Her 2'si de for the 1st toss olsaydı ilk örnekten hiçbir farkı kalmazdı. Yani dependent olurdu.

Önceki son sorudaki $A \cap B$:

$S = \{HeadHead, HeadTail, TailHead, TailTail\}$

$A = \{HeadHead, HeadTail\}$, $B = \{HeadTail, TailTail\}$

1.'nin H olması

2.'nin T olması

$\boxed{A \cap B = \{HeadTail\}} \rightarrow \frac{1}{4}$

Şimdi bu eventlerin independent old ispatlayalım:

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A) * P(B) = P(A \cap B)$ → Independent Eventler (A & B)

ÖZETLE

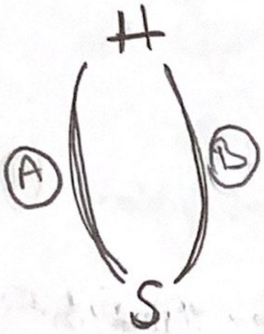
✓ 2 event dependent ise disjoint'tir. Yani kesişimleri $\emptyset$'dir. Yani birindeki değişiklik diğerini etkiler. → değerini / olasılığını

✓ 2 event independent ise $P(A) * P(B) = P(A \cap B)$'yi sağlar. Birindeki değişiklik diğerinin olasılığını etkilemez.

Example : There are 2 possible routes, A and B, between home and school. On a snowy day, the prob. of route A being open is 0.9, and the prob. of route B is 0.8. What is the prob. that there is an open route on a snowy day?

A: Route A is open

B: Route B is open



I. yol : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) * P(B)}$

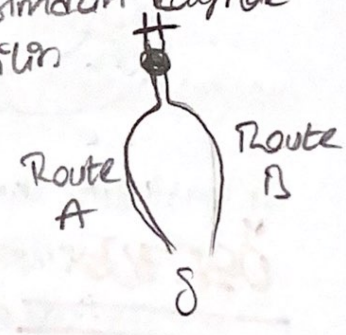
$P(A \cup B) = 0.9 + 0.8 - 0.9 * 0.8$

$= 0.98$

bu soru için bu 2 event $\boxed{\text{independent'tır.}}$ çünkü birinin açık veya kapalı olması diğerinin olasılığını etkilemez.

$P(A) * P(B) = P(A \cap B)$

Belki bu 2 route'in belirli bir kısmı ortak olabilir ve bu snowy day olduğunda sorun bu ortak kısımdan kaynaklanıyor olabilir. Bunun için dikkatli olmalıyız!



Burada da kesişim için bir tahminde bulunulur. Burada da daha fazla veriyi incelemek iyi olacaktır.

II. yol : $P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)') = 1 - P(A' \cap B')$

$= 1 - P(A') * P(B')$

$= 1 - 0.1 * 0.2 = 0.98$

Independence - many events

2 tane event için independent formülünü görmüştük. Peki ya bu event sayısı 2'den daha fazla ise, yani bu formülü genelleştirmemiz gerekirse?

$$\boxed{P(A \cap B \cap C \cap \ldots) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \ldots}$$

A, B, C, ... eventlerinin hepsi independent'tır.

?

ÖRNEK: A client saves a file to the cloud (e.g. iCloud, OneDrive, Google Drive, Dropbox). The cloud system sends copies of the file to three data centers located at (Zurich, Reno, and Cape Town). Later, the client attempts to retrieve the file. Given that at any given time the prob. of a data center being unreachable at each location is 0.001, What is the prob. that the file cannot be retrieved by the client at any given time? → Birine ulaşamazsa diğerine ulaşmaya çalışır.

A: File cannot reach Zurich, B: File can't reach Reno, C: File can't reach Cape Town.

3 event'in independent old. varsayarsak:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$

$$= 0.001 * 0.001 * 0.001$$

$$= (0.001)^3$$

∴ Buradan çıkarılacak sonuç şudur: Daha fazla data center'ımız old. için failure oranı düşmüştür, sadece 1 tane olsaydı 10^{-3} olurdu ama 3 tane old. için 10^{-9} oldu!

→ Eğer dependent eventler olsalardı durum değişirdi.
Mesela Z ve R dependent olsaydı kesişimleri 10^{-3} olurdu.
Buradan $P(\text{failure}) = P(\underbrace{Z \cap R}_{10^{-3}} \cap C) = 10^{-6}$

! Yani failure independent olunca daha az olur.

<u>ÖRNEK</u>: A manufacturing machine can be powered by any one of four electrical sources that have the following failure prob. for any given days:

1. The mains power supply; having a failure prob. of 0.05
2. A diesel generator; having a failure prob. of 0.10
3. A battery bank; // // // 0.20
4. A wind turbine; // // // 0.25

What is the prob. that all 4 power sources will fail on the same day thereby <u>causing the machine to shutdown</u>?

