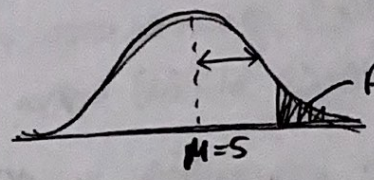
Hypothesis Testing (P-value Yaklaşımı)

Önemli gözlemler yapma ilkesi Hypothesis testinin genel fikri şudur:

1. Varsayımda bulunun (hipotez): Mesela $H_0: \mu = 5$ alalım
2. Varsayımla ilgili gözlemler yapın (veri toplayın):

   Eğer $\bar{x} = 4$ ise $H_A: \mu < 5$ ve $\bar{x} = 6$ ise $H_A: \mu > 5$
3. P-value'ya dayanarak, alternative hipotezin ne kadar güçlü bir şekilde önerildiğini belirleyin.



P-value: Eğer küçükse H_0'ı reject ederiz

Hypothesis Testing Örneği: Bilimsel Metot

Bilim adamı dünyanın değişi hakkında hipotez kurar (kuramlar kurar). Gözlemlere dayanarak, zayıf teoriler reddedilir (rejected). İyi teoriler, verilere daha iyi dayanan teorilerle değiştirilene kadar tutulur. Bir teori reddedilemezse tamamen doğru olduğu anlamına gelmez

The P-value approach to hypothesis testing

- Bir popülasyonun ortalaması için null hypothesis düşünün:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

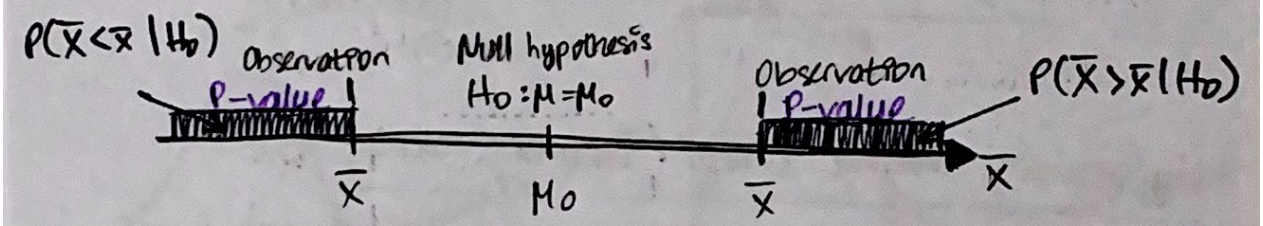
- Daha sonra null hypothesis ile uyuşmayan alternative bir hypothesis oluşturabiliriz:

$$H_A: \mu > \mu_0 \text{ veya } H_A: \mu < \mu_0$$

- Daha sonra gözlemimizin null hypothesis ile istatistiksel olarak tutarlı olup olmadığını belirleriz. Sampling distr.'u anladığımız için şunları sorabiliriz:

→ Bir gözlemin null hypothesis'ten uzaklaşma yönünde olması ne kadar olasıdır?

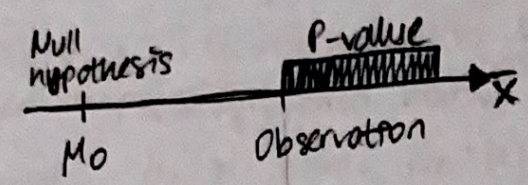
↳ Buna p-value denir



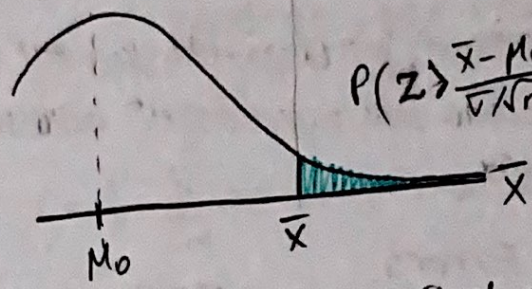
! Hypothesis Testing uygularken p-value küçük olursa Alternative Hypothesis lehine Null Hypothesis reddedilir (rejected).

∴ Mesela $P(\bar{X} > \bar{x} \mid H_0)$ değeri çok küçük olsun. Böylece $\mu > \mu_0$ olmalıdır diyebiliriz.

- P-value, bir deneyin gözlemlenen istatistiksel önemidir.



P-value hesaplanırken $\bar{X}$, Z'ye dönüştürülür.



→ Bu da P-value olur. ★

Null hypothesis'den istatistiksel olarak "uzak" olan bir gözlem küçük bir P-value verecektir. Null hypothesis'i reddedersek, yanlış olma olasılığı P'dir. Dolayısıyla bir reddetme, P-value'nun makul ölçüde küçük olmasını gerektirir.

- P-value küçükse, H_0, H_A lehine reddedilir.
- P-value büyükse, H_0'ı reddetmeyiz.
- Bu durumda H_0'ı reddetmek için yeterli kanıtımız yoktur.
- Fakat bunun H_0'ın doğru olduğu anlamına gelmediğini unutmayın!

P değeri ne kadar küçük olmalıdır?

- Bu probleme göre değişir.
- Risk of a wrong choice = Prob. of wrong choice × Harm of the wrong choice

P-value

engineering scenario

- Bu kursta sadece P-value'yu dikkate alacağız ve aşağıdaki gibi ifadelerde bulunacağız:

(anlamlı) → significant

— P değeri önemlidir ve $\mu > 6mm$ olduğunu kuvvetli bir şekilde gösterir. Burada null hypothesis'i, $\mu > 6mm$ alternative hypothesis lehine reddediyoruz.

