65}} \approx \boldsymbol{1.31899} \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = arctg\left(\frac{41sin\frac{\pi}{3}}{62 + 55\cos\frac{\pi}{3}}\right) \approx \boldsymbol{0.37768}$$

$$A\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{84cos\frac{2\pi}{3} + 85}{16cos\frac{2\pi}{3} + 65}} \approx \boldsymbol{0.86855} \qquad \varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = arctg\left(\frac{41sin\frac{2\pi}{3}}{62 + 55\cos\frac{2\pi}{3}}\right) \approx \boldsymbol{0.79978}$$

$$A(\pi) = \sqrt{\frac{84cos\pi + 85}{16cos\pi + 65}} \approx \boldsymbol{0.14286} \qquad \varphi(\pi) = arctg\left(\frac{41sin\pi}{62 + 55\cos\pi}\right) \approx \boldsymbol{0}$$

$$y_n = A_0 A(0)\, cos\big(0 \cdot n + \varphi_0 + \varphi(0)\big) + A_1 A\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{3} n + \varphi_1 + \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$+ A_2 A\left(\frac{2\pi}{3}\right) cos\left(\frac{2\pi}{3} n + \varphi_2 + \varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + A_3 A(\pi)\, cos\big(\pi n + \varphi_3 + \varphi(\pi)\big) =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 1.44444\, cos(0 + 0 + 0) + \frac{\sqrt{511}}{3} \cdot 1.31899\, cos\left(\frac{\pi}{3} n + 0.231938 + 0.37768\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{109}}{3} \cdot 0.86855\, cos\left(\frac{2\pi}{3} n - 1.474867 + 0.79978\right) + \frac{2}{3} \cdot 0.14286\, cos(\pi n + 0 + 0) =$$

$$= \boldsymbol{1.92592 + 0.09524\, cos(n\,\pi) + 3.02264\, cos\left(0.675087 - \frac{2\,n\,\pi}{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{+ 9.93873\, cos\left(0.609618 + \frac{n\,\pi}{3}\right)}$$

Zadatak 44

Nađite z-transformaciju sekvence $x_n = (n^2 \sin(n\pi / 3) + (-5)^n / (2n)!)\, u_{n-5}$. Pri tome se po potrebi možete koristiti tablicama i osobinama z-transformacije.

Rješenje:

$$x_n = \left(n^2\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{(-5)^n}{(2n)!}\right) u_{n-5}$$

Potrebno je odrediti $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$. Možemo primijetiti da je sekvenca oblika $x_n = y_n \cdot u_{n-5}$, odakle je jednostavno očitati y_n.

$$y_n = n^2\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{(-5)^n}{(2n)!} \tag{1}$$

Sada možemo iskoristiti formulu koja je data u nastavku:

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}\{y_n u_{n-k}\} = Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{-i}}$$

Budući da znamo da je $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, a uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti $k = 5$, z-transformacija sekvence, konkretno za ovaj zadatak, će biti prikazana na sljedeći način:

$$\mathcal{Z}\{y_n u_{n-5}\} = Y(z) - \sum_{i=0}^{4} y_i z^{-i} \tag{2}$$

Nastavak postupka rješavanja zadatka dat je u nastavku:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{n^2\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\right\}$$

Primjenom odgovarajućih osobina z-transformacija odredit ćemo $\mathcal{Z}\left\{n^2\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ i $\mathcal{Z}\left\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\right\}$ pojedinačno.

Za $\mathcal{Z}\left\{n^2\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ koristimo osobinu $\boldsymbol{\mathcal{Z}\{n^k x_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)}$

$$\mathcal{Z}\left\{n^2\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left\{sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}\right)\right)$$

Za $\mathcal{Z}\left\{sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ koristimo jednakost $\boldsymbol{\mathcal{Z}\{sin\Omega n\} = \frac{z sin\Omega}{z^2 - 2z cos\Omega + 1}}$

$$\mathcal{Z}\left\{sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} = \frac{z \cdot sin\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2zcos\frac{\pi}{3} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1}$$

Sada se vratimo u prethodni izraz i imamo:

$$\mathcal{Z}\left\{n^2\,sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1}\right)\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot z\,(-1\,+\,z^2)}{2\,(1\,-\,z\,+\,z^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\cdot \boldsymbol{z}\,(\mathbf{1}\,+\,\boldsymbol{z}\,-\,\mathbf{6}\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}\,+\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}}\,+\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{4}})}{\mathbf{2}\,(\mathbf{1}\,-\,\boldsymbol{z}\,+\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{3}}}$$

Za $\mathcal{Z}\left\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\right\}$ koristimo pravila $\boldsymbol{\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X\left(\frac{z}{a}\right)}$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}\{x_{2n}\} = \frac{X(\sqrt{z})+X(-\sqrt{z})}{2}}$ i $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n!}\right\} = e^{\frac{1}{z}}$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(2n)!}\right\} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}}{2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\right\} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{z}{-5}}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{z}{-5}}}}}{2} = \frac{e^{i\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{z}}} + e^{-i\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{z}}}}{2}$$

Budući da znamo Eulerova formula pruža snažnu vezu između analize i trigonometrije i pruža tumačenje sinusnih i kosinusnih funkcija preko zbira eksponencijalne funkcije, imamo:

$$\boldsymbol{sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

$$\boldsymbol{cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

Sada možemo iskoristiti činjenicu $x = \sqrt{\frac{5}{z}}$ i dobijamo

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\right\} = \mathbf{cos}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{z}}}\right)$$

Konačno, imamo:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{n^2\,sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{(-5)^n}{(2n)!}\right\} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\cdot \boldsymbol{z}\,(\mathbf{1}\,+\,\boldsymbol{z}\,-\,\mathbf{6}\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}\,+\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}}\,+\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{4}})}{\mathbf{2}\,(\mathbf{1}\,-\,\boldsymbol{z}\,+\,\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{3}}} + \mathbf{cos}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{z}}}\right)$$

