

Capítulo 2

Ecuaciones de Navier-Stokes. Fenómenos Turbulentos

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

2.1.1. Introducción

Antes de obtener las ecuaciones fundamentales que gobiernan el comportamiento de los fluidos, es preciso dejar claro el significado de las palabras mecánica de fluidos. Se puede decir que esta rama de la física, se encarga del movimiento e interacción de un gran número de elementos individuales[10], que en nuestro caso son moléculas y átomos.

Se supone que la densidad del fluido es lo bastante grande como para poder aproximarla a un medio continuo, de esta forma, cualquier porción infinitesimal de fluido contiene el suficiente número de partículas para poder definir una velocidad e incluso una energía cinética media en el elemento infinitesimal. En mecánica de fluidos, como vimos en el apartado 1.2.2, se definen unas variables y propiedades promediadas en un volumen infinitesimal, considerándolas como propiedades en cada punto del fluido.

La obtención de las ecuaciones de la mecánica de fluidos se basa en el hecho de que el comportamiento dinámico del fluido es gobernado por las siguientes ecuaciones de conservación[8]:

- La conservación de la masa o ecuación de continuidad.
- La conservación del momento cinético o de la cantidad de movimiento.
- La conservación de la energía.

La conservación de una magnitud fluida implica el estudio de esa magnitud en el interior de un volumen de control definido previamente, teniendo en cuenta, la *variación a través del contorno*, el *incremento de la magnitud fluida debida a fuentes y fuerzas internas*, y el efecto de *fuerzas externas actuando sobre el volumen* considerado.

El paso por unidad de tiempo de una magnitud a través del contorno se denomina flujo. En general, el flujo puede ser descompuesto en dos términos: uno debido al *transporte convectivo* y otro causado por el movimiento molecular considerando el fluido en reposo, llamado *transporte difusivo* (proporcional al gradiente de la magnitud considerada).

En un dominio fluido representado por líneas de corriente, se toma una región arbitraria del fluido, separada del resto por una superficie cerrada, $\partial\Omega$, que encierra un volumen de control, Ω . Además se define un elemento diferencial de superficie, dS , con normal positiva hacia afuera del dominio, \vec{n} (ver Figura 2.1).

El principio de conservación aplicado a una magnitud escalar por unidad de volumen U dice que la variación temporal de la magnitud dentro del volumen de control, Ω ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega \quad (2.1)$$

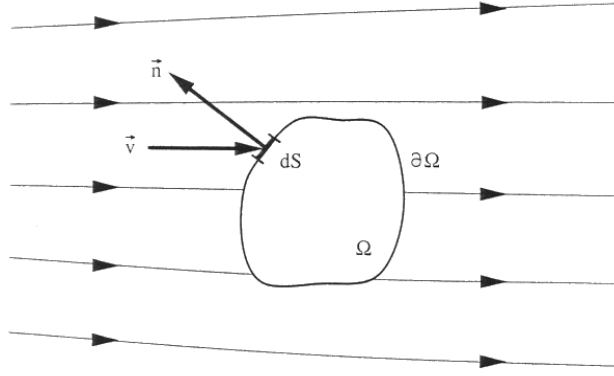


Figura 2.1: Definición de un volumen de control (fijo en el espacio)

es igual a la suma de las contribuciones debidas al *flujo convectivo* (incremento de la magnitud, U , que entra en el volumen de control a través del contorno con la velocidad \vec{v}),

$$- \oint_{\partial\Omega} U(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.2)$$

las debidas al *flujo difusivo* expresada a través de la *ley de Fick's generalizada*,

$$\oint_{\partial\Omega} k\rho \left[\nabla \left(\frac{U}{\rho} \right) \cdot \vec{n} \right] dS \quad (2.3)$$

donde k es el coeficiente de *difusividad térmica*, y a las fuerzas de volumen y de contorno que actúan sobre el dominio considerado,

$$\int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS \quad (2.4)$$

Sumando cada una de las contribuciones, se obtiene la siguiente ecuación general del *principio de conservación de una magnitud escalar*, U

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [U(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - k\rho (\nabla U^* \cdot \vec{n}) dS] = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{Q}_S \cdot \vec{n}) dS \quad (2.5)$$

donde U^* representa la magnitud U por unidad de masa, es decir, U/ρ .

Es importante resaltar que si se tiene una magnitud vectorial de conservación, la forma de la ecuación 2.5 resulta válida. Pero con la diferencia de que el flujo convectivo y difusivo se convierten en tensores en lugar de vectores ($-\bar{F}_C$ el tensor de flujo convectivo y \bar{F}_D el de flujo difusivo). Las fuentes de volumen serán un vector \vec{Q}_V , y las fuerzas de superficie un tensor \bar{Q}_S . Entonces, podemos expresar el principio de conservación para un vector general \vec{U} como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\vec{U}(\bar{F}_C - \bar{F}_D) dS - k\rho (\nabla U^* \cdot \vec{n}) dS] = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\bar{Q}_S \cdot \vec{n}) dS \quad (2.6)$$

2.1.2. Forma Integral de las ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuación de conservación de la masa. Ecuación de continuidad.

En el principio de conservación de la masa en fluidos monofásicos no existe la contribución del término difusivo en la ecuación de continuidad, lo que indica que para cualquier fluido en reposo, la variación de la masa implica un desplazamiento de las partículas fluidas.

Con objeto de explicar la ecuación de continuidad, consideraremos un volumen de control fijo en el espacio (ver figura 2.1). En cualquier punto de la superficie del volumen de control, la velocidad es \vec{v} , el vector unitario es \vec{n} y dS representa un elemento diferencial de superficie.

La magnitud que se conserva en este caso es la densidad, ρ . De esta forma, la variación de la masa total contenida en el volumen de control, será:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

El flujo de masa a través de una superficie fija en el espacio es igual al producto de la densidad por el área por la componente de la velocidad perpendicular a la superficie en el punto que estemos considerando. Sin embargo, la contribución a la ecuación del flujo convectivo a través de cada elemento superficial dS se expresa:

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Por convenio, \vec{n} , está definida hacia afuera del volumen de control. De esta forma, consideraremos como flujo entrante si el producto $(\vec{v} \cdot \vec{n})$ sea negativo, y positivo cuando el flujo salga del volumen de control.

En el estado estacionario, no existen fuerzas de volumen o de superficie actuando sobre el dominio. Así, teniendo en cuenta la formulación general de la ecuación 2.5, podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.7)$$

que representa la forma integral de la ecuación de continuidad o principio de conservación de la masa

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Se debe comenzar la obtención de la ecuación del momento, recordando la forma particular de la segunda ley de Newton la cual establece que la variación del momento es la consecuencia del sumatorio de todas las fuerzas que actúan sobre un elemento. El momento para un elemento infinitesimal dentro del volumen de control es:

$$\rho \vec{v} d\Omega \quad (2.8)$$

De este modo, la variación temporal de esta magnitud dentro del volumen de control es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega \quad (2.9)$$

En este caso, la magnitud que se conserva es el producto de densidad por velocidad, es decir:

$$\rho \vec{v} = [\rho u, \rho v, \rho w]^T \quad (2.10)$$

El tensor de flujo convectivo, que describe la transferencia de la cantidad de movimiento a través de la superficie del volumen de control, está formado, en el sistema cartesiano de coordenadas por las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} x &: \rho u \vec{v} \\ y &: \rho v \vec{v} \\ z &: \rho w \vec{v} \end{aligned} \quad (2.11)$$

La contribución del tensor de flujo convectivo a la ecuación de conservación del momento es:

$$- \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.12)$$

El flujo difusivo es cero, debido a que no es posible la difusión del momento en un fluido en reposo. Se pueden diferenciar dos tipos de fuerzas que actúan en un volumen de control:

- *Fuerzas de volumen:* son las que actúan directamente sobre la masa del volumen. Por ejemplo, la fuerza de la gravedad, de coriolis, centrífuga, ..., e incluso debidas al campo electromagnético.
- *Fuerzas de superficie:* son las que actúan directamente sobre la superficie que delimita el volumen de control. Estas fuerzas provienen de dos posibles fuentes: la distribución de presiones (impuesta por el fluido que rodea al volumen de control) y las tensiones normales y tangenciales (resultantes de la interacción del fluido con la superficies que delimitan el mismo).

Se puede observar que la fuerza por unidad de volumen, expresada por $\rho \vec{f}_e$, se corresponde con las fuerzas de volumen de la ecuación 2.5. De este modo, la contribución de las fuerzas de volumen a la ecuación de conservación del momento es:

$$\int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega \quad (2.13)$$

Las fuerzas de superficie están formadas por dos términos: la componente isótropa de la presión, y un tensor de esfuerzos viscosos, $\bar{\tau}$, es decir:

$$\bar{Q}_S = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (2.14)$$

donde \bar{I} es el tensor unitario. El efecto de las fuerzas de superficie sobre un volumen de control se representa en la figura 2.2.

