-# Repositorio de libros
gen.lib.rus.ec
Programar en julia, python, r

Procesos estocásticos

Se refiere a un ocnepto matemático que es de gran utilidad para usar magnitudes aleatorias que cambian en el transcurso del tiempo o para identificar la sucesión de las variables aleatorias que se transforman en función a otras variables.

$E = P(A)$
$P : E \to [0,1]$

1. $P(0) = 0,\ P(A) = 1,\ P(B^C = 1.P(B))$
2. $P(A\,U\,B) = P(A) + P(B),\ \ A \cap B$

Para un proceso estocastico necesitamos ciertas cosas, como:

1. Experimeto
2. Resultados
3. Espacio muestral (resultado de los experimentos)
4. Eventos con conjuntos en el espacio muestral

Probabilidad condicional

También llamada **probabilidad condicionada**, es una medida estadística que indica la probabilidad de que ocurra un evento A si otro evento B ha sucedido. Es decir, la probabilidad condicional $P(A \mid B)$ se refiere a cuánto de probable es que suceda el evento A una vez ya se ha producido el evento B.

La formula con la que obtenemos esta probabilidad es:

$$P(R \mid S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{P(R,S)}{P(S)}$$

$$P(S \mid R) = \frac{P(R \cap S)}{P(R)} = \frac{P(R,S)}{P(R)}$$

si se despeja obtenemos:
$P(R,S) = P(R \mid S)P(S)$
$P(R,S) = P(S \mid R)P(R)$

$P(R \mid S) P(S) = P(S \mid R)\, P(R)$
$P(R \mid S) = P(S \mid R)\, \frac{P(R)}{P(S)}$ Regla de Bayes

Independencia de eventos

Definición de evento:
En la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos, un evento se define como un subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto de resultados posibles del experimento. Los eventos son de gran importancia en la teoría de la probabilidad porque permiten la identificación de los resultados de interés en un experimento y el cálculo de sus respectivas probabilidades. Existen diferentes tipos de eventos, incluyendo eventos simples, eventos compuestos, eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. Los eventos simples consisten en un único resultado posible, mientras que los eventos compuestos son aquellos que constan de más de un resultado posible. Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente, mientras que los eventos independientes son aquellos cuya ocurrencia o no ocurrencia no afecta la probabilidad de la ocurrencia de otros eventos. La probabilidad de un evento se puede calcular mediante la suma de las probabilidades de los resultados que conforman el evento. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

donde A es el evento de interés, A_i son los resultados que conforman el evento A y n es el número total de resultados en el espacio muestral.

Independecia de eventos:
Decimos que dos eventos son independientes cuando la probabilidad conjunta es diferente es el producto de sus probabilidades
$P(R \cap S) = P(R \mid S)\, P(S)$
$P(R, S) = P(R) P(S)$

Variable aleatoria

Es una variable que viene del espacio muestral y toma un valor.
Donde un espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Es decir, es el conjunto que contiene todos los posibles resultados de un evento aleatorio y se utiliza como base para la definición de probabilidades y para el análisis de sisitemas estocasticos. y toma un valor:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Experimento de lanzar dados:

$$\Omega = \{(i,j) :\ 1 \leq i,j \leq 6\}$$

$$(i,j) \to i+j$$

$$p(x=5) = p(\{(1,4),(3,2),(2,3),(4,1)\})$$

Para calcular el valor de la variable aleatoria se tiene que contar el numero de casos favorables sobre el total de casos

Tarea

Calcular la media y la desviación estandar del experimento de lanzar dos datos.
$\mu_x = \sum_k P(X=k)k$
$\delta_x = \sum_n^{delta} (\kappa - \mu_x)^2 p(x=n)$

