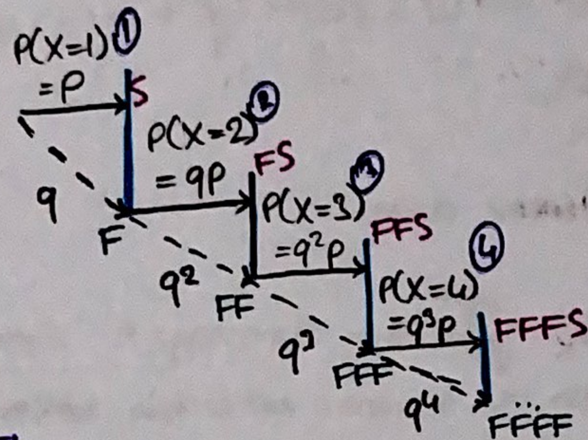


● olanlar outcome iken

● olanlar outcome değildir, Çünkü pembelerde success'e ulaşıldığı için süreç tamamlanmıştır. Fakat yeşil olanlarda success'e ulaşılmadığı için işleme devam edilir

! $P(X=x) = p \cdot q^{x-1}$

$$\boxed{P(X \leq x) = 1 - q^x}$$

Örneğin $P(X \leq 5)$ olsun.

$$P(X \leq 5) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$\Rightarrow p + pq + pq^2 + pq^3 + pq^4 = p(1+q+q^2+q^3+q^4)$$

$q = 1-p \Rightarrow p = 1-q$ olur. Eşitlikte yerine yazalım!

$$\Rightarrow (1-q)\cdot(1+q+q^2+q^3+q^4) = 1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\cancel{q^4}-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\cancel{q^3}-\cancel{q^4}-q^5$$

$$= 1 - q^5$$

Yani $P(X \leq x) = 1 - q^x$

HATIRLATMA: $\mu_X = E[X] = \sum_x x \cdot f(x)$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

The geo. distribution: $P(X=x) = f(x) = g(x,p) = p \cdot q^{x-1}$

$X = 1, 2, 3, \ldots$

x, 1'den başlasın ve ilk deneme olsun.

Özellikler: $\mu_X = \frac{1}{p}$, $\sigma_X = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$

$P(X \leq x) = 1 - q^x$

Example: How many times do you need to toss a coin before you see "Head"?

$g(1) = \frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{1}{4}$, $g(3) = \frac{1}{8}$, $g(4) = \frac{1}{16}$, ...

H   TH   TTH   TTTH

Bunun tek bir cevabı yoktur. Head gelme olasılığı $p=0.5$

1,2,3,... olabilir

ve tail olma da $q = 1-p$'den 0.5'tir

$g(x;p) = p \cdot q^{x-1}$, $x = 1,2,3,\ldots$

$g(x;0.5) = 0.5 \cdot (0.5)^{x-1} = (0.5)^x$, $x = 1,2,3,\ldots$

Example: How many times do you expect to toss a coin before you see a "Head"?

↳ Burada önceki sorudan farklı olarak kesin bir sonuç istenmiyor. Beklenti soruluyor.

$\mu = E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2$ → Yani; ortalama olarak, yazı gelmeden önce bir madeni paranın 2 kez atılması gerekir.

Example: A spacecraft attempts to dock with a space station. The ADS is offline and so the astronaut will need to pilot the procedure manually; but it's very difficult!
From training simulations we know that this astronaut has only 54.3% chance of being successful on each try. What is the prob. that we will achieve a successful docking if there is only enough fuel for 5 attempts?

X: number of attempts

$$P(X \leq 5) = 1 - q^5 \rightarrow 1 - (0.457)^5 = 0.98$$

$$p = 0.543 \rightarrow q = 1 - p \rightarrow 0.457$$

Example: An electric vehicle repeatedly attempts to connect to a server for a software update until it succeeds. The procedure is "wait 6 mins; attempt to connect". Because the server is usually busy, there is only a 30% chance of a successful connection on any given attempt.

a. What is the prob. that the vehicle will successfully connect to server in three or less attempts?

