ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Fractals - Julia Set

Φοιτητής:

Σταμάτης Βρετινάρης

Καθηγητές:

Έφη Μελετλίδου

Τζαμάλ Οδυσσέας Μαάιτα

14 Απριλίου 2018

Περιεχόμενα

Ιστορική αναδρομή **2**

Επαναλήψεις αναλυτικών συναρτήσεων **6**

Επανάληψη σταθερού σημείου 6

Συζυγής επαναληπτικές ακολουθίες 7

Η επαναληπτική μέθοδος `Newton-Raphson` 8

Επαναληπτικές ακολουθίες μιγαδικών τετραγωνικών πολυωνύμων **11**

Βασική τετραγωγική οικογένεια 11

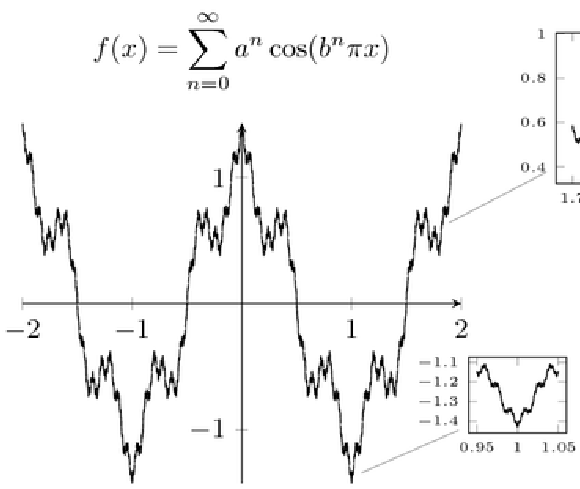
Διαφεύγον και Παραμένον Σύνολο 12

Περιοδικά σημεία 13

Το σύνολο Julia του P_c **15**

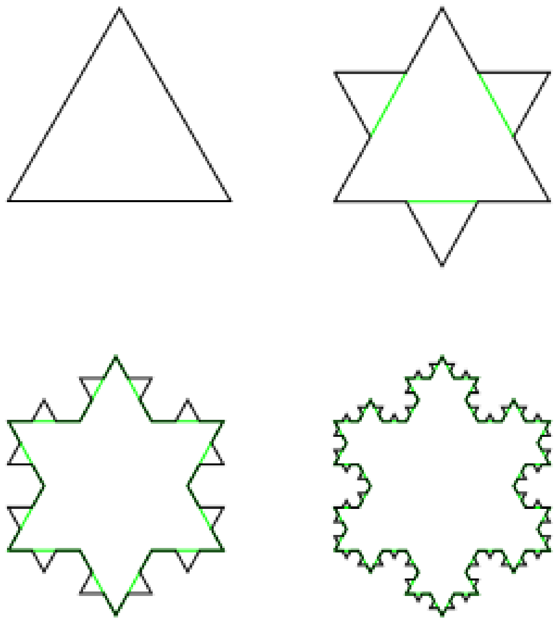
Ιστορική αναδρομή

Η ιστορία των *fractals* πηγαίνει αρκετά πίσω στον χρόνο στον 17ο αιώνα, που ο μαθηματικός και φιλόσοφος Gottfried Leibniz για πρώτη φορά ασχολήθηκε με έννοιες όπως η επαναλαμβανόμενη αυτοομοιότητα. Έπρεπε να περάσουν δύο αιώνες ώστε στις 18 Ιουλίου 1872 ο Karl Weierstrass παρουσίασε την συνάρτηση του που είναι παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη, που σήμερα θεωρείται *fractal*.



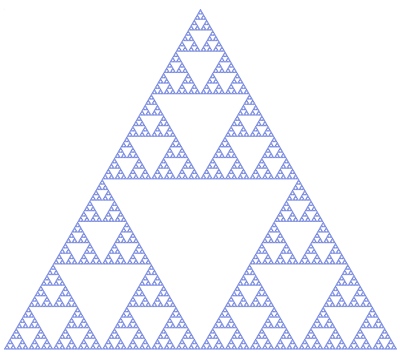
Σχήμα 1: Συνάρτηση Weierstrass

Ο George Cantor το 1883, ο οποιός είχε παρακολουθήσει τις διαλέξεις του Weierstrass δημοσίευσε τα σύνολα του που σήμερα φέρουν το όνομά του, σύνολα *Cantor*, που παρουσίαζαν περίεργη συμπεριφορά και πλέον αναγνωρίζονται ως φρακταλς. Στο τέλος του αιώνα ο Felix Klein & Henri Poincaré εισήγαγαν μια νέα κατηγορία φράκταλ που ονομάστηκε "αὐτό-αντίστροφα" φρακταλ . Το 1904 ο Helge von Koch επέκτεινε τις ιδέες του Henri Poincaré και έδωσε μια πιο γεωμετρική προσέγγιση που συμπεριλαμβανε και σχήματα μιας συνάρτησης ζωγραφισμένα στο χέρι, που αργότερα ονομάστηκε νιφάδα του *Koch*.

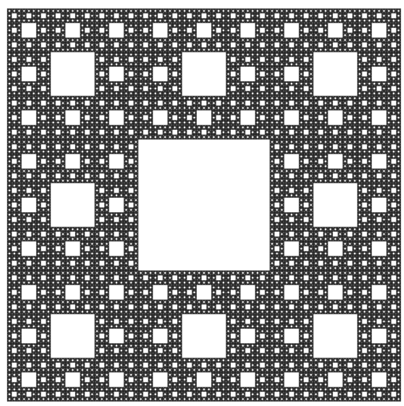


Σχήμα 2: Νιφάδα του Koch

Το 1915 ο Wacław Sierpiński κατασκέυασε το γνωστό του τρίγωνο και αργότερα το "χαλί".