P(failure(all))

A: Mains power supply failure → $P(A) = 0.05$
B: Diesel generator failure → $P(B) = 0.1$
C: Battery bank failure → $P(C) = 0.2$
D: Wind turbine failure → $P(D) = 0.25$

Bu 4 event'in birbirinden etkilenmediğini (independent olduğunu) düşünelim. Böylece;

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$$
$$= 0.05 \cdot 0.10 \cdot 0.20 \cdot 0.25$$
$$= 0,00025$$

! Bu eventlerin failure olasılıklarına ayrı ayrı baktığımızda büyük olduklarını, fakat toplam failure olasılığının çok küçük olduğunu görmekteyiz. Buna <u>redundancy</u> denir.

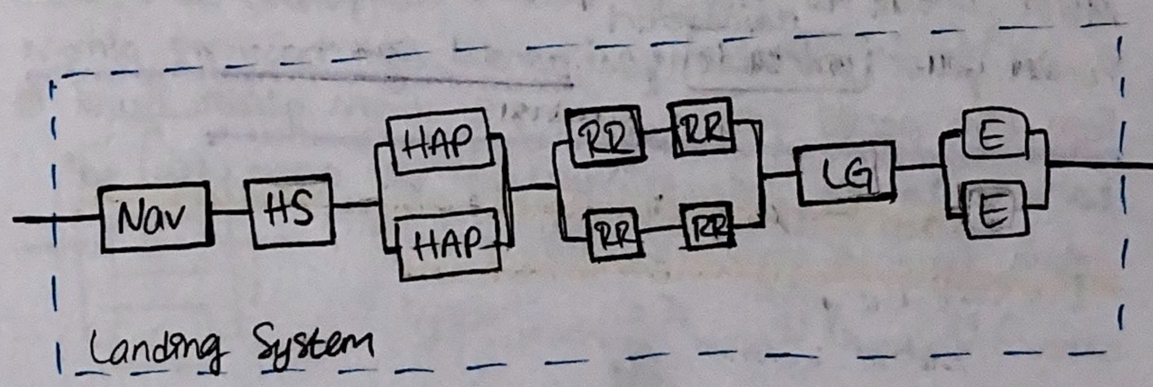
Veri tabanındaki mi?

Hayır, paralel bağlanmadan ötürü birinin yeterli olmasıyla ilgili.

✓ Peki bu eventler dependent olsaydı ne olurdu? O zaman failure prob. nasıl olurdu?

↳ Tabi ki artardı! Yani independent olmaları failure olasılığını azalttığı için avantajlıdır.

Lecture 3 - The Reliability Block Diagram



Nav : Navigation
HS: Heat Shield
HAP: High Altitude Parachute
RR: RetroRockets
LG: Landing Gear
E: Electrical system

✓ Reliability Block Diagram (RBD), bileşen güvenilirliğinin, tüm sistemin güvenilirliğine nasıl katkıda bulunduğunu gösteren şematik bir yöntemdir.

component reliability

P("system work")

P(Nav)

Önceki örneklerde hep failure olasılığına bakıyorduk. Burada ise çalışma olasılığına bakacağız! → $P(Nav) + \underbrace{P(Nav')}_{\text{failure prob}} = 1$

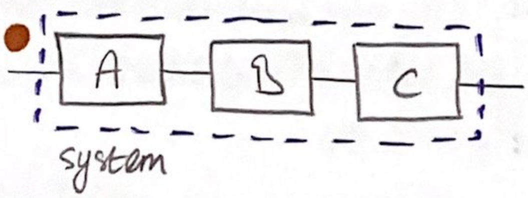
! RBD'de hep $\underbrace{\text{çalışma olasılığı}}_{\text{working prob}}$ kullanılır.

✓ Bir RBD, paralel veya seri olarak bağlanmış bir dizi blok olarak çizilir. Her blok bir bileşeni (component) temsil eder. Paralel yollar $\boxed{\text{yedeklidir}}$ (redundant'tır!), yani paralel ağın başarısız olması için tüm paralel yolların başarısız olması gerekir. Buna karşılık, bir dizi yolundaki herhangi bir arıza, tüm seri ağın başarısız olmasına neden olur.

✓ Bir landing system için bir planetary probe (iniş sistemi) şu kritik bileşenlerden oluşur: Navigation (Nav), Heat Shield (HS), High Attitude Parachutes (HAP), Retro-Rockets (RR), Landing Gear (LG), Electrical system (E).

Redundancy: Çalışması için yalnızca 1 HAP, bir çift RR ve 1 elektrik sistemi gerekir. Çünkü bunlar paralel'dir.

❗ RBD için kullanacağımız formüllerde componentler her zaman independent varsayılır. Fakat independence ile seri/paralel olmanın bir bağlantısı yoktur.

