Capítulo: Grafos y Redes Aleatorias

Mauricio Castro C.
mcastro@mat.uc.cl

Departamento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile

MAGISTER EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Segundo Semestre 2023

Grafos

Nodos y Vértices

- Un grafo es una estructura $\mathcal{K}$ consistente en un conjunto de nodos y aristas.

Nodos y Vértices

- Un grafo es una estructura $\mathcal{K}$ consistente en un conjunto de nodos y aristas.
- $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ representa el conjunto de nodos.

Nodos y Vértices

- Un grafo es una estructura $\mathcal{K}$ consistente en un conjunto de nodos y aristas.
- $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ representa el conjunto de nodos.
- $\mathcal{E}$ represente el conjunto de aristas. Las aristas conectan los nodos.

Nodos y Vértices

- Un grafo es una estructura $\mathcal{K}$ consistente en un conjunto de nodos y aristas.
- $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ representa el conjunto de nodos.
- $\mathcal{E}$ represente el conjunto de aristas. Las aristas conectan los nodos.
- Arista dirigida: $X_i \to X_j$.

Nodos y Vértices

- Un grafo es una estructura $\mathcal{K}$ consistente en un conjunto de nodos y aristas.
- $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ representa el conjunto de nodos.
- $\mathcal{E}$ represente el conjunto de aristas. Las aristas conectan los nodos.
- Arista dirigida: $X_i \to X_j$.
- Arista no dirigida: $X_i - X_j$.

Nodos y Vértices

- Un grafo es una estructura $\mathcal{K}$ consistente en un conjunto de nodos y aristas.
- $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ representa el conjunto de nodos.
- $\mathcal{E}$ represente el conjunto de aristas. Las aristas conectan los nodos.
- Arista dirigida: $X_i \to X_j$.
- Arista no dirigida: $X_i - X_j$.
- $\mathcal{E}$ es un conjunto de pares, donde cada par es uno de los $X_i \to X_j$, $X_j \to X_i$, o $X_i - X_j$, para X_i, $X_j \in \mathcal{X}$, $i < j$.

Nodos y Vértices

- Un grafo $\mathcal{G}$ será dirigido si todos las aristas son del tipo $X_i \to X_j$ o $X_j \to X_i$.

Nodos y Vértices

- Un grafo $\mathcal{G}$ será dirigido si todos las aristas son del tipo $X_i \to X_j$ o $X_j \to X_i$.

- Un grafo $\mathcal{H}$ será no dirigido si todos las aristas son del tipo $X_i - X_j$.

Nodos y Vértices

- Un grafo $\mathcal{G}$ será dirigido si todos las aristas son del tipo $X_i \to X_j$ o $X_j \to X_i$.

- Un grafo $\mathcal{H}$ será no dirigido si todos las aristas son del tipo $X_i - X_j$.

- Es posible convertir un grafo dirigido en un grafo no dirigido ignorando las direcciones de las aristas.

Nodos y Vértices

Dado un grafo $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, la versión no dirigida es un grafo $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}')$, donde $\mathcal{E}' = \{X - Y : X \longleftrightarrow Y \in \mathcal{E}\}$, donde $\longleftrightarrow$ indica que los nodos están conectados por una arista (dirigida o no dirigida).

Hijos, Padres, Vecinos y Frontera

- Si $X_i \to X_j \in \mathcal{E}$, X_j es hijo de X_i en $\mathcal{K}$ y X_i es padre de X_j en $\mathcal{K}$.

Hijos, Padres, Vecinos y Frontera

- Si $X_i \to X_j \in \mathcal{E}$, X_j es hijo de X_i en $\mathcal{K}$ y X_i es padre de X_j en $\mathcal{K}$.

- Si $X_i - X_j \in \mathcal{E}$, X_i es vecino de X_j en $\mathcal{K}$ (y viceversa).

Hijos, Padres, Vecinos y Frontera

- Si $X_i \rightarrow X_j \in \mathcal{E}$, X_j es hijo de X_i en $\mathcal{K}$ y X_i es padre de X_j en $\mathcal{K}$.