Örnek P-values : 5%, 1%

(anlamlı değildir) → not significant

— P değeri önemli değildir ve $\mu > 6mm$ old. kuvvetli bir şekilde göstermez. Burada null hypothesis'i reddetmiyoruz.

Örnek P-values : 30%, 10%

Type I and Type II Errors

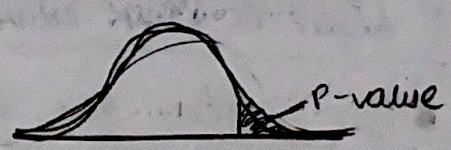
Mesela $\mu = 5$ veya değil

	H_0 is true	H_0 is false ← truth
Do not reject H_0	Correct decision	Type II Error → Daha iyisi varken biz öncekini kullanıyoruz. Maliyet zaran oluşur
Reject H_0	Type I Error	Correct decision

↑ decision

Walpole

P(Type-I error) = P-value



✓ Biz derste P-value'yu yani Type-I Error'u göreceğiz sadece!

! Her 2 error da kötüdür.

Procedure for hypothesis testing

1. H_0 null hypothesis ve H_A alternative hypothesis'i oluşturun.

Örneğin: $H_0: \mu = 8mm$, $H_A: \mu > 8mm$

2. İlgili gözlemleri yapın ve P-value'yu oluşturun:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \text{P-value} = P\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

3. P-value'ya dayanarak, alternative hypothesis'in ne kadar güçlü bir şekilde önerildiğini belirleyin; ve null hypothesis'i reddedin ve etmeyin.

MA73026'daki problemler için şunları öneriyoruz:

P-value $\leq 5\%$ ise "strongly suggests"
P-value $\leq 1\%$ ise "very 〃 〃
} significant

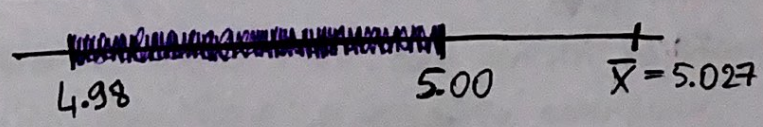
Example: A factory is required to manufacture cylindrical components with a mean diameter within the tolerance 4.99 ± 0.01 mm. It is known that the manufacturing process has a population standard deviation $\sigma = 0.12$mm.
An inspector tests 100 components and finds the mean diameter to be 5.027 mm. How strongly does this result suggest that the req. is not satisfied? → reject null hypothesis?

$n = 100$

$\bar{X} = 5.027$

$\mu =$

$\sigma = 0.12$



$H_0: \mu = 5$ $\quad$ $H_A: \mu > 5$

↳ 5 olma sebebi tolerable'ın en büyük değeri olmasıdır. ve $\bar{x}$'ın bunun sağında olmasıdır.

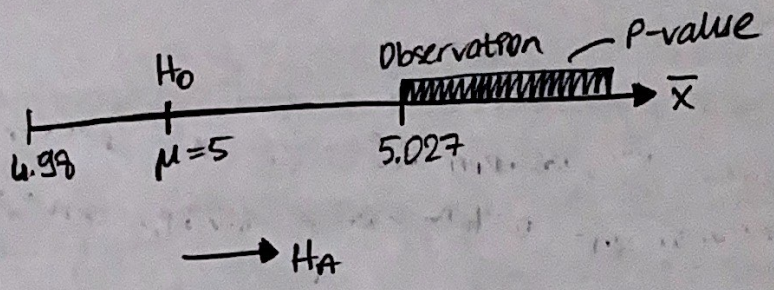
Eğer $\mu = 5$ için küçük P-value elde edersek null hypothesis'i reddetmemiz gerekir. Bu yüzden de üretimde değişiklik yapmamız gerekir. Çünkü bu componentlerin ortalama çapı tolerable olmaz.

null hypothesis için

$$P(\bar{X} \geq 5.027) = P\left(Z \geq \frac{5.027-5}{0.12/\sqrt{100}}\right) = P(Z \geq 2.25)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.25) = 1 - \text{normcdf}(2.25)$$

$$= 1 - 0.9878 = \underbrace{0.0122}_{\text{P-value}} \text{ (çok küçük bir değer)}$$



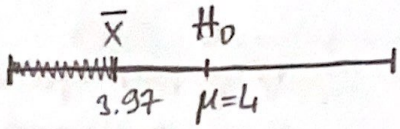
✓ Yani $\mu = 5$ varsayılırsa $\bar{X}$'in 5.027 ve daha büyük olma olasılığı çok küçüktür.

✓ P-value 0.012'dir ve bu significant'tır (çünkü çok küçük) ve $\mu > 5mm$ olduğunu kuvvetle önerir.

✓ $\mu > 5mm$ olan alternative hipotez lehine null hipotez reddedilir.

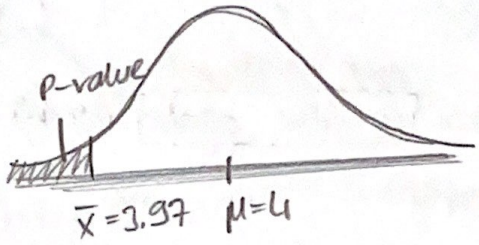
✓ Üretim gereksinimi karşılanmadı, makineleri yeniden kalibre etmemiz gerekiyor. Ama yanlış bir karar verme ihtimalimiz %1.2!