- 

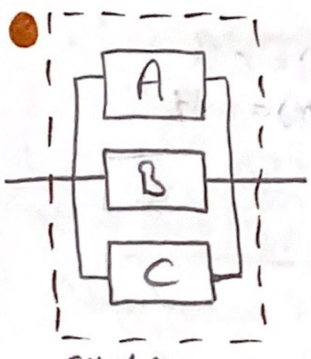
Componentler boyunca soldan sağa doğru ilerleme – tüm componentler çalışırsa sistem çalışacaktır.

$$\text{system}_{\text{works}} = A_{\text{works}} \overset{(\text{AND})}{\cap} B_{\text{works}} \overset{(\text{AND})}{\cap} C_{\text{works}}$$

$$\text{system} = A \cap B \cap C \rightarrow P(\text{system works}) = P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

comp. indep. old. için

- 

Redundant sistem, herhangi bir componentin çalışmasıyla çalışacaktır.

$$\text{system}_{\text{works}} = A_{\text{works}} \overset{(\text{or})}{\cup} B_{\text{works}} \overset{(\text{or})}{\cup} C_{\text{works}}$$

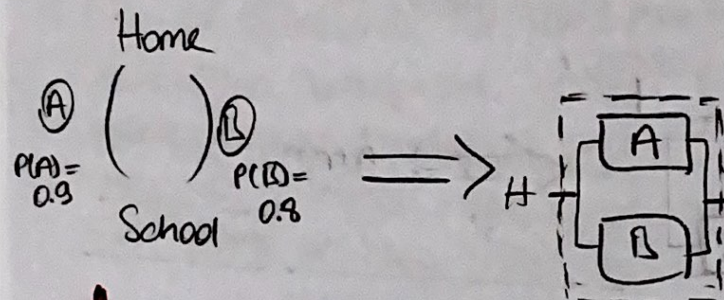
$$\text{system} = A \cup B \cup C \rightarrow P(sw) = P(A \cup B \cup C)$$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) \cdot P(B)} - \underbrace{P(A \cap C)}_{P(A) \cdot P(C)} - \underbrace{P(B \cap C)}_{P(B) \cdot P(C)}$

$+ \underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$

Componentler independent old. için

✓ Önceden yaptığımız route örneğini RBD ile yapmaya çalışalım: (Independence varsayılır)



$P(\text{system work}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.9 + 0.8 - 0.9 * 0.8$

$= 0.98$

★ RBD'deki bloklar çalışan componentleri temsil ettiği için, bunlara atanan olasılıkların her zaman çalışma olasılıkları old. dikkat edin.

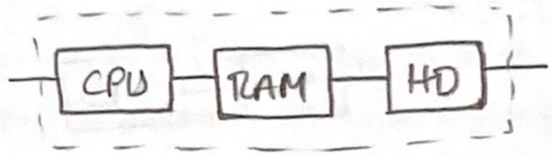
ÖRNEK: A computer system has 3 most likely points of failure: CPU, RAM and HD (hard-drive). The failure prob. for each component is determined for the first year of service.

- The prob. of CPU failure is 0.05. → $P(CPU) = 0.95$
- The // // RAM // // 0.03. → $P(RAM) = 0.97$
- // // // HD // // 0.20 → $P(HD) = 0.8$

Calculate the prob. that any given system will fail in the first year of service.

P(system work')

I. Bir bilgisayarın çalışabilmesi için bu 3 kısmın da çalışması gerekir. Bu yüzden seri bağlı yapmalıyız.



$P(\text{system work}) = P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$= 0.95 \cdot 0.97 \cdot 0.8$

$= 0.7372$

$\underbrace{P(\text{system work})}_{0.7372} + P(\text{system fail}) = 1$

$P(\text{system fail}) = 1 - 0.7372 = 0.2628$

II. $P(\text{system fail}) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$= 0.05 + 0.03 + 0.2 - 0.05 \cdot 0.03 - 0.05 \cdot 0.2 - 0.03 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.03 \cdot 0.2$

$= 0.2628$

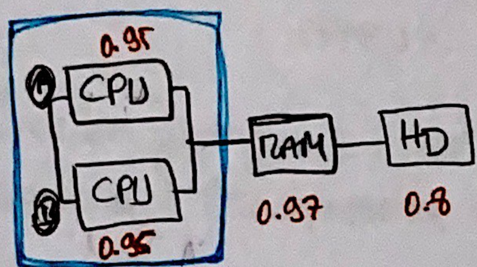
Kesişim alma sebebimiz nedir? Mantıken bilgisayarın çalışması mı yoksa sonuyla mı ilgili?

$P(\text{system work}) + P(\text{system fail}) = 1$ yani bu 2'si birbirinin tümleyeni. Bu yüzden $(A' \cup B' \cup C')' = A \cap B \cap C$ olur

- Sistemi geliştirmek istediğimizi ve bu 3 component'ten birinden bir tane daha alacağımızı (onun paralel bağlanacağını) düşünelim. Hangisinden almak daha mantıklıdır?
(Nasıl daha güvenilir olur)

Deneyelim!

a. CPU için:



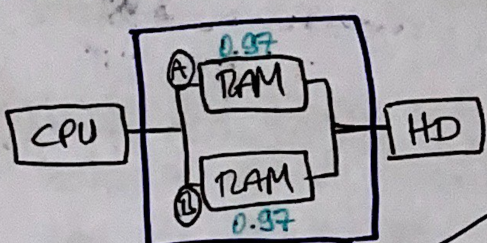
Tek component haline getirelim!