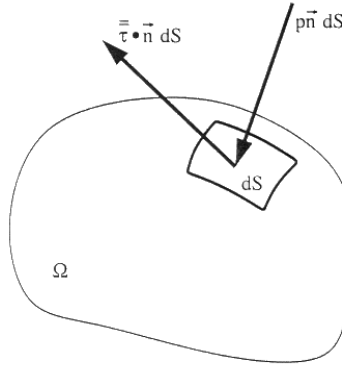


Figura 2.2: Fuerzas de superficie que actúan sobre un elemento superficial de un volumen de control

Por lo tanto, si se suma todas las contribuciones de acuerdo con el principio general de conservación (ecuación 2.6) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\tau} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.15)$$

para la conservación del momento dentro de un volumen de control arbitrario Ω fijo en el espacio.

Los esfuerzos viscosos, originados de la interacción entre el fluido y la superficie de un elemento, se representan mediante el tensor de tensiones, $\bar{\tau}$. En coordenadas cartesianas se escribe de la siguiente manera:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Las componentes τ_{xx} , τ_{yy} y τ_{zz} , representan las tensiones normales y el resto de componentes que forman el tensor, $\bar{\tau}$, representan los esfuerzos cortantes que actúan sobre el dominio fluido. En la figura 2.3 se representan todos los esfuerzos para un cubo infinitesimal.

El tensor de esfuerzos viscosos es función de las propiedades dinámicas del fluido. Para fluidos como el agua o el aire, Isaac Newton propuso que el tensor de esfuerzos fuera proporcional al gradiente de velocidades (fluidos newtonianos). Por otro lado, fluidos como la sangre o el plástico líquido se comportan de manera muy distinta (fluidos no newtonianos).

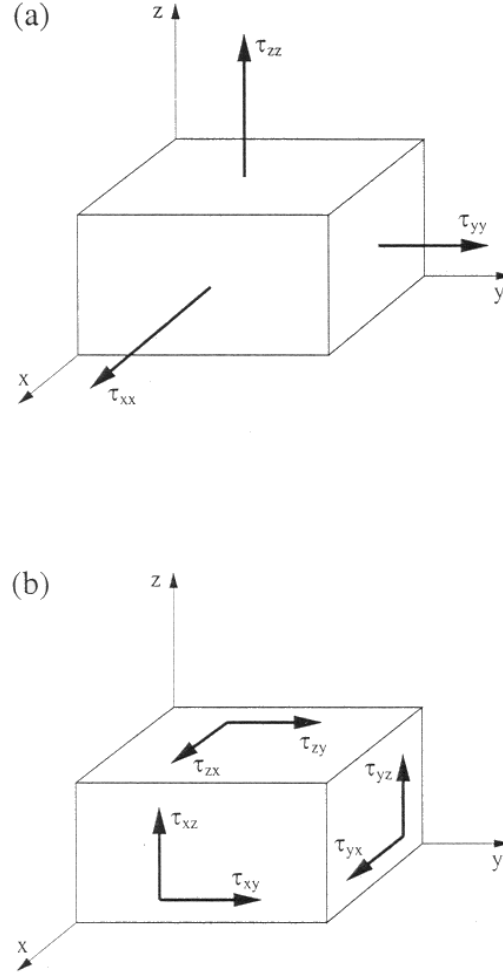


Figura 2.3: Esfuerzos normales y tangenciales actuando sobre un elemento fluido

La mayoría de los fluidos presentes en problemas comunes, se pueden considerar como newtonianos. De esta forma, las componentes del tensor de esfuerzos viscosos queda:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \tau_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

que se escribe en forma contraída como:

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.18)$$

en donde λ representa el segundo coeficiente de viscosidad, y μ el coeficiente de viscosidad dinámico. Por convenio, podemos definir también la viscosidad cinemática, que viene dada por la siguiente expresión:

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.19)$$

Ecuación de conservación de la energía

El principio en el que se basa la ecuación de la energía es el primer principio de la termodinámica. Si se aplica este principio a un volumen de control, expresa que la variación temporal de la energía total en el volumen de control es igual al incremento de trabajo de las fuerzas que actúan sobre el volumen y el flujo neto de calor a través del contorno del dominio.

La energía total por unidad de masa, E , de un fluido se obtiene añadiéndole a la energía por unidad de masa, e , un término correspondiente a la energía cinética por unidad de masa, $|\vec{v}|^2/2$. De este modo, podemos escribir la energía total como:

$$E = e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (2.20)$$

La magnitud que se conserva en este caso es la energía total por unidad de volumen, es decir, ρE . Esta variación expresada en el volumen Ω resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega \quad (2.21)$$

Siguiendo la línea de la ecuación general de conservación, se puede expresar la contribución a la del *término convectivo* como:

$$- \oint_{\partial\Omega} \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.22)$$

A diferencia de la ecuación de continuidad y de la de cantidad de movimiento, existe un *flujo difusivo*. Como se ha visto, éste es proporcional al gradiente de la magnitud que se conserve por unidad de masa (ley de Fick's). Como el *flujo difusivo*, \vec{F}_D , está definido para un fluido en reposo tan sólo la energía interna aparece en la expresión:

$$\vec{F}_D = -\gamma \rho k \nabla e \quad (2.23)$$

En esta expresión, $\gamma = c_p/c_v$ se muestra la relación de calores específicos donde k representa el coeficiente de difusividad térmica. El *flujo difusivo* representa una parte del flujo de calor en el volumen de control, llamado difusión de calor debida a conductividad térmica intermolecular (transferencia de calor por gradiente de temperaturas). Sin embargo, la ecuación 2.23 se puede escribir en la forma general de la ley de Fourier de la transferencia de calor como:

$$\vec{F}_D = -k \nabla T \quad (2.24)$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica y T la temperatura estática absoluta.

La otra parte del flujo de calor neto es el calor por unidad de volumen debido a la absorción, emisión, radiación, o a reacciones químicas. Las fuentes de calor se pueden expresar (variación del flujo de calor por unidad de masa) como \dot{q}_h , que junto a la variación de trabajo realizada por las fuerzas de volumen \vec{f}_e , que se introdujeron en la ecuación del momento, engloban la totalidad de las fuentes volumétricas:

$$Q_V = \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \quad (2.25)$$

Por último, las fuerzas de superficie, Q_S , también forman parte de la ecuación de conservación de la energía. Estas fuerzas incluyen el trabajo realizado tanto por las fuerzas de presión como por los esfuerzos normales y tangenciales en el elemento fluido. Reordenando todas las contribuciones a la ecuación de la energía, obtenemos la siguiente ecuación de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} k(\nabla T \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (2.26)$$

Normalmente, la ecuación de la energía 2.26 se escribe de forma diferente, empleando la entalpía total, H , en lugar de la energía, E . La expresión que relaciona ambas magnitudes es:

$$H = h + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = E + \frac{p}{\rho} \quad (2.27)$$

Si esto se aplica a dicha ecuación 2.26 se obtiene una nueva escrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho H (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} k(\nabla T \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (2.28)$$

2.1.3. Sistema completo de ecuaciones de Navier-Stokes

Forma integral

En el apartado anterior, se obtuvieron las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía por separado. El objetivo ahora es agruparlas en un único sistema de ecuaciones para tener una mejor visión de todos los términos involucrados[6].

Se define un vector de variables, \vec{W} , que se expresa:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Además, se definen dos vectores de flujos, \vec{F}_c y \vec{F}_v . El primero, \vec{F}_c , introduce los *términos de transporte convectivo en el fluido*, incluyendo el término de presión, $p\vec{n}$; y se expresa:

$$\vec{F}_C = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho H V \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

y por otro lado, \vec{F}_v , es el *vector de flujos viscosos*, que contiene los esfuerzos viscosos y la difusión de calor. Matemáticamente se expresa:

$$\vec{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

en donde n_i son las componentes del vector normal:

$$\begin{aligned}
\Theta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k\frac{\partial T}{\partial x} \\
\Theta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k\frac{\partial T}{\partial y} \\
\Theta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k\frac{\partial T}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

y por último, se define un vector, \vec{Q} , que engloba a aquellas fuentes debidas a *fuerzas de volumen* y *generación de calor* en el volumen fluido:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Volviendo a la ecuación general de conservación, e introduciendo las variables arriba definidas, resulta el siguiente sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento del fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_C - \vec{F}_V) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \tag{2.34}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones, representan un sistema de cinco ecuaciones con cinco variables a determinar (ρ , ρu , ρv , ρw y ρE), pero contienen siete incógnitas independientes que son: ρ , u , v , w , E , p y T . Por este motivo, debemos añadir al sistema dos ecuaciones, que serán las relaciones termodinámicas entre las variables de estado, (como por ejemplo la presión en función de la densidad y la temperatura) y la energía interna o la entalpía en función de la presión y la temperatura. Además de esto, quedan por determinar el *coeficiente de viscosidad*, μ , y la *conductividad térmica*, k , como una función del estado del fluido, para cerrar por completo el problema.