Kahoot Question: For the population it is claimed that $\mu = 4$ and $\sigma = 0.15$. In a test for a sample set of size $n=100$, we get $\bar{x} = 3.97$. Find the P-value.



$$P(\bar{x} < 3.97) = P\left(Z < \frac{3.97-4}{0.15/\sqrt{100}}\right)$$

$$\rightarrow P(Z < -2) = \text{normcdf}(-2)$$
$$= 0.0228$$



t-distribution

- Önceki örneklerde σ hep verilmişti. Fakat mean bilinmeden σ'nun bilinmesi pek de doğru değildir. Peki, σ verilmeseydi nasıl bilecektik?

→ Burada s'i kullanırız.
↳ sample standard dev.

- μ hakkında çıkarım yapmak için standard normal distr. söyleydi:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Fakat σ bilinmiyorsa, onu sample standard dev. s ile değiştirmeliyiz. Bu durumda da t-distr.'umuz olur:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

- Bu 2 distr. benzerdir. Ancak t-distr. daha geniştir ve dolayısıyla daha büyük (less significant) P-values ile sonuçlanır.

$$z_\alpha = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$t_\alpha = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

$P(Z > z_\alpha) = 1 - \text{normcdf}(z_\alpha)$

$P(T > t_\alpha) = 1 - \text{tcdf}(t_\alpha, \nu)$

↳ degree of freedom

$\nu = n-1$

σ'yı bilmiyorsak bunu kullanırız!

($\bar{x}$ with n)

! Size büyüdükçe $\boxed{\text{P-value azalır}}$ (more significant) Çünkü x eksenine daha yakın bir grafiğimiz olur.

EXAMPLE: Tesla claims that their electric cars have an average range of 155 miles after being supercharged for only 20 mins. A car owner wishes to determine whether this is true. She makes ten journeys, each time supercharging the battery for 20 mins, driving some distance and restarting to the charge station just before the battery is depleted. The results are recorded as follows:

141.1, 133.7, 158.8, 165.6, 144.0, 148.2, 163.4, 150.3, 159.4, 159.0

Are these results consistent with the claim for tesla?

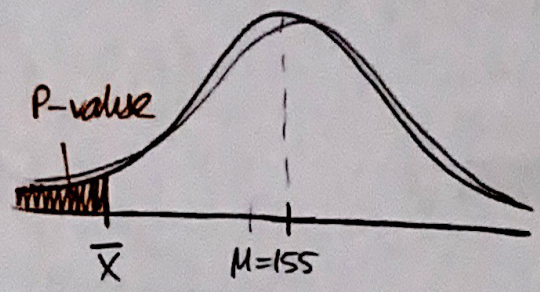
$H_0: \mu = 155$, $H_A: \mu < 155$

x_i	x_i^2
141.1	$(141.1)^2$
⋮	⋮
+	+
1523.5 ← A	B → 233103.95

$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot A$, $s^2 = \frac{1}{90} \cdot \{10B - A^2\}$

$152.35 < \mu$

$s = 10.53$



$P(\bar{X} < 152.35)$

$= P\left(T < \frac{152.35-155}{10.53/\sqrt{10}}\right)$

$\Rightarrow$ tcdf(-0.7958, $\nu=9$)

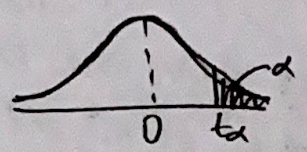
$\Rightarrow 0.2233 \sim \%22$

Aynı zamanda

$P(T > 0.7958)$

μ'sü 0'dır. Z gibi!

NOT:



$P(T > t_\alpha) = 1 - \text{tcdf}(t_\alpha, \nu)$

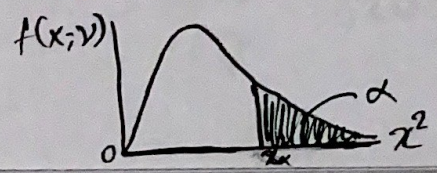
Görüldüğü üzere P-value ≈ 0.22'dir ki bu büyük bir ihtimaldir. Bu sebeple not significant'tir ve $\mu < 155$ miles'i desteklemez. Null Hypothesis reddedilmez, yani Tesla'nın claim'i reddedilmez

Eğer Null Hypothesis'i reddedersek ($\mu = 155$ miles) %22 yanılma olasılığımız olur. Ki bu da Type I error'dur. Tesla'ya karşı iyi bir argümanımız olmazdı.

Daha kesin olmak için daha fazla istatistiğe ihtiyacımız vardır (daha büyük sample size).

Hypotheses for σ

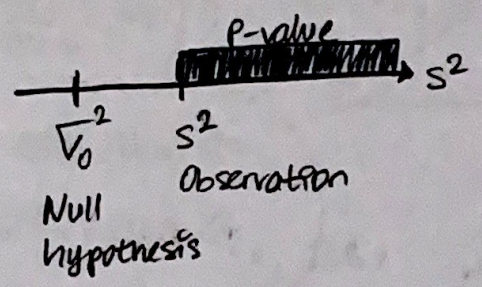
- Popülasyonun standard dev'inina hypothesis testing nasıl uygulanırı göreceğiz.
- s^2 distr.'un chi-squared dist. ile ilgili old unutmayın:



P-value $= P(S > s \mid \sigma = \sigma_0)$

$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha = 1 - \text{chi2cdf}(\chi^2_\alpha, \nu)$

★ $P(S>0.5)$ ise $P\left(\chi^2 > \nu \cdot \frac{(0.5)^2}{\sigma^2}\right)$



EXAMPLE: A client of a cheese factory claims that the density of their product has a standard dev. of 0.3 g/cm³, and so argues that the quality of the cheese is too varied. To investigate this claim the supplier samples 8 pieces of cheese and obtains the following values for their density (g/cm³):

1.76, 1.66, 1.78, 1.93, 1.60, 1.56, 1.96, 1.84

What can the supplier conclude from this experiment?