$\boxed{\text{CPU}}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.95 + 0.95 - 0.95 \cdot 0.95$$
$$= 0.9975$$

$$P(\text{system}) = P(\text{CPU} \cap \text{RAM} \cap \text{HD})$$
$$= P(\text{CPU}) \cdot P(\text{RAM}) \cdot P(\text{HD})$$
$$= 0.9975 \cdot 0.97 \cdot 0.8 = 0.77406$$

b. RAM için:

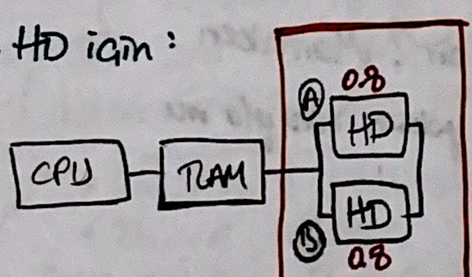


$\boxed{\text{RAM}}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.97 + 0.97 - 0.97 \cdot 0.97$$
$$= 0.9991$$

$$P(\text{system}) = P(\text{CPU}) \cdot P(\text{RAM}) \cdot P(\text{HD})$$
$$= 0.95 \cdot 0.9991 \cdot 0.8 = 0.7593$$

c. HD için:



$\boxed{\text{HD}}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.8 + 0.8 - 0.8 \cdot 0.8$$
$$= 0.96$$

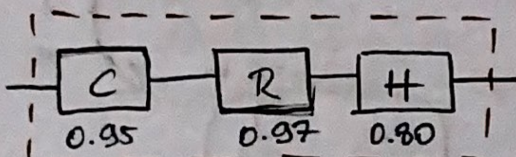
$$P(\text{system}) = 0.88464$$

$\therefore$ Yani working prob.'u en az olan en fazla artmıştır. Bu da tüm sistemin çalışma olasılığını da arttırır.

! Bu sebeple CEVAP: HD olacaktır.

ESTIMATE

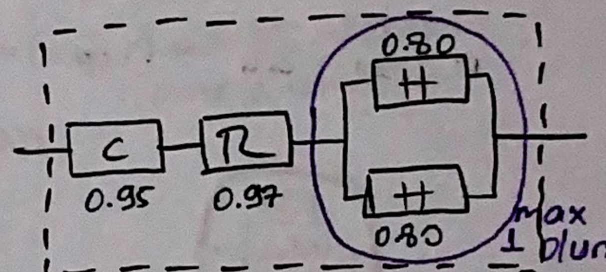
Yani bu sistemin çalışma olasılığı ne ile ne arasındadır? Burada değişen kısım HD'dir. Bu yüzden bu aralık da onun üzerinden gerçekleştirilir. Yani;



computer system

↓

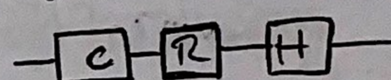
$0.95 \cdot 0.97 \cdot 0.80 = 0.7372$



improved computer system

↓

$0.95 \cdot 0.97 \cdot 1 = 0.9215$



perfect hard-drive!

$0.7372 < P(\text{system works}) < 0.9215$

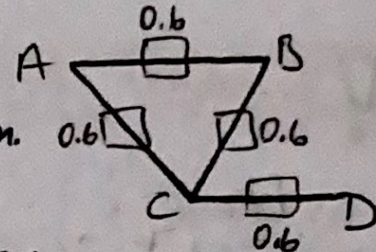
$\therefore$ System works $= C \cap R \cap (H1 \cup H2)$

$= P(C) \cdot P(R) \cdot P(H1 \cup H2)$

$= 0.88464$

Failure prob. $= 1 - 0.88464 = 0.11536 \cong \boxed{0.115}$

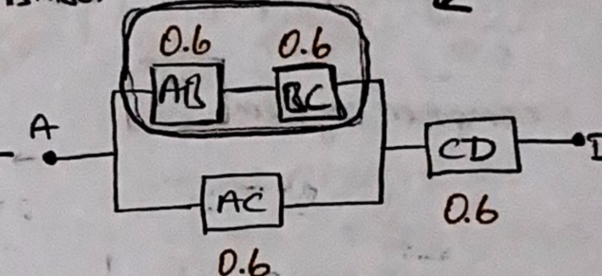
ÖRNEK: Cities A, B, C and D are connected by roads as illustrated in the diagram. Each road has an equal and independent prob of 0.4 of being closed due to flooding. What is the prob. that there is an open route between cities A and D?