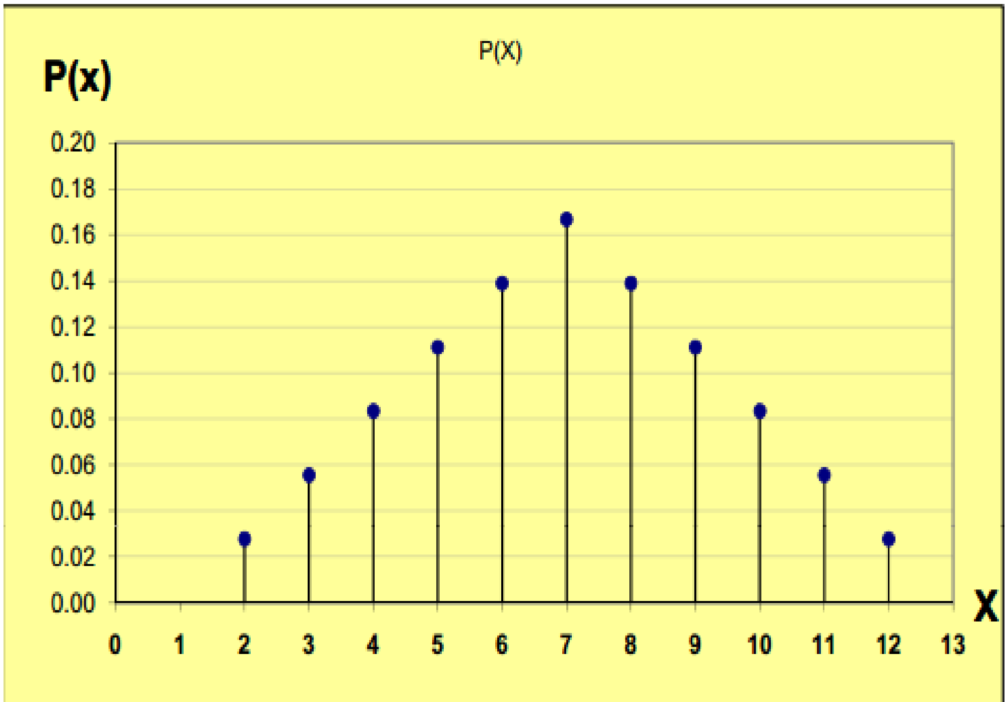
Experimento: arrojar dos dados
Espacio muestral: $\Omega = \{(i,s) :\ i,s = 1,2,\ldots,6\}$
$P : P(\Omega) \to [0,1]$

$$\Omega = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

cada uno es un evento elemental $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $(i,j) \to i+j$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Calculando la probabilidad de casos favorables / totales: $P(1) = \frac{1}{6}$ en un caso de independencia:
$P(i,j) = P(i)\ P(j) = \frac{1}{36}$. Calculamos la probabilidad de que x = k, será igual a la probabilidad de un conjunto de eventos elementales. $P(x=k) = P(\{(i,j :\ i+j=k\})$ $k = 2,3,\ldots,12$. Para calcular la probabilidad de la variable aleatoria cuando vale 3: $P(x=3) = P(\{(2,1),(1,2)\}) = P(\{(2,1)\}U\{(1,2\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$



Da como resultado la función de distribución discreta: $P(X = X_k)$
$V_x = \sum_k (x_k - \mu_k)^2 \, P(X = Xk)$
$\mu_x = \sum_k X_k \, P(X = x_k)$

Variables aleatorias continuas

Toman valores directamente de los numeros reales, no se calcula la probabilidad de que tome valores puntuales, lo que se valora, es que caiga en un intervalo diferencial.Se calcula por una función de densidad de probabilidad

$P(x \leq X \leq xdx) = F(x)dx$
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b F_x(x)dx$

Distribución de Bernouli

El problema es encontrar la probabilidad de que en n ensayos con dos posibles resultados, cada uno de ellos con probabilidad p y 1-p ocurran k con probabilidad p.
Supongamos que tenemos 3 ensayos.
n = 3
k = 0, 1, 2, 3