$H_0: \sigma = 0.3$

x_i	x_i^2
1.76	$(1.76)^2$
⋮	⋮
+	+
A	B
✓	✓
14.09	24.9673

$$s^2 = \frac{1}{n\cdot(n-1)} \cdot \left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right]$$

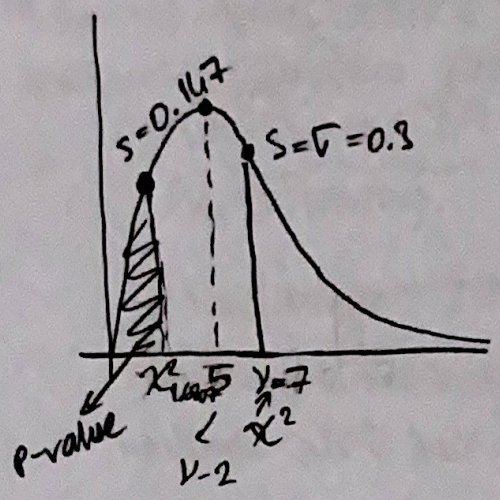
$$= \frac{1}{56} \cdot \left[8 \cdot 24.9673 - (14.09)^2 \right]$$

$s^2 \Rightarrow 0.0216125$

$s \Rightarrow 0.147 \text{ g/cm}^3 < \sigma$

$H_0: \sigma = 0.3$

$H_A: \sigma < 0.3$



$$P(S<0.147) = P\left(\chi^2 < 7\cdot\frac{(0.147)^2}{(0.3)^2}\right)$$

$\boxed{\nu = n-1 = 7}$

$\Rightarrow P(\chi^2 < 1.6807)$

$=$ chi2cdf(1.6807, 7)

$= 0.0246 \approx 2.5\%$

- Çok küçük old. için null hypothesis reddedilir (alternative hyp. lehine).
- Yani müşterinin talebini reddedebiliriz ve $\sigma < 0.3$ g/cm³ alternative iddiasında bulunabiliriz.
- Bu analizi müşteriye sunabiliriz; yanılma ihtimali sadece %2.5!

∴ Yani pimlerin standard dev.inin 0.3 g/cm³ altında olması gerektiği sonucuna varabiliriz.

- Ve client claim geçersizdir. Çünkü 0.3 değil!

EXAMPLE: The diameter of steel ball bearings is req. to be manufactured with a precision (standard dev.) of better* than 40μm. A random sample of 9 balls have the following measured diameters (μm): → $\sigma \leq 40$ → Çünkü standard dev. azaldıkça precision artar.

1641, 1645, 1567, 1572, 1663, 1549, 1603, 1573, 1470.

How strongly does this experiment suggest that the req. is satisfied?

$s^2 = 3533.25$

$s = 59.44\mu m$

$H_0: \sigma = 40\ \mu m$

$H_A: \sigma > 40\ \mu m$ (Bu s'i bulduktan sonra bulunur)

$n = 9$

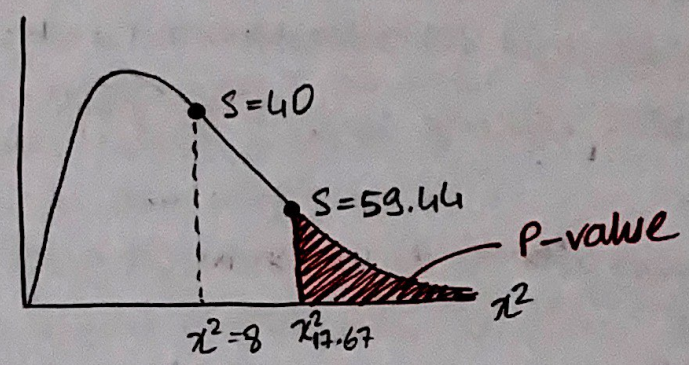
$$P(S>59.44) = P\left(\chi^2 > \nu \cdot \frac{S^2}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2 > 8 \cdot \frac{(59.44)^2}{40^2}\right)$$

p-value

$$= P(\chi^2 > 17.665568) = 1 - \underbrace{P(\chi^2 < \overbrace{17.665568}^{\chi^2_\alpha})}_{\text{chi2cdf}(\chi^2_\alpha, \nu)}$$

$$= 1 - 0.9761 \Rightarrow 0.0239 \sim \%.2 \text{ (significant)}$$

∴ Yani null hypothesis, alternative hypothesis $\sigma > 40$ lehine reddediler. Yani $\sigma > 40$ olmalıdır.



Lecture 12 – Confidence Intervals (I)

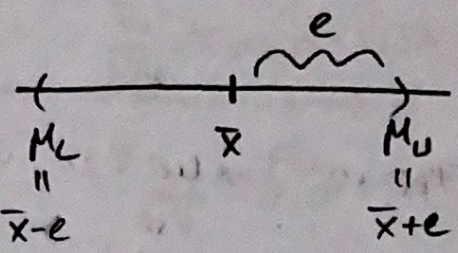
Şu da Hypothesis Testing gibidir. Fakat burada direkt olarak bir sayı değil, bir aralık buluruz.

$$\mu_L < \mu < \mu_U$$

Lower bound for pop. μ — Upper bound for pop μ

→ Mean'i aralıkla belirtik!

