MAT3026 - Probability & Statistics

gelecekle ilgili fikir sahibi olma

Lecture 1 - Introduction, Counting and Probability

predictable - sonra olacak adımı bilme

Olasılık

Probability; Fizik bize evrenin mekanik ve deterministik olduğunu söylese de, süreçler genellikle çok karmaşıktır ve bu da rastgelelik kavramına yol açar.

Deterministik örneği; Bir sonraki Güneş tutulmasının ne zaman olacağını gözlemle bulabiliriz.

Non deterministik örneği; Yazı tura attığımızda ne geleceğini bilemeyiz.

H — head (arka) T — tail (ön)

Burada olasılık vardır. Arka gelme olasılığı da ön gelme olasılığı da $\frac{1}{2}$ (%50)'dir.

Rastgele diyoruz çünkü süreç çok karmaşık veya deterministik bir şekilde tanımlanması çok zor. Bu tür sistemlerin davranışını tahmin etmek için, olasılıkları gözlemlenen sonuçlara atamamız ve bu olasılıkları, süreci tanımlamak/modellemek ve gelecekteki sonuçları tahmin etmek için kullanmamız gerekir.

Bu şekilde aşağıdaki soruları ele alabiliriz:

- ✓ Bu sürecin sonuçları nasıl dağılım gösteriyor? Ortalama sonuç nedir?
- ✓ Bu 2 sonuç birbirinden bağımsız mı yoksa ortak bir nedenle mi bağlantılı?
- ✓ Bu bileşen sisteminin çalışma olasılığı nedir?

Statistics / Dersin son 4 haftasında, popülasyon örneklemesine (sampling) dayalı popülasyon parametreleri hakkında anlamlı çıkarımlar yapmamızı sağlayan istatistiksel araçlar oluşturacağız.

İstatistiksel araçlar ve prosedürlerle aşağıdaki soruları ele alabiliriz:

✓ Bu süreç ne kadar doğru ve kesin?

✓ Bu gözlem, süreç hakkındaki varsayımımızla tutarlı mı?

✓ Bu sürecin ortalama sonucu nedir ve bundan ne kadar eminiz?

"Olasılık ve istatistik bilgisi, verileri anlamamıza ve bilinçli mühendislik kararları vermemize olanak tanır."

∴ İstatistik sayesinde tahminimizin iyi mi kötü mü old. anlarız.

∴ İstatistiksel araçları kullanma sebebimiz "örnekleme" (sampling)'dir.

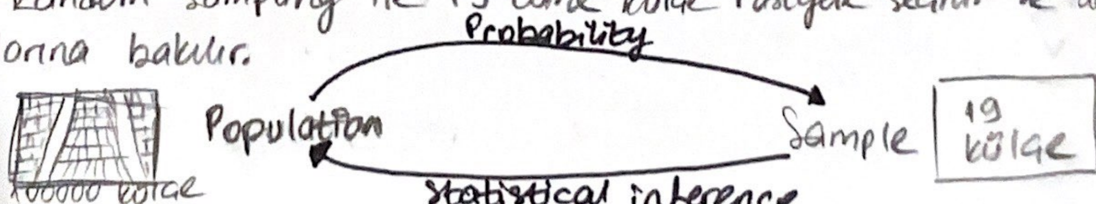
Proceslerdeki Çeşitlilik

Bir makinenin demir külçeleri ürettiği bir üretim süreci düşünün. Amaç, özdeş külçelerden oluşan bir popülasyon oluşturmaktır. Ancak, gerçekte böyle bir şey mümkün değildir. Çünkü külçeler homojen değildir. Bu da çeşitliliğe sebep olur.

Örneğin 100000 külçeden oluşan bir popülasyonumuz olsun. Burada tek tek hepsinin kütlesini hesaplayamayacağımız için içlerinden birkaç tanesini seçerek örnekleme (sampling) uygularız.

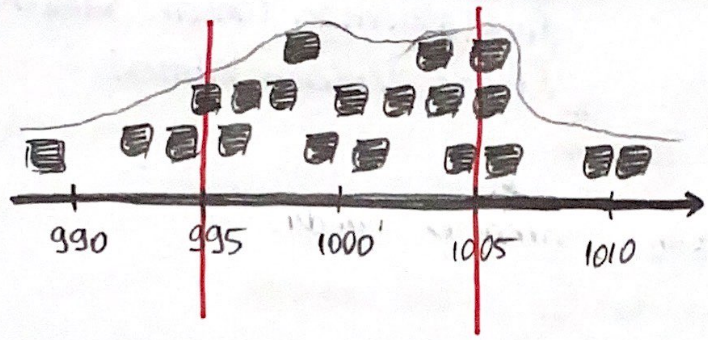
Sampling Populations

Random sampling ile 19 tane külçe rastgele seçilir ve ağırlıklarına bakılır.