Es igual a $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3$
Ahora con n = 4 y k = 2

Es igual a: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$

Como es un producto podemos verlos como: $P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{u-k}$

Para calcular la media tenemos que recordar el binomio de Newton:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{u-k} b^k$

Problema: Calcula el promedio de una variable aleatoria de Bernulli con parametros (n, p).

$$\mu_x = E[x] = \sum_k k\, P[x=k] = \sum_{k=0}^{n} k\, \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= P_n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!\,(k-1)!} p^{(k-1)} (1-p)^{([n-1]-[k-1])}$$

Se hace un cambio de variable $\ell = k-1$ cuando $n = 1 \quad \ell = 0$

$$M_x = Pn \sum_n \frac{(n-1)!}{([n-1]-\ell) * \ell} p^\ell (1-p)^{[(n-1)-\ell]}$$

Donde $\sum_n \frac{(n-1)!}{([n-1]-\ell)*\ell}$ es igual a $\binom{n-1}{\ell}$ y tenemos que:

$$pn \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{(n-1)-\ell} = pn((1-p)+p)^{n-1} = pn$$

Ejercicio.

Calcular la varianza de una variable discreta de bernulli

Variable continua

La variable aleatoria continua puede tomar un valor del intervalo de los reales, lo que podemos calcular es que la variable caiga en un intervalo diferencial, $P(x \leq X \leq x + dx) = f_x(x)dx = dF(x)$ la ultima función se llama funcion de distribución o función de distribución acumulada.

$$dF(x) = f_x(x)dx = \frac{dF(x)}{dx} = f_x(x)$$

$$P(a \leq X \leq) = \int_a^b dF(x) = \int_a^b f_x(x)dx$$

por tanto se puede calcular la probabilidad de $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$
El evento seguro sería cuando la variable sea menor a infinito

$P(X \leq \infty) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx$

Función distribución uniforme

Entre cero y uno
Para:

$$0 \leq U \leq 1 con\ f_u(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_x(x)\ dx$$

$$V_x = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \mu_x)^2 f_x(x)\ dx$$

Proposición. Sea U una variable aleatoria y f_v y F_v una función de densidad de probabilidad y de distribución respectivamente. Entonces la variable aleatoria $V = F^{-1}(u)$ se distribuye como f_v

Lo que sees que: $P(u \leq x) = x$ para la función distribución uniforme

$$P(u \leq x) = \int_0^x 1dt = [t]_0^x = x - 0 = x$$

Pero $P(V \leq x)$ se puede escribir como:
Al querer evaluar V en cualquier valor lo podemos ver como:

$$P(V \leq x) = P(F^1(U) \leq X)$$

Como los de abajo son momentos podemos verlo de la siguiente forma

$$F^1(U)) \leq X \iff U \leq F(X)$$

Verlo así:

$$P(V \leq x) = P(F^1(U) \leq X) = P(u \leq F(x)) = F(x)$$

queda como:

$$P(v \leq x) = F(X) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$$

Ejercicio:

Integral

$$f_x = \lambda e^{-\lambda x}$$

calcular la integral y graficar el histograma

Binomios

$(a+b)=1$
$(a+b)^1=a+b$
$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$
$\vdots$
$(a+b)^n=(a+b)^{n-1}(a+b)$

sustituyendo apoyandonos del triangulo de pascal es:

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Definición: Un histograma es una función que asigna a cada elemento de una partición de un intervalo $[a,b]$ el número de miembros de un conjunto de datos que pertenecen a dicho elemento.

D: Conjunto de datos
$[a,b]=U_{i=1}J_i,\ \ j_i\cap J_j=0$
$hisT:J_i\to n_i$

Proposicion.
Sean los datos D los valores una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$.
Entonces $F_X(x)=n_i$ donde n; es el número de datos que eprtenecen a un intervalo J_i de una partición, que contiene a X.