- Burada aralık tanımlarken $\bar{x}$'in bu aralığın tam ortasında olmasını sağlamamız gerekir.



yani Central Limit Theorem'i kullanacağız!

EXAMPLE: An electrical firm manufactures light bulbs that have a length of life that is approx. $\boxed{\text{normally distributed}}$ with a standard dev. of 40 hours. If a sample of 30 bulbs has an average life of 780 hours, find a 96% confidence interval for the population mean of bulbs produced by this firm.

X = the lifetime of the bulb

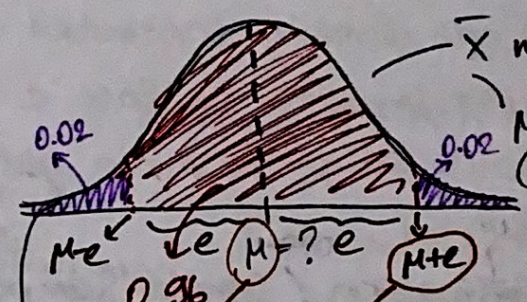
μ

$\sigma = 40$

$n = 30$

$\bar{x} = 780$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{40}{\sqrt{30}}$



$\bar{x}$ with $n=30$

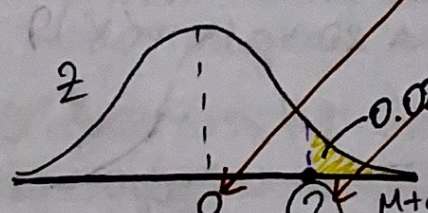
$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ (By the Central Limit Theorem)

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Simetriden dolayı mor kısımlar 0.02 oldu.

Bu değerleri buraya yazıp z'yi bulunuz

$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$



$\frac{\mu+e-\mu}{\sigma/n} = \frac{e}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{0.02}$

$$\frac{e}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{0.02} \rightarrow e = z_{0.02} \times \sigma/\sqrt{n}$$

$$\underset{\bar{x}-e}{\mu_L} = \bar{x} - \underbrace{z_{0.02} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{e} = 780 - z_{0.02} \times \frac{40}{\sqrt{30}}$$

$$\underset{\bar{x}+e}{\mu_U} = \bar{x} + \underbrace{z_{0.02} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{e} = 780 + z_{0.02} \times \frac{40}{\sqrt{30}}$$

ALGORİTMA

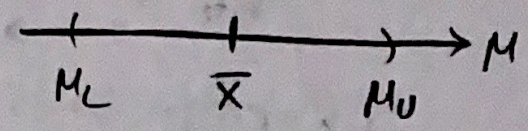
- Önce aralık tanımlanır.
- Aralığın uzunluğu 2·e'dir. Ortası $\bar{x}$'dir.
- Bu aralık altında kalan alan confidence interval dur.
- Sonda normally distributed olduğu söylendiği için z transformation ile önce e bulunur
- Sonra da μ_L ve μ_U'da yerine yazılarak bu değerler bulunur

Interval Estimation / Single Sample

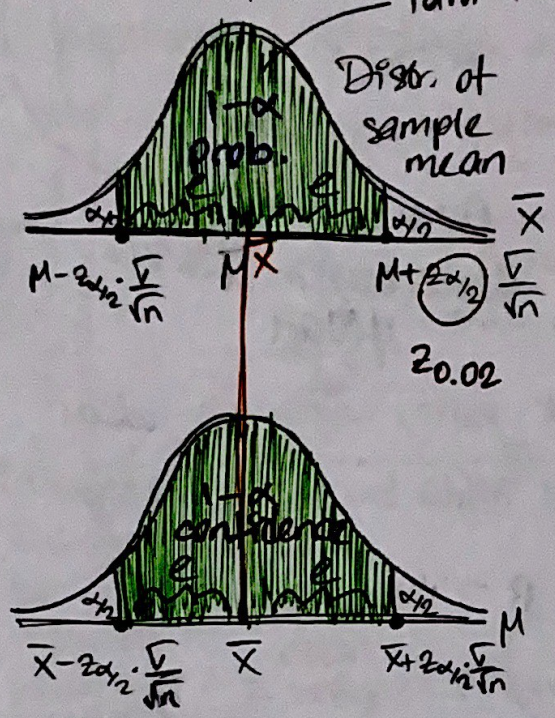
Bir popülasyon parametresinin bir aralık tahmini, örneğin popülasyon mean'i μ, şu aralık formundadır $\mu_L < \mu < \mu_U$; ki burada popülasyon mean'inin alt ve üst sınırlar arasında olduğu tahmin edilmektedir.

Sampling bize popülasyon mean'i μ için bir orta nokta tahmini sağlar. Bu bizim en iyi tahminimizdir ve böylece onu aralık tahminimizin merkezine yerleştirebiliriz.