Ukoliko izraz (2) razvijemo u potrebni oblik i odredimo odgovarajuće vrijednosti y_n na osnovu izraza (1), dobit ćemo konačno rješenje.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{y_n u_{n-5}\} = Y(z) - \sum_{i=0}^{4} y_i z^{-i} =$$

$$= Y(z) - y_0 - y_1 \cdot \frac{1}{z} - y_2 \cdot \frac{1}{z^2} - y_3 \cdot \frac{1}{z^3} - y_4 \cdot \frac{1}{z^4}$$

$$y_n = n^2 \, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{(-5)^n}{(2n)!}$$

$$y_0 = 0^2 \, sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{(-5)^0}{(2 \cdot 0)!} = \mathbf{1} \qquad y_1 = 1^2 \, sin\left(\frac{1 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{(-5)^1}{(2 \cdot 1)!} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

$$y_2 = 2^2 \, sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{(-5)^2}{(2 \cdot 2)!} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{24}} + \mathbf{2\sqrt{3}} \qquad y_3 = 3^2 \, sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{(-5)^3}{(2 \cdot 3)!} = -\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{144}}$$

$$y_4 = 4^2 \, sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{(-5)^4}{(2 \cdot 4)!} = \frac{\mathbf{125}}{\mathbf{8064}} - \mathbf{8\sqrt{3}}$$

$$X(z) = \frac{\sqrt{3} \cdot z\,(1 + z - 6\,z^2 + z^3 + z^4)}{2\,(1 - z + z^2)^3} + \cos\left(\sqrt{\frac{5}{z}}\right)$$

$$-1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{25}{24} + 2\sqrt{3}\right)\frac{1}{z^2} + \frac{25}{144}\frac{1}{z^3} - \left(\frac{125}{8064} - 8\sqrt{3}\right)\frac{1}{z^4} =$$

$$= -\frac{\frac{\mathbf{125}}{\mathbf{8064}} - \mathbf{8\sqrt{3}}}{\boldsymbol{z^4}} + \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{144}\,\boldsymbol{z^3}} - \frac{\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{24}} + \mathbf{2\sqrt{3}}}{\boldsymbol{z^2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{z}\,(\boldsymbol{z^4} + \boldsymbol{z^3} - \mathbf{6}\,\boldsymbol{z^2} + \boldsymbol{z} + \mathbf{1})}{\mathbf{2}\,(\boldsymbol{z^2} - \boldsymbol{z} + \mathbf{1})^3}$$

$$-\frac{\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{cos}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{z}}}\right) - \mathbf{1}$$

Zadatak 45

Dat je diskretni sistem opisan diferentnom jednačinom 5 y_{n+3} – 3 y_{n+2} = 2 x_{n+3} + 7 x_n. Nađite odziv ovog sistema na pobudu $x_n = n\cos(n\pi / 2)\, u_n$. Rješenje treba izraziti u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi.

Rješenje:

Na samom početku izrade zadatka možemo primijetiti da odziv zadanog sistema na pobudu $x_n = ncos(\frac{n\pi}{2})u_n$ možemo odrediti primjenom *z-transformacije*.

$$\boldsymbol{y_n = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)H(z)\}}$$

gdje je $\boldsymbol{X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}}$. Za diskretne sisteme opisane diferentnim jednačinama, funkciju sistema $H(z)$ dobijamo primjenom smjene $x_n = z^n$, odnosno $y_n = z^n H(z)$.

$$5y_{n+3} - 3y_{n+2} = 2x_{n+3} + 7x_n$$
$$5z^{n+3}H(z) - 3z^{n+2}H(z) = 2z^{n+3} + 7z^n$$
$$H(z)(5z^{n+3} - 3z^{n+2}) = 2z^{n+3} + 7z^n$$
$$H(z) = \frac{2z^{n+3} + 7z^n}{5z^{n+3} - 3z^{n+2}}$$
$$H(z) = \frac{2z^3 + 7}{5z^3 - 3z^2}$$
$$\boldsymbol{H(z) = \frac{2z^3 + 7}{z^2(5z - 3)}}$$

Korištenjem pravila za $k \geq 0$ kod kojeg vrijedi $\boldsymbol{\mathcal{Z}\{x_{n-k}u_{n-k}\} = z^{-k}X(z)}$, analogno prethodnom zadatku, pristupit ćemo rješavanju ovog dijela zadatka 5.

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\left\{ncos\left(\frac{n\pi}{2}\right)u_n\right\}$$
$$\mathcal{Z}\left\{ncos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left\{cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\right)$$
$$\mathcal{Z}\left\{cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = \frac{z\left(z - cos\frac{\pi}{2}\right)}{z^2 - 2zcos\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z^2}{1 + z^2}$$
$$\mathcal{Z}\left\{ncos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1 + z^2}\right) = -\frac{\boldsymbol{2\,z^2}}{\boldsymbol{(1 + z^2)^2}}$$

Dakle,

$$\boldsymbol{X(z) = -\frac{2\,z^2}{(1 + z^2)^2}}$$

Sada, jednostavno možemo očitati polinome $P(z)$ i $Q(z)$.

$$X(z)H(z) = \frac{2\,z^2(2z^3 + 7)}{z^2(3 - 5z)(1 + z^2)^2} = \frac{2\,z(2z^3 + 7)}{z(3 - 5z)(1 + z^2)^2}$$

$$P(z) = 2\,(2z^3 + 7)$$
$$Q(z) = z(3-5z)(1 + z^2)^2 = z(3-5z)(z-i)^2(z+i)^2$$

$$z_1 = 0 \qquad v_1 = 1 \qquad Q_1 = (3-5z)(z-i)^2(z+i)^2$$
$$z_2 = \frac{3}{5} \qquad v_2 = 1 \qquad Q_2 = z(z-i)^2(z+i)^2$$
$$z_3 = i \qquad v_3 = 2 \qquad Q_3 = z(3-5z)(z+i)^2$$
$$z_4 = -i \qquad v_4 = 2 \qquad Q_4 = z(3-5z)(z-i)^2$$

U nastavku ćemo primijeniti *Leibnizovo pravilo* kako bismo odredili traženu inverznu z-transformaciju.