X: number of attempts, $p = 0.3 \rightarrow q = 1 - p = 0.7$

$$P(X \leq 3) = 1 - q^3 \rightarrow 1 - (0.7)^3 = 0.657$$

b. On average, how long will it take the vehicle to obtain a successful connection? → Average Time = Average Number of Attempts × 6 min

$$M_X = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3.33\ldots \times 6 = 20$$

Example: Three cards are drawn in succession from a deck without replacement. Find the prob. distribution for the number of spades.

	Ace	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Jack	Q	K
Clubs													
Diamonds													
Hearts													
Spades													

X: the number of spades in the draw

→ tamamı spade olabilir

(range of X: 0, 1, 2, 3)

→ 2 tane olabilir.

→ 1 tane olabilir

→ hiç spade olmayabilir.

$$P(X=0) = \frac{C(\overset{52-13}{39},3)\cdot C(13,0)}{C(52,3)} \quad , \quad P(X=2) = \frac{C(39,1)\cdot C(13,2)}{C(52,3)}$$

$$P(X=1) = \frac{C(39,2)\cdot C(13,1)}{C(52,3)} \quad , \quad P(X=3) = \frac{C(39,0)\cdot C(13,3)}{C(52,3)}$$

The Hypergeometric Distribution

N: Population size (the number of all states)

Bir önceki örnek için 52

n: Number of trials / draws

Bir önceki örnek için 3

m: Number of success states

Bir önceki örnek için 13

X: Number of success states in the draw

Bir önceki örnek için 0,1,2,3

✓ Hypergeometric distribution'ın prob. mass fonksiyonu $h(x)$'tir ve bu fonksiyon N, n ve m'e bağlıdır.

$$h(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \rightarrow x=0 \rightarrow h(0) = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$$

✓ Hypergeometric distribution, değiştirme yapılmadan n rastgele çekişten elde edilen x başarının olasılık dağılımını (prob. distribution) tanımlar. Nesneler, m başarı durumu içeren N size'ındaki bir popülasyondan denenir, seçilir.

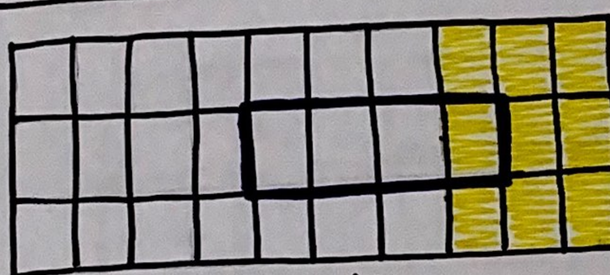
$$P(X=x) = f(x) = \underbrace{h(x; N, n, m)}_{\text{mümkün başarıların sayısının range'i}} = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Özellikler : $\mu_X = n \cdot \frac{m}{N}$, $\sigma_X^2 = n \cdot \frac{m}{N} \cdot \frac{(N-m)}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

X → number of successes , n → total number of draws (trials)

N → population size , m → number of success states in the population

Example:



$N=30, n=4, m=9$

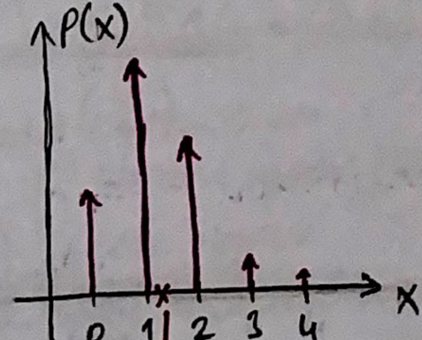
$X = 0,1,2,3,4$

X : number of yellow boxes

$$h(0) = \frac{\binom{21}{4} \cdot \binom{9}{0}}{\binom{30}{4}}$$

$$\mu_X = n \cdot \frac{m}{N} = 4 \cdot \frac{9}{30} = 1.2$$

$$h(1) = \frac{\binom{21}{3} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{30}{4}}$$



$1.2 = \mu_X$ (center of mass)

Example: 5 oxygen tanks are stored ready to take on a scuba dive. Two of the tanks are empty! Given that 3 tanks are selected (without checking them), construct the prob. distribution for the number of empty tanks that are selected.