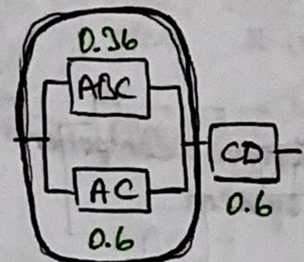


RBD hali

$P(\text{closed}) = 0.4 \rightarrow P(\text{open}) = 0.6$

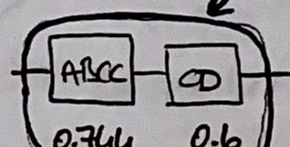
$P(AB \cap BC) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$





$P(ABC \cup AC) = P(ABC) + P(AC) - P(ABC) \cdot P(AC) = 0.36 + 0.6 - 0.36 \cdot 0.6$

$= 0.744$

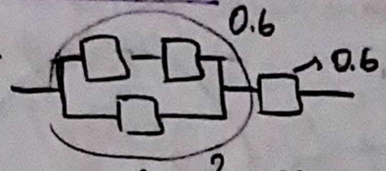


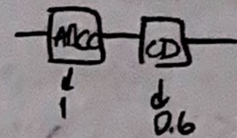
$P(ABCC \cap CD)$

$P(ABCC) \cdot P(CD) = 0.744 \cdot 0.6 = 0.4464 \leftarrow P(\text{system work})$

Bu diyagramın fizikteki ile alâkası var mı?
Evet, ondan esinlenilmiş.

Estimate ?

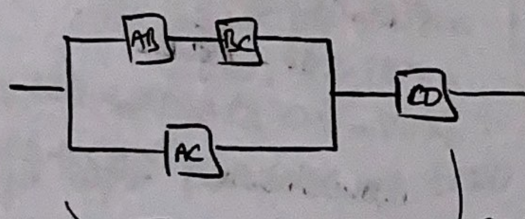




$(0.6)^2 < P(\text{system work}) < 0.6$

A-C en az 0.6 olabilir. Çünkü her component 0.6.

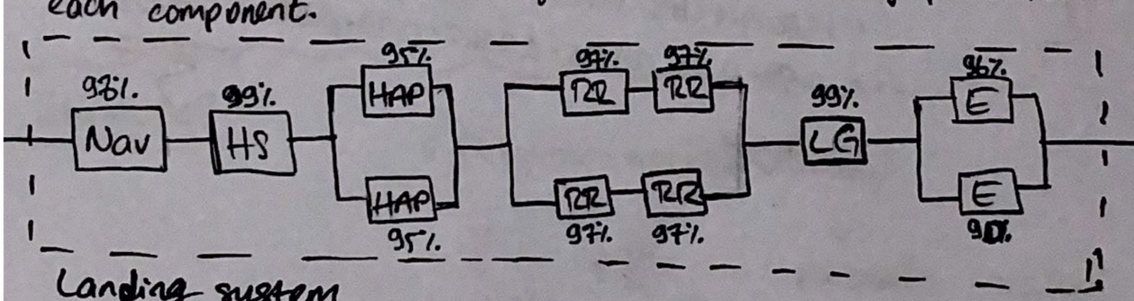
A-C en fazla 1 olabilir, mükemmel olma durumudur.



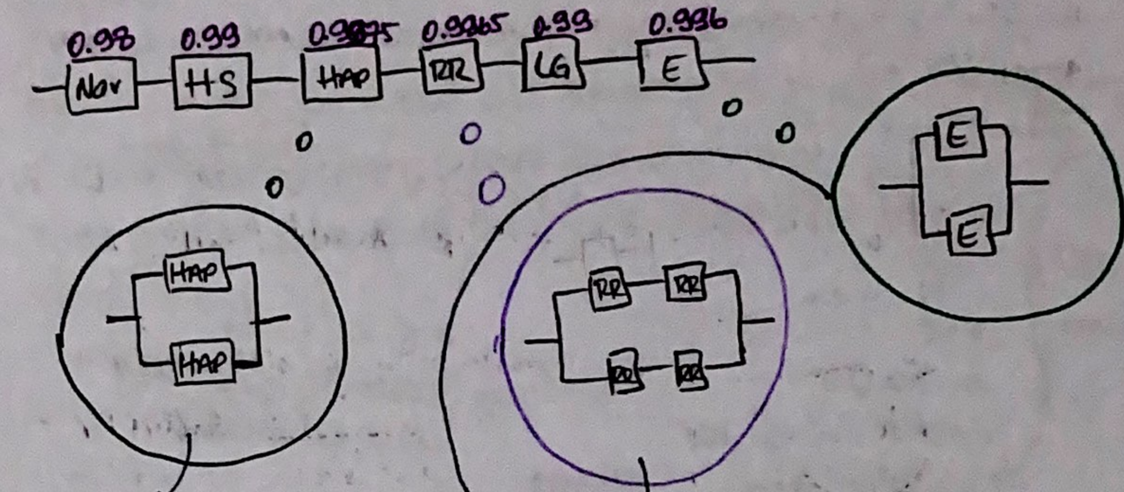
$0.6 < P(ABCC) < 1$

seri olduğu için bu aralığı 0.6 ile çarpıp tahmini aralığı buluyoruz!