En la aerodinámica, es normal aproximar el comportamiento del aire como un gas perfecto, cuya ecuación de estado es de la forma:

$$p = \rho RT \tag{2.35}$$

donde R es la constante de gas ideal. En este caso la entalpía de un fluido resulta:

$$h = c_p T \tag{2.36}$$

Es aconsejable expresar la presión en términos de las variables del problema. Por esto, se combina las ecuaciones 2.27 y 2.35. Sustituyendo en 2.36 y usando las expresiones:

$$\begin{aligned}
R &= c_p - c_v \\
\gamma &= \frac{c_p}{c_v}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

se obtiene:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] \tag{2.38}$$

La temperatura se calcula entonces con la ecuación 2.35. El coeficiente de viscosidad dinámico, μ , es para un gas perfecto, muy dependiente de la temperatura y apenas dependiente de la presión. Por este motivo, es muy frecuente usar para su cálculo la fórmula de Sutherland, que en el sistema internacional adopta la forma:

$$\mu = \frac{1,45T^{3/2}}{T + 110} \cdot 10^{-6} \quad (2.39)$$

donde la temperatura, T , se expresa en Kelvin (K). Así, para $T = 288 K$ se obtiene $\mu = 1,78 \cdot 10^{-5} kg/m$. La dependencia de la temperatura con el coeficiente de conductividad térmica, k , se asemeja a la del coeficiente de viscosidad dinámico, μ . Por el contrario, k , es prácticamente constante en el caso de líquidos. Por este motivo, la relación:

$$k = c_p \frac{\mu}{Pr} \quad (2.40)$$

es usada normalmente sólo para gases. Además se considera que el número de Prandtl, Pr , es constante en todo el dominio fluido; y en el caso de gases toma el valor $Pr = 0,72$.

Forma Diferencial

Teniendo en cuenta que los *flujos convectivos y viscosos son continuos*, las ecuaciones que gobiernan el flujo de forma integral, pueden ser transformadas de la forma integral a diferencial; aplicando en primer lugar el teorema de Gauss[5], la ecuación 2.34 queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\bar{F}_C - \bar{F}_V) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \quad (2.41)$$

en donde, \bar{F}_C y \bar{F}_V representan los tensores correspondientes a los *flujos convectivos y viscosos* respectivamente. La ecuación 2.41 puede ser escrita para un volumen de control arbitrario como:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{F}_C - \bar{F}_V) = \vec{Q} \quad (2.42)$$

En mallas estructuradas (ver apartado 3.2.2), para tener en cuenta cualquier tipología de mallas alrededor de obstáculos, se introduce un cambio de coordenadas entre el sistema cartesiano (x, y, z) y el curvilíneo (ξ, η, ζ) :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z, t) \\ \eta &= \eta(x, y, z, t) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Con esto, la forma diferencial de las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones 2.41 se transforman en:

$$\frac{\partial \vec{W}^*}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{c,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}_{c,2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{F}_{c,3}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \vec{F}_{v,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}_{v,2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{F}_{v,3}}{\partial \zeta} + \vec{Q}^* \quad (2.44)$$

El vector de variables, es ahora:

$$\vec{W}^* = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

por otro lado, los vectores de *flujos convectivos* siguen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{c,1} &= J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V_1 \\ \rho V_1 u + \varepsilon_x p \\ \rho V_1 v + \varepsilon_y p \\ \rho V_1 w + \varepsilon_z p \\ \rho V_1 H \end{bmatrix} \\
\vec{F}_{c,2} &= J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V_2 \\ \rho V_2 u + \varepsilon_x p \\ \rho V_2 v + \varepsilon_y p \\ \rho V_2 w + \varepsilon_z p \\ \rho V_2 H \end{bmatrix} \\
\vec{F}_{c,3} &= J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V_3 \\ \rho V_3 u + \varepsilon_x p \\ \rho V_3 v + \varepsilon_y p \\ \rho V_3 w + \varepsilon_z p \\ \rho V_3 H \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

y los vectores de *flujos viscosos* se definen como:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{v,1} &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_x \tau_{xx} + \varepsilon_y \tau_{xy} + \varepsilon_z \tau_{xz} \\ \varepsilon_x \tau_{yx} + \varepsilon_y \tau_{yy} + \varepsilon_z \tau_{yz} \\ \varepsilon_x \tau_{zx} + \varepsilon_y \tau_{zy} + \varepsilon_z \tau_{zz} \\ \varepsilon_x \Phi_x + \varepsilon_y \Phi_y + \varepsilon_z \Phi_z \end{bmatrix} \\
\vec{F}_{v,2} &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \Phi_x + \eta_y \Phi_y + \eta_z \Phi_z \end{bmatrix} \\
\vec{F}_{v,3} &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \Phi_x + \zeta_y \Phi_y + \zeta_z \Phi_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Por último, el *término de fuentes* queda:

$$\vec{Q}^* = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

donde \vec{f}_e representa el vector de fuerzas de volumen.

Por otro lado, las velocidades en el nuevo sistema de coordenadas vienen dadas por las fórmulas:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \varepsilon_x u + \varepsilon_y v + \varepsilon_z w \\
V_2 &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\
V_3 &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Las componentes del tensor de *esfuerzos viscosos* y el *fujo térmico* resulta:

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\Theta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x} \\
\Theta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y} \\
\Theta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

donde k representa el coeficiente de *conductividad térmica*, μ el coeficiente de *viscosidad dinámica* y λ el *segundo coeficiente de viscosidad*.

Los términos correspondientes al *flujo difusivo*, pueden escribirse también:

$$\begin{aligned}
k \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\mu}{(\gamma - 1) \text{Pr}} \frac{\partial c^2}{\partial x} \\
k \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\mu}{(\gamma - 1) \text{Pr}} \frac{\partial c^2}{\partial y} \\
k \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\mu}{(\gamma - 1) \text{Pr}} \frac{\partial c^2}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

en donde c representa la velocidad del sonido y Pr el número de Prandtl.

Las derivadas de las componentes de la velocidad, u , v y w y la temperatura T en coordenadas cartesianas x , y y z pueden expresarse, aplicando la regla de la cadena, como derivadas de ξ , η y ζ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \varepsilon_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\
&\text{etc ...}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

La inversa del determinante del Jacobiano de la transformación inversa $\partial(\xi, \eta, \zeta)/\partial(x, y, z)$ se define como:

$$J^{-1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{2.53}$$

Por último, los términos que relacionan ambas variables:

$$\begin{aligned}
\xi_x &= J \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \\
\xi_y &= J \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\
\xi_z &= J \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\
\eta_x &= J \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \\
\eta_y &= J \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\
\eta_z &= J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\
\zeta_x &= J \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\
\zeta_y &= J \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\
\zeta_z &= J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

2.2. Aproximaciones y Simplificaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes

2.2.1. Introducción

El comportamiento dinámico de fluidos está gobernado por las ecuaciones de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía:

En el caso más general, las ecuaciones completas de Navier-Stokes presentan las siguientes características[1]:

- Son dependientes del tiempo
- Tridimensionales
- Incluye esfuerzos viscosos
- Considera la compresibilidad del fluido
- Son ecuaciones en derivadas parciales elípticas y altamente no lineales
- Se encuentran acopladas entre sí.

Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible reducir el análisis, simplificando las ecuaciones mediante:

- Imponiendo unas condiciones de contorno que no varíen con el tiempo (estacionarios).
- La reducción de dimensiones (problemas estacionarios, bidimensionales o axisimétricos).
- Aproximando el comportamiento del fluido (incompresible, no viscoso).
- Simplificando las fuerzas que actúan sobre el fluido (hidrostático, potencial).
- Aproximaciones basadas en valores medios (Reynolds medio, profundidad media (depth-averaged)).

2.2.2. Fenómenos estacionarios

Se dice que un fluido es estacionario cuando lo son sus condiciones de contorno. Sin embargo, existen muchos dominios fluidos que poseen una dependencia natural respecto al tiempo, como por ejemplo: las olas, mareas, En cambio hay ocasiones en las que con unas condiciones de contorno estacionarias el flujo se convierte en dependiente del tiempo a través de una inestabilidad, por ejemplo: las estelas turbulentas y la alternancia de vórtices. (ver figura 2.4)

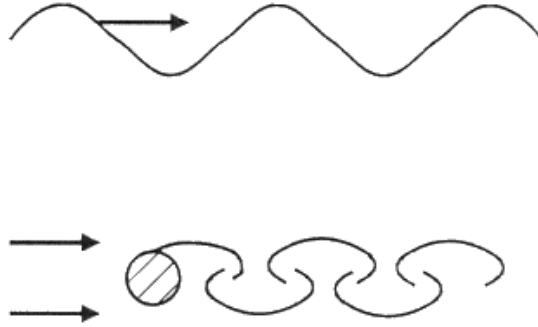


Figura 2.4: Sistemas no estacionarios

Sin embargo, muchos procedimientos de resolución dependen de un método dependiente del tiempo para alcanzar la solución del estado estacionario. Matemáticamente, un fenómeno estacionario implica que la variación temporal de cualquier variable del problema sea igual a cero, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (2.55)$$

2.2.3. Geometrías bidimensionales

Para poder considerar un problema bidimensional, la geometría y las condiciones del contorno deben indicar que la velocidad y las variaciones de cualquiera de las variables en la dirección perpendicular al plano de movimiento son nulas. Los problemas bidimensionales simplifican mucho las ecuaciones, reduciendo drásticamente el coste computacional asociado al problema. Por el contrario, la verdadera bidimensionalidad es enormemente complicada de obtener en un laboratorio.