X: Number of empty tanks in the selection

$N=5$

$n=3$

$m=2$

$x=0,1,2$ ← range of X

$$h(x)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{5}{3}}$$

$h(x)$ → Prob. mass function

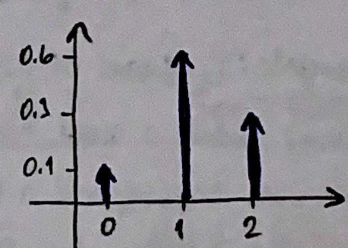
$$P(X=0)=h(0)=\frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=h(1)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=h(2)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}}=\frac{3}{10}$$

$X=\{0,1,2\}$

$f(x)=\{0.1,0.6,0.3\}$



Example: A package of 6 light bulbs contains 2 defective bulbs. If 3 bulbs are selected, construct the prob. distribution for the number of working bulbs that are selected.

$N=6$

$n=3$

$m=4$

$$h(x)=\frac{\binom{m}{x}\cdot\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{4}{x}\cdot\binom{2}{3-x}}{\binom{6}{3}}$$

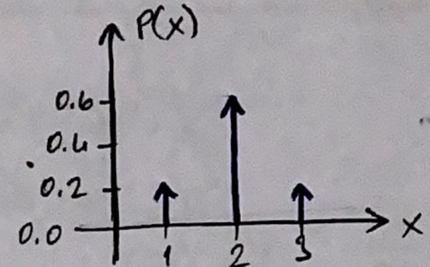
$X = 1,2,3$ → 0 olamaz. Çünkü defective 2 tanedir, Oradan 3 tane seçemeyiz.

range of X

$$P(X=1) = h(1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$P(X=2) = h(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$P(X=3) = h(3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0.2$$



$X = \{1,2,3\}$

$f(x) = \{0.2, 0.6, 0.2\}$

Example: 4 drums of cables are randomly selected (without checking them) from a store containing 100 drums. The cables from each drum are used to suspend a bridge. If 2 of the 100 drums in the store contain defective cables, what is the prob. that we have used defective cables?

$N = 100$

$n = 4$

$m = 2$

$X = 1,2$

range of X

$$h(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{98}{4-x}}{\binom{100}{4}}$$

X: number of defective drums in the selection

$P(X=1) + P(X=2)$'yi bulmalıyız. Böylece sorudaki koşulu sağlamış oluruz!

$$P(X=1)=h(1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{98}{3}}{\binom{100}{4}}$$

$$P(X=2)=h(2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{98}{2}}{\binom{100}{4}}$$

Normalde $x=0,1,2$ olabileceği için $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$ idi. Yani $P(X=1)+P(X=2)=1-P(X=0)$ ile de hesaplayabiliriz.

$$P(X=0)=h(0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{98}{4}}{\binom{100}{4}}\approx 0.9212$$

$$1-0.9212=0.0788\approx 0.079$$

Name	$f(x)=P(X=x)=$	Range of X	Expec. Values
geometric (discrete)	$g(x;p)=p\cdot q^{x-1}$	$x=1,2,3,\dots$ $P(X\leq x)=1-q^x$	$\mu_X=\frac{1}{p}$, $\sigma_X=\sqrt{\frac{q}{p^2}}$
hyper-geometric (discrete)	$h(x;N,n,m)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$x=\max(n+m-N,0),\ \min(n,m)$ sınırlı	$\mu_X=n\cdot\frac{m}{N}$

(discrete) → Range sonsuz elemanlı, fakat countable! (prob. mass func.)

n: number of trials

m: num. of success states

N: num. of all states

Name	$f(x) = P(X=x) =$	Range of X	Expec. Values
binomial (discrete)	$b(x;n,p) = \binom{n}{p} p^x q^{n-x}$	$x = 0,1,2,3,\ldots,n$ ← sınırlı	$\mu_X = np$, $\sigma_X = \sqrt{npq}$
poisson (discrete)	$p(x;\mu) = \dfrac{\mu_X}{x!} e^{-\mu}$	$x = 0,1,2,3,\ldots$ ← sınırsız	$\mu_X = np = \lambda t$, $\sigma_X = \sqrt{\mu}$