Örnekten koşula bakmak → Statistical Inference

Örneğin ağırlığın >1010 olma ihtimali 0.01 olsun. Sonra istatistik modeliyle inceleme yapılır



Külçe ağırlığı (g)

Kabaca söylemek gerekirse rastgele seçilen herhangi bir külçenin 1000 ± 10 g aralığında olmasını bekleyebiliriz. Daha faydalı olarak, külçelerin çoğunun 1000±5 g aralığında olduğunu söyleyebiliriz

Daha sonra istatistiklerin bunu ifade etmek ve popülasyonun diğer özelliklerini çıkarmak için resmi bir yol sağlayacağını göreceğiz.

"Random" Processler → Temel Olasılık Teorisi

Zar attığımızda mümkün çıktılar (outcomes):

{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

$P(⚀) = \frac{1}{6}$

probability

$P(⚀) = P(⚁) = P(⚂) = P(⚃) = P(⚄) = P(⚅)$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

Burada zar homojen old. için her bir sayının (1-6) gelme olasılığı aynıdır. Buna equally likely denir. Eğer zarın ağırlık merkezi 1 tarafında olsaydı P(⚀), $\frac{1}{6}$'dan daha fazla olurdu. Çünkü ağırlık tarafına düşme ihtimali daha çoktur.

$\underbrace{P}_{\text{Probability}}(\text{event})$, $\underbrace{\text{event}}_{A} \subseteq \underbrace{\text{set of outcomes}}_{S}$

(Sample set)

Popülasyondan random sampling ile seçilenlerin kümesi

Tamamı

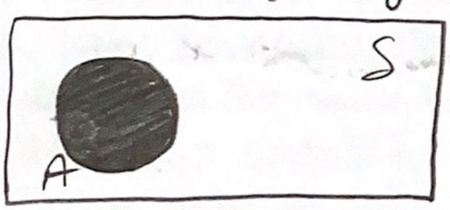
$P(S)=1$ ise içerisinde tüm ihtimaller vardır.

$P(\emptyset)=0$, boş olma durumudur. Bu da bir event'tir.

$$P(⚀ \text{ or } ⚁) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

★ Probability of an event $= \dfrac{\text{"number of outcomes of interest"}}{\text{"number of possible outcomes"}} = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

Genelde venn şeması kullanmak faydalıdır. Tabi burada her noktanın equally likely old. varsayıyoruz.



A : event

S : universal set of all possible outcomes

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, $\underbrace{P(S)=1}_{\text{kesinlik!}}$, $P(\emptyset)=0$

! Bu nedenle herhangi bir olasılık değeri ($P(A)$), şu aralık içinde yer almalıdır:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

✓ Bu bahsettiğimiz teoriktir. Peki bunu deneysel olarak nasıl ölçebiliriz? Çünkü teoride eşit olasılık vardır ama gerçekte öyle olmayabilir. Burada da şöyle bir çözüm bulunabilir: işlem birden fazla kez tekrar edebilir. → Experimental Interpretation

n → tekrar sayısı
A → event

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

n(A) → A event'inin gerçekleşme sayısı

n → deneme sayısı

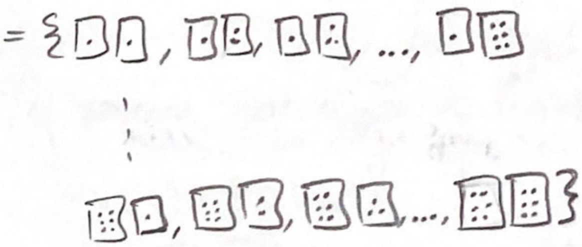
→ n, ∞'a giderken P(A) gerçek olasılığa yaklaşır

✓ Tabi ki bu işlemi sonsuza kadar uygulayamayız. Fakat ne kadar çok aynı işlemi uygularsak gerçek olasılığa o kadar yaklaşırız. Sf. 12'de bu gözüküyor. Buradaki $10^4, \ldots, 10^9$ kez deneme tabi ki insan tarafından yapılmıyor. Bu denemeyi bilgisayar yapıyor. Sf. 13'te C++ kodu var. Burada kaç tane 4 olduğunu sayıyor. Fakat bilgisayarlar deterministik old için bir sonraki step'i biliyor. Yani rand() fonksiyonu tamamen rastgele çalışmıyor. Buna da pseudorandom deniyor. Bu durum bu aşamada önemli değil. Fakat kriptografide önemli. Bu yüzden dış fiziksel randomness gerekiyor.