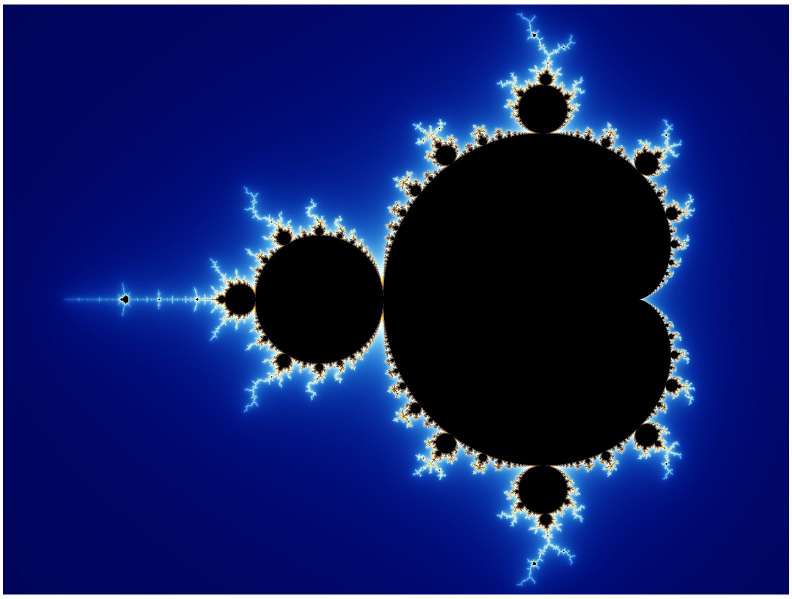
(α′) Τρίγωνο του Sierpiński



(β′) Χαλί του Sierpiński

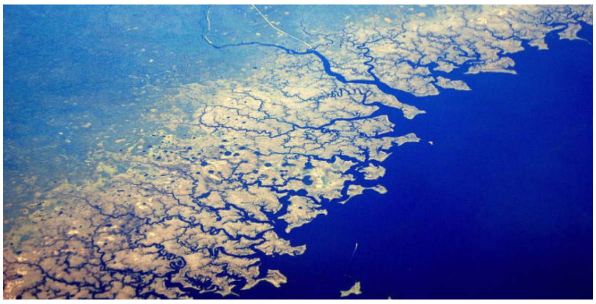
Σχήμα 3

Το 1918 δύο Γάλλοι μαθηματικοί, οι Pierre Fatou και Gaston Julia δουλεύοντας ανεξάρτητα κατέληξαν σχεδόν ταυτόχρονα στα ίδια αποτελέσματα, περιγράφοντας την συμπεριφορά που συσχετίζεται με την απεικόνιση μιγαδικών αριθμών και επαναληπτικών διαδικασιών, όπως και την μελέτη γύρω από σημεία έλξης και άπωσης. Λίγο αργότερα το 1918 ο Felix Hausdorff γενικεύει την έννοια της διάστασης στα μαθηματικά δίνοντας πλεον ένα εργαλείο για την μέτρηση της διάστασης αυτών των περίεργων σχημάτων. Τέλος την δεκαετία του 60 ο Benoit Mandelbrot ξεκίνησε να γράφει μια σειρά δημοσιεύσεων, όπως το `How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension` . Το 75′ όμως στερεοποίησε τα εκατοντάδες χρόνια σκέψης και μελέτης που προηγήθηκε, εισήγαγε την έννοια-λέξη "φρακταλ" και αναπαρέστησε με τη βοήθεια των υπολογιστών γραφικά του μαθηματικούς ορισμούς που έδωσε. Εικόνες όπως αυτή του κανονικού **Mandelbrot Set** έγιναν γρήγορα διάσημες και αποτελεί ένα από τα πιο ευρέως γνωστά φράκταλ.

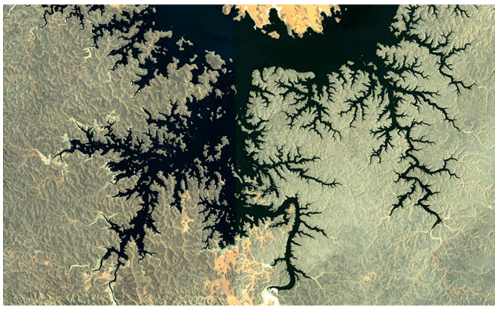


Σχήμα 4: Mandelbrot Set

Εν κατακλείδι, ένας γενικός ορισμός για το τί είναι τα φράκταλς ειναι: Φρακταλς είναι σχήματα που η διάσταση τους είναι κλασματική και έχουν ως ιδιότητα την αυτοομοιότητα. Έμπνευση για την μελέτη των φράκταλς υπήρξε η ίδια η φύση καθώς φρακταλικές δομές μπορούν να παρατηρθούν σε ένα μεγάλο εύρος της. Παραδείγματος χάρην



(α΄) Ακτογραμμή



(β΄) Ποτάμι στην Αίγυπτο

Σχήμα 5

(α΄) Λάχανο

(β΄) Είδος κουνουπιδιού

Σχήμα 6

(α΄) Δέντρο

(β΄) Δέντρα

Σχήμα 7

Επαναλήψεις αναλυτικών συναρτήσεων

Μια ακολουθία $\{z_n\}$ που ορίζεται από τη μορφή

$$z_{n+1} = f(z_n) \tag{1}$$

όπου η f είναι μια συνάρτηση, καλείτε επαναληπτική ακολουθία με αρχικό όρο z_0. Η συμπεριφορά της επαναληπτικής ακολουθίας δεν εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση f αλλά και από το αρχικό σημείο z_0.

Επανάληψη σταθερού σημείου

Κάθε επαναληπτική ακολουθία που ορίζεται από μία *συνεχής* συνάρτηση f και συγκλίνει σε ένα όριο α, τότε το σημείο αυτό έχει την ιδιότητα $f(\alpha) = \alpha$. Έστω μια επαναληπτική ακολουθία $z_n = f^n(z_0)$ έτσι ώστε:

$$z_n \longrightarrow \alpha \quad as \quad n \longrightarrow \infty \tag{2}$$

Τότε $z_{n+1} \longrightarrow \alpha$ όταν $n \longrightarrow \infty$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\alpha) \tag{3}$$

Μια τέτοια επαναληπτική ακολουθία θα ονομάζεται *σταθερού σημείου*.

Ορισμός: Ένα σημείο α είναι ένα *σταθερό σημείο* μιάς συνάρτησης f όταν ισχύει $f(\alpha) = \alpha$.

Η συμπεριφορά μιας επαναληπτικής ακολουθίας $z_n = f^n(z_0)$ κοντά στο σταθερό σημείο α εξαρτάται πολύ από την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο α. Εάν $|f'(\alpha)| < 1$, τότε σε καλή προσέγγιση η συνάρτηση f δημιουργεί μια επαναληπτική ακολουθία που συγκίνει προς το σημείο α.

Ορισμός: Το σταθερό σημείο α μιας συνάρτησης f είναι:

(α) ελκτικό, εάν $|f'(\alpha)| < 1$

(β) απωστικό, εάν $|f'(\alpha)| > 1$

(γ) αδιάφορο, εάν $|f'(\alpha)| = 1$

(δ) υπερ-ελκτικό, εάν $f'(\alpha) = 0$

Για κάθε συνάρτηση f με σταθερό σημείο α προκύπτει η απορία, ποιά σημεία z έλκονται στο α κάτω από την επαναληπτική ακολουθία της f.

Ορισμός: Εάν α είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο μίας αναλυτικής συνάρτησης f, τότε η "**λεκάνη έλξης**" του α κάτω από την f είναι το σύνολο:

$$\{z : f^n(z) \longrightarrow \alpha \quad as \quad n \longrightarrow \infty\} \tag{4}$$

Συζυγής επαναληπτικές ακολουθίες

Έστω η επαναληπτική ακολουθία

$$z_{n+1} = z_n^2 + 2z_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad z_0 = -\frac{1}{2} \tag{5}$$