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{v_k-1} \frac{1}{(v_k-i-1)!}\frac{d^{v_k-i-1}}{dz^{v_k-i-1}}\left[\frac{P(z)}{Q_k(z)}\right]_{z=z_k}\binom{n}{i}{z_k}^{n-i}}$$

$$y_n = \left[\frac{P(z)}{Q_1(z)}\right]_{z=z_1}\delta_n + \left[\frac{P(z)}{Q_2(z)}\right]_{z=z_2}{z_2}^n + \frac{d}{dz}\left[\frac{P(z)}{Q_3(z)}\right]_{z=z_3}\binom{n}{0}{z_3}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_3(z)}\right]_{z=z_3}\binom{n}{1}{z_3}^{n-1} + \frac{d}{dz}\left[\frac{P(z)}{Q_4(z)}\right]_{z=z_4}\binom{n}{0}{z_4}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_4(z)}\right]_{z=z_4}\binom{n}{1}{z_4}^{n-1}$$

$$y_n = \left[\frac{2\,(2z^3+7)}{(3-5z)(z-i)^2(z+i)^2}\right]_{z=0}\delta_n + \left[\frac{2\,(2z^3+7)}{z(z-i)^2(z+i)^2}\right]_{z=\frac{3}{5}}{z_2}^n + \frac{d}{dz}\left[\frac{2\,(2z^3+7)}{z(3-5z)(z+i)^2}\right]_{z=i}{z_3}^n + \left[\frac{2\,(2z^3+7)}{z(3-5z)(z+i)^2}\right]_{z=i}n{z_3}^{n-1} + \frac{d}{dz}\left[\frac{2\,(2z^3+7)}{z(3-5z)(z-i)^2}\right]_{z=-i}{z_4}^n + \left[\frac{2\,(2z^3+7)}{z(3-5z)(z-i)^2}\right]_{z=-i}n{z_4}^{n-1} =$$
$$\left[\frac{2\,(2z^3+7)}{(3-5z)(z-i)^2(z+i)^2}\right]_{z=0}\delta_n + \frac{23225}{1734}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left[\frac{2\,(-21i-(63-70\,i)z+140\,z^2+12\,i\,z^3-10\,i\,z^4+10\,z^5)}{(3-5\,z)^2z^2(i+z)^3}\right]_{z=i}i^n + \left(-\frac{29}{68}+\frac{31i}{68}\right)ni^{n-1} + \left[\frac{2\,(21i-(63+70\,i)z + 140\,z^2-12\,i\,z^3+10i\,z^4+10\,z^5)}{(3-5\,z)^2z^2(-i+z)^3}\right]_{z=-i}(-i)^n + \left(-\frac{29}{68}-\frac{31\,i}{68}\right)n(-i)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{14}{3}+\frac{929}{578}3^{-1+n}5^{2-n} + \left(-\frac{1149}{1156}-\frac{711\,i}{578}\right)i^n + \left(\frac{31}{68}+\frac{29\,i}{68}\right)i^n n + \left(-\frac{1149}{1156}+\frac{711\,i}{578}\right)(-i)^n + \left(\frac{31}{68}-\frac{29\,i}{68}\right)(-i)^n n}$$

Ono što je potrebno uraditi jeste riješiti se kompleksnih brojeva. Izrazi koji ih sadrže su napisani tako da čine dva konjugovano – kompleksna para broja, što je opravdano budući da su oni rezultat dvije konjugovano – kompleksne nule. Koristit ćemo gotovu formulu izraženu preko trigonometrijskog oblika, Moivreovog obrasca, te očigledne relacije $\zeta+\bar{\zeta}=2Re\zeta$ i $\zeta-\bar{\zeta}=2iIm\zeta$.

$$\boldsymbol{\Pi(n)\zeta^n + \overline{\Pi(n)}\bar{\zeta}^n = 2\rho^n(Re\Pi(n)cosn\varphi - Im\Pi(n)sinn\varphi)}$$

Ako znamo da je $\zeta=\rho e^{i\varphi}$ gdje je $\rho=|\zeta|$ i $\varphi = arg\zeta$ možemo pristupiti daljnjem rješavanju.

$$za\ z=\zeta=i \text{ imamo } \rho=1, \varphi=\frac{\pi}{2}, \bar{\zeta}=-i$$
$$\Pi(n)\zeta^n = \left(-\frac{1149}{1156}-\frac{711\,i}{578}\right)i^n + \left(\frac{31}{68}+\frac{29\,i}{68}\right)i^n n$$
$$\overline{\Pi(n)}\bar{\zeta}^n = \left(-\frac{1149}{1156}+\frac{711\,i}{578}\right)(-i)^n + \left(\frac{31}{68}-\frac{29\,i}{68}\right)(-i)^n n$$

$$\Pi(n)\zeta^n + \overline{\Pi(n)}\bar{\zeta}^n =$$

$$= \left(-\frac{1149}{1156} + \frac{31}{68}n + i\left(-\frac{711}{578} + \frac{29}{68}n\right)\right)i^n + \left(-\frac{1149}{1156} + \frac{31}{68}n - i\left(-\frac{711}{578} + \frac{29}{68}n\right)\right)(-i)^n =$$

$$= 2 \cdot 1^n \left(\left(-\frac{1149}{1156} + \frac{31}{68}n\right) cos\frac{n\pi}{2} - \left(-\frac{711}{578} + \frac{29}{68}n\right) sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

Konačno, imamo:

$$\boldsymbol{y_n = \frac{14}{3} + \frac{929}{578}3^{-1+n}5^{2-n} + 2\left(\left(-\frac{1149}{1156} + \frac{31}{68}n\right) cos\frac{n\pi}{2} - \left(-\frac{711}{578} + \frac{29}{68}n\right) sin\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Zadatak 46

Neki linearni, stacionarni i kauzalni sistem ima impulsni odziv $h_n = (64 - 21\,n)\,(-2)^n - 56\,\delta_n + 30\,\delta_{n-1}$ za $n \geq 0$ i $h_n = 0$ za $n < 0$. Nađite impulsni odziv $h_n{}'$ inverznog sistema ovog sistema koristeći tehnike zasnovane na z-transformaciji. Provjerite rezultat tako što ćete naći vrijednosti $h_n{}'$ za $n = 0 \,..\, 5$ postupkom diskretne dekonvolucije.

