Esperanza

Definición: Sea x una variable aleatoria en unespacio de probabilidad finito (Ω, P) donde $\Omega = \{w, \dots, \Omega_n\}$. El valor esperado de X data dado por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x(w_i), p(w_i)$$

Si al menos la imagen de X es finito $(X \mid \Omega)$ finito o numerable

$$E(X) = \sum_{y \in X(\Omega)} yP(x, y)$$

$$E : R_{w(\Omega)} \to R \ \ es \ una \ función \ lineal$$

Pues

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ Además si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función real valuada (medible) entonces $f_0 X : \Omega \to \mathbb{R}$ es tambien una variable aleatoria.
Y además

$$E(f(x)) = \sum f(f)P(X = y) \quad y \in X(\Omega)$$

En nuestro curso asumiremos tales f medible salvo que se espeifique lo contrario.
Además, para X y Y V.A independiente. $E(xy) = E(x)F(y)$

Varianza y desviación estandar

La vamos a utilizar como una medida de dispersión.
Definición: Sea X una variable aleatoria con valor esperado μ. La varianza de X esta definida como:

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E((x - \mu)^{2)} = \sum_{y \ \in X(\Omega)} (y - \mu)^2 p(X = y) \quad y \in X(\Omega)$$

y la desviación estandar $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$

Teorema

1. $Var(x) = E(x^2) - \mu^2$
2. $\forall a \in R$
   $Var(ax) = a^2 Var(x)$ = $E((a^2 x - a\mu)^2) = a^2 E((x - \mu)^2)$
3. Si X_y y y son variables aleatorias independientes $Var(x + y) = Var(x) + Var(y)$
4. Si "c" es una constante entonces $Var(x + c) = Var(x)$

Estandarización

Sea X una variablea aleatoria con esperanza μ y desviación estandar σ, a $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ se le conoce como la estandarización de X.

Simplemente mete todos los datos entre (0,1)

Covarianza y correlación

Ahora decimos sobre la la relacion entre dos V.A dadas en un mismos espacio muestral

Definición: Si X_yY son B.A con medidas finitas entonces definimos la covarianza de X_yY como:

$$\sigma_{x,y} = Cov(x,y) = E((X-\mu_x)(y-\mu_y))$$

Teorema:

Sea X,y V.A con medidas finitas:

1. $Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$
2. $Cov(x,y) = Cov(y,x)$
3. $Cov(x,x) = \sigma_x^2$
4. Si X es una constante, entonces $E(x,y) = 0$
5. La covarianza es lineal en sus dos coordenadas osea que es bilineal. Por ejemplo $Cov(a, x+by, z) = a\; Cov(x,z) + b\; Cov(y,z)$
6. Se tiene que $|Cov(x,y)| \leq \sigma_x\; \sigma_y$ Ademas la igualdad se da si y sólo si existiera $a, b \in \mathbb{R}$ $y = ax+b$ o $X = ax+b$

Definición: Si X_y y Y son V.A con media finita y varianza no cero, entonces definimos el coeficiente de correlación:

$$P_{x,y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Si X, Y poseen medias finitas y varianzas no cero, el coeficiente de correlación de x, y se define con el coeficiente de correlación:

$$-1 \leq P_{x,y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1$$

Teorema:

Si X_y, Y son V.A definidas en Ω con $a, b \in \mathbb{R}$ $Var(a\; X + by) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) + 2\; ab\; cov(x,y)$ Más en general si $x_1, \ldots, x_n$ son variables aleatorias sobre Ω y $a_1, \ldots, a_n$ son cortantes, entonces:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j\; Cov(x_i, x_j)$$

que sale de:

$$E([a_x + b_y - (a\mu_x + b\mu_y)]^{2)} = E[a(x-\mu_x) + b(y-\mu_y)]^2$$

$$E = (a^2(x-\mu_x)^2 + 2a(x-\mu_x)b(y-\mu_y) + b^2(y-\mu_y)^2) = a^2 Var(x) + 2ab\, Cov(x,y) + b\, Var(y)$$

Vemos que es lineal por lo que:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)\right]^2$$

$$E[(a_i x_i)^2] = a_i^2 E((x_i - \mu_i)^2) = Cov(x_i, x_i)$$

Supongamos valido el resultado para pvi $K = n$, ie

$$var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j\, Cov(x_i, x_j)$$

para $k = n+1$

$$Var\left(\sum_{i)1}^{n+1} a_i x_i\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1} X_{n+1}\right)$$

$$= Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = a_{n+1}^2 Var(X_{n+1}) = 2\ a_{n+1}\ Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i\ a_j\ Cov(x_i, x_j) + a_{n+i}\ a_{n+j}\ Cov(X_{n+i}, C_{n+j}) + 2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{n+1}\ a_i\ Cov(X_i, X_{n+1})\ Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}\ a_i\ a_j\ Cov(x_i, x_j)\ 2\ \sum_{i=1}^{n+1}\ a_{n+1}\ a_i\ Cov(x_i, x_{n+1}) + a_{an+1}\ a_{n+1}\ Cov(X_{n+1}, C_{n+1})$$