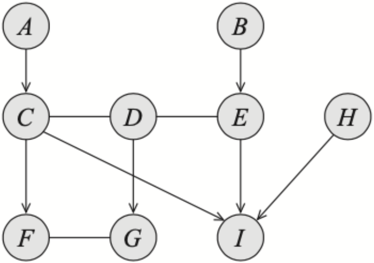
- Si $X_i - X_j \in \mathcal{E}$, X_i es vecino de X_j en $\mathcal{K}$ (y viceversa).

- X e Y son adjacentes si $X \longleftrightarrow Y \in \mathcal{E}$.

Hijos, Padres, Vecinos y Frontera

- Si $X_i \to X_j \in \mathcal{E}$, X_j es hijo de X_i en $\mathcal{K}$ y X_i es padre de X_j en $\mathcal{K}$.
- Si $X_i - X_j \in \mathcal{E}$, X_i es vecino de X_j en $\mathcal{K}$ (y viceversa).
- X e Y son adjacentes si $X \longleftrightarrow Y \in \mathcal{E}$.
- Frontera de X: padres y vecinos. En grafos dirigidos, la frontera son los padres y para grafos no dirigidos, la frontera son los vecinos.

Hijos, Padres, Vecinos y Frontera



Grado

- Degree del nodo X: número de aristas en la cual el nodo participa.

Grado

- Degree del nodo X: número de aristas en la cual el nodo participa.

- Indegree del nodo X: número de aristas dirigidas del tipo $Y \longrightarrow X$.

Grado

- Degree del nodo X: número de aristas en la cual el nodo participa.
- Indegree del nodo X: número de aristas dirigidas del tipo $Y \longrightarrow X$.
- Degree del grafo: máximo degree de un nodo en el grafo.

Subgrafos

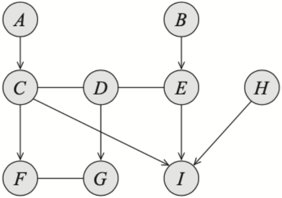
Sea $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, y sea $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$. Se define el subgrafo $\mathcal{K}[\mathbf{X}]$ a ser el grafo $(\mathbf{X}, \mathcal{E}')$ donde $\mathcal{E}'$ son todas las aristas $X \longleftrightarrow Y \in \mathcal{E}$ tales que $X, Y \in \mathbf{X}$.

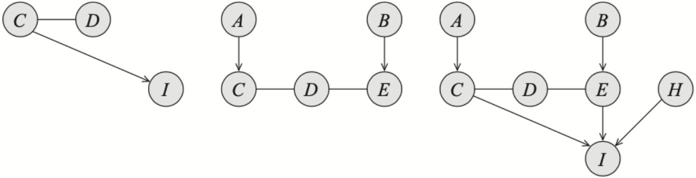
Subgrafos

Sea $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, y sea $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$. Se define el subgrafo $\mathcal{K}[\mathbf{X}]$ a ser el grafo $(\mathbf{X}, \mathcal{E}')$ donde $\mathcal{E}'$ son todas las aristas $X \longleftrightarrow Y \in \mathcal{E}$ tales que $X, Y \in \mathbf{X}$.

Se dice que un subconjunto de nodos $X \in \mathcal{X}$ es cerrado hacia arriba en $\mathcal{K}$, si para cualquier $X \in \mathbf{X}$ se tiene que la frontera de X está incluida en $\mathbf{X}$. La clausura hacia arriba se define como el subconjunto $\mathbf{Y}$ mínimo cerrado hacia arriba que contiene $\mathbf{X}$.

Subgrafos





Trayectorias y Caminos

- Trayectoria: $X_1, \ldots, X_k$ forman una trayectoria en el grafo $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, si para cada $i = 1, \ldots, k-1$, se tiene que $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ o $X_i - X_{i+1}$. La trayectoria es dirigida si, para al menos un i, se tiene $X_i \longrightarrow X_{i+1}$.