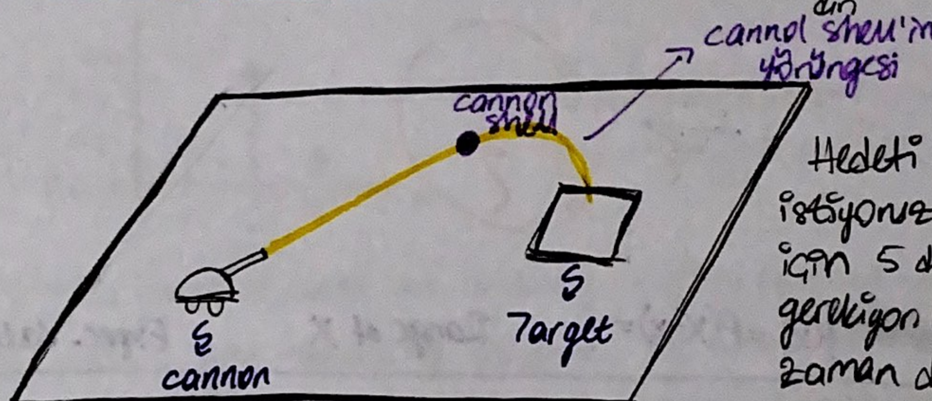
∴ Bu tablodaki tüm distributionlar discrete'tir.

! Tam sayı kümesi countable iken reel sayı kümesi uncountable'dır.

Lecture 7 – Special Discrete Prob. Distn. (II)

Binomial Distributions;

Finite set hep countable'dır.



Hedefi yok etmek istiyoruz. Bunun için 5 doğru atış gerekiyor. Fakat her zaman doğru atışı gerçekleştiremiyoruz.

Yani hedefi vuramıyoruz.

SORU: 40 atış hedefi destroy etmek için yeterli midir?

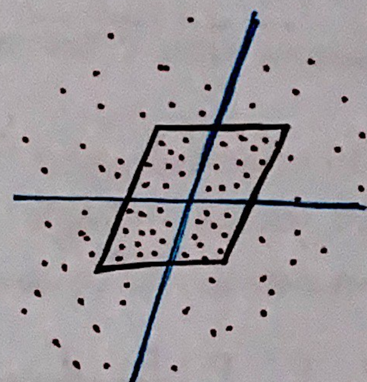
Burada 2 yöntem kullanılabilir?

1. Direct Çözüm: Bunu 40 değil de 200 yapalım. k de target'ı vuran 40 shooting sayısı olsun. Buradan olasılık:

(we spent 200x40 = 8000 cannon shell) $p = \dfrac{k}{200}$ olur. Fakat bu pahalıdır. Çünkü 200 kez denemek gerekir.

2. Binomial Distribution

✓ Cannon'u 1000 kez ateşleyin ve merminin iniş yaptığı yerleri belirleyin



✓ Burada atış için başarı olasılığını şöyle varsayalım:

$$p = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$$

✓ Buradan failure prob

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ olsun}$$

✓ 40 atış arasındaki başarı sayısı X random variable'ı ile gösterilsin. Buradan prob mass function:

$$f(x) = P(X=x) = b(x; 40, \tfrac{1}{4}) \text{ olsun}$$

– $P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{40}$ → 40'ının da fail olması

– $P(X=1) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \cdot 40$ → 1'inin success, 39'unun failure olması

$\underset{\frac{1}{4}}{S}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}$ — — — — — — ...

$\underset{\frac{3}{4}}{F}\ \underset{\frac{1}{4}}{S}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}\ \underset{\frac{3}{4}}{F}$ — — — — — — ...

⋮

$F\ F\ F\ F\ F\ F\ F\ F\ F \ldots \underset{\frac{1}{4}}{S}$

40 kez.

– Bu yüzden $40 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{39}$

– Genel formül: $P(X=x) = \binom{40}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{40-x}$

– Daha genel: $b(x; n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$

Question: What is the prob. that we will destroy the target after 40 shootings?

$$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + \ldots + P(X=40)$$

Daha basitçe $1 - \{ \underbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)}_{0.016} \}$

Buradan $P(X \geq 5) = 1 - 0.016 = 0.984$ olur

The Binomial Process

Random bir process aşağıdaki özelliklere sahipse binomial distr. olarak tanımlanabilir:

1. Process, her biri 2 olası sonuca sahip n özdeş denemeden oluşur
   Bernoulli trial
2. Denemeler independent'tır bu nedenle hiçbir denemenin sonucunun diğerinin sonucu üzerinde bir etkisi yoktur
3. Success prob. p, bir denemeden diğerine sabittir