Rješenje:

Ukoliko neki sistem S ima sekvencu h za impulsni odziv, njegov inverzni sistem će za impulsni odziv imati sekvencu h', takvu da vrijedi $h_n \cdot h_n{}' = \delta_n$. Na osnovu teoreme o konvoluciji znamo $\mathcal{Z}\{h_n \cdot h_n{}'\} = H(z) \cdot H'(z) = 1$, odnosno

$$\boldsymbol{H'(z) = \frac{1}{H(z)}}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\{(64 - 21n)(-2)^n - 56\delta_n + 30\,\delta_{n-1}\}$$
$$H(z) = \mathcal{Z}\{64(-2)^n - 21n(-2)^n - 56\delta_n + 30\,\delta_{n-1}\}$$

Koristimo:

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$$
$$\mathcal{Z}\{na^n\} = \frac{a\,z}{(z-a)^2}$$
$$\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1$$
$$\mathcal{Z}\{\delta_{n-k}\} = z^{-k}$$

Konkretno dobijemo:

$$\mathcal{Z}\{64(-2)^n\} = \frac{64z}{z+2}$$
$$\mathcal{Z}\{21n(-2)^n\} = \frac{-42z}{(z+2)^2}$$
$$\mathcal{Z}\{56\delta_n\} = 56$$
$$\mathcal{Z}\{30\,\delta_{n-1}\} = 30z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{64z}{z+2} + \frac{42z}{(z+2)^2} - 56 + \frac{30}{z}$$
$$H(z) = \frac{8\,(z-1)(z+3)(z-5)}{z\,(z+2)^2}$$

Funkcija sistema koji je inverzan u odnosu na početni sistem ima sljedeći oblik:

$$\boldsymbol{H'(z) = \frac{z\,(z+2)^2}{8\,(z-1)(z+3)(z-5)}} = \frac{z \cdot P(z)}{Q(z)}$$

Impulsni odziv inverznog početnog sistema je dat u nastavku:

$$h_n{}' = \mathcal{Z}^{-1}\{H'(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z\,(z+2)^2}{8\,(z-1)(z+3)(z-5)}\right\}$$
$$P(z) = (z+2)^2$$
$$Q(z) = 8\,(z-1)(z+3)(z-5)$$

$$z_1 = 1 \qquad v_1 = 1 \qquad Q_1 = 8\,(z+3)(z-5)$$
$$z_2 = -3 \qquad v_2 = 1 \qquad Q_2 = 8\,(z-1)(z-5)$$
$$z_3 = 5 \qquad v_3 = 1 \qquad Q_3 = 8\,(z-1)(z+3)$$

Sada ćemo primijeniti opću, veoma jednostavnu relaciju kojom je dat izraz za *inverznu z-transformaciju.*

$$\boldsymbol{x_n = \sum_{k=1}^{q} \frac{P(z_k)}{Q_k(z_k)} {z_k}^n}$$

$$h_n{}' = \mathcal{Z}^{-1}\{H'(z)\} = \frac{P(1)}{Q_1(1)}1^n + \frac{P(-3)}{Q_2(-3)}(-3)^n + \frac{P(5)}{Q_3(5)}5^n = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{128}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{256}}(\mathbf{-3})^{\boldsymbol{n}} + \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{256}}\mathbf{5}^{\boldsymbol{n}}$$

Potrebno je izvršiti provjeru primjenom diskretne dekonvolucije. Impulsni odziv $h_n{}'$ za proizvoljnu vrijednost n, možemo izračunati ako primijenimo formulu prezentovanu u nastavku:

$$\boldsymbol{h_0{}' = \frac{1}{h_0}}$$

$$\boldsymbol{h_n{}' = -\frac{1}{h_0}\sum_{k=0}^{n-1} h_k{}' h_{n-k} \quad za\; n > 0}$$

$$h_n = (64 - 21n)(-2)^n - 56\delta_n + 30\,\delta_{n-1} \quad za\; n \geq 0\; i\; h_n = 0\; za\; n < 0$$

Potrebno je napomenuti da će rješenja, kao i njihova tačnost, biti prikazani u nastavku sa lijeve i desne strane, pri čemu će sa lijeve biti prikazana ona rješenja dobivena korištenjem izraza kojeg smo dobili preko inverzne z-transformacije, dok će desno biti predstavljena rješenja dobivena primjenom diskretne dekonvolucije.

$$h_0{}' = -\frac{9}{128} + \frac{1}{256}(-3)^0 + \frac{49}{256}5^0 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} \qquad h_0{}' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

$$h_1{}' = -\frac{9}{128} + \frac{1}{256}(-3)^1 + \frac{49}{256}5^1 = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}} \qquad h_1{}' = -\frac{1}{h_0}h_0{}'h_1 = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot(-56) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$$

$$h_2{}' = -\frac{9}{128} + \frac{1}{256}(-3)^2 + \frac{49}{256}5^2 = \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{4}} \qquad h_2{}' = -\frac{1}{h_0}(h_0{}'h_2 + h_1{}'h_1) = -\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot 88 + \frac{7}{8}\cdot(-56)\right) = \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{4}}$$

$$h_3{}' = -\frac{9}{128} + \frac{1}{256}(-3)^3 + \frac{49}{256}5^3 = \frac{\mathbf{95}}{\mathbf{4}} \qquad h_3{}' = -\frac{1}{h_0}(h_0{}'h_3 + h_1{}'h_2 + h_2{}'h_1) = \frac{\mathbf{95}}{\mathbf{4}}$$