ÖRNEK: A landing system for a planetary probe consists of the following critical components: Nav, HS, HAP, RR, LG, E. The RBD for this system is given below together with the working probs. for each component.



a. What is the prob. that this landing system will work?



$P(HAP) = P(HAP_1 \cup HAP_2)$

$= P(HAP_1) + P(HAP_2) - P(HAP_1 \cap HAP_2)$

$= 0.95 + 0.95 - 0.95 \cdot 0.95$

$= 0.9975$

$P(RR) = P((RR_1 \cap RR_2) \cup (RR_3 \cap RR_4))$

$= P(RR_1 \cap RR_2) = P(RR_3 \cap RR_4)$

$= 0.97 \cdot 0.97 = 0.9409$

$P(RR_{12} \cup RR_{34}) = P(RR_{12}) + P(RR_{34}) - P(RR_{12} \cap RR_{34})$

$= 0.9409 + 0.9409 - 0.9409 \cdot 0.9409$

$= 0.9965$

$P(E) = P(E_1 \cup E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1) \cdot P(E_2)$

$= 0.96 + 0.90 - 0.96 \cdot 0.90$

$= 0.996$

$P(\text{system work}) = P(Nav \cap HS \cap HAP \cap RR \cap LG \cap E)$

$= P(Nav) \cdot P(HS) \cdot P(HAP) \cdot P(RR) \cdot P(LG) \cdot P(E)$

$= 0.98 \cdot 0.99 \cdot 0.9975 \cdot 0.9965 \cdot 0.99 \cdot 0.996 \approx 0.9509$

b. If you had the resources to improve the reliability of just one of the components by 1%, which component would you choose?

Tabi ki tek component hali en küçük olanı arttırırız. O da Nav olur. Sebebini bir önceki örneklerde görmüştük!

Tek olandan seçme sebebimiz ise paralel olanlarda sadece 1 tanesinin değiştirilip diğerinin değiştirilmemesidir. En küçük olan E'deki 0.90, 0.91 yapıldığında paralel kısım 0.996'dan 0.997'ye geçebilir, ama 0.98 için denendiğinde 0.99 olacaktır. Ki bu da büyük bir artıştır
(%20)

Peki ya hepsi paralelse ve tekli hali aynıysa o zaman bu paralellerde yüzdesi en küçük olan mı seçilir?

Bunu genelleyemeyiz. Hangisinin çalışma olasılığını arttırdığını anlamamız için denememiz gerekir

Estimate? : < P(system works) < 0.9605

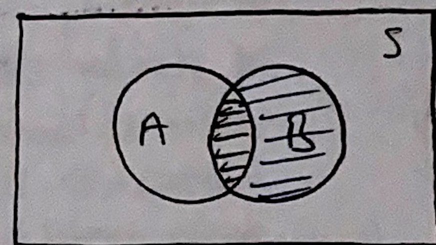
↓

paraleller 1 seçilir

Lecture 4 - Conditional Probability

✓ B olayının meydana geldiği biliniyorsa, bir A olayının meydana gelme olasılığına koşullu olasılık (conditional prob.) denir ve $P(A|B)$ şeklinde yazılır; "the probability of A given B".

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



✓ Olasılık, orantılı bir Venn diyagramında event alanları ile temsil edilir. B event'inin gerçekleştiği göz önüne alındığında, örnek uzay B'ye indirgenmiştir. Önceden S idi.

Experiment: picking an outcome
(assume all outcomes are equally likely)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{\cancel{n(S)}}}{\dfrac{n(B)}{\cancel{n(S)}}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Example:

Experiment: Pick a person at random

	Employed	Unemployed	Total
Male	460	40	500
Female	140	260	400
Total	600	300	900

Events;

M: Male

F: Female

E: Employed

S = the sample space (900 people)

From the table;

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{500}{900}, \quad P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{400}{900}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{600}{900}, \quad P(M \cap E) = \frac{n(M \cap E)}{n(S)} = \frac{460}{900}$$

$$P(E|M) = \frac{n(E \cap M)}{n(M)} = \frac{460}{500}, \quad P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{460}{600}$$

From conditional probability;

$$P(E|M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{460/900}{500/900} = \frac{460}{500}$$

$$P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{460/900}{600/900} = \frac{460}{600}$$

Example: An engineering graduate has job interviews with Company A and Company B. There is a prob. of 0.8 of being offered a job by Company A, and a prob. of 0.6 for Company B, and a prob. of 0.5 of being offered a job by both companies.
$P(A)=0.8$, $P(B)=0.6$, $P(A\cap B)=0.5$

If company A doesn't offer a job, then what is the prob. that Company B will offer a job?