Prueba.
Sea $(J_i)^2$ una partición uniforme del intervalo $[0,1]$ con $\mid J_i\mid=\frac{1}{N}$, (donde n es el número de muestras generadas), entonces la probabilidad de que X caiga en J_i es
$P\left(a_i\leq X\leq b_i=O_i+\frac{1}{N}\right)=F(b_i)-F(a_i)$. Por otro lado $P(a_i\leq X\leq b_i)=\frac{n_i}{N}$

$$F(b_i)-F(a_i)=\frac{n_i}{N},\quad \frac{[F(b_i)-F(a_i)]}{\frac{i}{N}=b_i-a_i}=n_i$$

$$lim_{N\to\infty}\frac{F(b_i)-F(a_i)}{b_i-a_i}=F_X(a_i)$$

Varianza

$$var(X)=\mathbb{E}[X-\mathbb{E}(X)^2]=\mathbb{E}[x^2-2X\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[X]^2]$$

$$=\mathbb{E}[X^2]-2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[X]^2=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X]$$

$$Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X]$$

$VAR(cX) = E[(cX - E[cX])^2] = \mathbb{E}[(cX - c\mathbb{E}[x])^2] = \mathbb{E}[(c(X - \mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[c^2(X - \mathbb{E}[X])^2]$
$= c^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

$Var(cX) = c^2 Var(X)$

Definición

Si x,y son variables aletorias continuas con función de destribucion conjunta $f_{xy}(x, y)$ decimos que son independientes si obtiene que $f_{xy}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$

Proposición si X,Y son variables aleatorias continuas independientes entonces>
$E[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Prueba.

$$\mathbb{E}[x, y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)f_{XY}(x, y)d_x d_y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x, y)f_X(x)f_Y(y)d_x d_y$$
$$= \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]$$

$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])(y - \mathbb{E}[y])] = \mathbb{E}[xy - x\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]Y + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]]$
$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[y]\mathbb{E}[x] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[x] + \mathbb{E}[y]$
$= \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[Y] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Proposicion

Si dos variables aleatorias continuas X,Y son independientes, entonces su $cov(x, y) = 0$

$$var(X + Y) = var(x)\ var(y)$$

Prueba.

$$var(x + y) = \mathbb{E}[((x + y) - \mathbb{E}[x + y])^2] = E[X] + E[Y]$$
$$= E(x - E[x])^2 + (y + E[y])^2 + 2(x - E[x])(y - E[y])$$
$$= E[(x - E[x])^2] + E[(y + E[y])^2] + 2E[(x - E[x])(y - E(x))]$$
$$= var(x + y) = var(x) + var(y)$$

Definicion.
Decimos que una variable aleatoria descreta es de Bernoulli si vale 1 cuando ocurre un evento conn probabilidad p y q con probabilidad (1-p) cunado no ocurre el evento.

Sea y una variable aleatoria discreta de Bernoulli entonces:

- $E[y] = P, \ \ var(y) = P(p-1)$
  Prueba.
  $\mathbb{E}[Y] = 1P + 0(1-P) = P$
  $Var(Y) = \mathbb{E}[(\frac{y}{\mathbb{E}[Y])^2]=} P(1-p)^2 + (1-p)(0.p)^2 = p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = (1-p)[p(1-p)+p^2]$
  $= (1-p)[p - p^2 + p^2] = p(1-p)$

Si X es una variable aleatoria binomial con probabilidad $\binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k}$ para n ensayos.