The Binomial Distribution

- Binomial process için, n denemeden x'in başarılı olma olasılığı şu şekilde verilir:

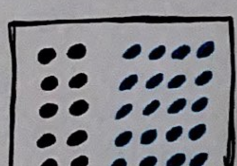
$$P(X=x)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x} \qquad x=0,1,2,3,\dots,n$$

- Burada p success ve q da 1-p'den failure prob.'dir

Properties

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}, \quad \mu_x=np, \quad \sigma_x=\sqrt{npq}$$

! Binomial distr., hypergeometric distr.'ın tekrar yerine koyma içeren (replacement) halidir



Mesela bir kutumuz olsun ve içerisinde 10 siyah ve 20 mavi top olsun. Buradan random seçilen bir topun siyah olma olasılığı nedir? $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$'tür

Siyah olmama olasılığı da $1-\frac{1}{3}$'ten $\frac{2}{3}$'tür. Burada 2 tane deney oluşturalım:

Deney 1: Select 5 balls

X : the number of black balls among the 5 balls we draw

$N=30$, $n=5$, $m=10$ → Çünkü 10 tane black ball var

N: Toplam top sayısı

n: Seçilecek top sayısı

$$h(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

hypergeometric distribution (prob. mass func.)

Deney 2: Select 5 balls one-by-one. Note its color and put it back to the box before the next selection.

Aldığımız topu kutuya geri koyuyoruz.

Görüldüğü üzere burada p değişmez. Çünkü yine bir siyah top gelme olasılığımız $\frac{1}{3}$'tür.

$n=5$, $p=\frac{1}{3}$

$$b(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

binomial distribution (prob. mass function)

Example : What is the prob. of obtaining exactly 2 "4"s when three dice are thrown?

Deney : Throw 3 dice : die#1, die#2, die#3

X : The number of 4's

Range of X : 0, 1, 2, 3

$P(X=2) = ? \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \rightarrow \frac{15}{216}$ → binomial distribution

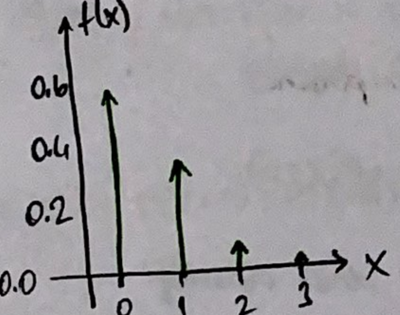
$\underline{\{4\}}\ \underline{\{4\}}\ \underline{\{1,2,3,5,6\}} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$

$\underline{\{1,2,3,5,6\}}\ \underline{\{4\}}\ \underline{\{4\}} \rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

$\underline{\{4\}}\ \underline{\{1,2,3,5,6\}}\ \underline{\{4\}} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ p=\frac{1}{6} \end{array}\right\} b(x;3,1/6) = \binom{3}{x} \cdot p^x \cdot q^{3-x} \rightarrow \binom{3}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$$

Şimdi de prob. mass fonksiyonunun grafiğine bakalım:



$f(X=0) = 125/216$

$f(X=1) = 75/216$

$f(X=2) = 15/216$

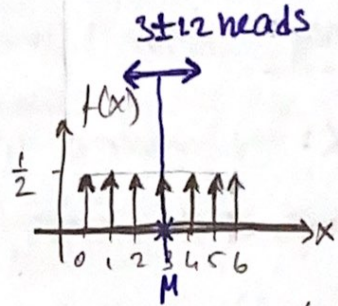
$f(X=3) = 1/216$

---

sum = 216/216 $\boxed{\checkmark}$

Example: 6 coins are tossed. What is the mean and standard deviation of the number of heads?