En los problemas bidimensionales se incluyen también los problemas axisimétricos (aquellos que presentan una simetría de revolución respecto a un eje).

2.2.4. Flujos incompresibles

Los fluidos, en general, son todos compresibles en mayor o menor grado. Sin embargo, las variaciones de densidad motivadas por cambios de presión pueden ser despreciados si:

- El número de Mach, $Ma = u/c \ll 1$
- Las variaciones de temperatura son pequeñas.

Cabe resaltar que el término incompresible, no significa que la densidad es constante; de hecho, existen un gran número de casos donde la densidad es la responsable del movimiento de los fluidos; como por ejemplo: las variaciones de salinidad en los océanos o las variaciones de temperatura en la atmósfera.

Las consecuencias numéricas de los flujos compresibles e incompresibles son:

- Flujos compresibles:

- Ecuaciones de transporte para la densidad y la energía interna (o entalpía).
- Obtención de la presión mediante una relación termodinámica.
- Solución mediante un método basado en la densidad.

■ Flujos incompresibles:

- La energía interna es irrelevante (las ecuaciones no están acopladas).
- La conservación de la masa lleva implícita una ecuación para la presión.
- Solución mediante un método basado en la presión.

2.2.5. Fluidos no viscosos

Si se desprecia la viscosidad, las ecuaciones de Navier-Stokes, se convierten en las ecuaciones de Euler. Si omitimos el término *viscoso* se reduce el orden de las ecuaciones diferenciales¹, y la ecuación 2.34 que resulta es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_C) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \quad (2.56)$$

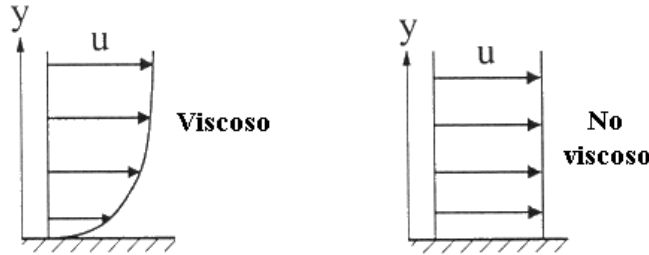


Figura 2.5: Diferencias de comportamiento entre fluidos viscosos y no viscosos en las cercanías de una pared.

Los *flujos viscosos* (reales) requieren una condición de contorno de no deslizamiento en la superficie (velocidad cero) que se denomina condición de contorno dinámica. Por el contrario, en los *flujos no viscosos* (ideales) basta con imponer velocidad perpendicular a la superficie nula, a este tipo de condición se le denomina condición de contorno cinemática.

En general, la influencia de la viscosidad en la mayor parte del flujo es pequeña, siendo en las regiones más pequeñas (mayores gradientes de velocidades), donde su efecto adquiere mayor importancia.

2.2.6. Fluidoestática

La componente vertical de la ecuación de conservación del momento, se puede expresar:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + F_{viscosas} \quad (2.57)$$

Para grandes escalas horizontales, la aceleración vertical, Dw/Dt , es mucho menor que la aceleración de la gravedad, g , por lo tanto, el balance de términos equivale a un estado de fluidoestática, es decir:

¹Por ejemplo, para la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el interior de una capa límite desarrollada, se tiene:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Si se desprecia el término *viscoso* ($\mu \partial^2 u / \partial y^2$) se eliminan las derivadas de segundo orden de la ecuación. El resultado es una ecuación diferencial de primer orden, eliminando una de las condiciones de contorno.

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx -\rho g \quad (2.58)$$

Con esta aproximación (en flujos de densidad constante con una superficie libre) se puede determinar la presión en cualquier punto del dominio a partir de la distancia a la superficie libre de la siguiente manera:

$$p = p_{atm} + \rho g(h - z) \quad (2.59)$$

donde, $h = h(x, y)$

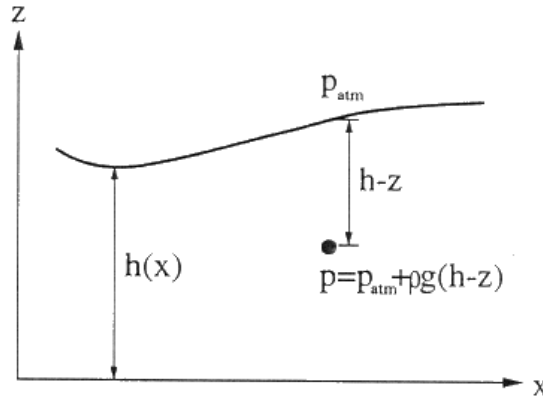


Figura 2.6: Variación de la presión con la altura de líquido

2.2.7. Profundidad media (depth-averaged)

Estas ecuaciones describen el flujo de un fluido de densidad constante y con una superficie libre, cuando la profundidad del fluido es pequeña en comparación con las dimensiones horizontales del dominio.

En esta aproximación hidráulica, el fluido puede ser considerado cuasibidimensional con:

- Las componentes horizontales de la velocidad u y v .
- La profundidad del agua.

Es conveniente resaltar que h puede variar provocando cambios en la superficie libre; en estos casos, la componente vertical de la velocidad puede ser despreciada en comparación con la horizontal.

Aplicando el principio de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento a una columna de fluido arbitraria de densidad constante y de altura h , las ecuaciones integradas en la profundidad que gobiernan el movimiento pueden ser expresadas (para el caso monodimensional $v = 0$) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}gh^2\right) + \frac{1}{\rho}(\tau_{superficie} - \tau_{fondo}) \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde el término $\frac{1}{2}gh^2$ representa de la fuerza fluidoestática de una columna de agua de altura h .

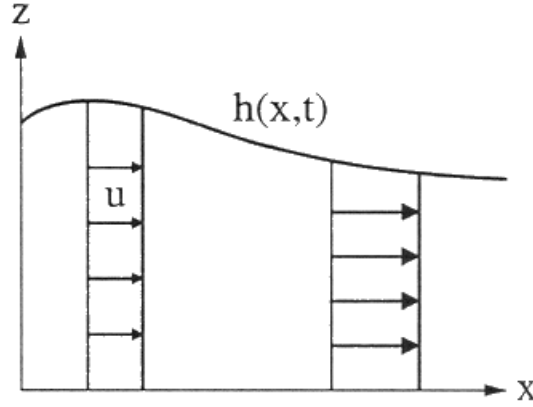


Figura 2.7: Cuando la profundidad del fluido es pequeña en comparación con las dimensiones horizontales se escriben las ecuaciones Depth-averaged

2.2.8. Flujo potencial. Ecuación de Euler-Bernoulli

En flujos con densidad constante, el momento angular de un elemento fluido tan sólo puede variar debido a la acción de las fuerzas viscosas (porque las fuerzas de presión actúan en dirección perpendicular a la superficie y no pueden inducir rotación). En un *fluido ideal* (no viscoso) el flujo puede ser considerado como irrotacional. Para esos flujos, la velocidad u puede obtenerse a través de una relación potencial:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Substituyendo en la ecuación de los fluidos incompresibles:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.62)$$

obtenemos la ecuación de *Laplace* para ϕ :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.63)$$

El comportamiento de los flujos potenciales queda completamente definido mediante una ecuación escalar que se conoce como de *Bernoulli*, la cual nos relaciona a lo largo de una línea de corriente, la presión, p , y la velocidad, U , en un punto del dominio fluido con las condiciones de presión y velocidad, p_∞ y U_∞ existentes corriente arriba, lejos del cuerpo:

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_R \quad (2.64)$$

donde, ρ , es la densidad del fluido (considerada como constante).

2.3. Fenómenos turbulentos. Modelos

2.3.1. Introducción

La turbulencia es un fenómeno susceptible de ser definido como:

- Un movimiento tridimensional y caótico de torbellinos de distintos tamaños, superpuestos a un movimiento o flujo principal del fluido.
- Una tipo de movimiento solución particular de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Un eficiente mezclador de masa, momento cinético y energía.
- Un disipador importante de energía.
- El último gran problema sin resolver de la dinámica de fluidos.