Entonces X se puede representar como la suma de n variables aleatorias de Bernoulli de pendientes $X = Y + y + \cdots + Y \to n \ veces$
$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] + \cdots + \mathbb{E}[Y] = n\mathbb{E}[Y] = np$
$var[X] = var[y] + \cdots + var[Y] = np(p-1)$

Distribución geométrica

$P(x=n) = (1-p)^{n-1}p$

n es el ensayo en que primera vez ocurre un eento con probabilidad p $\mathbb{E}[X]$

Serie geométrica $\mid \gamma \mid < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n, \ \ Sn = \sum_{k=0}^{n} \gamma^k = 1 + \gamma^n$$

$$\gamma Sn = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

a la primera se resta con la segunda y slo queda libre el primero y el ultimo elemento

$$Sn(1-r)Sn - rSn = 1 - r^{n-1} = Sn = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Esto es solo cuando r es menor a 1

$$S = lim \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Para calcular el valor esperado, como es discreta tenemos la formula:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = p\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}\right)$$

vamos a calcularlo usando el valor absoluto:

$$\frac{d}{dx} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

Segunda forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = (-1)(1-x)^2\frac{d}{dx}(1-x) = (-1)\frac{1}{(1-x)^2})(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

sustituyendo en la primera tenemos:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} =| \; p\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}\right) |= p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Ejercicio:

Calcular la varianza

Distribución de Poisson

$$p(x=n) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Para resolverla necesitaremso un resultado de la exponencial, vamos a utilizar el resultado de la derivada de la exponencial, se va a calcular la derivada de:

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{e^0 - e}{w} = 1$$

si ponemos e a la 0 que llamaremos w, menos 1, da w

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{e^{0-w} - e}{w} = 1, \;\; e^w - 1 = w$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad e^w = 1 + w, (e^{\frac{x}{N}})^N = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^2$$

y esto lo podemos ver como un limite:

$$e^x = (1 + \frac{x}{N})^N = lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

y asi es como vemos a e como una secuencia:

$$e = lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

aproximarlo en python

viendo esto con el binomio de newton, podemos ver:

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$$

$$e^x =| \; e^{w|^N=(1+w)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}} w^k = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\binom{X}{N}^k = \sum_{k=0}^{N}\frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}\frac{x^k}{N^k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \left[\frac{N}{N}\frac{N-1}{N}\dots\frac{(N-[k-1])}{N}\right]\left(\frac{x^k}{k!}\right)$$

$$\left[\frac{N}{N}\frac{N-1}{N}\dots\frac{(N-[k-1])}{N}\right] \to k\ factores$$

$$e^k = \sum_{k=0}^{N}(1-\frac{1}{N})\dots(1-\frac{h-1}{N})\frac{X^h}{n} = lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{1}{k})\dots(1-\frac{k-1}{k})\frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ \ e = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Representado a e como una serie tenemos:

$\lambda = np$

$p << 1$

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k(1-\frac{\lambda}{n})^n\left(1-\frac{k}{n}\right)^{-k}$$

Viendolo de forma de limite tenemos:

$$lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right] = \frac{\lambda^k}{n}e^{-\lambda}$$

$$P(x\ ocurre\ en\ el\ k-esimo\ \ ensayo) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-k}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\ell^\ell}{\ell!}\right) = \lambda$$

Ejercicio calcular varianza de poisson

$$Var = \mathbb{E}(x^2) - [\mathbb{E}(x)]^2$$

Encontraremos:

$$\mathbb{E}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}k^2p(x=k)$$

Utilizaremos la formula de la exponencial:

$$\$\mathbb{E}[x^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(x=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) + k * p(x=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p(x=k) + \sum_{k=0}^{\infty} k * p(x=k)$$

$$= \lambda * \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(e^{-\lambda}\lambda^{k-2})}{(k-2)!} \right] + \lambda = \lambda * e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda^{k-2})}{(k-2)!} \right] + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Entonces tenemos:

$$Var(x) = \lambda^2 + \lambda - [\lambda^2] = \lambda$$

ver pelicula: talentos ocultos

Habilidades

1. Modelo
2. Programarlo
3. conceptos
4. sdf

x distancia del centro de la aguja a la linea paralela más cercana
θ ángulo que forma la agua con las lineas paralelas.