Daha sonra sample mean'in nasıl dağıldığını onladığımı göz önünde bulundurarak alt ve üst sınırları tanımlayabiliriz



Yani $1-\alpha = 0.96$ iş $\alpha = 0.04$ ve $\frac{\alpha}{2} = 0.02$ dur
Bu da z'nin altındaki parametredir!



$$\mu - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$1-\alpha$ prob. interval

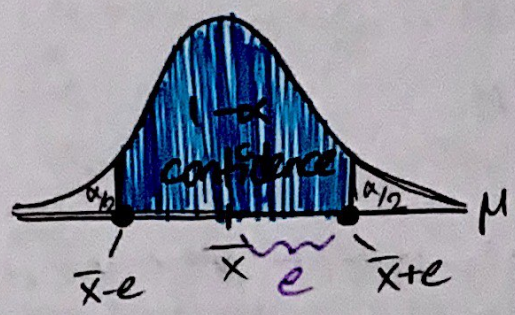
$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$1-\alpha$ confidence interval
Burada yaklaşım bulunur.

$1-\alpha$ değeri artık bir olasılık değildir; bunun yerine, aralığın μ içereceğinden $100\cdot(1-\alpha)\%$ emin olduğumuzu söylerizdir. Böylece $\alpha = 0.05$ olduğunda %95 güven aralığına (%5 anlamlılık düzeyi) veya $\alpha = 0.01$ olduğunda daha geniş bir %99 güven aralığına (%1 anlamlılık düzeyi) sahip olurur.

Yani significance ile confidence birbirinin zıttıdır.

$$e = z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - e < \mu < \bar{x} + e$$

veya

$$\mu = \bar{x} \pm e$$

Aynı aralığı göstermenin farklı yolları

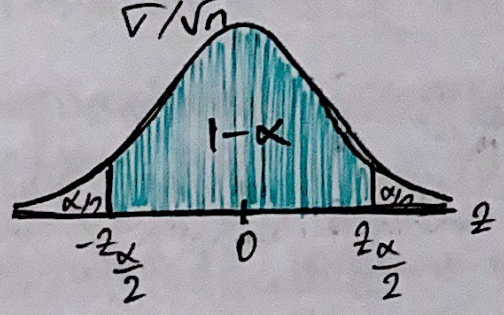
$1-\alpha$: level of confidence

α : // // significance

e : error in the estimate of the mean

- Confidence limitleri belirlemek için, sağda $\frac{\alpha}{2}$ alan bırakan z'nin (ve aynı alanı solda bırakan $-z$) değerini bulmamız gerekir.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$



$$\text{Area}(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

P

$P(Z < z_{\frac{\alpha}{2}})$

$$\Rightarrow 1 - \text{normcdf}(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \text{normcdf}(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

95% confidence

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\Rightarrow 1 - \text{normcdf}(z_{0.025}) = 0.025$$

$$\Rightarrow \text{normcdf}(z_{0.025}) = 0.975$$

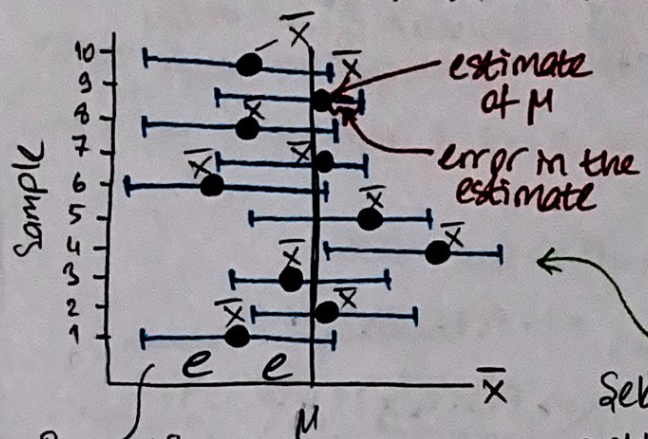
$P(Z < z_{0.025})$

$$\Rightarrow z_{0.025} = 1.96$$

$e = z_{0.025} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → Sonra da confidence interval'ı bulmuş olunuz!

Confidence'ın anlamı nedir?

Farklı sample'lar, farklı $\bar{x}$ değerleri verecek ve bu nedenle μ parametresi için farklı aralık tahminleri üretecektir.



Burradaki error bar'larda μ_L ve μ_U değişir; fakat error bar uzunluğu değişmez!

σ bilmiyorsa, error bar'ın boyutu her sample için şöyle bulunur:

$$e = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Şekilde 10 tanede 1'inde μ aralıkta değil! %90 confidence interval aralıkları gösterilmektedir. Bu, aralık tahminlerinin %90'ının popülasyon parametresini içermesini bekleyeceğimiz anlamına gelir.

! Aynı confidence için sample size (n)'i artırmanın ölçüm hatasını azaltacağını unutmayın.

EXAMPLE: The average zinc concentration calculated from 36 measurements in a reservoir is found to be 2.60 mg/L. If the population standard dev. is known to be 0.30 mg/L, find the 90% confidence intervals for the pop. mean zinc concentration in the reservoir.