Η ακολουθία αυτή τείνει $z_n \to -1$ όταν $n \to \infty$, συνεπώς αφαιρούμε από την αρχική σχέση:

$$z_n = w_n - 1 \tag{6}$$

Άρα, ξαναγράφουμε την εξίσωση (5) λόγω της (6):

$$w_{n+1} - 1 = (w_n - 1)^2 + 2(w_n - 1) = w_n^2 - 1 \tag{7}$$

Άρα

$$w_{n+1} = w_n^2 \tag{8}$$

Η επαναληπτική ακολουθία (8) είναι πιο απλή και επίσης γνωρίζοντας ότι

$$w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \tag{9}$$

εξάγουμε την σχέση για το z_n σε όρους του n

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} - 1 \tag{10}$$

Πιο γενικά υποθέτουμε ότι

$$z_{n+1} = f(z_n) \tag{11}$$

και επειδή $z_n = h^{-1}(w_n)$ έχουμε:

$$w_{n+1} = h(z_{n+1}) \tag{12}$$

$$= h(f(z_n)) \tag{13}$$

$$= h(f(h^{-1}(w_n))) \tag{14}$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι

$$w_{n+1} = g(w_n) \tag{15}$$

όπου $g = h \circ f \circ h^{-1}$

Ορισμός: Οι συναρτήσεις f και g είναι συζυγής μεταξύ τους εάν

$$g == h \circ f \circ h^{-1} \tag{16}$$

για μια 1-1 συνάρτηση h που ονομάζεται, συζυγής συνάρτηση. Εάν η ακολουθία $\{z_n\}$ ορίζεται ως

$$z_{n+1} = f(z_n) \tag{17}$$

και $w_n = h(z_n)$ τότε η ακολουθία $\{w_n\}$ ικανοποιεί την σχέση

$$w_{n+1} = g(w_n) \tag{18}$$

και οι $\{z_n\}$ και $\{w_n\}$ ονομάζονται συζυγής επαναληπτικές ακολουθίες

Η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson

Ο γενικός τύπος επαναληπτικής ακολουθίας Newton-Raphson για ένα πολυώνυμο p είναι

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} \tag{19}$$

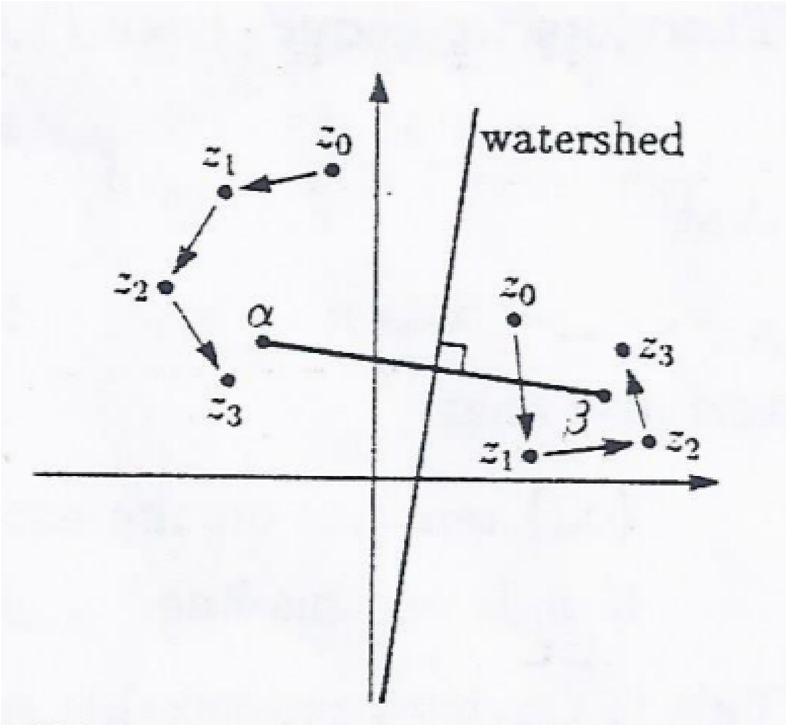
Ας ονομάσουμε N την συνάρτηση Newton-Raphson

$$N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \tag{20}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μία πραγματική συνάρτηση και επεκτείνεται στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Μια γρήγορη παρατήρηση είναι ότι το σημείο 0 αποτελεί υπερ-ελκτικό σταθερό σημείο της συνάρτησης N.
Το 1879 ο *Cayley* ανέλυσε την μέθοδο αυτή όταν το πολυώνυμο p είναι

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta \tag{21}$$

Το πολυώνυμο αυτό μηδενίζεται στα σημεία α, β συνεπώς τα σημεία αυτά αποτελούν υπερ-ελκτικά σημεία της συνάρτησης N. Στην έρευνα του ο *Cayley* ήθελε να βρει ποια σημεία του συνόλου $\mathbb{C}$ έλκονται από το σημείο α και ποια από το σημείο β. Η απάντηση που βρήκε ήταν εκπληκτικά απλή. Η μεσοκάθετος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία ορίζει ένα όριο στο μιγαδικό επίπεδο που ορίζει τις δύο περιοχές έλξης για κάθε σημείο. Άν δηλαδή το z_0 βρεθεί στην πλευρά του ημιεπιπέδου που ορίζει η μεσοκάθετος αυτή που περιέχει το σημείο α τότε η επαναληπτική ακολουθία κάτω από την συνάρτηση N θα καταλήξει στο σημείο α. Αντίστοιχα ισχύει το ίδιο και για το σημείο β.



Σχήμα 8: Διαχωριστικό όριο ανάμεσα στα σημεία α, β

Τέλος, θα δούμε ένα παράδειγμα για πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού. Έστω

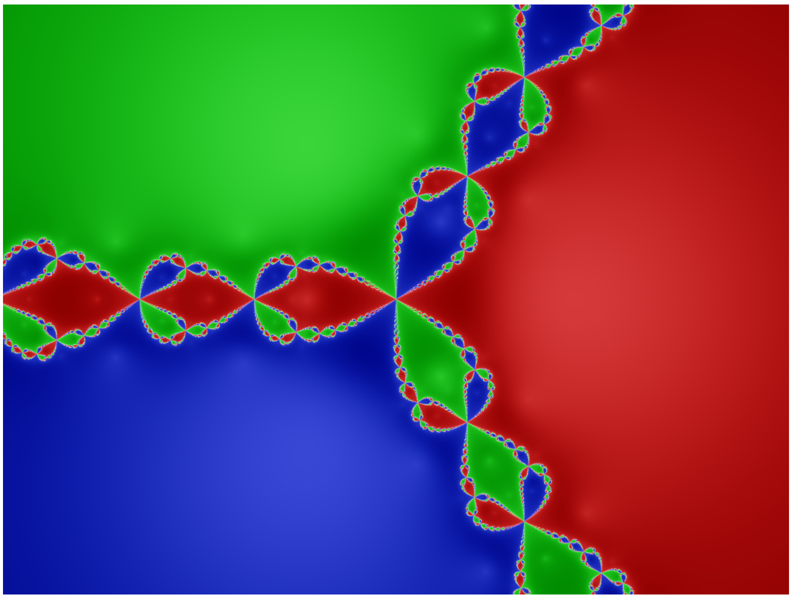
$$p(z) = z^3 - 1 \tag{22}$$

Τα υπερ-ελκτικά σημεία της συνάρτησης αυτής είναι

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = e^{2\pi i/3}, \quad \alpha_3 = e^{4\pi i/3} \tag{23}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση N παίρνει την μορφή

$$N(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2} \tag{24}$$



Σχήμα 9: Λεκάνες έλξης για τα υπερ-ελκτικά σημεία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Κόκκινο($\alpha_1$), Μπλε($\alpha_2$) , Πράσινο($\alpha_3$)

Η ένωση των τριών λεκανών έλξης μας δίνουν όλο το σύνολο $\mathbb{C}$ και η περίπλοκη καμπύλη που διαχωρίζει τις τρεις λεκάνες έλξης αποτελεί το όριο και των τριών συνόλων ταυτόχρονα.