$$h_4{}' = -\frac{9}{128} + \frac{1}{256}(-3)^4 + \frac{49}{256}5^4 = \frac{\mathbf{959}}{\mathbf{8}} \qquad h_4{}' = -\frac{1}{h_0}(h_0{}'h_4 + h_1{}'h_3 + h_2{}'h_2 + h_3{}'h_1) = \frac{\mathbf{959}}{\mathbf{8}}$$

$$h_5{}' = -\frac{9}{128} + \frac{1}{256}(-3)^5 + \frac{49}{256}5^5 = \frac{\mathbf{4777}}{\mathbf{8}} \qquad h_5{}' = -\frac{1}{h_0}(h_0{}'h_5 + h_1{}'h_4 + h_2{}'h_3 + h_3{}'h_2 + h_4{}'h_1) = \frac{\mathbf{4777}}{\mathbf{8}}$$

Zadatak 47

Data su dva diskretna sistema opisana diferentnim jednačinama $15\,y_n + 8\,y_{n-1} + y_{n-2} = 3\,x_n - 2\,x_{n-1}$ i $2\,y_n + y_{n-1} = x_n + 3\,x_{n-1}$. Nađite diferentne jednačine kojima se opisuju paralelna i serijska (kaskadna) veza ova dva sistema, a nakon toga odredite odziv serijske veze ovih sistema na pobudu $x_n = \cos^3(n\pi\ /\ 3)$, $n \in \mathbb{Z}$ (u krajnjem rješenju ne smiju figurirati kompleksni brojevi). Uputa: razmotrite kako glase funkcije sistema paralelne odnosno serijske veze dva sistema ukoliko su poznate njihove funkcije sistema i kako možete rekonstruisati diferentnu jednačinu koja opisuje neki sistem ukoliko znate njegovu funkciju sistema. Što se tiče pobude x_n, razmotrite kako se ona može prikazati u vidu linearne kombinacije pobuda oblika z^n.

Rješenje:

Na samom početku je potrebno odrediti prenosne funkcije oba sistema. Postupak je analogan onom u prethodnim zadacima.

$$15y_n + 8y_{n-1} + y_{n-2} = 3x_n - 2x_{n-1}$$
$$15z^n H_1(z) + 8z^{n-1}H_1(z) + z^{n-2}H_1(z) = 3z^n - 2z^{n-1}$$
$$H_1(z)(15z^n + 8z^{n-1} + z^{n-2}) = 3z^n - 2z^{n-1}$$
$$H_1(z) = \frac{3z^n - 2z^{n-1}}{15z^n + 8z^{n-1} + z^{n-2}}$$
$$H_1(z) = \frac{3\,z^2 - 2z}{15\,z^2 + 8z + 1}$$
$$\boldsymbol{H_1(z) = \frac{z(3z-2)}{(5z+1)(3z+1)}}$$

$$2y_n + y_{n-1} = x_n + 3x_{n-1}$$
$$2z^n H_2(z) + z^{n-1}H_2(z) = z^n + 3z^{n-1}$$
$$H_2(z)(2z^n + z^{n-1}) = z^n + 3z^{n-1}$$
$$H_2(z) = \frac{z^n + 3z^{n-1}}{2z^n + z^{n-1}}$$
$$\boldsymbol{H_2(z) = \frac{z+3}{2z+1}}$$

Funkcija sistema paralelne veze ova dva sistema glasi:

$$\boldsymbol{H_p(z) = H_1(z) + H_2(z)}$$
$$H_p(z) = \frac{z(3z-2)}{(5z+1)(3z+1)} + \frac{z+3}{2z+1} = \frac{21\,z^3 + 52\,z^2 + 23\,z + 3}{(2\,z + 1)(3\,z + 1)(5\,z + 1)} =$$
$$= \frac{21\,z^3 + 52\,z^2 + 23\,z + 3}{30\,z^3 + 31\,z^2 + 10\,z + 1} = \boldsymbol{\frac{21\,z^n + 52\,z^{n-1} + 23\,z^{n-2} + 3z^{n-3}}{30\,z^n + 31\,z^{n-1} + 10\,z^{n-2} + z^{n-3}}}$$

Na osnovu funkcije sistema slijedi da diferentna jednačina koja opisuje paralelnu vezu zadana dva sistema glasi:

$$\boldsymbol{30\,y_n + 31\,y_{n-1} + 10\,y_{n-2} + y_{n-3} = 21\,x_n + 52\,x_{n-1} + 23\,x_{n-2} + 3x_{n-3}}$$

Funkcija sistema serijske veze ova dva sistema glasi:

$$\boldsymbol{H_s(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)}$$

$$H_s(z) = \frac{z(3z-2)}{(5z+1)(3z+1)} \cdot \frac{z+3}{2z+1} = \frac{3\,z^3 + \,7\,z^2 - \,6\,z}{30\,z^3 + \,31\,z^2 + \,10\,z \, + \,1} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3\,z^n + \,7\,z^{n-1} - \,6\,z^{n-2}}{30\,z^n + \,31\,z^{n-1} + \,10\,z^{n-2} \, + \,z^{n-3}}}$$

Na osnovu funkcije sistema slijeda da diferentna jednačina koja opisuje serijsku vezu zadana dva sistema glasi:

$$\boldsymbol{30\,y_n + \,31\,y_{n-1} + \,10\,y_{n-2} \, + \,y_{n-3} = 3\,x_n + \,7\,x_{n-1} - \,6\,x_{n-2}}$$