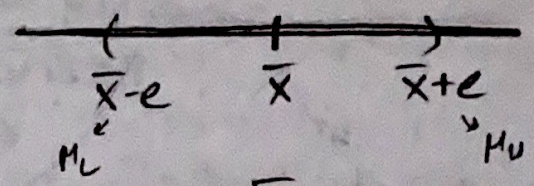
$n = 36$

$\bar{x} = 260$

$\sigma = 0.30$

$1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$



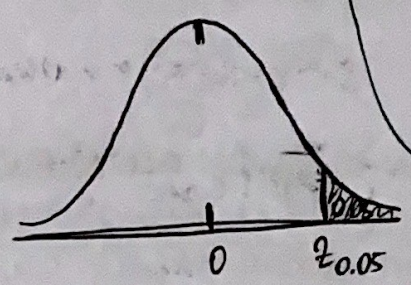
$e = z_{0.05} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mu_L = \bar{x} - e = 26 - z_{0.05} \cdot \frac{0.3}{\sqrt{36}} = 26 - 1.6448 \cdot \frac{0.3}{6} = 251776$

~ 252

$\mu_U = \bar{x} + e = 26 + z_{0.05} \cdot \frac{0.3}{\sqrt{36}} = 26 + 1.6448 \cdot \frac{0.3}{6} = 268224$

~ 268

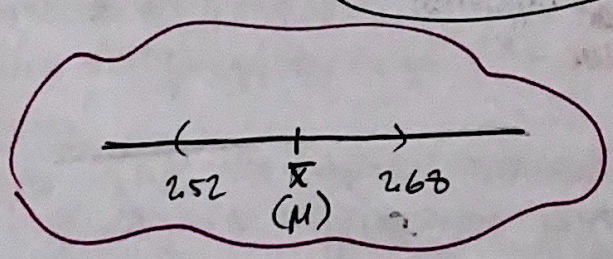


$P(z > z_{0.05}) = 0.05$

$= 1 - P(z < z_{0.05}) = 0.05$

$\Rightarrow P(z < z_{0.05}) = 0.95$

$z_{0.05} = 1.6448$



∴ Ortalama şimko konsantrasyonunun 252 ile 268 mg/L arasında olduğundan %90 emniyet

! $P(z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{normcdf}(z_{0.05}) = 0.95$

$\boxed{\text{normcdf}^{-1}(0.95) = z_{0.05}}$

∴ Burada popülasyon çok büyük old için mean value'yu bulmak için sample seçiyoruz. Sonra $\bar{x}$'i μ kabul edip μ_L ve μ_U ile bulduğumuz bu mean sample'daki hata oranını hesaplıyoruz. Aslında Confidence Interval'ın mantığı da bu oluyor.

Aralık büyüdükçe güvenilirlik oranı artar. Mesela $\frac{\alpha}{2}$ 0.025 oldugunda e yani error artacagı için

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

KAHOOT: For the population $\sigma = 0.42$. For a sample set whose size $n=36$. The sample mean is $\bar{x}=6.75$. Find 95% confidence interval.

$1-\alpha=0.95 \rightarrow \alpha=0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025$

$$e = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \underbrace{z_{0.025}}_{1.96} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$e = 1.96 \cdot \frac{0.42}{6} = 0.1372 \sim 0.137$$

μ_L $\bar{x}$ μ_U

$\bar{x}-e$ $\qquad$ $\bar{x}+e$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$6.75-0.1372$ $\qquad$ $6.75+0.1372$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

6.6128 $\qquad$ 6.8872

$$\mu = \pm 0.137$$

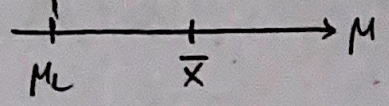
One-Sided Confidence Bounds

Confidence interval'ın bir kısmını bulmak isteyebiliriz: Yani sadece μ_L veya μ_U'yu bulmak isteyebiliriz:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu$$

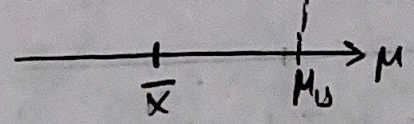
$$\text{Area}(\mu > \mu_L) = \text{Area}\left(\mu > \bar{x} - z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



bu sefer $z_{\frac{\alpha}{2}}$ değil z_{α}! Buna dikkat et!

Lower one-sided bound on μ.

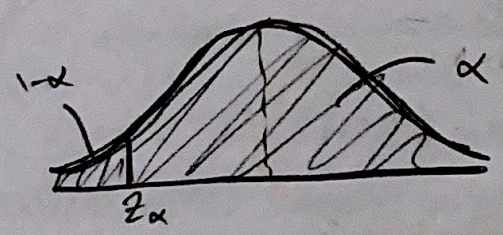
$$\text{Area}\left(\mu < \bar{x} + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



$$\mu < \bar{x} + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Upper one-sided bound on μ.

! Burada z_{α}, α alanını sağda ve dolayısıyla $1-\alpha$ alanını da solda bırakan z değeridir.



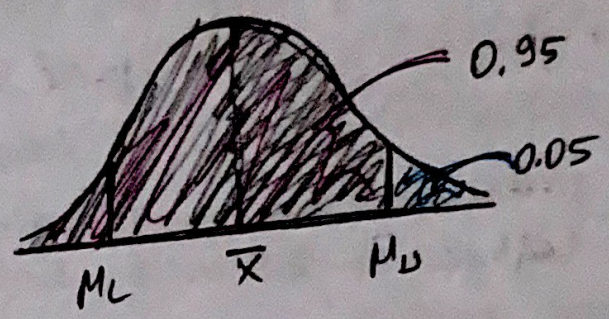
EXAMPLE: The average zinc concentration calculated from 36 measurements in a reservoir is found to be 2.6 mg/L. If the population standard dev. is known to be 0.3 mg/L, find the 95% upper bound confidence interval for the population mean zinc concentration in the reservoir.

$n = 36$

$\bar{x} = 2.6$

$\sigma = 0.3$

$\mu_U = ?$



$$\mu_U = \bar{x} + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu_U = 2.6 + 1.6448 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{36}} = 2.68224 \sim 2.68$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$z_{0.05} \Rightarrow P(z < z_{0.05}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.6448$$

$\mu < 2.68$

Buradan ortalama çinko konsantrasyonunun 2.68'den az olduğundan %95 emin.