Deney: Tossed 6 coins



X: The number of heads

Range of X: 0,1,2,3,4,5,6

$\mu = 3$ (6/2) → formülle de bulunur: $\mu = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

h gelme olasılığı

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{1.5} \approx 1.22$

Example: A department purchases a box of 16 components. If there is a constant and independent prob. of 0.05 for each being defective. <u>What is the prob. that there are less than 3 defective components in the box?</u>

P("defective") = 0.05

X: The number of defective components

$P(X<3) = ?$ → $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$p = 0.05$ → defective component olma olasılığı

$n = 16$

$P(X=0) = \underbrace{\binom{16}{0}}_{1} \cdot \underbrace{0.05^0}_{1} \cdot (0.95)^{16} = 0.95^{16}$

$P(X=1) = \underbrace{\binom{16}{1}}_{16} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{15}$

$P(X=2) = \binom{16}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{14}$

Bu toplam bize çözümü verir.

↳ $P(X<3) = 0.957$ (Yani 3'ten az defective bileşen olma olasılığı 0.957'dir.)

<u>Example:</u> A factory requires at least 5 out of 6 generators to be working at the same time during a power cut. Given that each generator has an independent and random failure prob. of 0.1, construct the prob. distribution that represents the number of working generators. <u>What is the prob. that the factory's power req. being satisfied during a power cut?</u>

power cut sırasındak working prob. sonluya

X: The number of working generators

$p = 0.9$ → ‼ NOT: Eğer X number of not working generators olsaydı $p = 0.1$ olurdu. Buna dikkat etmelisin.

$n = 6$

$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) \rightarrow \underbrace{\binom{6}{5}}_{6} \cdot 0.9^5 \cdot 0.1^1 + \underbrace{\binom{6}{6}}_{1} \cdot 0.9^6 \cdot 0.1^0$

$P(X \geq 5) \approx 0.886$

The Poisson Process ~ The Binomial Process with large n, small p

Binomial Distr.		Poisson Distr.
$n=40$	$\longrightarrow$	∞
$\mu=10$		$\mu=10$
$p=\frac{1}{4}$	$\longrightarrow$	0

$$b(x)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}$$

$$\mu=np$$

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{\mu}$$

$$p(x)=\frac{\mu^{x}}{x!}e^{-\mu}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(b(x)\right)$$

μ is fixed

$$\mu=\underset{\infty}{n}\,\underset{0}{p}$$

$$\sigma=\sqrt{\mu}\cong\sqrt{n\underset{0}{p}\underset{1}{q}}$$

Gerçek Örnekler;

- Dakikadaki radyoaktif bozunma sayısı
  ($\underbrace{\text{Çok fazla çekirdek var}}_{n\to\infty}$, $\underbrace{\text{her bir çekirdeğin bozunma olasılığı çok küçük}}_{p\to 0}$)

- Saniyedeki web sitesi isabet sayısı
  ($\underbrace{\text{Çok sayıda müşteri}}_{n\to\infty}$, $\underbrace{\text{belirli bir müşterinin web sitesini ziyaret etme olasılığının düşük olması}}_{p\to 0}$)

Yolun bir bölümündeki kaza
(her biri çok küçük kaza olasılığına sahip birçok arabanın yolda seyahat etmesi)

$p \to 0$

$n \to \infty$

Poisson Distribution → Binomial'in limit halidir.

X belirli bir intervalda (genelde bir zaman aralığında) belirli bir event'in gerçekleşme sayısını gösteren bir random variable olsun.

* Poisson distr.'un discrete old. unutma!

Example: The number of car accidents on a certain highway is recorded to be $\lambda = 214$ over a 5-year period. Let X be the number of accidents that took place within a period of one week. How can we compute the prob. distr. for X?

Event: car accident
Interval: 1 week

$\rightarrow t = 1 \text{ week} = \frac{1}{5 \times 52}$ (yıl cinsinden yazdık.)

$P(X) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$ → yani μ'yü bulmamız yeterli!

$\mu = \frac{214}{5 \times 52} \approx 0.82 \xrightarrow[\text{koyalım}]{\text{formüle}} P(X) = \frac{0.82^x}{x!} \cdot e^{-0.82}$

$\lambda \cdot t$

Prob. distr. function

* What is the prob. that an accident occurs within a period of one week?