Trayectorias y Caminos

- Trayectoria: $X_1, \ldots, X_k$ forman una trayectoria en el grafo $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, si para cada $i = 1, \ldots, k-1$, se tiene que $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ o $X_i - X_{i+1}$. La trayectoria es dirigida si, para al menos un i, se tiene $X_i \longrightarrow X_{i+1}$.

- Camino: $X_1, \ldots, X_k$ forman un camino en el grafo $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, si para cada $i = 1, \ldots, k-1$, se tiene que $X_i \longleftrightarrow X_{i+1}$.

Trayectorias y Caminos

- Trayectoria: $X_1, \ldots, X_k$ forman una trayectoria en el grafo $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, si para cada $i = 1, \ldots, k-1$, se tiene que $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ o $X_i - X_{i+1}$. La trayectoria es dirigida si, para al menos un i, se tiene $X_i \longrightarrow X_{i+1}$.

- Camino: $X_1, \ldots, X_k$ forman un camino en el grafo $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, si para cada $i = 1, \ldots, k-1$, se tiene que $X_i \longleftrightarrow X_{i+1}$.

- Un grafo se dice conectado si para cada X_i, X_j, existe un camino entre X_i y X_j.

Ciclos

- Ciclo: un ciclo en $\mathcal{K}$ es una trayectoria dirigida $X_1, \ldots, X_k$ donde $X_1 = X_k$. Un grafo es acíclico si no contiene ciclos.

Ciclos

- Ciclo: un ciclo en $\mathcal{K}$ es una trayectoria dirigida $X_1, \ldots, X_k$ donde $X_1 = X_k$. Un grafo es acíclico si no contiene ciclos.

- DAG: grafo acíclico dirigido.

Ciclos

- Ciclo: un ciclo en $\mathcal{K}$ es una trayectoria dirigida $X_1, \ldots, X_k$ donde $X_1 = X_k$. Un grafo es acíclico si no contiene ciclos.

- DAG: grafo acíclico dirigido.

- Una red Bayesiana se puede representar a través de un DAG.

Ciclos

- Ciclo: un ciclo en $\mathcal{K}$ es una trayectoria dirigida $X_1, \ldots, X_k$ donde $X_1 = X_k$. Un grafo es acíclico si no contiene ciclos.

- DAG: grafo acíclico dirigido.

- Una red Bayesiana se puede representar a través de un DAG.

- PDAG: grafo acíclico parcialmente dirigido. Grafo que contiene aristas dirigidas y no dirigidas.

Arboles

- Bucle: un bucle en $\mathcal{K}$ es un camino donde $X_1 = X_k$. Un grafo es uniconexo si no contiene bucles.

Arboles

- Bucle: un bucle en $\mathcal{K}$ es un camino donde $X_1 = X_k$. Un grafo es uniconexo si no contiene bucles.

- Un nodo en un grafo uniconexo se llama hoja si tiene exactamente un solo nodo adyacente.

Arboles

- Bucle: un bucle en $\mathcal{K}$ es un camino donde $X_1 = X_k$. Un grafo es uniconexo si no contiene bucles.

- Un nodo en un grafo uniconexo se llama hoja si tiene exactamente un solo nodo adyacente.

- Un grafo uniconexo dirigido se llama un poliárbol.

Arboles

- Bucle: un bucle en $\mathcal{K}$ es un camino donde $X_1 = X_k$. Un grafo es uniconexo si no contiene bucles.

- Un nodo en un grafo uniconexo se llama hoja si tiene exactamente un solo nodo adyacente.

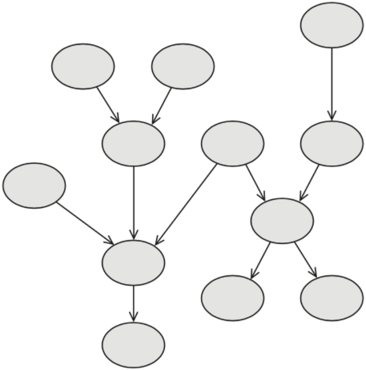
- Un grafo uniconexo dirigido se llama un poliárbol.