Sada je potrebno naći odziv serijske veze zadanih sistema na zadanu pobudu. Prvenstveno je potrebno transformisati pobudu na sljedeći način:

$$x_n = cos^3\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(e^{-\frac{i\,\pi\,n}{3}} + \,e^{\frac{i\,\pi\,n}{3}}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(3\,e^{-\frac{i\,\pi\,n}{3}} \, + \,3\,e^{\frac{i\,\pi\,n}{3}} \, + \,e^{-i\,\pi\,n} \, + \,e^{i\,\pi\,n}\right) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{4} cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) \, + \, \frac{1}{4} cos(n\,\pi)}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{3}{4} cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{z\left(z - cos\frac{\pi}{3}\right)}{z^2 - 2zcos\frac{\pi}{3} + 1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}{z^2 - z + 1}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{4} cos(n\,\pi)\right\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z(z - cos\pi)}{z^2 - 2zcos\pi + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z(z+1)}{z^2 + 2z + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z(z+1)}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(z+1)}$$

Dakle,

$$\boldsymbol{X(z)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(z+1)}$$

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{z\,(8\,z^2 + \,z - 1)}{8\,(z^3 + \,1)}}$$

Sada, jednostavno možemo očitati polinome $P(z)$ i $Q(z)$.

$$X(z)H(z) = \frac{z\,(8\,z^2 + \,z - 1)}{8\,(z^3 + \,1)} \cdot \frac{z(3z-2)}{(5z+1)(3z+1)} \cdot \frac{z+3}{2z+1} =$$

$$= \frac{z^2(z\, + \,3)(3\,z \, - \,2)(8\,z^2 + \,z \, - \,1)}{8\,(2\,z \, + \,1)(3\,z \, + \,1)(5\,z \, + \,1)(z^3 + \,1)}$$

$$P(z) = z(z\, + \,3)(3\,z \, - \,2)(8\,z^2 + \,z \, - \,1)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} \qquad v_1 = 1 \qquad Q_1 = 8\,(3\,z \, + \,1)(5\,z \, + \,1)(z+1)(z^2 - z + 1)$$

$$z_2 = -\frac{1}{3} \qquad v_2 = 1 \qquad Q_2 = 8\,(2\,z \, + \,1)(5\,z \, + \,1)(z+1)(z^2 - z + 1)$$

$$z_3 = -\frac{1}{5} \qquad v_3 = 1 \qquad Q_3 = 8\,(2\,z\,+\,1)(3\,z\,+\,1)(z+1)(z^2 - z + 1)$$

$$z_4 = -1 \qquad v_4 = 1 \qquad Q_4 = 8\,(2\,z\,+\,1)(3\,z\,+\,1)(5\,z\,+\,1)(z^2 - z + 1)$$

$$z_5 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad v_5 = 1 \qquad Q_5 = 8\,(2\,z\,+\,1)(3\,z\,+\,1)(5\,z\,+\,1)(z+1)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_6 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad v_6 = 1 \qquad Q_6 = 8\,(2\,z\,+\,1)(3\,z\,+\,1)(5\,z\,+\,1)(z+1)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Q(z) = 8\,(2\,z\,+\,1)(3\,z\,+\,1)(5\,z\,+\,1)(z^3 +\,1)$$

U nastavku ćemo primijeniti *Leibnizovo pravilo* kako bismo odredili traženu inverznu z-transformaciju.

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{v_k-1} \frac{1}{(v_k - i - 1)!} \frac{d^{v_k-i-1}}{dz^{v_k-i-1}} \left[\frac{P(z)}{Q_k(z)}\right]_{z=z_k} \binom{n}{i} {z_k}^{n-i}}$$

$$y_n = \left[\frac{P(z)}{Q_1(z)}\right]_{z=z_1} {z_1}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_2(z)}\right]_{z=z_2} {z_2}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_3(z)}\right]_{z=z_3} {z_3}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_4(z)}\right]_{z=z_4} {z_4}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_5(z)}\right]_{z=z_5} {z_5}^n +$$

$$\left[\frac{P(z)}{Q_6(z)}\right]_{z=z_6} {z_6}^n = \left[\frac{z(z+3)(3\,z-2)\left(8\,z^2+z-1\right)}{8\,(3\,z+1)(5\,z+1)(z+1)(z^2-z+1)}\right]_{z=z_1} {z_1}^n +$$

$$\left[\frac{z(z+3)(3\,z-2)\left(8\,z^2+z-1\right)}{8\,(2\,z+1)(5\,z+1)(z+1)(z^2-z+1)}\right]_{z=z_2} {z_2}^n + \left[\frac{z(z+3)(3\,z-2)\left(8\,z^2+z-1\right)}{8\,(2\,z+1)(3\,z+1)(z+1)(z^2-z+1)}\right]_{z=z_3} {z_3}^n +$$

$$\left[\frac{z(z+3)(3\,z-2)\left(8\,z^2+z-1\right)}{8\,(2\,z+1)(3\,z+1)(5\,z+1)(z^2-z+1)}\right]_{z=z_4} {z_4}^n + \left[\frac{z(z+3)(3\,z-2)\left(8\,z^2+z-1\right)}{8\,(2\,z+1)(3\,z+1)(5\,z+1)(z+1)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\right]_{z=z_5} {z_5}^n +$$

$$\left[\frac{z(z+3)(3\,z-2)\left(8\,z^2+z-1\right)}{8\,(2\,z+1)(3\,z+1)(5\,z+1)(z+1)\left(z-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\right]_{z=z_6} {z_6}^n =$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+3\right)\left(3\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right)\left(8\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1\right)}{8\left(3\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(5\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right)}\left(-\frac{1}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+3\right)\left(3\left(-\frac{1}{3}\right)-2\right)\left(8\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-1\right)}{8\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)\left(5\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)\left(-\frac{1}{3}+1\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1\right)}\left(-\frac{1}{3}\right)^n +$$

$$\frac{-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}+3\right)\left(3\left(-\frac{1}{5}\right)-2\right)\left(8\left(-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{5}-1\right)}{8\left(2\left(-\frac{1}{5}\right)+1\right)\left(3\left(-\frac{1}{5}\right)+1\right)\left(-\frac{1}{5}+1\right)\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}+1\right)}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{-1(-1+3)(-3-2)(8-1-1)}{8\,(-2+1)(-3+1)(-5+1)(1+1+1)}(-1)^n +$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+3\right)\left(3\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)-2\right)\left(8\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}-1\right)}{8\left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\left(3\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\left(5\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n +$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}+3\right)\left(3\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)-2\right)\left(8\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-1\right)}{8\left(2\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\left(3\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\left(5\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\boldsymbol{y_n = \frac{5}{3}(-1)^n 2^{-n-2} + \frac{1}{13}(-1)^n 3^{2-n} - \frac{1001\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1488} - \frac{5}{16}(-1)^n + \frac{3\left(58+25\, i\sqrt{3}\right)}{3224}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{3\left(58-25\, i\sqrt{3}\right)}{3224}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n}$$