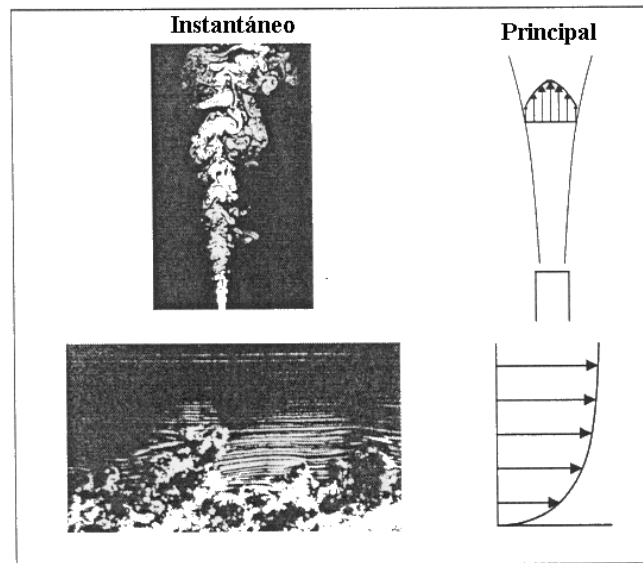


Figura 2.8: Ejemplos de flujo turbulento (descarga y capa límite).

La turbulencia se inicia por inestabilidades en el flujo causadas por los gradientes de velocidades medias. Estos torbellinos en movimiento, generan nuevas inestabilidades dando lugar a torbellinos más pequeños. El proceso continúa hasta que los torbellinos se hacen lo suficientemente pequeños (y los gradientes de los términos fluctuantes de las velocidades lo bastante grandes) para que el efecto de la viscosidad adquiera importancia y se disipe la energía turbulenta en forma de calor. Este proceso (la creación continuada de energía turbulenta en las grandes escalas, la transferencia de la misma hacia torbellinos más y más pequeños para acabar disipándose a través de la viscosidad), se denomina *cascada de la energía turbulenta*[4] y aparece representado esquemáticamente en la figura 2.9.

2.3.2. Modelos de turbulencia

La solución de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido no presenta gran dificultad en el caso de flujos laminares o no viscosos. Por el contrario, la simulación de los flujos turbulentos, sí presenta serios problemas. La clasificación de los principales modelos de turbulencia existentes en la literatura se resume en la figura 2.10, donde aparecen ordenados en función del coste computacional asociado a su empleo.

Direct Numerical Simulation (DNS)

No se trata de un modelo de turbulencia en sí mismo, sino de la solución completa de las ecuaciones de Navier-Stokes. Este método resulta inabordable en problemas con altos números de Reynolds, ya que sería preciso resolver todas las escalas del movimiento (desde la dimensión característica del problema hasta la escala de *Kolmogorov* o de pequeños torbellinos). Para ello, resulta necesario definir un gran

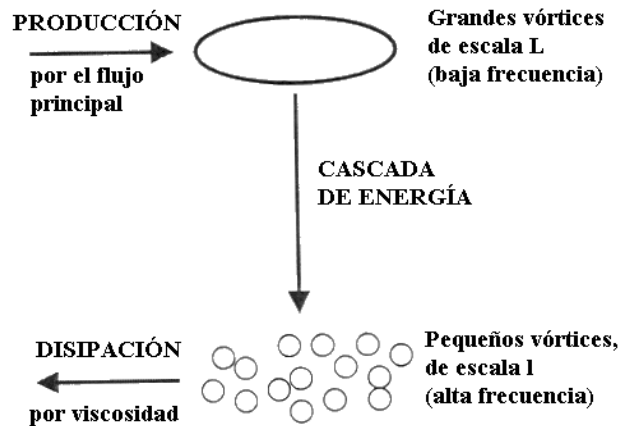


Figura 2.9: Descripción del proceso de la turbulencia

número de elementos, que diversos autores estiman del orden de $Re^{\frac{9}{4}}$ aproximadamente². No obstante, los supercomputadores y grandes clusters actuales, han obtenido resultados para flujos simples a números de Reynolds moderados, ayudando así a la comprensión del fenómeno de la turbulencia y al desarrollo de modelos más simples.

Large Eddy Simulation (LES)

La simulación completa de un flujo turbulento, dependiente del tiempo y a elevados números de Reynolds, es prácticamente imposible por la finura de la discretización que se necesita; el tamaño de los elementos debe ser menor que la más pequeña escala de movimiento. Aparece así el LES como una alternativa más económica que el DNS.

El desarrollo del LES se basa en la observación de que las pequeñas escalas de turbulencia poseen un carácter más universal que las grandes. Por lo tanto, la idea es resolver únicamente las grandes escalas de la turbulencia y aproximar el efecto de las pequeñas escalas (por esto el LES necesita una discretización menos fina que el DNS).

Mediante este método y tras un proceso de filtrado de las ecuaciones, se reformula el problema para las velocidades instantáneas (media + turbulenta) que pueden ser capturadas por la malla y se modela el efecto de la disipación viscosa para las escalas menores, que no se pueden resolver correctamente con la malla utilizada. A escalas menores, es de esperar que los movimientos turbulentos sean menos dependientes del problema y se puedan modelar de forma más general.

Existen diversos métodos de aproximación para las escalas pequeñas, los más simples son: el de longitud de mezcla, proporcional a la tamaño de la malla y el modelo de *Smagorinsky*.

Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)

El siguiente nivel de aproximación es el promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS). Esta aproximación, propuesta por Reynolds en 1895, está basada en la descomposición de las variables de flujo en un valor medio y otro fluctuante. Como veremos en la sección 2.4, las ecuaciones de Navier-Stokes se reformulan en función de las variables promedio, obteniendo así un nuevo sistema de ecuaciones, denominado RANS, muy parecido al original pero con un término adicional desconocido que hace falta modelar[12].

Se han propuesto una gran variedad de modelos de turbulencia para cerrar las ecuaciones RANS; estos modelos se dividen en ecuaciones de cierre de primer y de segundo orden. En los modelos de primer orden, cabe destacar el *turbulent eddy viscosity model* (modelo de viscosidad turbulenta de

²Ello supone, que para simular con todo detalle un flujo con un número de Reynolds de 10^6 , harían falta del orden de 10^{13} elementos.

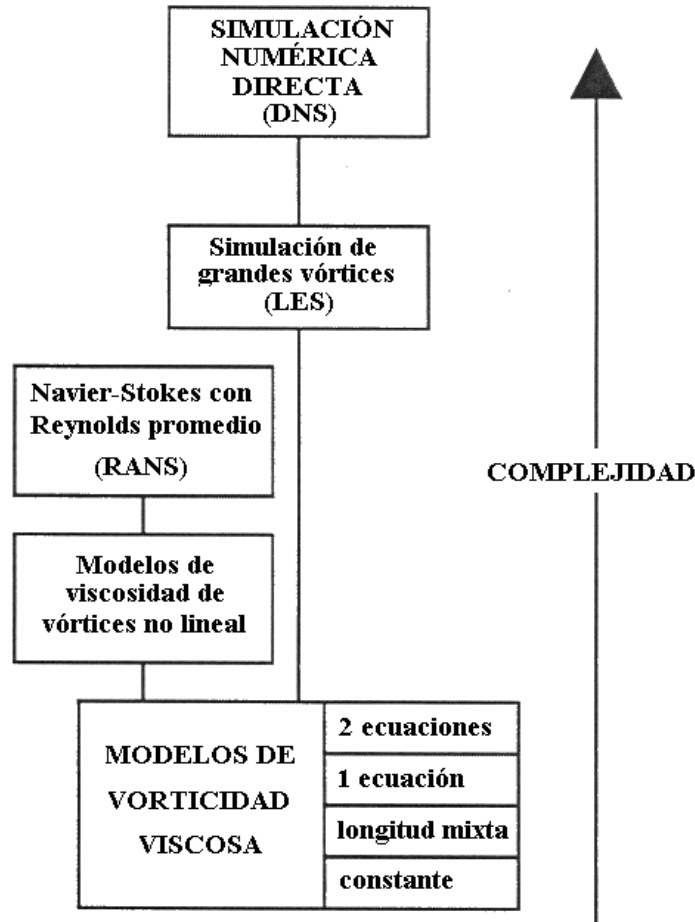


Figura 2.10: Clasificación de los distintos modelos de turbulencia en función de su coste computacional

torbellinos); y en los de segundo orden, el modelo *Reynolds Stress Transport model* (RST o modelo de transporte de los esfuerzos de Reynolds), y el modelo *algebraico de los esfuerzos de Reynolds*.

Las ecuaciones de cierre de primer orden se clasifican a su vez en modelos de ninguna, una o múltiples ecuaciones, correspondientes al número de ecuaciones que se utilicen.