Bunu direkt söyleyemeyiz, fakat şöyle ilerleyebiliriz:

The expected number of acc. within a week $\rightarrow \mu = \frac{214}{5 \times 52} = \frac{214}{260} \approx 0.823$

• Bu soruyu çözerken yaklaşım uygulayalım:

✓ 1 saatte gerçekleşen kaza olasılığını bulalım → o da p olsun.

p = The prob. that an accident occurs in a period of one hour

✓ Böylece;

$$\text{The expected number of accidents within an hour } (\mu) = \frac{214}{\underbrace{5 \times 52 \times 7 \times 24}_{\text{5 yıldaki saat}}} = 0.0049 \text{ olsun}$$

✓ 0.049'un p'ye çok iyi bir yaklaşım old. varsayalım.

✓ X'in prob. distr.'unu nasıl ifade edeceğiz?

$$P(X=x) \approx b(x;\ \underbrace{\overset{\to\infty}{168}}_{\substack{7\times 24 \\ \text{saat}}},\ \overset{\to 0}{0.0049})$$

Böylece;

$$✓\ P(X=x) = \underbrace{p(x;\mu)}_{\substack{\text{Poisson} \\ \text{distri.}}} := \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} = \frac{0.823^x}{x!} \cdot e^{-0.823} \quad , x = 0,1,2,\ldots$$

Example: The number of connections to a web server is measured to be 195696 over a period of 24 hours. If the activity is uniform throughout the period, and does not change day to day, what is the prob. that the website will receive more than 3 connections in an interval of 1 second?

X: The number of connections in 1 second

λ: Mean number of occurences = 195696

$$M_X = \lambda \cdot t = \frac{195696}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 2.27 \Rightarrow P(X=x) = \frac{(2.27)^x}{x!} \cdot e^{-2.27}$$

$$P(X>3) = P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+\dots$$

$$= 1 - \{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\}$$

$$= 1 - e^{-2.27} \cdot \left(\frac{(2.27)^0}{0!} + \frac{(2.27)^1}{1!} + \frac{(2.27)^2}{2!} + \frac{(2.27)^3}{3!} \right)$$

$$= 1 - 0.8064 \approx 0.194$$

Example: The number of calls to a fire department averages 4.5 per day. If a Poisson distribution is appropriate, find the prob. that there will be more than 2 calls on any given $\underbrace{\text{8-hour}}_{\frac{1}{3}\text{ day}}$ shift.

X: The number of calls

$$M_X = \frac{4.5}{3} = 1.5 \rightarrow p(x) = \frac{1.5^x}{x!} \cdot e^{-1.5}$$

$$P(X>2) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+\dots$$

$$= 1 - \{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\}$$

$$= 1 - e^{-1.5} \cdot \left(\frac{(1.5)^0}{0!} + \frac{(1.5)^1}{1!} + \frac{(1.5)^2}{2!} \right)$$

$$= 1 - \frac{3.625}{e^{1.5}} \approx 1.191$$

Lecture 8 - Special Continuous Prob. Distributions

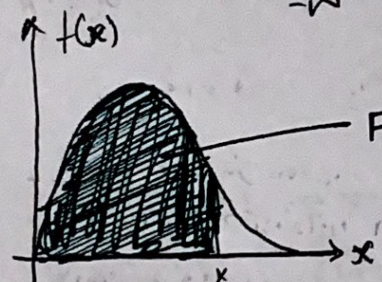
Bir önceki hafta Discrete Prob. Distribution türlerini görmüştük. Şimdi de Continuous Prob. // // göreceğiz.

Bir fabrikadaki lambaların çalışma süresini düşünelim. Burada x'in range'inin bir aralık olması gerekir. Yoksa doğru ve gerçek bir sonuç elde edemeyiz.

The Cumulative Distribution Function (CDF)

Kursun geri kalanında genellikle belirli bir x değerinin solundaki bir pdf altındaki alanı hesaplamakla ilgilene-ceğiz ki bu da cdf oluyor. Çünkü pdf tek başına bir olasılık sonucu belirtmiyor.

$$P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$$



F(x), x'in solundaki eğrinin altında kalan alandır!

Burada f(x), herhangi bir prob. density fonksiyonu (pdf) ve F(x) de cumulative distribution fonksiyonu (cdf)'dur.

CDF'nin değerlendirilmesi (evaluation) analitik olarak (integral ile) veya tablolar kullanılarak veya hesaplama araçları (MATLAB, Octave) kullanılarak elde edilebilir.