Επαναληπτικές ακολουθίες μιγαδικών τετραγωνικών πολυωνύμων

Βασική τετραγωγική οικογένεια

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με επαναληπτικές ακολουθίες που έχουν την μορφη

$$z_{n+1} = \alpha z_n^2 + \beta z_n + c \tag{25}$$

με $\alpha \neq 0$. Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε επαναληπτική ακολουθία που έχει την μορφή της (25) αποτελεί συζυγή επαναληπτική ακολουθία μιας άλλης πιο απλής.

Θεώρημα: Η επαναληπτική ακολουθία

$$z_{n+1} = \alpha z_n^2 + \beta z_n + c \tag{26}$$

με $\alpha \neq 0$, αποτελεί συζυγή επαναληπτική ακολουθία της

$$w_{n+1} = w_n^2 + d \tag{27}$$

όπου $d = ac + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b^2$. Η συζυγής συνάρτηση h είναι

$$h(z) = az + \frac{1}{2}b \tag{28}$$

Το θεώρημα αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι προκειμένου να κατανοήσουμε την συμπεριφορά των τετραγωνικών συναρτήσεων κάτω από επαναληπτικές διαδικασίες αρκεί να λάβουμε υπόψη μόνο αυτές της μορφής (27), αλλάζοντας απλά τα σύμβολα έχουμε:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{29}$$

όπου $c \in \mathbb{C}$

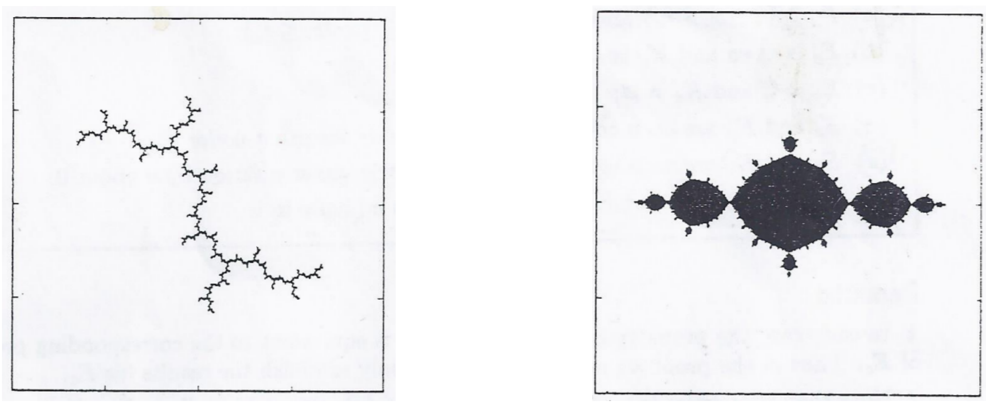
Διαφεύγον και Παραμένον Σύνολο

Σε μία επαναληπτική μιγαδική ακολουθία τετραγωνικής συνάρτησης γνωρίζουμε ότι κάποια σημεία του μιγαδικού επιπέδου θα έλκονται από τα υπερ-ελκτικά σημεία της συνάρτησης και μερικά θα φεύγουν προς το άπειρο. Οι μιγαδικοι αριθμοί οι οποίοι διαφεύγουν στο άπειρο ορίζουν το **Διαφεύγον Σύνολο**. Αντίστοιχα οι μιγαδικοί οι οποίοι συγκλίνουν στα σταθερά σημεία της συνάρτησης ορίζουν το **Παραμένον Σύνολο**.

Ορισμός: Για $c \in \mathbb{C}$ το **Διαφεύγον Σύνολο** είναι

$$E_c = \{z : P_c^n(z) \to \infty, \quad as \quad n \to \infty\} \tag{30}$$

Το **Παραμένον Σύνολο** (K_c) είναι το συμπληρωματικό σύνολο του E_c.



(α′) E_c και K_c για $c = i$ (β′) E_c και K_c για $c = -1$

Σχήμα 10

Περιοδικά σημεία

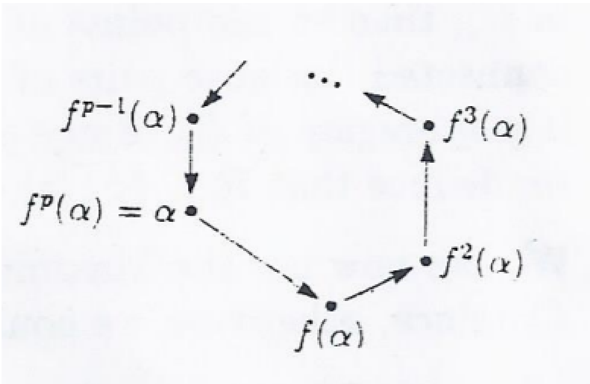
Περιοδικά σημεία είναι εκείνα τα σημεία που επαναλαμβάνονται περιοδικά κάτω από την επαναληπτική ακολουθία με συνάρτηση f. Πιο συγκεκριμένα

Ορισμός: Το σημείο α είναι **περιοδικό σημείο** με περίοδο p, μιας συνάρτης f εάν

$$f^p(\alpha) = \alpha, \quad f^k(\alpha) \neq \alpha, \quad for k = 1, 2, .., p-1 \tag{31}$$

τα p σημεία $\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ..., f^{p-1}(\alpha)$ σχηματίζουν έναν κύκλο περιόδου p ή αλλίως έναν p-κύκλο της f

Το γεγονός ότι τα περιοδικά σημεία δεν διαφεύγουν στο άπειρο κάτω από την επαναληπτική διαδικασία, σημαίνει προφανώς ότι όλα τα επαναληπτικά σημεία ανήκουν στο Παραμένον Σύνολο K_c.



Σχήμα 11: p-κύκλος της f

Θεώρημα: Έστω p-κύκλος μιας αναλυτικής συνάρτησης f, τότε

$$(f^p)'(\alpha) = f'(a) \times f'(f(\alpha)) \times f'(f^2(\alpha)) \times ... \times f'(f^{p-1}(\alpha)) \tag{32}$$

τότε η παράγωγος της f^p παίρνει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο του p-κύκλου

$$(f^p)'(\alpha) = (f^p)'(f(\alpha) = ... = (f^p)'(f^{p-1}(\alpha)) \tag{33}$$

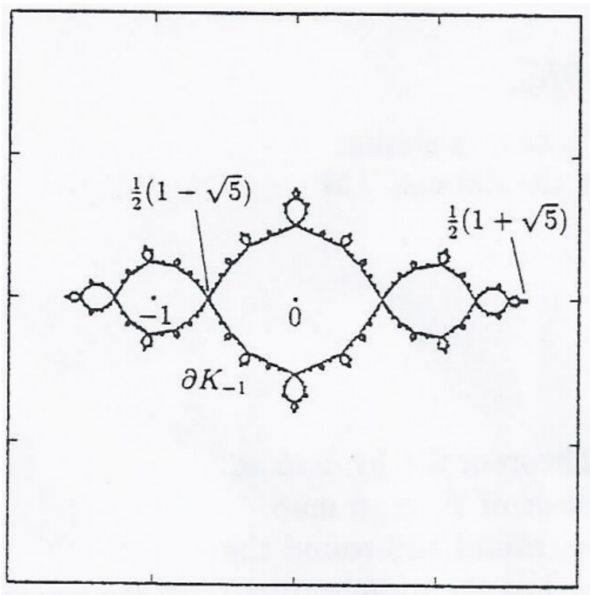
Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να ταυτοποιήσουμε τα περιοδικά σημεία μιας αναλυτικής συνάρτησης f χρησιμοποιώντας έναν αριθμό $(f^p)'(\alpha)$ που ονομάζεται **πολλαπλασιαστής** του αντίστοιχου περιοδικού κύκλου.