2.4. Las ecuaciones RANS

2.4.1. Introducción

En primer lugar, vamos a reescribir las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma diferencial, empleando notación con subíndices. En el caso de fluidos newtonianos compresibles, las ecuaciones de Navier-Stokes se expresan, en ausencia de términos fuente, como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j H) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde el término u_i representa la componente de la velocidad³ en la dirección x_i ($i = 1, 2, 3$) y los subíndices repetidos indican sumatorio para dicho índice. Las componentes del tensor de esfuerzos viscosos, τ_{ij} se definen:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = 2\mu S_{ij} - \left(\frac{2\mu}{3}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.66)$$

cuando utilizamos las hipótesis de Stokes. El segundo término de la ecuación 2.66 es decir $\partial u_k / \partial x_k$, que corresponde al término de la divergencia de la velocidad, desaparece para flujos incompresibles. Las componentes del tensor de deformaciones vienen dadas por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.67)$$

Por otro lado, se define el tensor de rotación (parte antisimétrica del tensor variación de la velocidad) como:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.68)$$

La energía total E y la entalpía total H se obtienen a partir de las expresiones:

$$\begin{aligned} E &= e + \frac{1}{2} u_i u_i \\ H &= h + \frac{1}{2} u_i u_i \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para flujos incompresibles (ρ constante), podemos simplificar las ecuaciones 2.65 en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} &= k \nabla^2 T \end{aligned} \quad (2.70)$$

con $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática y ∇^2 el operador de Laplace.

2.4.2. Promedio de Reynolds

En ingeniería, los flujos son turbulentos en su mayoría. Pero sin embargo, muchos de estos flujos pueden ser considerados como muy poco dependientes del tiempo, con unas fluctuaciones superpuestas a la corriente principal estacionaria. En dicho caso, sólo nos interesarán las magnitudes promediadas en el tiempo, en lugar de los detalles de variación con el tiempo.

La primera aproximación al estudio de flujos en régimen turbulento fue presentada por Reynolds en 1895. La metodología se basa en la descomposición de las variables del flujo en su valor medio más la fluctuación, ver figura 2.11. Las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven entonces para los valores medios, que son los más interesantes para muchas aplicaciones. De este modo, si se consideran flujos incompresibles, las componentes de la velocidad y la presión en la ecuación 2.70 se sustituyen por:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u'_i \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (2.71)$$

donde los valores medios se denotan por una barra sobre la variable y los turbulentos por una prima. El valor medio se obtiene aplicando, según el tipo de problema, uno de los métodos siguientes:

³Respecto de la formulación anterior, simplemente hemos renombrado las componentes de la velocidad (u, v, w) por (u_1, u_2, u_3) .

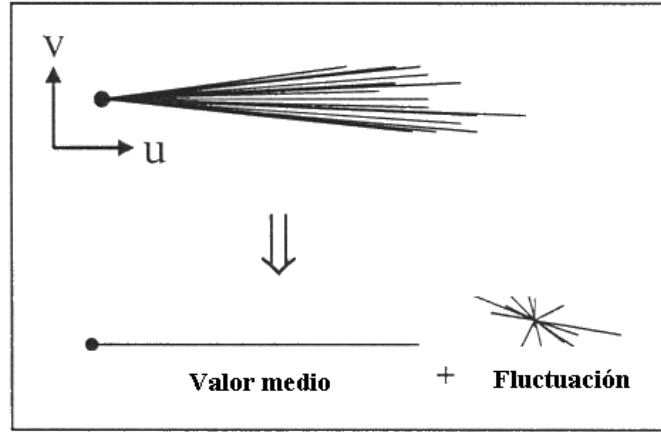


Figura 2.11: Las variables del problema se descomponen en un valor medio y otro fluctuante debido a la turbulencia

- **Promedio temporal:** es un método apropiado para flujos turbulentos estacionarios. El valor medio de la variable no varía en el tiempo, sólo en el espacio. En la práctica $T \rightarrow \infty$ significa que el período de tiempo debe ser mucho mayor que el tiempo típico de las escalas de fluctuación turbulentas.

$$\overline{u_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i dt \quad (2.72)$$

- **Promedio espacial:** es apropiado para turbulencias homogéneas. En este caso, $\overline{u_i}$ es uniforme en el espacio, pero varía con el tiempo.

$$\overline{u_i} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_i d\Omega \quad (2.73)$$

Características generales del operador promedio

El operador promedio posee las siguientes propiedades importantes:

1. Por definición, el promedio de un término fluctuante es cero, por ejemplo, para la velocidad $\overline{u'_i} = 0$.
2. El producto de dos cantidades fluctuantes no es cero si las magnitudes están correlacionadas. Por lo tanto, $\overline{u'_i u'_j} \neq 0$ y, como veremos, ello conlleva un transporte neto de momento.

2.4.3. Promedio de Favre

En los casos donde la densidad no es constante, se puede aplicar una densidad promediada. Por otro lado, las ecuaciones promediadas de gobierno se convierten en algo más complicadas debido a las correlaciones adicionales debidas a las fluctuaciones de la densidad. La manera más adecuada es emplear el promedio de Reynolds para la densidad y la presión, y el promedio de Favre para las otras variables como las componentes de la velocidad.

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u_i dt \quad (2.74)$$

en donde $\bar{\rho}$ representa la densidad promedio de Reynolds. Por lo tanto, la descomposición de Favre queda:

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad (2.75)$$

donde \tilde{u}_i representa el valor medio y u_i'' el término fluctuante de la velocidad u_i .

Características del promedio de Favre

Se cumple que $\widetilde{v_i'' v_j''} \neq 0$, pero al contrario de lo que ocurre con el promedio de Reynolds, la media del término fluctuante de la velocidad no es cero, es decir, $\widetilde{u_i''} \neq 0$. Cumpliéndose además la igualdad $\widetilde{\rho u_i''} = 0$.

Finalmente, la siguiente relación se puede obtener entre los promedios de Favre y Reynolds:

$$\widetilde{\rho u_i} = \overline{\rho u_i} \quad (2.76)$$

2.4.4. Ecuaciones RANS en flujos incompresibles

Si sustituimos la descomposición 2.71 o 2.75 en las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible 2.70, y considerando las propiedades del operador promedio, se obtienen las siguientes relaciones para la conservación de la masa y la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{\rho u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ij}} - \overline{\rho u_i' u_j'} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

que son las ecuaciones RANS para flujo compresible, con

$$\overline{\tau_{ij}} = \mu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.78)$$

Podemos comprobar que las ecuaciones 2.77 son idénticas a las ecuaciones originales de Navier-Stokes 2.70, a excepción del término:

$$\tau_{ij}^R = \overline{\rho u_i' u_j'} \quad (2.79)$$

que es lo que se conoce como el tensor de *esfuerzos de Reynolds*; y representa la transferencia de momento debido a las fluctuaciones turbulentas.

Efecto de la turbulencia sobre el flujo principal

Para explicar la influencia de la turbulencia sobre el flujo, examinaremos la forma integral de las ecuaciones para un volumen arbitrario suponiendo la densidad constante.

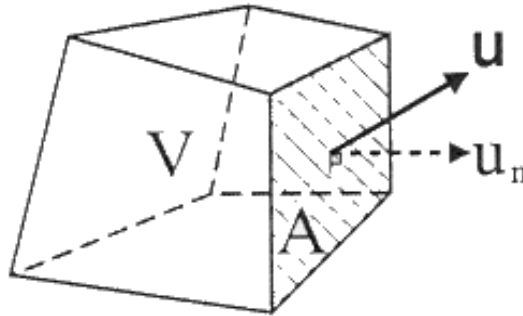


Figura 2.12: Elemento de control en el que se representa la velocidad a través de una de sus caras

Conservación de la masa La ecuación de la conservación de la masa expresada en variables medias e instantáneas son:

- Instantáneas:

$$\sum \rho u_n A = 0 \quad (2.80)$$

donde el sumatorio se extiende a lo largo de las caras del elemento.

- Medias:

$$\sum \rho \bar{u}_n A = 0 \quad (2.81)$$

Como se puede observar, basta con sustituir la velocidad media, \bar{u} , por la instantánea, u . Luego podemos afirmar que la velocidad media satisface la misma ecuación de continuidad que la velocidad instantánea.

Conservación del momento cinético Las ecuaciones de conservación del momento expresadas en términos del flujo instantáneo y medio son:

- Instantáneo:

$$\frac{d}{dt} (\rho V u) + \sum (\rho u_n A) u = \text{fuerzas} \quad (2.82)$$

- Medio:

$$\frac{d}{dt} (\rho V \bar{u}) + \sum \rho A (\bar{u}_n \bar{u} + \overline{u'_n u'}) = \overline{\text{fuerzas}} \quad (2.83)$$

y reorganizando la expresión:

$$\frac{d}{dt} (\rho V \bar{u}) + \sum (\rho A \bar{u}_n) \bar{u} = \overline{\text{fuerzas}} + \sum (-\rho \overline{u'_n u'}) A \quad (2.84)$$

Como hemos visto, la ecuación promediada del momento cinético es exactamente igual a la expresión instantánea, salvo un término extra que aparece en la ecuación como un esfuerzo adicional llamado esfuerzo de Reynolds.

