Distribución estacionaria o final de una cadena de Markov

Hay dos probabilidades importantes para las cadenas de markov

$lim_{n \to \infty} P(X_n = J) = \pi_J$ (Distribucion estacionario)

Vamos a escribirla como una probabilidad conjunta para calcular la marginal a partir de la conjunta, en este caso la vamos a escribir como una marginal a partir de la conjunta:

$$P(X_{n+1} = J) = \sum_{i \in S} P(X_{n+1} = 5, X_N = i)$$

y ahora la marginal la escribimos como el producto de la condicional:

$$P(X_{n+1} = J) = \sum_{i \in S} P(X_{n+1} = 5, X_N = i) = \sum_{i \in S} P(X_{n+1} = J \mid X_n = 1) P(X_n = 1)$$

Donde $P(X_{n+1} = J \mid X_n = 1)$ es la entrada ij de una cadena de markov y llegamos a:

$$P(X_{n+1} = J) = \sum_{i \in S} P_{ij} P(X_n = 1)$$

después se tima el limite de los extremos, queda como:

$$\pi_J = lim_{n \to \infty} \; P(X_{n+1} = J) = \sum_{i \in S} p_{ij} \, lim_{n \to 6} \, p(X_n = i)$$

y esto es equivalente a:

$$\pi_J = \sum_{i \in S} P_{IJ} \pi_i, \qquad \pi = \pi P$$

viendolo de forma matricial tenemos:

$$(\pi_i, \ldots, \pi_n) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{nn} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & & P_{nn} \end{pmatrix} = (\, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_3, \ldots, \pi_4 \,)$$

Libro a utilizar: Stochastic Processes with R an introduction

autora Olga Korosteleva

Ejercicio

Vamos a considerar una matriz de probabilidad de la siguiente forma:

$$[\pi_1, \pi_2, \pi_3,] = [\pi_1, \pi_2, \pi_3,] \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Al realizar la multiplicaciones correspondientes tenemos lo siguiente:

$0.7\pi_1 + 0.0\pi_2 + 0.5\pi_3 = \pi_1$

$0.1\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.2\pi_3 = \pi_2$

$0.2\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 = \pi_3$

La solución va a ser el valor de la cadena de markov estacionaria, conocemos que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Se resuelve el sisitema de ecuaciones despejando primero π_3, luego π_2 y por ulitmo en la suma de los pi igual a uno se sustituyen los valores previos para obtener el valor de cada uno

$\pi_3 = 0.6\pi_1$

$\pi_2 = 0.55\pi_1$

Valores propios

$\pi 1 = 0.4651$

$\pi_2 = 0.2258$

$\pi_3 = 0.2790$