Ομοίως με τα σταθερά σημεία, μπορούμε να μελετήσουμε την ευστάθεια των περιοδικών σημείων. Σε αντίστοιχο ύφος ορίζουμε

Ορισμός: Έστω περιοδικό σημείο α με περίοδο p μιας αναλυτικής συνάρτησης f, τότε ο αντίστοιχος p-κύκλος θα είναι
(α) ελκτικός, εάν $|(f^p)'(\alpha)| < 1$
(β) απωστικός, εάν $|(f^p)'(\alpha)| > 1$
(γ) αδιάφορος, εάν $|(f^p)'(\alpha)| = 1$
(δ) υπερ-ελκτικός, εάν $(f^p)'(\alpha) = 0$

Ας εξετάσουμε τα περιοδικά σημεία του P_c που βρίσκονται στο σύνολο K_c. Για παράδειγμα θα πάρουμε την $P_{-1}(z) = z^2 - 1$ που έχει ως σταθερά σημεία τα $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ τα οποία είναι και τα δύο απωστικά γιατί

$$\left|P'_{-1}\left(\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\right)\right| = \pm 1 + \sqrt{5} > 1 \tag{34}$$



Σχήμα 12: Απωστικά σταθερά σημεία της P_c

Αυτό σημαίνει ότι τα απωστικά σταθερά σημεία είναι πάνω στο όριο του Παραμένον συνόλου K_c.

Θεώρημα: Έστω περιοδικό σημείο α της συνάρτησης P_c
(α) Εάν το α είναι ελκτικό, τότε το α βρίσκεται εσωτερικά του συνόλου K_c
(β) Εάν το α είναι απωστικό, τότε το α βρίσκεται στο όριο του συνόλου K_c

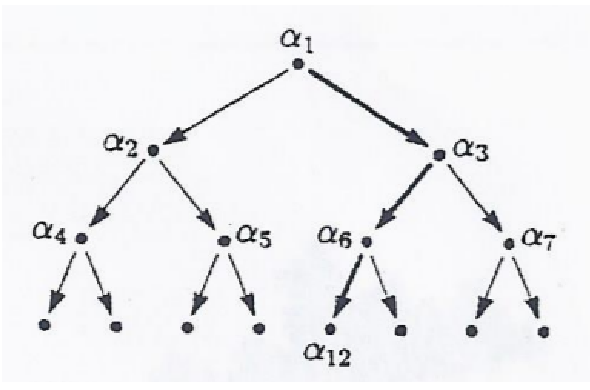
Το σύνολο Julia του P_c

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι όλα τα απωστικά περιοδικά σημεία βρίσκονται πάνω στο όριο του συνόλου K_c. Το σύνολο των σημείων αυτων παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον καθώς ορίζουν ένα όριο ανάμεσα στα σημεία που διαφεύγουν στο άπειρο (E_c) και τα σημεία που παραμένουν στην περιοχή γύρω από κάποιο υπερ-ελκτικό σημείο της P_c. Το σύνολο αυτό ονομάστηκε **Σύνολο Julia** προς τιμήν του γάλλου μαθηματικού Gaston Julia (1893-1978)που τα μελέτησε πρώτος διεξοδικά.

Ορισμός: Το σύνολο **Julia** J_c του P_c είναι το οριακό σύνολο του K_c

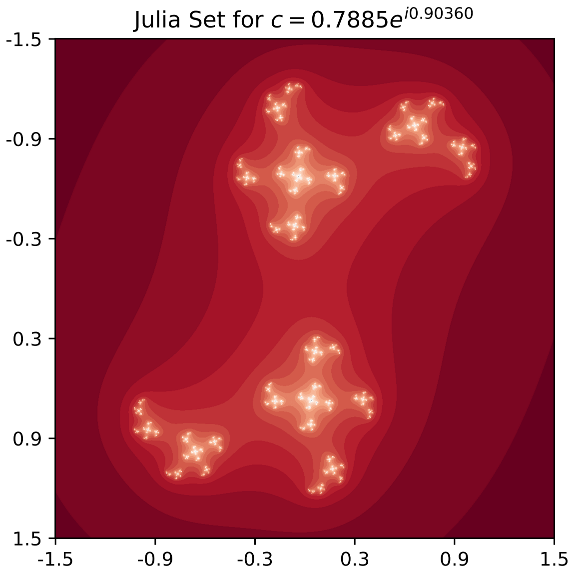
Παρατηρεί κάποιος πως το σύνολο K_c δεν περιέχει τρύπες, συνεπώς θα μπορούσε κανείς να πει ότι το σύνολο K_c είναι ενα σύνολο J_c και το εσωτερικό του, αλλιώς ένα "γεμισμένο" σύνολο J_c.

Το σύνολο J_c είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει όλα τα περιοδικά απωστικά σημεία του P_c.
Εντούτις, είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστούν όλα τα περιοδικά σημεία προκειμένου να κατασκευάσει το γράφημα του συνόλου J_c. Μια πιο εύκολη μέθοδος που χρησιμοποιεί το ότι το σύνολο J_c είναι αναλλοίωτο είναι η εξής. Εάν ένα σημείο $\alpha_1 \in J_c$, τότε και οι λύσεις της εξίσωσης $P_c(z) = \alpha_1$ βρίσκονται και αυτές μέσα στο σύνολο J_c. Οι λύσεις $\pm\sqrt{\alpha_1 - c}$ αποτελούν δύο νέα σημεία α_2, α_3 και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και για τα νέα σημεία παράγωντας έτσι τέσσερα νέα σημεία $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$, που όλα αυτά ανήκουν στο J_c. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως **backward iteration**. Σχηματικά η διαδικασία αυτή έχει ως εξής