Yani sample set A' iken B ne olur?

$$P(B|A') = \frac{P(B\cap A')}{P(A')} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

$$\boxed{P(B\cap A) + P(B\cap A') = P(B)}$$

$P(B\cap A) \to 0.5$, $P(B\cap A') \to 0.1$, $P(B) \to 0.6$

$$\boxed{P(A) + P(A') = 1}$$

$P(A) \to 0.8$, $P(A') \to 0.2$

Independent Events

Eğer $P(B|A) = P(B)$ ve $P(A|B) = P(A)$ ise A ve B eventleri independent olur. Yani bir event'teki var olma veya olmama diğer event'i etkilemez.

Verilen bağımsızlık ve conditional prob. kullanılarak:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow \boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$$ elde ederiz

ki bu da önceden kullandığımız independence testiydi

$P(A \cap B)$'yi $P(A) \cdot P(B)$'ye basitleştirmek için önceki derste independence'lığı kullandık, bu durumlarda bağımsızlık bir varsayımdı; bu tür varsayımlar zayıf olabilir ve yanlış sonuçlara yol açabilir. Şimdi bu ilişkiyi bağımsızlığı (independence) test etmek için bir araç olarak kullanacağız.

Example: Two machines, machine A and B, operate in a factory. Each day, the prob. that machine A has a warning light is 0.2, the prob. for machine B is 0.3. The prob. that both machines have a warning light is 0.06. Is the occurrence of the warning lights independence each other?

Eğer 2 event independent ise;

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ sağlanır.

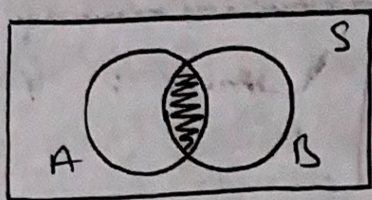
Bakalım bu soruda sağlanıyor mu?

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0.06 = 0.3 \cdot 0.2$ $\boxed{\checkmark}$

↳ Sağlanıyor, yani evet, bu 2 event independent'tır!

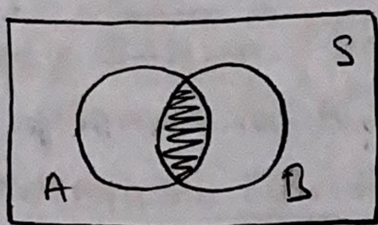
! Peki ya ikisinin de olma ihtimali 0.08 olsaydı ne olurdu?
Böyle olsaydı $0.08 \neq 0.3 \cdot 0.2$ olacağından, bu 2 event independent olmazdı. Buradan da 2 makinenin birbirini etkilemediği veya her 2 makineyi de etkileyen harici bir process olmadığı sonucuna varabiliriz.

$P(A) = 0.2, \quad P(B) = 0.3$

- 

Şekil, independence verilen, beklenen kesişme (intersecting) olasılığını göstermektedir. $P(A \cap B) = 0.06$

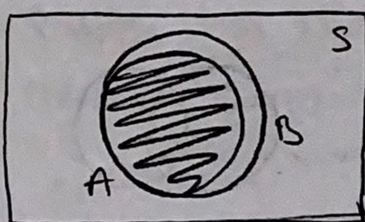
$P(A|B) = 0.02 = P(A)$

- 

Eventler artık daha çok örtüşüyor, küçük bir bağımlılık düzeyi vardır.

$P(A \cap B) = 0.08$

$\boxed{P(A|B) = 0.08 / 0.03 \approx 0.267 > P(A)}$

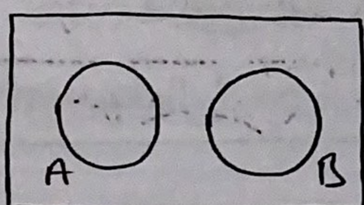
- 

Eventler tamamen örtüşüyor; yüksek düzeyde bağımlılık (dependence) vardır.

$P(A \cap B) = 0.2$

$\boxed{P(A|B) = 0.2 / 0.3 \approx 0.667 > P(A)}$

$P(B|A) = 0.2 / 0.2 = 1$

- 

Eventler disjoint ise $(P(A \cap B) = \emptyset)$ dependent olurlar.

$P(A \cap B) = 0$, $\boxed{0 \neq 0.2 \cdot 0.3}$

✓ $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0}{0.3} = 0$ Completely dependent

$P(A|B) < P(A)$

∴ Yani conditional prob. değeri A olasılığı değerinden büyük veya küçükse 2 event dependent olur.

Example: The prob. that a regularly-scheduled train arrives at a station on time is 0.79. The prob. that the train departs on time is 0.85. The prob. that the train arrives on time and then departs on time is 0.72.

zamanında hareket etme

zamanında varma

zamanında varma ve zamanında kalkma

a. Are events "arrive on time" and "depart on time" independent?