- Un grafo uniconexo no dirigido se llamado bósque. Si el grafo es conexo, se llama árbol.

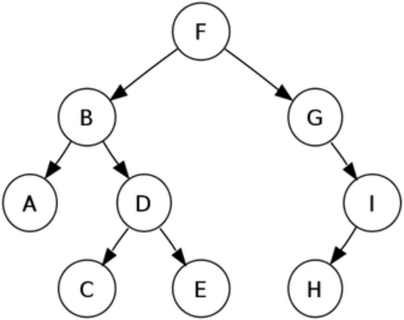
Arboles

- Bucle: un bucle en $\mathcal{K}$ es un camino donde $X_1 = X_k$. Un grafo es uniconexo si no contiene bucles.
- Un nodo en un grafo uniconexo se llama hoja si tiene exactamente un solo nodo adyacente.
- Un grafo uniconexo dirigido se llama un poliárbol.
- Un grafo uniconexo no dirigido se llamado bósque. Si el grafo es conexo, se llama árbol.
- Un grafo dirigido es un árbol si cada nodo tiene a lo más un padre.

Arboles



Arboles



Redes

Redes

- Redes: concepto abstracto que se refiere a un sistema de entidades interrelacionadas.

Redes

- Redes: concepto abstracto que se refiere a un sistema de entidades interrelacionadas.

- Una red no es un grafo.

Redes

- Redes: concepto abstracto que se refiere a un sistema de entidades interrelacionadas.
- Una red no es un grafo.
- Sin embargo, una red puede ser representada o modelada como un grafo.

Redes

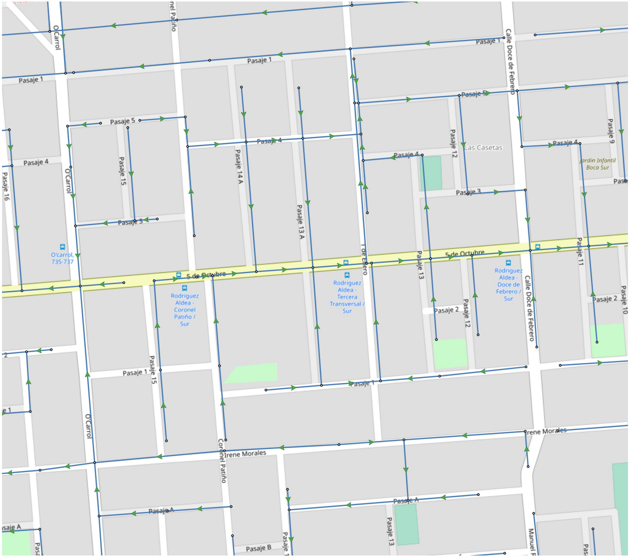
- Redes: concepto abstracto que se refiere a un sistema de entidades interrelacionadas.

- Una red no es un grafo.

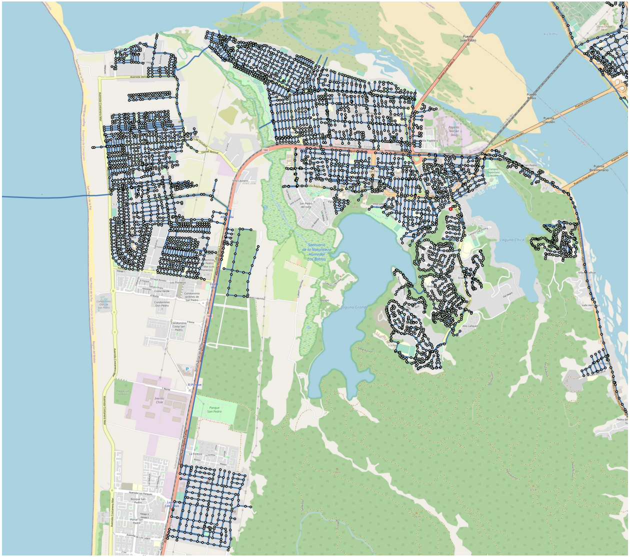
- Sin embargo, una red puede ser representada o modelada como un grafo.