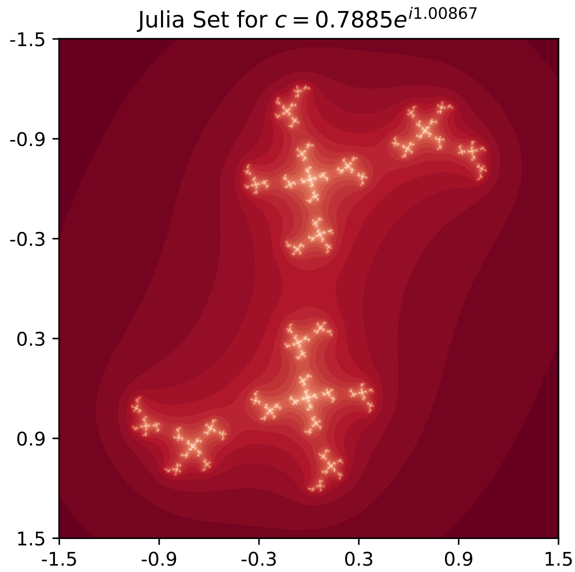


Σχήμα 13: Σχηματική αναπαράσταση του backward iteration

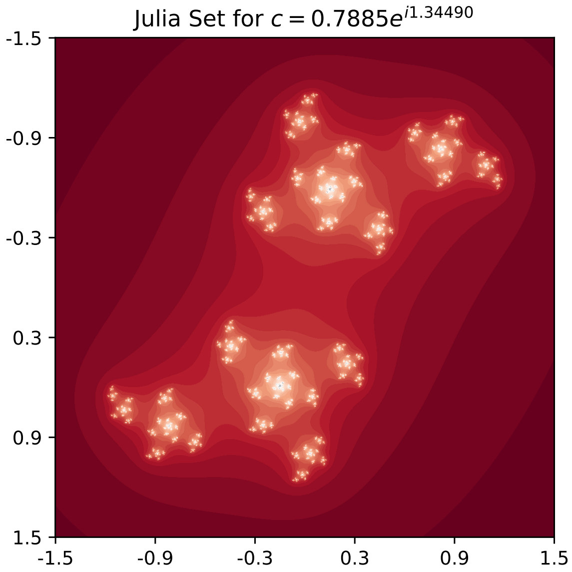
Τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου για διαφορετικές τιμές c. Έγραψα έναν κώδικα σε python3 και ως c πήρα την έκφραση $c = re^{i\alpha}$ με $r = 0.7885$ και 100 τιμές για $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.