Ono što je potrebno uraditi jeste riješiti se kompleksnih brojeva. Izrazi koji ih sadrže su napisani tako da čine dva konjugovano – kompleksna para broja, što je opravdano budući da su oni rezultat dvije konjugovano – kompleksne nule. Koristit ćemo gotovu formulu izraženu preko trigonometrijskog oblika, Moivreovog obrasca, te očigledne relacije $\zeta + \bar{\zeta} = 2Re\zeta$ i $\zeta - \bar{\zeta} = 2iIm\zeta$.

$$\boldsymbol{\Pi(n)\zeta^n + \overline{\Pi(n)}\bar{\zeta}^n = 2\rho^n(Re\Pi(n)cosn\varphi - Im\Pi(n)sinn\varphi)}$$

Ako znamo da je $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ gdje je $\rho = |\zeta|$ i $\varphi = arg\zeta$ možemo pristupiti daljnjem rješavanju.

$$za\ z = \zeta = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ imamo } \rho = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}, \bar{\zeta} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Pi(n)\zeta^n = \frac{3\left(58 + 25\, i\sqrt{3}\right)}{3224}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\overline{\Pi(n)}\bar{\zeta}^n = \frac{3\left(58 - 25\, i\sqrt{3}\right)}{3224}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\Pi(n)\zeta^n + \overline{\Pi(n)}\bar{\zeta}^n = \frac{3\left(58 + 25\, i\sqrt{3}\right)}{3224}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{3\left(58 - 25\, i\sqrt{3}\right)}{3224}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n =$$

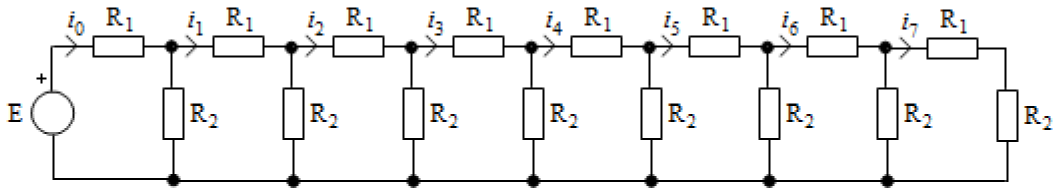
$$= 2\cdot 1^n\left(\frac{174}{3224}cos\frac{n\pi}{3} - \frac{75\sqrt{3}}{3224}sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

Konačno, imamo:

$$\boldsymbol{y_n = \frac{5}{3}(-1)^n 2^{-n-2} + \frac{1}{13}(-1)^n 3^{2-n} - \frac{1001\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1488} - \frac{5}{16}(-1)^n + 2\left(\frac{174}{3224}cos\frac{n\pi}{3} - \frac{75\sqrt{3}}{3224}sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

Zadatak 48

Odredite vrijednosti struja i_n, $n = 0\,..\,7$ u električnom kolu na slici, ukoliko je poznato da je E = 13 V, R_1 = 2 K i R_2 = 6 K:



Uputa: Za sve konture osim prve i posljednje, jednačine po II Kirchoffovom zakonu imaju isti oblik, koji povezuje struje sa tri susjedna indeksa. Stoga je moguće napisati diferentnu jednačinu koja povezuje vrijednosti i_n, i_{n+1} i i_{n+2}. Da bismo riješili ovu diferentnu jednačinu, trebaju nam početne vrijednosti i_0 i i_1 koje, nažalost, ne znamo. Stavimo $i_0 = c$ gdje je c neka konstanta koju ćemo naknadno odrediti. Iz prve konture može se napisati jednačina koja povezuje i_0 i i_1, tako da možemo izraziti i_1 preko c. Sada treba riješiti dobijenu diferentnu jednačinu, pri čemu će rješenje za i_n naravno zavisiti od nepoznate konstante c. Konačno, iz posljednje konture može se napisati jednačina koja povezuje i_6 i i_7. Ukoliko u tu jednačinu uvrstimo vrijednosti i_6 i i_7 koji slijede iz nađenog rješenja za i_n uz uvrštavanje $n = 6$ odnosno $n = 7$, dobija se jednačina u kojoj je c jedina nepoznata. Nakon što odredimo c, lako nalazimo konačno rješenje za i_n uvrštavanjem nađene vrijednosti za c u ranije nađeno "djelimično" rješenje za i_n. Tražene struje i_n, $n = 0\,..\,7$ se naravno dobijaju uvrštavanjem vrijednosti za n od 0 do 7 u nađeno opće rješenje za i_n. Alternativno, one se mogu odrediti i postupno iz diferentne jednačine, s obzirom da sada znamo i_0 i i_1.