- Una red está asociada al concepto de dato complejo (interacción entre entidades compleja).

Redes


O'Carrol
Pasaje 1
Calle Doce de Febrero
Pasaje 5
Pasaje 4
Pasaje 16
Pasaje 15
Pasaje 14 A
Pasaje 13 A
Pasaje 12
Las Casetas
Pasaje 9
Jardín Infantil
Boca Sur
Pasaje 3
5 de Octubre
O'carrol, 735-737
Rodriguez Aldea - Coronel Patiño / Sur
Rodriguez Aldea - Tercera Transversal / Sur
Rodriguez Aldea - Doce de Febrero / Sur
Pasaje 13
Pasaje 11
Pasaje 2
Pasaje 10
Irene Morales
Coronel Patiño
Pasaje A
Pasaje B

Redes



Datos Binarios Relacionales

- R: relación de elementos en un conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Datos Binarios Relacionales

- R: relación de elementos en un conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

- Cada elemento tiene una única etiqueta.

Datos Binarios Relacionales

- R: relación de elementos en un conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
- Cada elemento tiene una única etiqueta.
- $(i, j) \in R$ significa que i exhibe una relación R con j.

Datos Binarios Relacionales

- R: relación de elementos en un conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
- Cada elemento tiene una única etiqueta.
- $(i, j) \in R$ significa que i exhibe una relación R con j.
- Ejemplo: $\{1, \ldots, n\}$ son estudiantes de un curso, entonces $(i, j) \in R$ podría indicar que i considera a j como un amigo.

Datos Binarios Relacionales

- Para una relación binaria R, se puede construir $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, una matriz de adyacencia:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in R, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Datos Binarios Relacionales

- Para una relación binaria R, se puede construir $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, una matriz de adyacencia:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in R, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

- $\mathbf{Y}$ puede ser vista como un grafo, con nodos dados por el conjunto $[n]$ y aristas (dirigidas) de i a j si $Y_{ij} = 1$.

Datos Binarios Relacionales

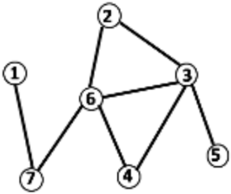
- Para una relación binaria R, se puede construir $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, una matriz de adyacencia:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in R, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

- $\mathbf{Y}$ puede ser vista como un grafo, con nodos dados por el conjunto $[n]$ y aristas (dirigidas) de i a j si $Y_{ij} = 1$.

- El grafo será no dirigido si $Y_{ij} = Y_{ji}$, para todo $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Redes



$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Modelo de Independencia Dyad

- Para $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, el dyad D_{ij} es el par (Y_{ij}, Y_{ji}) para cada $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Modelo de Independencia Dyad

- Para $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, el dyad D_{ij} es el par (Y_{ij}, Y_{ji}) para cada $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

- Si $\mathbf{Y}$ es representada gráficamente, D_{ij} describe como el vértice i y j se relacionan:

Modelo de Independencia Dyad

- Para $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, el dyad D_{ij} es el par (Y_{ij}, Y_{ji}) para cada $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

- Si $\mathbf{Y}$ es representada gráficamente, D_{ij} describe como el vértice i y j se relacionan:

    - $D(0,0)$: no hay relación entre i y j.

Modelo de Independencia Dyad

- Para $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, el dyad D_{ij} es el par (Y_{ij}, Y_{ji}) para cada $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

- Si $\mathbf{Y}$ es representada gráficamente, D_{ij} describe como el vértice i y j se relacionan:

  - $D(0,0)$: no hay relación entre i y j.

  - $D(1,0)$: relación en dirección de i a j pero no de j a i.

Modelo de Independencia Dyad

- Para $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, el dyad D_{ij} es el par (Y_{ij}, Y_{ji}) para cada $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

- Si $\mathbf{Y}$ es representada gráficamente, D_{ij} describe como el vértice i y j se relacionan:

    - $D(0,0)$: no hay relación entre i y j.