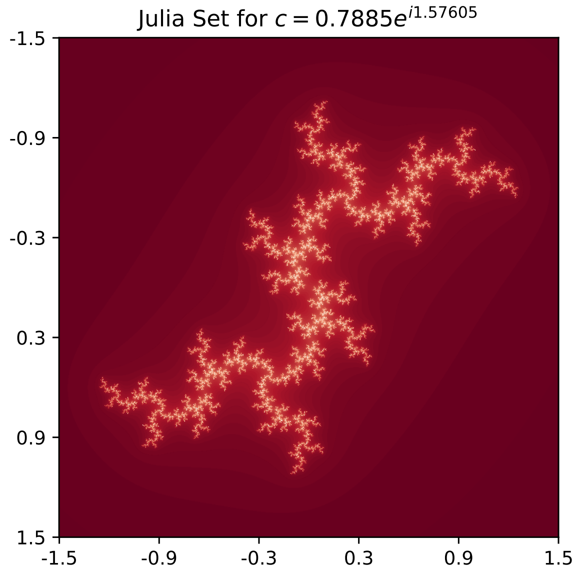
(α′) $\alpha = 0.9036$



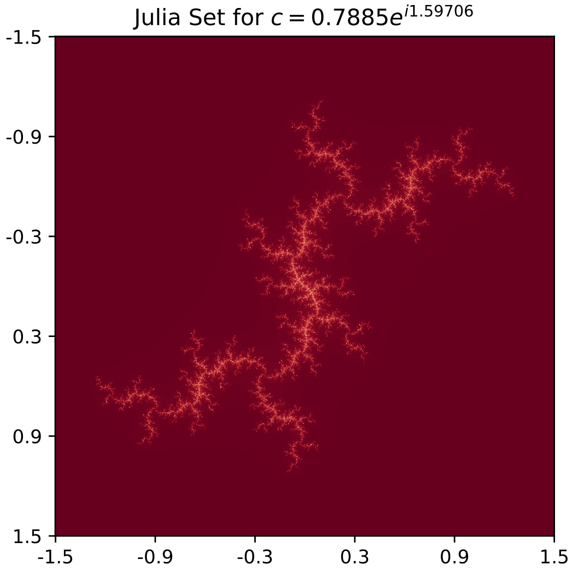
(β′) $\alpha = 1.00867$



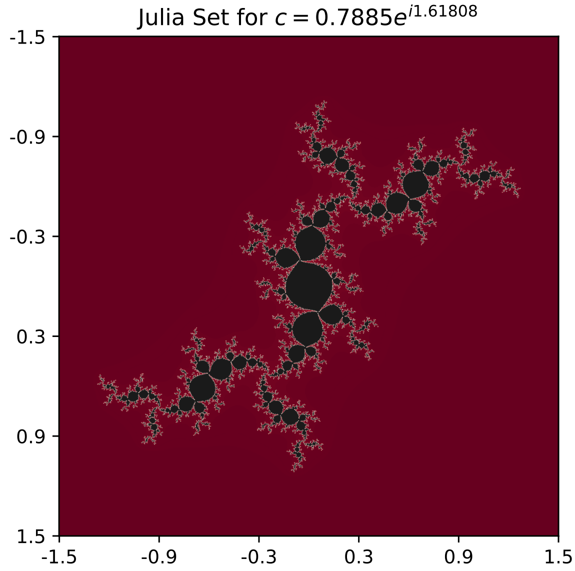
(α′) $\alpha = 0.9036$



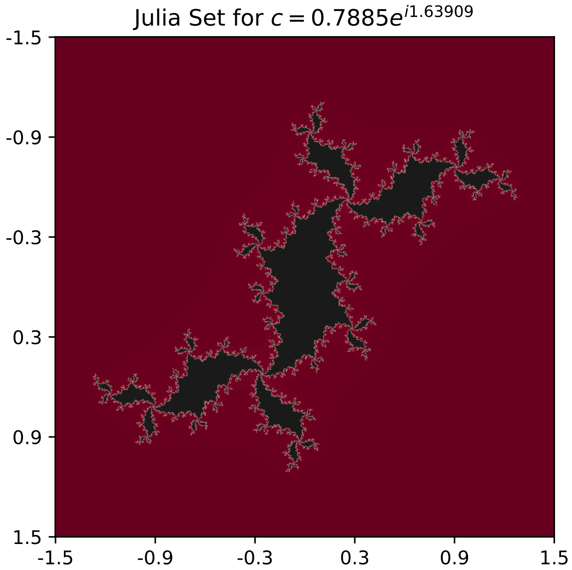
(β′) $\alpha = 1.00867$



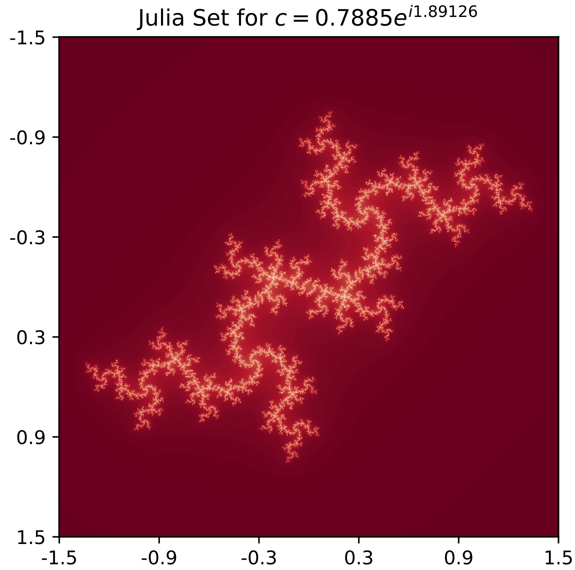
(α′) $\alpha = 0.9036$



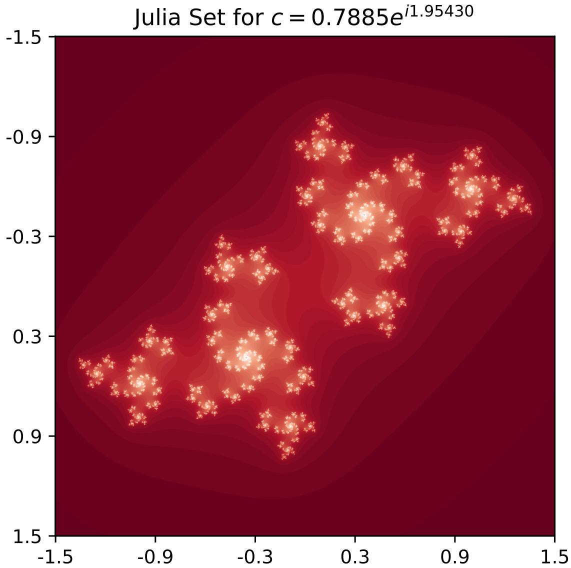
(β′) $\alpha = 1.00867$



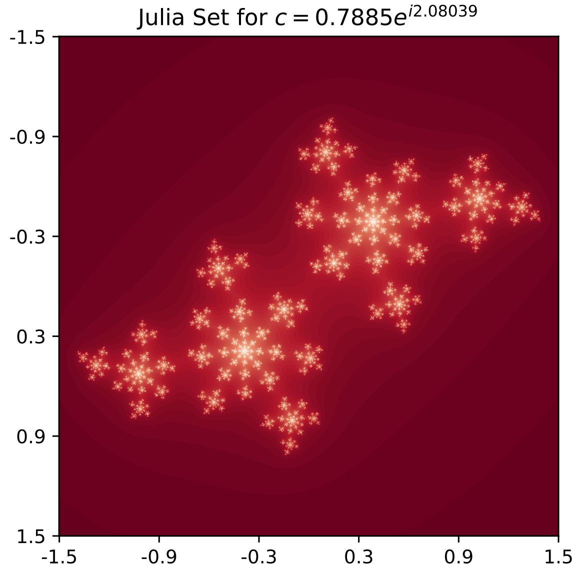
(α′) $\alpha = 0.9036$



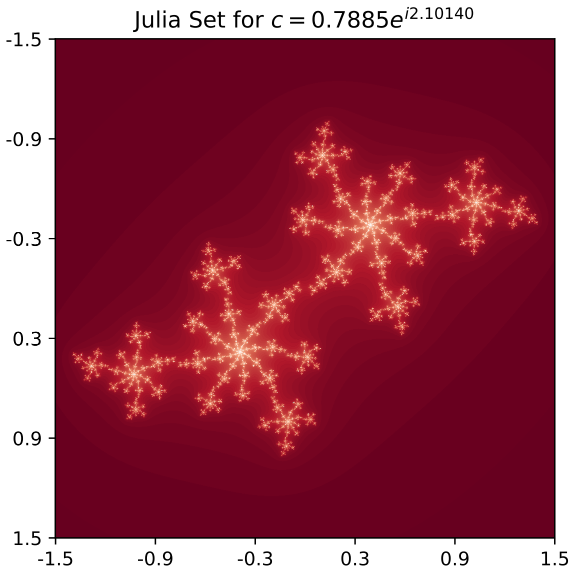
(β′) $\alpha = 1.00867$



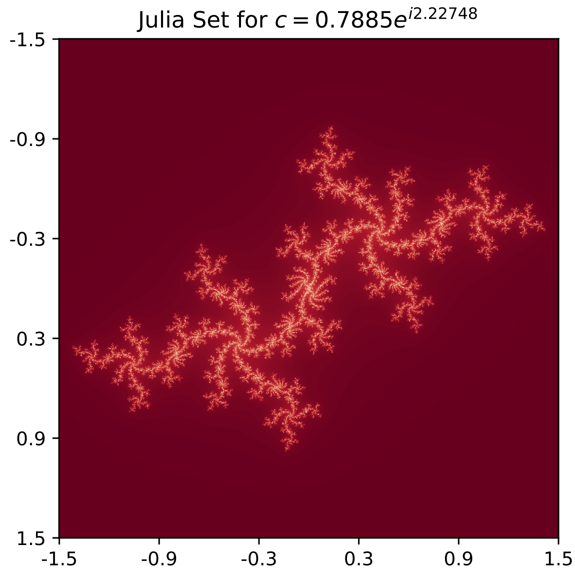
(α′) $\alpha = 0.9036$



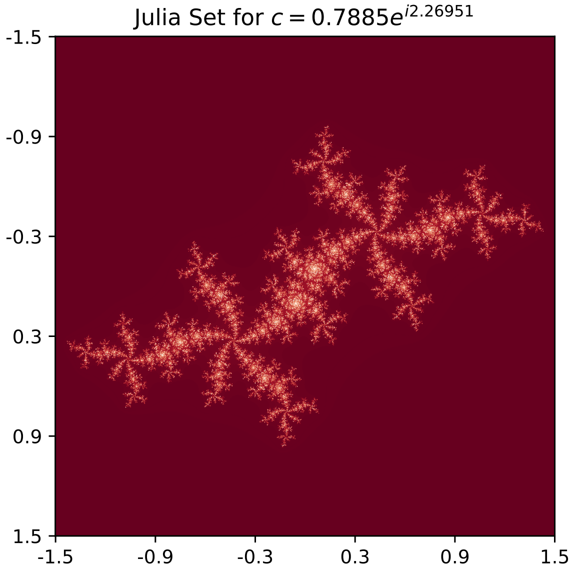