A: arrive on time, D: depart on time

$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D)$ ise independent olurlar

$0.72 \neq \underbrace{0.79 \times 0.85}_{0.6715}$ → dependent'tır.

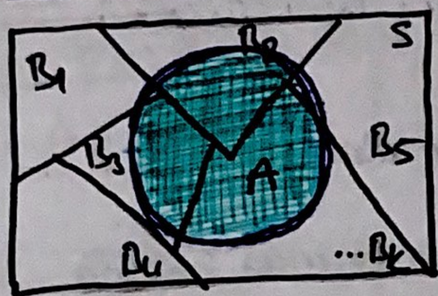
b. What is the prob. that the train arrived on time given that it departed on time? → Zamanında kalkmış ise zamanında gelme olasılığı? Yani sample set D!

$P(A|D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.72}{0.85} \approx 0.8471$ [$>P(A)$]

c. Given that the train arrived on time, what is the prob. that it will depart on time?

$P(D|A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.72}{0.79} \approx 0.911$ [$>P(D)$]

Total Probability & Bayes' Theorem



A event'inin gerçekleşme olasılığı diğer eventlerle olan kesişim olasılıklarının toplamıdır.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i)$$

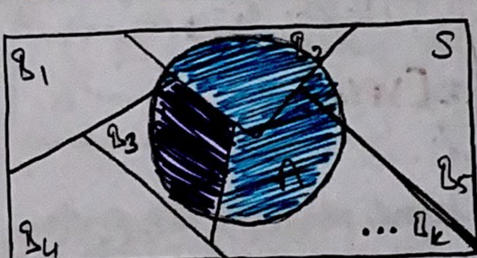
✓ $B_i \cap B_j = \emptyset$ → yani B'li eventler kesişmiyor ve birleşimleri S. $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, S'in partitionlarıdır. → dependent disjoint !

✓ $P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i)$ → condition prob. eşitliği

✓ Event A'nın toplam olasılığı:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Bayes Theorem



Bir conditional prob. diğer bir conditional prob. cinsinden tanımlanır.

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r) \cdot P(B_r)}{P(A)}$$

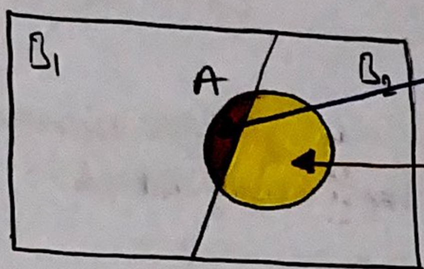
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\underbrace{P(B|A) \cdot P(A)}_{P(A \cap B)} = \underbrace{P(A|B) \cdot P(B)}_{P(A \cap B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

! Formülde genel hali vardı ama biz $k=2$ için yani 2 partition set için olan halini kullanacağız:



$$P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

EXAMPLE: An electronic test kit is used to check that devices are working correctly. On average 5% of devices are faulty, in these cases the test kit always that the device is faulty. If the test kit is presented with a working device, then there is a 1% chance that it will indicate that the device is faulty (false positive).

a. If a device is selected at random, what is the prob. that the test kit will indicate that the device is faulty?

Cihaz çalışmıyorsa (%5) → her zaman faulty gösterir

Cihaz çalışıyorsa (%95) → %1'ini faulty gösterir.

+ → test kit indicates the device is working

− → // // // // // // detective

W → working device

D → detective device

Experiment: Pick a device at random

$P(+)$, $P(W)$
$P(-)$, $P(D)$ } bunları bilmeliyiz

$P(-)$ sonucu bu şıkkı verecektir.

$P(D) = 0.05$ (soruda verilmiş)

$P(W) = 0.95 \rightarrow P(D')$

$P(-|D) = 1 \rightarrow$ çünkü $\frac{0.05}{0.05}$ olasılık old. söyleniyor. Detective olanların hepsi faulty çıkıyor.

$P(-|W) = \frac{0.01}{0.95} \approx 0.01$

Total prob. formülünü uygularsak:

$P(-) = P(-|D) \cdot P(D) + P(-|W) \cdot P(W)$
$= 1 \cdot 0.05 + 0.01 \cdot 0.95 = 0.0595 \approx 0.06$

b. If the test kit indicates that the device is faulty, what is the prob. that the device is faulty?

$$P(D|-) = \frac{P(-|D) \cdot P(D)}{P(-)} = \frac{1 \cdot 0.05 + 0.05}{0.0595} \approx 0.84$$

EXAMPLE: A robotic system is being tested in a recycle center. The task of the robot is to remove unwanted plastic bottles from a coveyor belt that is transporting glass bottles to a glass furnace. 20% of bottles on the coveyor belt are plastic, the rest are glass. Research shows that the robot will correctly recognize and remove (true positive) 95% of plastic bottles, but mis-identify and remove (false positive) 5% of the glass bottles.