    - $D(1,0)$: relación en dirección de i a j pero no de j a i.

    - $D(0,1)$: relación en dirección de j a i pero no de i a j.

Modelo de Independencia Dyad

- Para $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, el dyad D_{ij} es el par (Y_{ij}, Y_{ji}) para cada $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

- Si $\mathbf{Y}$ es representada gráficamente, D_{ij} describe como el vértice i y j se relacionan:

    - $D(0,0)$: no hay relación entre i y j.

    - $D(1,0)$: relación en dirección de i a j pero no de j a i.

    - $D(0,1)$: relación en dirección de j a i pero no de i a j.

    - $D(1,1)$: relación en dirección de i a j y viceversa.

Modelo de Independencia Dyad

- Este modelo, asigna probabilidades p_{ij} a cada dyad, asumiendo que estos dyads se comportan independientemente:

Modelo de Independencia Dyad

- Este modelo, asigna probabilidades p_{ij} a cada dyad, asumiendo que estos dyads se comportan independientemente:

$$P\left(D_{ij} = (z, z')\right) = p_{ij}\left(z, z'\right), \quad z, z' \in \{0, 1\}.$$

Modelo de Independencia Dyad

- Este modelo, asigna probabilidades p_{ij} a cada dyad, asumiendo que estos dyads se comportan independientemente:

$$P\left(D_{ij} = (z, z')\right) = p_{ij}\left(z, z'\right), \quad z, z' \in \{0, 1\}.$$

- Bajo este supuesto,

Modelo de Independencia Dyad

- Este modelo, asigna probabilidades p_{ij} a cada dyad, asumiendo que estos dyads se comportan independientemente:

$$P\left(D_{ij} = (z, z')\right) = p_{ij}\left(z, z'\right), \quad z, z' \in \{0, 1\}.$$

- Bajo este supuesto,

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \mathbf{p}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_{ij}\left(y_{ij}, y_{ji}\right), \quad \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{n \times n}.$$

Modelo de Independencia Dyad

- El modelo dyad de independencia (Holland and Leinhardt, 1981, JASA) puede ser expresado como:

Modelo de Independencia Dyad

- El modelo dyad de independencia (Holland and Leinhardt, 1981, JASA) puede ser expresado como:

$$P\left(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid (\rho_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}, (\theta_{ij})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}\right) \quad \propto$$

$$\exp\left\{ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \rho_{ij} y_{ij} y_{ji} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \theta_{ij} y_{ij} \right\},$$

donde

$$\rho_{ij} = \log\left(\frac{p_{ij}(0,0)p_{ij}(1,1)}{p_{ij}(0,1)p_{ij}(1,0)}\right) \quad \text{y} \quad \theta_{ij} = \log\left(p_{ij}(1,0)/p_{ij}(0,0)\right).$$

Modelo de Independencia Dyad

- El modelo dyad de independencia (Holland and Leinhardt, 1981, JASA) puede ser expresado como:

$$P\left(\mathbf{Y}=\mathbf{y} \mid (\rho_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}, (\theta_{ij})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\right) \propto$$
$$\exp\left\{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \rho_{ij} y_{ij} y_{ji} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \theta_{ij} y_{ij}\right\},$$

  donde

$$\rho_{ij} = \log\left(\frac{p_{ij}(0,0)p_{ij}(1,1)}{p_{ij}(0,1)p_{ij}(1,0)}\right) \quad \text{y} \quad \theta_{ij} = \log\left(p_{ij}(1,0)/p_{ij}(0,0)\right).$$

- El modelo anterior está expresado en términos de la familia exponencial, con parámetros naturales $(\rho_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ y $(\theta_{ij})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}$.