Rango de variabilidad de x:

$$x \in \left[0, \frac{t}{2}\right]$$

Rango de variabilidad de θ:

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

son variables que dependen del experimento.

Se puede gráficar su funcion de proabilidad, con base de $0 \ a \ \frac{t}{2}$ y su altura de $\frac{2}{t}$ con una funcion de proabilidad de $f_x(x) = \frac{2}{T}$

La funcion de proabilidad para $\theta = f_\theta(\theta) = \frac{2}{\pi}$ con una distancia de $\frac{\pi}{2}$ y altura de $\frac{2}{\pi}$

Tenemos como condición para que la aguja cruce alguna linea paralela (hits), la condicion de corte es agarrar ℓ y proyectar verticalmente su imagen, usamos el seno para encontrar la proyección. La condición de cruce esta dado por:

$$\frac{\ell \ sen(\theta)}{2}$$

La condicion de cruza es:

$$x \leq \frac{\ell \; sen(\theta)}{2}$$

Como tenemos dos ariables podemos calcular la funcion de densidad conunta de x, θ que es igual a la multiplicacion de ambas funciones.

$$f_{x\theta}(x, \theta) = \frac{4}{T\theta}$$

Proabilidad de que la agua cruze alguna linea paralela:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\ell}{2} sen(\theta)} \frac{4}{\pi T} \, dx \, d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2} sen(\theta)} dx \right) \, d\theta = \frac{4}{\pi \, t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} sen(\theta) \, d\theta = \frac{2\ell}{\pi \, t} [-cos(\theta)] = \frac{2\ell}{\pi \, t} = aprox \;\; \frac{h}{n}$$

despeando π tenemos:

$$\pi = \frac{2\ell \, n}{h \, t} = \frac{n}{h}$$

la condicion es que $0 < \ell \leq t$

Ejemplo 2

Se va a simular el lanzamiento de dardos, en un cuadrado de 2 × 2, osea con un area de 4, y un circulo con area π se lanzan los dardos, usando numeros aleatorios que van desde -1 a 1,
$-1 \leq x \leq 1$
$-1 \leq y \leq 1$

vamos a comproar que si se acierta esta dado por:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{na}{n}$$

Podemos despejar pi como

$$\pi = 4\frac{na}{n}$$

Desigualdad de Markov

Si X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $F()$ entonces:

$$P(X \geq a) < \frac{\mathbb{E}[X]}{a} \quad (a < 0)$$

Prueba:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)\ dx + \int_{a}^{\infty} xf(x)\ dx$$

si la integral evaluada de infinito a a es positivo, se lo restamos a la otra integral.

$$\int_{a}^{\infty} xf(x)\ dx \leq \mathbb{E}[X]$$

En la integral se cumple que a es menor que x, si se integra, queda:

$$a\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx \leq \int_{a}^{\infty} xf(x)\ dx \leq \mathbb{E}[X]$$

Esto es lo mismo que verlo como si multiplicaramos a por la función

$$\int_{a}^{\infty} af(x) \leq \int_{a}^{\infty} xf(x)\ dv$$

Ley de los grandes numeros

Ley debil y fuerte de los grandes numeros

Desigualdad de Chebyshev

En probabilidad, la **desigualdad de Chebyshov** (también escrito de **Chebychev**) es un resultado que ofrece una cota inferior a la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria con varianza finita esté a una cierta distancia de su esperanza matemática.

Prueba:

$$\mathbb{E}\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}[(x-\mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$$p\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \mid k^2\right) < \frac{1}{k^2},\ p\left(\sqrt{(x-\mu)^2} > \sqrt{(k\sigma^2)}\right)$$

$$p(\mid x-\mu \mid\ \ \geq\ k\ \sigma) \leq \frac{1}{k^2} \rightarrow Desigualdad\ de\ Chebyshev$$

Sea $x_1, x_2, \ldots,$ una secuencia de variables aleatorias independientes, con media μ y varianza, con la misma distribuciom media μ y varianza σ^2

$$P\left(\mid \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \mu \mid\right) > \epsilon \rightarrow 0 \quad cuando\ n \rightarrow \infty$$

Ley fuerte de los grnades numeros

Con prabilidad 1

$$lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + \cdots + n}{n} = \mu$$

Distribución Gaussiana (normal)

$$e^{-x^2}$$

Es una distribución proporcionada.