Özel Continuous Prob. Distributions

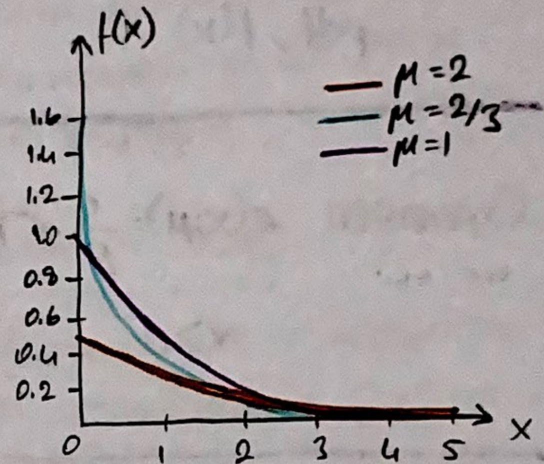
Bu dağılımlar, bazı mühendislik ve bilim dallarında karşılaşılan birçok süreci tanımlamak için kullanılabilir:

	pdf, $f(x)$	cdf, $F(x)$ [MATLAB FONKSİYONU]
Exponential	$e(x;\mu)=\frac{1}{\mu}\cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$ $x\geq 0$	$\mathrm{expcdf}(x,\mu)=P(X<x)$ $\int_0^x e(s)\,ds=\mathrm{expcdf}(x)=1-e^{-\frac{x}{\mu}}$
Weibull	$w(x;a,b)=\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1}\cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$ $x\geq 0;\ a,b>0$	$\mathrm{wblcdf}(x,a,b)=P(X<x)$ $\int_0^x w(s)\,ds=\mathrm{wblcdf}(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$
	$b=1$ alınırsa $w(x;a)=\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{x}{a}}$ olur.	$\mu=a$ kabul edilirse de bu Exp. distribution formülü olur.
Normal	$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ Tüm reel sayılar için! ← $-\infty<x<\infty$	$\int n(x)\,dx$ = hesaplanamaz! Bu yüzden yaklaşık değer hesaplanabilir. → Ya tablo ya da bilgisayar yazılımı kullanılır. $\mathrm{normcdf}(x,\mu,\sigma)$! $(x-\mu)^2$'sinden ötürü $x=\mu$'nün 2 tarafı simetriktir. $n(\mu+h)=n(\mu-h)$

The Exponential Distribution

Exp. distribution birçok alanda önemli bir rol oynar. Örneğin; queueing teorisi, reliability teorisi, hizmet tesislerine varışlar arasındaki süre, bileşen parçalarının veya sistemlerin arızalanma süresi.

failure time



$$e(x;\mu) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x \geq 0$$

Özellikler : $\mu_X = \mu$, $\sigma_X = \mu$

Relation to the Poisson Processes

Poisson sürecinin oluşumları arasındaki aralık üstel (exp) dağılıma sahiptir.

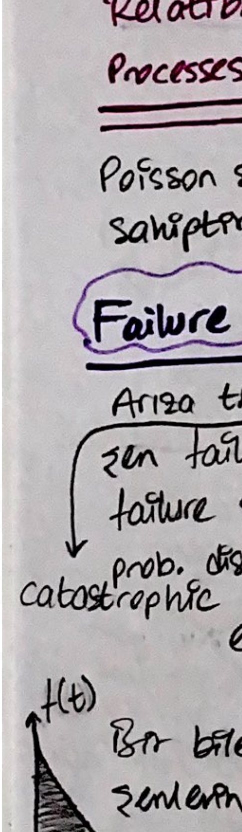
→ İkisi ayrı anlama gelir!

Failure time (Life-time) of a component

Arıza tek bir felaket olayından kaynaklanıyorsa, exp. distr.'ın bileşen failure süresini modellemek için kullanılabilir. Eğer t rastgele failure süresini temsil ediyorsa, o zaman failure zamanlarının prob. distr.'u şu şekilde verilebilir :

catastrophic

$$e(t;\mu) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad t \geq 0 \qquad \mu \to \text{mean failure time}$$



Bir bileşenin t zamanında başarısız olma olasılığı (veya bileşenlerin t zamanında başarısız olma oranı):

$$P(T<t) = \int_0^t e(t) \cdot dt = 1 - e^{-\frac{t}{\mu}}$$ yani $1-\exp(-t/\mu)$ dur.