Modelo de Independencia Dyad

- Se define

$$\rho_{ij} = \rho, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad \text{y} \quad \theta_{ij} = \theta + \alpha_i + \beta_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Modelo de Independencia Dyad

- Se define

$$\rho_{ij} = \rho, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \qquad \text{y} \qquad \theta_{ij} = \theta + \alpha_i + \beta_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

- Bajo lo anterior, el modelo se escribe como

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \rho, \theta, \alpha, \beta) = \frac{\exp\left\{\rho \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_{ij} y_{ji} + \theta y_{\bullet\bullet} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i\bullet} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_{\bullet j}\right\}}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \eta_{ij}}.$$

Modelo de Independencia Dyad

- Se define

$$\rho_{ij} = \rho, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \qquad \text{y} \qquad \theta_{ij} = \theta + \alpha_i + \beta_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

- Bajo lo anterior, el modelo se escribe como

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \rho, \theta, \alpha, \beta) = \frac{\exp\left\{\rho \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_{ij} y_{ji} + \theta y_{\bullet\bullet} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i\bullet} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_{\bullet j}\right\}}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \eta_{ij}}.$$

- Aqui, $y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$ es el out-degree del vértice i y $y_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ es el in-degree del vértice j.

Modelo de Independencia Dyad

- Se define

$$\rho_{ij} = \rho, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \qquad y \qquad \theta_{ij} = \theta + \alpha_i + \beta_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

- Bajo lo anterior, el modelo se escribe como

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \rho, \theta, \alpha, \beta) = \frac{\exp\left\{\rho \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_{ij} y_{ji} + \theta y_{\bullet\bullet} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i\bullet} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_{\bullet j}\right\}}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \eta_{ij}}.$$

- Aqui, $y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$ es el out-degree del vértice i y $y_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ es el in-degree del vértice j.
- $y_{\bullet\bullet} = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}$ es el total-degree de $\mathbf{y}$.

Modelo de Independencia Dyad

- Se define

$$\rho_{ij} = \rho, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \qquad \text{y} \qquad \theta_{ij} = \theta + \alpha_i + \beta_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

- Bajo lo anterior, el modelo se escribe como

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \rho, \theta, \alpha, \beta) = \frac{\exp\left\{\rho \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_{ij} y_{ji} + \theta y_{\bullet\bullet} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i\bullet} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_{\bullet j}\right\}}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \eta_{ij}}.$$

- Aqui, $y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$ es el out-degree del vértice i y $y_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ es el in-degree del vértice j.
- $y_{\bullet\bullet} = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}$ es el total-degree de $\mathbf{y}$.
- $\eta_{ij} = 1 + e^{\rho + \alpha_i + \beta_j} + e^{\rho + \alpha_j + \beta_i} + e^{\rho + 2\theta + \alpha_i + \alpha_j + \beta_i + \beta_j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ es la constante de normalización.

Modelo de Independencia Dyad

- ρ: parámetro de reciprocidad, captura la probabilidad relativa que dos vértices genéricos tengan una relación recíproca.

Modelo de Independencia Dyad

- ρ: parámetro de reciprocidad, captura la probabilidad relativa que dos vértices genéricos tengan una relación recíproca.

- α_i: cómo el vértice i tiene conexiones que salen (relativo al resto de vértices).

Modelo de Independencia Dyad

- ρ: parámetro de reciprocidad, captura la probabilidad relativa que dos vértices genéricos tengan una relación recíproca.

- α_i: cómo el vértice i tiene conexiones que salen (relativo al resto de vértices).

- β_i: cómo el vértice i tiene conexiones que entran (relativo al resto de vértices).

Grafo Aleatorio Exponencial

Grafo Aleatorio Exponencial

- Sea $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$, parámetros reales-valorados.

Grafo Aleatorio Exponencial

- Sea $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$, parámetros reales-valorados.

- Considere $T_1, \ldots, T_k : \{0, 1\}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, estadísticos.

Grafo Aleatorio Exponencial

- Sea $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$, parámetros reales-valorados.

- Considere $T_1, \ldots, T_k : \{0, 1\}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, estadísticos.