En resumen, la velocidad media satisface la misma ecuación del momento cinético que la velocidad instantánea, añadiendo unos esfuerzos ficticios llamados esfuerzos de Reynolds.

Conservación de magnitudes escalares

En general, para pasar de las variables instantáneas a las promediadas, en la ecuación de flujo por convección de cualquier magnitud escalar ϕ , simplemente debemos incrementarla con un flujo escalar adicional

$$\overline{\rho u \phi} = \rho \bar{u} \bar{\phi} + \overline{\rho u' \phi'} \quad (2.85)$$

2.4.5. Objetivos de los modelos de turbulencia

Las ecuaciones RANS son ecuaciones de transporte para las velocidades medias \bar{u}_i y escalares $\bar{\phi}$. Las fluctuaciones turbulentas contribuyen al transporte neto del momento a través de:

- Los esfuerzos de Reynolds $-\rho \overline{u'_i u'_j}$.
- Si existen variables escalares, a través de los flujos turbulentos $-\rho \overline{u'_i \phi'}$.

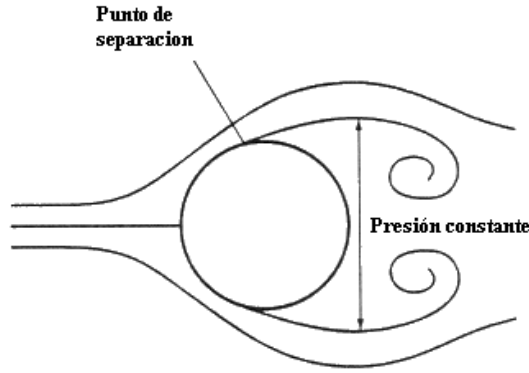


Figura 2.13: Flujo alrededor de un cilindro. Se representan las líneas de corriente y el punto de separación.

Un modelo de turbulencia es el medio por el cual se especifican los esfuerzos de Reynolds y los flujos turbulentos, cerrando de esta manera el sistema de ecuaciones del problema.

Para el cálculo de las velocidades, las distribuciones de presión y los coeficientes de resistencia, el primer requisito del modelo de turbulencia es que sea capaz de predecir cualquier esfuerzo de Reynolds dinámicamente significativo. Si el transporte turbulento es despreciable frente a otros términos no es necesario un modelo de turbulencia de calidad. Por otro lado, existen flujos donde un cálculo exacto de las tensiones tangenciales es vital como ocurre en un problema de desprendimiento de capa límite, figura 2.13, donde el cálculo de la resistencia es muy sensible a la posición del punto de separación.

2.4.6. Modelos de primer orden

Modelo de eddy viscosity

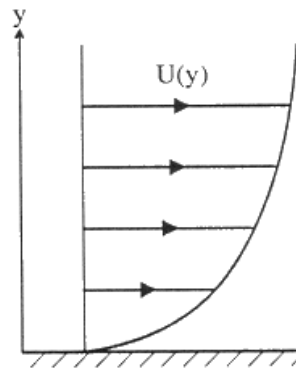


Figura 2.14: Perfil de velocidades de un flujo viscoso junto a una pared

Observando las ecuaciones 2.77, comprobamos como el esfuerzo cortante está formado por un término viscoso y un término turbulento. Si pensamos en el caso particular de una capa límite bidimensional como la representada en la figura 2.14, donde sólo hay velocidad media en dirección horizontal, podemos escribir:

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (2.86)$$

donde los esfuerzos turbulentos $\tau_{turb} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$.

Vemos que, a la hora de resolver las ecuaciones del flujo principal, es necesario emplear un modelo de turbulencia para tener en cuenta los esfuerzos turbulentos. La opción más simple consiste en establecer una analogía entre el transporte viscoso y el turbulento definiendo una viscosidad de torbellino, μ_t , que simplemente se añade a la viscosidad molecular. En esta idea se basa el *eddy viscosity model* (EVM) que, por analogía directa con el esfuerzo viscoso, toma el esfuerzo proporcional a la deformación⁴, es decir:

$$\tau_{turb} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.87)$$

donde, μ_t , se denomina *eddy viscosity* (viscosidad de torbellino) o viscosidad turbulenta.

De este modo, el esfuerzo cortante final resulta:

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.88)$$

Como comentarios importantes a esta aproximación, es conveniente señalar que:

- μ es una propiedad física del fluido y puede ser medida.
- μ_t es una propiedad del flujo que varía con la posición y debe ser modelada.
- A elevados números de Reynolds, $\mu_t \gg \mu$ en la mayor parte del flujo.

Los modelos de eddy viscosity son ampliamente empleados y populares actualmente debido principalmente a que:

- Son muy sencillos de implementar en los códigos existentes.
- La viscosidad extra le confiere estabilidad al sistema.
- Tiene un fundamento teórico muy simple.

Sin embargo, se deben emplear con cuidado recordando que:

- La hipótesis de la vorticidad viscosa es simplemente un modelo muy simple para resolver flujos complejos.
- Con este modelo, el transporte turbulento se reduce a un sólo escalar, μ_t .

Definición de la viscosidad turbulenta

Con la hipótesis anterior, se cierran las ecuaciones RANS a falta de especificar la viscosidad turbulenta, μ_t , como una propiedad de la turbulencia. Como con el transporte molecular, es frecuente definir la viscosidad cinemática turbulenta de la siguiente manera:

$$v_t = \frac{\mu_t}{\rho} \quad (2.89)$$

donde v_t tiene dimensiones de velocidad por longitud. Se suele modelar:

$$v_t = u_o l_o \quad (2.90)$$

siendo u_o un valor de referencia de la magnitud de las fluctuaciones turbulentas y l_o una longitud característica del tamaño de los torbellinos.

Normalmente se suelen resolver las ecuaciones de transporte para una o más magnitudes turbulentas, (normalmente con la energía cinética turbulenta, k , más otras), a partir de las cuales obtenemos μ_t . Esto nos lleva a una clasificación de los modelos de vorticidad viscosa basados en el número de ecuaciones de transporte a resolver en:

⁴La relación tensión-deformación definida en la expresión 2.86 es tan sólo aplicable a problemas bidimensionales. Para una correcta definición matemática se debe recurrir a una representación tensorial.

- Modelos con ninguna ecuación:
 - Modelos de viscosidad turbulenta constante.
 - Modelos de longitud de mezcla, donde l_o se define algebraicamente y u_o a partir de los flujos medios.
- Modelos con una ecuación:
 - Donde l_o se define algebraicamente y una ecuación de transporte para obtener u_o .
- Modelos con dos ecuaciones:
 - Se utilizan ecuaciones de transporte para la obtención de ambos parámetros u_o y l_o .
 - De todos ellos, el más empleado es el modelo de dos ecuaciones: en particular el modelo $k - \varepsilon$.

2.4.7. Modelos de longitud de mezcla

La hipótesis de longitud de mezcla, fue enunciada por Prandtl para capas límites bidimensionales y establece que:

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (2.91)$$

donde l_m , *longitud de mezcla*, es un tamaño característico de torbellino turbulento.

El esfuerzo cortante turbulento pues, viene dado por la expresión:

$$\tau = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.92)$$

Este modelo está basado en la premisa de que un torbellino turbulento desplaza a una partícula fluida una distancia l_m . Este momento difiere de sus alrededores en la cantidad $l_m \partial \bar{u} / \partial y$.