Rješenje:

Poznate su nam sljedeće vrijednosti:

$$E = 13V, R_1 = 2K \ i \ R_2 = 6K$$

Možemo uočiti da sve konture osim prve i zadnje imaju oblik koji je prezentovan u nastavku, a koji upravo predstavlja diferentnu jednačinu koja povezuje i_n, i_{n+1} i i_{n+2}.

$$i_n R_1 + (i_n - i_{n+1}) R_2 = (i_{n-1} - i_n) R_2$$

Sada jednostavno za $R_1 = 2K \ i \ R_2 = 6K$ imamo:

$$2i_n + 6(i_n - i_{n+1}) = 6(i_{n-1} - i_n)$$
$$2i_n + 6i_n - 6i_{n+1} = 6i_{n-1} - 6i_n$$
$$2i_n + 6i_n - 6i_{n+1} - 6i_{n-1} + 6i_n = 0$$
$$-6i_{n+2} + 14i_{n+1} - 6i_n = 0$$

Ukoliko pristupimo rješavanju prethodno navedene jednačine, bit će nam potrebne početne vrijednosti i_0 i i_1. Možemo uzeti da je $i_0 = c$, dok izraz i_1 određujemo na osnovu prve konture.

$$i_0 R_1 + (i_0 - i_1) R_2 = E$$

$$2i_0 + 6i_0 - 6i_1 = 13$$
$$-6i_1 = 13 - 8i_0$$
$$i_1 = \frac{8i_0 - 13}{6}$$
$$i_1 = \frac{8c - 13}{6}$$

Sada ćemo primijeniti z-transformaciju na diferentnu jednačinu, a nakon toga uvrstiti vrijednosti u jednačinu.

$$\mathcal{Z}\{i_n\} = I(z)$$
$$\mathcal{Z}\{i_{n+1}\} = zI(z) - i_0 z = zI(z) - cz$$
$$\mathcal{Z}\{i_{n+2}\} = z^2 I(z) - z^2 i_0 - z i_1 = z^2 I(z) - cz^2 - z\frac{8c - 13}{6}$$
$$-6\left(z^2 I(z) - cz^2 - z\frac{8c - 13}{6}\right) + 14(zI(z) - cz) - 6I(z) = 0$$
$$I(z)(-6z^2 + 14z - 6) = -6cz^2 - 8cz + 13z + 14cz$$
$$\boldsymbol{I(z) = \frac{z(-6cz + 6c + 13)}{-6z^2 + 14z - 6}}$$

Sada, jednostavno možemo očitati polinome $P(z)$ i $Q(z)$.

$$P(z) = -6cz + 6c + 13$$
$$Q(z) = -6z^2 + 14z - 6 = (-6) \cdot \left(z - \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right)\left(z - \frac{7 - \sqrt{13}}{6}\right)$$

$$z_1 = \frac{7 + \sqrt{13}}{6} \qquad v_1 = 1 \qquad Q_1 = (-6) \cdot \left(z - \frac{7 - \sqrt{13}}{6}\right)$$
$$z_2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{6} \qquad v_2 = 1 \qquad Q_2 = (-6) \cdot \left(z - \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right)$$

U nastavku ćemo primijeniti *Leibnizovo pravilo* kako bismo odredili traženu inverznu z-transformaciju.

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{v_k - 1} \frac{1}{(v_k - i - 1)!} \frac{d^{v_k - i - 1}}{dz^{v_k - i - 1}} \left[\frac{P(z)}{Q_k(z)}\right]_{z = z_k} \binom{n}{i} {z_k}^{n-i}}$$

$$i_n = \left[\frac{P(z)}{Q_1(z)}\right]_{z = z_1} {z_1}^n + \left[\frac{P(z)}{Q_2(z)}\right]_{z = z_2} {z_2}^n = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)} {z_1}^n + \frac{P(z_2)}{Q_2(z_2)} {z_2}^n$$

$$i_n = \frac{-6c\frac{7 + \sqrt{13}}{6} + 6c + 13}{(-6) \cdot \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{6} - \frac{7 - \sqrt{13}}{6}\right)} \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right)^n + \frac{-6c\frac{7 - \sqrt{13}}{6} + 6c + 13}{(-6) \cdot \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{6} - \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right)} \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{6}\right)^n$$

$$\boldsymbol{i_n = \frac{(1 + \sqrt{13})c - 13}{2\sqrt{13}} \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right)^n + \frac{(\sqrt{13} - 1)c + 13}{2\sqrt{13}} \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{6}\right)^n}$$

Iz posljednje konture možemo odrediti međuovisnost struja i_6 i i_7:

$$i_7(R_1 + R_2) - (i_6 - i_7)R_2 = 0$$

$$i_7 = \frac{i_6 R_2}{2R_2 + R_1} = \frac{6i_6}{2 \cdot 6 + 2} = \frac{6i_6}{14}$$

$$\boldsymbol{i_7 = \frac{3i_6}{7}}$$

Konačno možemo uvrstiti eksplicitne izraze za i_6 i i_7 u prethodno dobivenu relaciju po c na osnovu općeg izraza i_n. Dakle, imamo:

$$7\left(\frac{(1+\sqrt{13})c - 13}{2\sqrt{13}}\left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)^7 + \frac{(\sqrt{13}-1)c + 13}{2\sqrt{13}}\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)^7\right) =$$

$$= 3\left(\frac{(1+\sqrt{13})c - 13}{2\sqrt{13}}\left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)^6 + \frac{(\sqrt{13}-1)c + 13}{2\sqrt{13}}\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)^6\right)$$

$$\frac{527212\,c}{2187} - \frac{2974699}{4374} = \frac{14209\,c}{243} - \frac{40040}{243}$$

$$c = \frac{2253979}{798662} \approx \mathbf{2.8222}$$

Vrijednost struje i_0 dobijamo na osnovu eksplicitnog izraza za i_n. Napominjemo da je i vrijednosti ostalih struja, također moguće dobiti korištenjem istog, izračunatog izraza, ali i rekurzivno.

$$\boldsymbol{i_0 = 2.8222} \qquad \boldsymbol{i_1 = 1.5963}$$
$$\boldsymbol{i_2 = 0.9024} \qquad \boldsymbol{i_3 = 0.5094}$$
$$\boldsymbol{i_4 = 0.2861} \qquad \boldsymbol{i_5 = 0.1582}$$
$$\boldsymbol{i_6 = 0.0831} \qquad \boldsymbol{i_7 = 0.0356}$$