- Modelo de grafo aleatorio exponencial:

Grafo Aleatorio Exponencial

- Sea $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$, parámetros reales-valorados.
- Considere $T_1, \ldots, T_k : \{0,1\}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, estadísticos.
- Modelo de grafo aleatorio exponencial:

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \theta, T) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(\mathbf{y})\right\},$$

con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ parámetro natural y $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_k)$ estadístico suficiente canónico.

Grafo Aleatorio Exponencial

- Sea $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$, parámetros reales-valorados.

- Considere $T_1, \ldots, T_k : \{0, 1\}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, estadísticos.

- Modelo de grafo aleatorio exponencial:

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \theta, T) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(\mathbf{y})\right\},$$

  con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ parámetro natural y $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_k)$ estadístico suficiente canónico.

- La constante de normalización es dificil de obtener.

Grafo Aleatorio Exponencial

- El modelo anterior puede además ser reescrito como

Grafo Aleatorio Exponencial

- El modelo anterior puede además ser reescrito como

$$\mathrm{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathrm{T}) \quad \propto \quad \exp\{\theta \mathrm{T}(\mathbf{y})\}$$

Grafo Aleatorio Exponencial

- El modelo anterior puede además ser reescrito como

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, T) &\propto \exp\{\theta T(\mathbf{y})\} \\ &= \exp\{T(\mathbf{y}) \log(p) - T(\mathbf{y}) \log(1 - p)\} \end{aligned}$$

Grafo Aleatorio Exponencial

- El modelo anterior puede además ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{Y}=\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathrm{T}) &\propto \exp\{\theta \mathrm{T}(\mathbf{y})\} \\
&= \exp\{\mathrm{T}(\mathbf{y})\log(p) - \mathrm{T}(\mathbf{y})\log(1-p)\} \\
&= p^{\mathrm{T}(\mathbf{y})}(1-p)^{-\mathrm{T}(\mathbf{y})}
\end{aligned}
$$

Grafo Aleatorio Exponencial

- El modelo anterior puede además ser reescrito como

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}=\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, T) &\propto \exp\{\theta T(\mathbf{y})\} \\ &= \exp\{T(\mathbf{y})\log(p) - T(\mathbf{y})\log(1-p)\} \\ &= p^{T(\mathbf{y})}(1-p)^{-T(\mathbf{y})} \end{aligned}$$

- Aqui, $\theta = \log(p/(1-p))$.

Grafo Aleatorio Exponencial

- El modelo anterior puede además ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, T) &\propto \exp\{\theta T(\mathbf{y})\} \\
&= \exp\{T(\mathbf{y}) \log(p) - T(\mathbf{y}) \log(1-p)\} \\
&= p^{T(\mathbf{y})}(1-p)^{-T(\mathbf{y})}
\end{aligned}
$$

- Aqui, $\theta = \log(p/(1-p))$.

- Además, $T(\mathbf{y}) = \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} y_{ij}, \quad \mathbf{y} \in \{0,1\}^{n \times n}$.

Grafo Aleatorio Exponencial

- El uso de estadísticos suficientes permite incorporar propiedades de las redes de forma interesante en el modelo (p.e., cerradura transitiva medida como el número de triángulos $\sum_{i,j,k=1}^{n} y_{ij} y_{jk} y_{ki}$).

Grafo Aleatorio Exponencial

- El uso de estadísticos suficientes permite incorporar propiedades de las redes de forma interesante en el modelo (p.e., cerradura transitiva medida como el número de triángulos $\sum_{i,j,k=1}^{n} y_{ij} y_{jk} y_{ki}$).

- El problema es disponer de la constante de normalización (para realizar inferencia).

Grafo Aleatorio Exponencial

- El uso de estadísticos suficientes permite incorporar propiedades de las redes de forma interesante en el modelo (p.e., cerradura transitiva medida como el número de triángulos $\sum_{i,j,k=1}^{n} y_{ij}y_{jk}y_{ki}$).

- El problema es disponer de la constante de normalización (para realizar inferencia).

- Sin embargo, si se dispone de esta, el modelo aleatorio exponencial es un modelo bastante razonable.