KAHOOT: For the population $\sigma = 0.42$. For a sample set whose size $n = 36$, the sample mean is $\bar{x} = 6.75$. Find 95% lower bounded confidence intervals.

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow z_{0.05} = 1.6448$$

$$\mu_L = \bar{x} - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.75 - 1.6448 \cdot \frac{0.42}{\sqrt{36}} = 6.634864 \sim 6.635$$

Yani ortalama çinko konsantrasyonunun 6.635'den çok olduğuna %95 emin.

$\mu > 6.635$

Önceki örneklerde σ'yı biliyorduk. Fakat bu gerçekçi değil. Bu yüzden σ yerine s'i yani sample standard dev.'i kullanmamız gerekir. Yani T-transformation kullanmamız gerekir (Z-transformation yerine). T-distribution ν'ye de bağlıyken Z-distribution bağlı değildir. Bu yüzden buna dikkat etmeliyiz.

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad , \quad T = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu < \bar{x} + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \mu > \bar{x} - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu < \bar{x} + t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \mu > \bar{x} - t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\text{normcdf}(z_\alpha) = 1-\alpha$$

$$\text{tcdf}(t_\alpha, \nu) = 1-\alpha$$

σ'yı tahmin etmek sonunda olmak, daha fazla belirsizlik olduğu ve dolayısıyla confidence interval'ların daha geniş olduğu anlamına gelir! Ancak bu, yalnızca sample size büyüklüğü küçükse ($n \ll 30$) önemlidir.

<u>EXAMPLE</u>: Tesla claims that their electric cars have an average range of 155 miles after being supercharged for only 20 mins. A Tesla owner decides to test this claim; she samples the range of her car ten times and determines the sample mean range to be 152.35 miles with a sample standard dev. of 10.53 miles. Since the observation is less than Tesla's claim, she decides to find the lower bound that represents a 95% confidence.

$\mu = 155$

$\bar{x} = 152.35$

$n = 10$

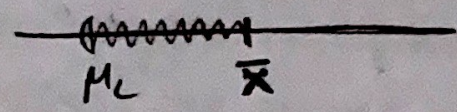
$s = 10.53$

$tcdf(t_{0.05}, n-1=9) = 0.95$

$tcdf^{-1}(0.95) = 1.8331$

Pozitif noktadan bak, yani μ_L kısmının altında kalan alan!

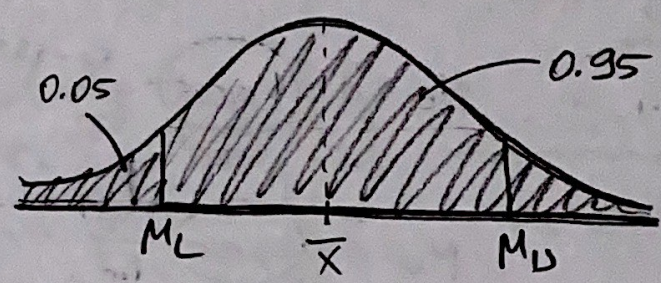
$$\mu_L = \bar{x} - t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$



$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow t_{0.05},$

$$\mu_L = 152.35 - t_{0.05} \times \frac{10.53}{\sqrt{10}} = 152.35 - 1.8331 \times \frac{10.53}{\sqrt{10}} \sim 146.26$$

$\mu > 146.26$



Paired Observations

Burada yaklaşımlar arasındaki farka da bakılır. Burada da mean vardır ($\bar{d}$) ve standard dev. (s) vardır.

X sample noktalarının bir koleksiyonu için μ_x için confidence interval:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Eğer gözlemler paired ise, her bir çiftin farklarının mean'i için confidence interval μ_d: $d = x_A - x_B$

$$\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

- B→A değişikliğiyle ilgileniyorsak yani bir öncekiyle sonraki arasındaki fark ile // bu uygundur
- Burada sadece bir popülasyonla uğraştığımızı unutmayın; bu, 2 popülasyonun meanleri arasındaki fark ile aynı şey değildir. Burada tek popülasyonun 2 yaklaşımı var!

EXAMPLE: 10 vehicles are tested for CO_2 emissions before (B) and after (A) an engine modification. Form a 95% confidence interval for the mean difference A-B and comment on the significance of the engine modification.

B	A	A-B=D
528	523	-5
479	475	-4
484	478	-6
517	511	-6
481	466	-15
493	482	-11
505	496	-9
494	482	-12
515	509	-6
513	499	-14

$m = -8.80 = \bar{d} \rightarrow \frac{1}{10} \cdot D$

$s = 3.97 = s_d$

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$\mu_L = \underset{-8.8}{\bar{d}} - \underset{2.2622}{t_{0.025}} \cdot \frac{s_d \rightarrow 3.97}{\sqrt{10}} \approx -11.1$

$\mu_U = \bar{d} + t_{0.025} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{10}} \approx -6.5$

$\nu = n-1 = 9$

$P(T < t_{0.025}) = tcdf(t_{0.025}, 9) = 0.975$

$\Rightarrow tcdf^{-1}(0.95) = t_{0.025}$ 2.2622

Çünkü burada $\alpha = 0.025$ yani $1-\alpha = 0.975$

$\therefore \mu_d = -8.8 \pm 2.24$

$\Rightarrow -11.6 < \mu_d < -6.0$

Bu B'nin A'dan ortalama old. anlamına gelir.