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

Podemos agregar un $-\alpha$ a la x para extender la curva.

Integrando, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) = \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2+y^2} dxdy$$

Donde: $y^2 = x^2 + y^2$

Insertar imagen

$$I^2 = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \ r \ d\theta dr = \int_0^{\infty} r \left(\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2} d\theta \right) dr = \int_{\theta}^{\infty} e^{-r^2} r \left(\int_0^{\infty} d\theta \right) dr$$

$$2I = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{\pi}$$

Si hacemos:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

y como al integral da uno podemos ver como si es una función de probabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx \right) = 1$$

Desplazandola y escalandola tenemos:

$$\frac{(x-\mu)^2}{2\pi^2}$$

Sea X una variable aleatria discreta con distribución geometrica
$P(x = n) = (1-p)^{n-1}p$
$\mathbb{E}[x] = \frac{1}{p}$
$var(x) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$

Generación de números aleatorios uniformemente distribuidos (mediante una secuancia congruencial periodica)

$x_0 = semilla$
$x_{n+1} = ax_u + b \; mod \; w$

Revisar el libro de Donal knut, revisar las condiciones de divicibilidad The art of programing

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 1$$

Vamos a integrar la siguiente funcion dado lo que conocemos aunteriormente y lo vamos a probar en la distribucion gaussiana

$$\frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Dada una distribución Gaussiana:

$$\frac{1}{\sigma \, 2\sqrt{\pi}} =$$

Procesos Estocásticos

Definición de un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{N_t : t \in T. X_t \in S\}$. Donde T es un conjunto de indices y S conjunto de estados

Definición de Caminata aleatoria

Caminata aleatoria (simple) es un proceso aestocastico discreto $T(z_t, s \leq z)$

$$P(X_n = J \mid X_{n-1} = i) = \begin{cases} p, & j = i+1 \\ q, & J = i-1 \\ 0, & en \; caso \; contrario \end{cases}$$

$X_n = x_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$ son variables de Bernoulli y calculamos su valor esperado como:
$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[x_0 + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_1\right] = \mathbb{E}[x_0] + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\epsilon_i]] = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\epsilon_1]$ y obtenemos:
$\mathbb{E}[\epsilon_i] = 1 * p + (-1) * q = p - q \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$
$\mathbb{E}[X_n] = n(p-q)$

$$var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} var(\epsilon_i)$$
$$var(\epsilon_i) = \mathbb{E}[\epsilon_i^2] - \mathbb{E}[\epsilon_i]^2$$
$$\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = 1^2 * p + (-1)^2 q = p + q = 1$$
$$\mathbb{E}[\epsilon_i]^2 = p - q$$
$$var = 1 - (p-1)^2 \quad q = 1 - p$$
$$= 1 - (2p-1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 1 - 4p^2 + 4p - 1 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p)$$
$$var = 4npq$$

La variable X_n se puede escribir como pasos a la derecha menos pasos a la izquierda.

$$X = R_n - L_n \ \ y \, n = R_n + L_n$$
$$X_n + n = 2R_n \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$

La suma de n variables Bernulli se distribuye como una Binomial con parametro p y n

$$R_n = \frac{x_n + n}{2} = \frac{1}{2}(y_n + n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\epsilon_i + 1) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\epsilon_i + 1}{2}\right)$$

`$$P(X_{n}=x \mid X_{0}=0 )=P\left(R_{n}=\frac{x=2}{2}\right)=\begin{pmatrix}n \\ \frac{x+2}{2}\end{p`