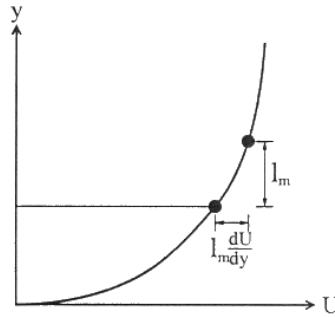


Figura 2.15: Modelo de longitud mixta l_m

La especificación de l_m depende del tipo de flujo:

- Flujos libres de esfuerzos cortantes: l_m se toma como constante y proporcional al espesor de la capa límite mediante el parámetro δ . Rodi (1974) sugirió:

$$\frac{l_m}{\delta} = \begin{cases} 0,07 & \text{mixing layer} \\ 0,09 & \text{plane jet} \\ 0,075 & \text{circular} \\ 0,16 & \text{onda plana} \end{cases} \quad (2.93)$$

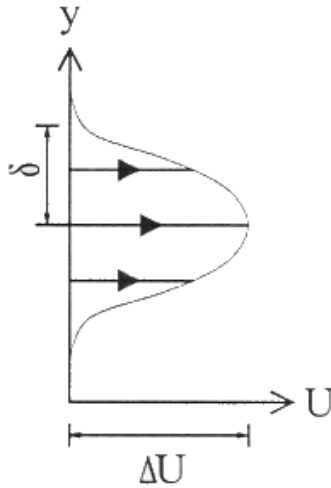


Figura 2.16: Modelo de longitud de mezcla en flujo libre

- En flujos con condiciones de contorno de pared: l_m se toma proporcional a la distancia, y , desde la pared hasta una cierta fracción del espesor de la altura de la capa límite, δ . Cebeci and Smith (1974) sugirieron la siguiente expresión:

$$l_m = \min(ky, 0,09\delta) \quad (2.94)$$

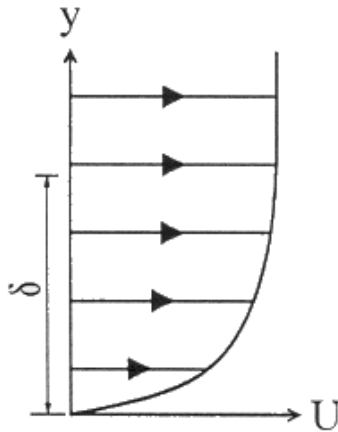


Figura 2.17: Modelo de longitud de mezcla en un flujo sobre una pared

donde k ($\approx 0,41$) es la constante de Von Kármán's.

Los modelos de longitud de mezcla dan buenos resultados en capas límites cercanas al equilibrio, pero son difíciles de generalizar para flujos más complejos.

2.4.8. El modelo $k-\varepsilon$

Introducción

Se puede probar matemáticamente que:

- Del mismo modo que cualquier componente del momento principal, cada esfuerzo de Reynolds, $\overline{u'_i u'_j}$, satisface su propia ecuación de transporte escalar.

■ Cada esfuerzo de Reynolds, $\overline{u'_i u'_j}$, está compuesto por:

- Un término de producción, P_{ij} , que viene dado por el gradiente de velocidades medias.
 - Un término de disipación, ε_{ij} , generado por la actuación de la viscosidad sobre los gradientes de velocidades fluctuantes.

- Un término de redistribución, Φ_{ij} , que es el responsable de la transferencia de energía a través de la presión y/o fluctuaciones de la corriente fluida.

Por lo tanto, se puede expresar la ecuación de transporte turbulento, como una adición de los términos definidos[7]:

$$\text{energía neta} = \text{producción} + \text{redistribución} - \text{disipación}$$

Además, existen términos convectivos (transportados con el flujo) y difusivos (cuando la intensidad de la turbulencia varía de un punto a otro del dominio).

Ecuaciones del transporte

Éste es, probablemente, el modelo de turbulencia más utilizado hoy en día en aplicaciones industriales. Consiste en dos ecuaciones para la viscosidad turbulenta, obtenida de la expresión:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.95)$$

donde C_μ es una constante, k es la energía cinética turbulenta y ε es la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta.

Para determinar k y ε se utilizan las ecuaciones de transporte, que se escriben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho U_i k - \Gamma^{(k)} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) &= \rho \left(P^{(k)} - \varepsilon \right) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho U_i \varepsilon - \Gamma^{(\varepsilon)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) &= \rho \left(C_{\varepsilon 1} P^{(k)} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{k} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Las difusividades de k y ε están basadas en las viscosidades moleculares y turbulentas:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)} &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \\ \Gamma^{(\varepsilon)} &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.97)$$

y en el modelo estándar (Launder and Spalding, 1974), las constantes son:

$$C_\mu = 0,09, C_{\varepsilon 1} = 1,44, C_{\varepsilon 2} = 1,92, \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (2.98)$$

Nótese que en el término de fuentes en la ecuación de k es un balance entre la producción $P^{(k)}$ y la disipación ε . La tasa de variación de la producción (por unidad de masa) $P^{(k)}$ viene dado por:

$$P^{(k)} = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (2.99)$$

pero la expresión general para flujos arbitrarios es más compleja. Bajo las hipótesis del modelo, es siempre positiva y proporcional al cuadrado del gradiente de velocidad.

Un flujo para el cual $P^{(k)} = \varepsilon$ (producción = disipación) se considera que está localmente en equilibrio. Para un esfuerzo constante con una capa límite en equilibrio con un perfil de velocidades logarítmico y a elevados números de Reynolds (μ despreciable) la ecuación 2.96 se convierte en:

$$(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu} = k^2 \quad (2.100)$$

2.4.9. Modelos de turbulencia avanzados

Los modelos eddy viscosity, son populares porque:

- Son sencillos de implementar en un código.
- Una viscosidad extra confiere estabilidad al sistema.
- Es aplicable, teóricamente, en algunos simples aunque comunes tipos de flujos.
- Son efectivos es cualquier tipo de flujo de ingeniería.

Sin embargo, la reducción de un modelo de turbulencia a un escalar, μ_t , es claramente discutible cuando una o más de las componentes tienen un efecto significativo sobre el flujo principal. El modelo de viscosidad de torbellinos falla a la hora de representar el problema físico de la turbulencia, particularmente en lo referido a las diferentes tasas de producción de los diferentes esfuerzos de Reynolds y la anisotropía resultante.

Modelos de transporte de esfuerzos de Reynolds (RSTM)

Este modelo, también conocido por modelo de esfuerzos diferenciales o cierre de segundo orden, resuelve una sola ecuación para todos los esfuerzos, $\overline{u^2}$, \overline{uv} , etc., obteniéndose la energía cinética turbulenta, k .

Estas ecuaciones se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Éstas pueden ponerse en la usual forma canónica:

$$\text{tasa de variación} + \text{convección} + \text{difusión} = \text{fuentes}$$

pero en realidad, los términos deben ser modelados. El balance más importante tiene lugar en el término de fuentes, constituido por varios términos:

- Producción de energía del flujo principal, P_{ij} .
- Disipación de energía por viscosidad, ε_{ij} .
- Redistribución de energía entre las componentes de los esfuerzos, Φ_{ij} .

Lo más importante es que tanto el término de convección como el de producción son exactos. De este modo, toda aporte de energía puede expresarse mediante las componentes de los esfuerzos de Reynolds. Este modelo presenta las siguientes ventajas e inconvenientes:

- Ventajas:
 - Los términos de producción advectivos y turbulentos son exactos y no modelados. Así, el RSTM realiza una mejor aproximación del fenómeno de la turbulencia que el modelo de la viscosidad de torbellinos.
- Inconvenientes:
 - Los modelos son muy complejos.
 - Se modelan muchos términos importantes de las ecuaciones.
 - Los modelos tienen un coste computacional elevado y tienden a ser numéricamente inestables.

Modelos de vorticidad viscosa no lineales (NLEVM)

El modelo de vorticidad viscosa no lineal es un modelo a medio camino entre el modelo de viscosidad de torbellinos y el de esfuerzos de Reynolds. Se basa en la idea de extender la proporcionalidad simple entre los esfuerzos de Reynolds y los gradientes de velocidad principales (o lo que es lo mismo, variaciones de la deformación):

$$esfuerzo \propto \frac{\partial deformación}{\partial t}$$

a relaciones no lineales:

$$esfuerzo = C_1 \left(\frac{\partial deformación}{\partial t} \right) + C_2 \left(\frac{\partial deformación}{\partial t} \right)^2 + C_3 \left(\frac{\partial deformación}{\partial t} \right)^3 + \dots$$

Este modelo presenta las siguientes ventajas e inconvenientes:

■ Ventajas:

- Produce un comportamiento cualitativamente correcto de la turbulencia en ciertos flujos importantes.
- El coste computacional es algo mayor que en los modelos de viscosidad de torbellinos.

■ Inconvenientes:

- No representa con exactitud los procesos de advección y producción.
- Tiene un escaso fundamento teórico en flujos complejos.

2.4.10. Condiciones de contorno de pared

En las paredes se aplica la condición de contorno de no deslizamiento, imponiendo velocidad nula tanto a la velocidad media como a la fluctuante. En problemas con elevados números de Reynolds se presentan tres problemas:

1. Hay gradientes de velocidad muy elevados cerca de la pared.
2. Las fluctuaciones normales a la pared son amortiguadas selectivamente.
3. Los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden.

Hay dos formas de implementar esta condición de contorno en flujos turbulentos:

1. Modelos de turbulencia con números de Reynolds pequeños. Resuelven el flujo hacia afuera de la pared, lo que requiere:
 - Una discretización fina.
 - Modificaciones especiales de la viscosidad para el modelo turbulento.
2. Funciones de pared. No se resuelve el flujo completo cerca de la pared, porque se suponen perfiles teóricos entre los nodos cercanos a ésta y la superficie. Esto evita una gran concentración de elementos, pero los perfiles teóricos usados son sólo justificadas en las capas límites cercanas al equilibrio.