(β′) $\alpha = 1.00867$



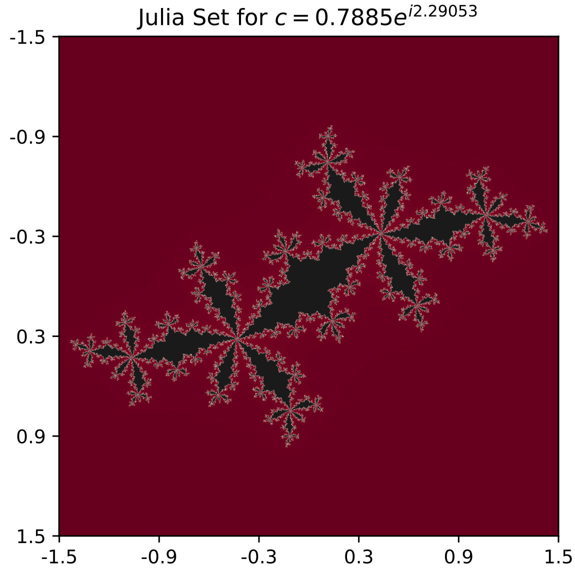
(α′) $\alpha = 0.9036$



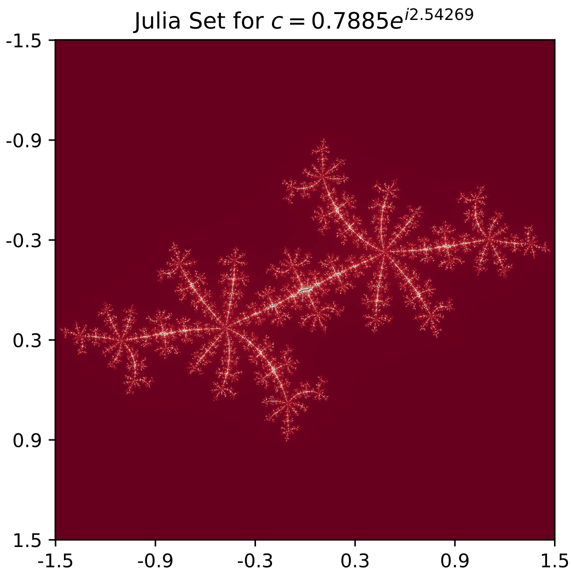
(β′) $\alpha = 1.00867$



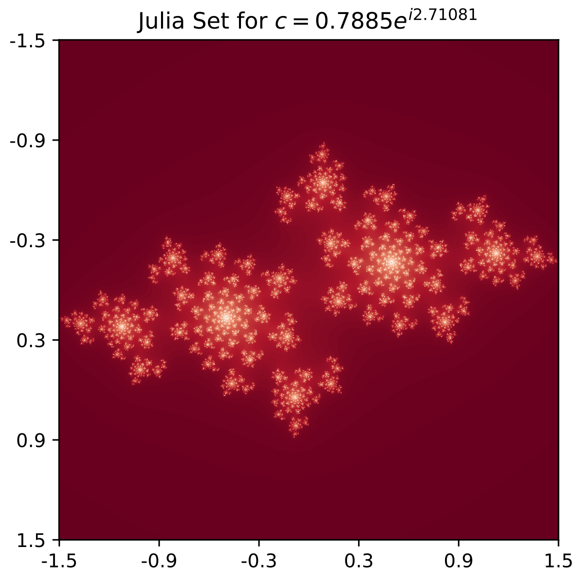
(α′) $\alpha = 0.9036$



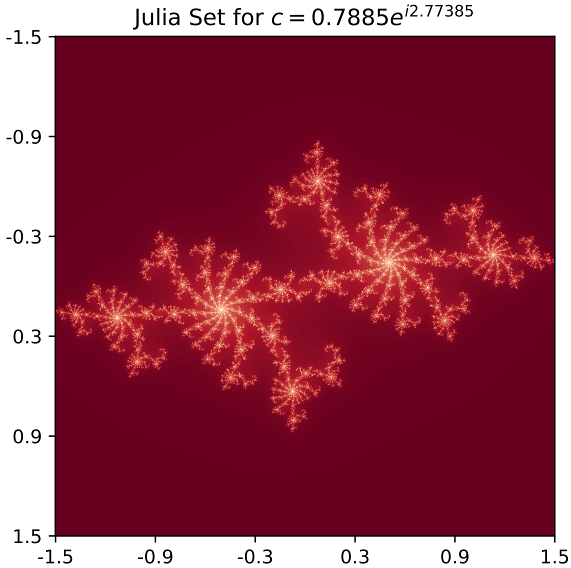
(β′) $\alpha = 1.00867$



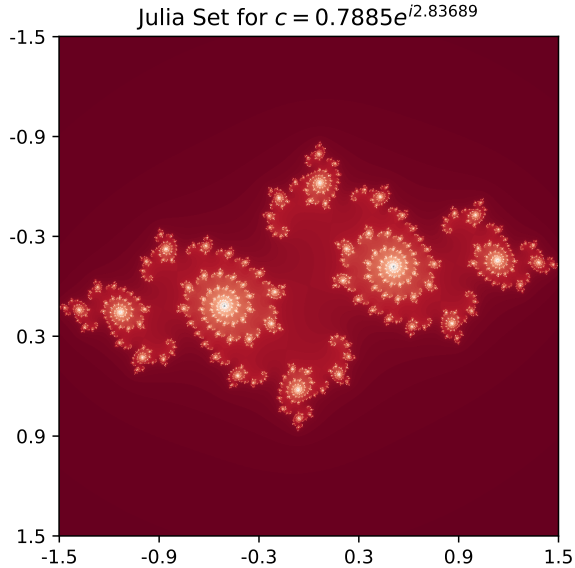
(α′) $\alpha = 0.9036$



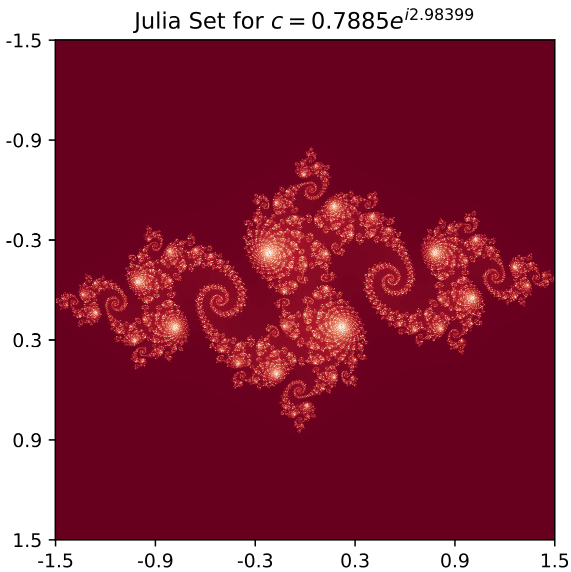
(β′) $\alpha = 1.00867$



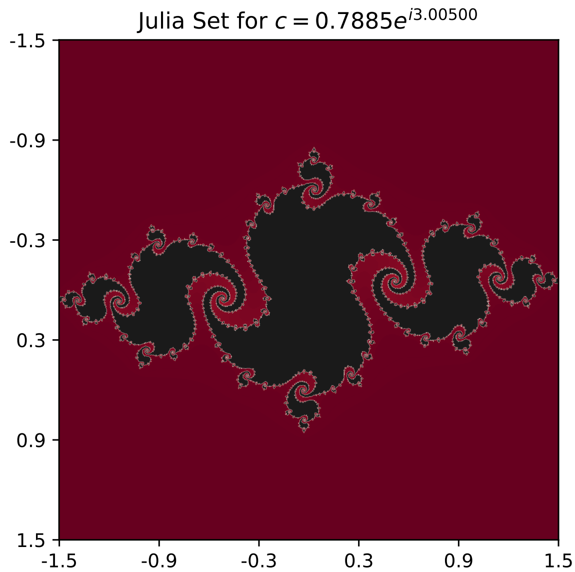
(α′) $\alpha = 0.9036$



(β′) $\alpha = 1.00867$



(α′) $\alpha = 0.9036$



(β′) $\alpha = 1.00867$

Όλα τα σχήματα συνδυάστηκαν σε ένα αρχείο .gif .