✓ Deney: 2 zar attığımızı düşünelim.

$n(S) = 6 \times 6 = 36$ (Tüm durum sayısı)

P(S) =



Tüm durumların ne olduğu

- 2 tane 4 gelme olasılığı nedir?

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

{4} {4}

- Herhangi bir sırayla 3 ve 4 gelme olasılığı nedir?

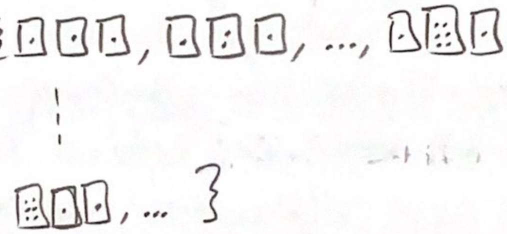
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$$

Event → 2 zarı atmak

{3} {4} {4} {3}

✓ Deney: 3 zar attığımızı düşünelim.

$n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$

P(S) = {  }

- Mutlaka 2 tane 4 gelme olasılığı nedir?

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{216}$$

{4} {4} {1,2,3,5,6}

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$$

{4} {1,2,3,5,6} {4}

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$$

{1,2,3,5,6} {4} {4}

$$\frac{5}{216}+\frac{5}{216}+\frac{5}{216}=\frac{15}{216}$$

- Hiç 4 olmama olasılığı kaçtır?

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

- 1 tane 4 olma olasılığı kaçtır?

$$\underset{\{4\}}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{\{1,2,3,5,6\}}{\frac{5}{6}}\cdot\underset{\{1,2,3,5,6\}}{\frac{5}{6}}=\frac{25}{216}$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$

$$\frac{25}{216}+\frac{25}{216}+\frac{25}{216}=\frac{75}{216}$$

- 3 tane 4 olma olasılığı kaçtır?

$$\underset{\{4\}}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{\{4\}}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{\{4\}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{216}$$

NOT: Random variable → Week 5

$S \to \mathbb{R}$ ise random variable olur

$w \in S \Rightarrow w =$ ⚀ ⚂ ⚁ ($1\ 3\ 2$)

$X(w) = X($⚀⚂⚁$) = 0$ olur. Çünkü sf. 15'teki örnekte W, 4 sayısını ifade ediyor ve burada hiç yok!

$$\underbrace{X(S) = \{0,1,2,3\}}_{\text{sf. 15'te } x=0,\ x=1,\ x=2\ x=3 \text{ yazdığı için}}$$

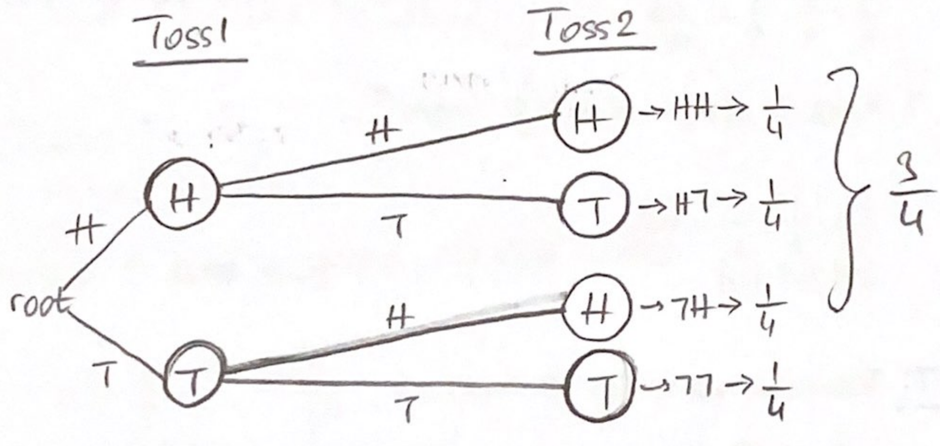
✓ Bir madeni para 2 kez atılıyor. En az 1 tura gelme olasılığı kaçtır?

Deney : Madeni parayı 2 kez atmak

Outcomes : $S = \{\underbrace{HH, HT, TH}_{\frac{3}{4}}, TT\}$
(Sample Set)

$\underset{\text{event}}{A} = \{HH, HT, TH\}$

Diğer bir çözüm yolu da tree diagram'dır.



The Multiplication Rule

Bir işlem n_1 yolla yapılabiliyorsa ve bu yolların her biri için n_2 yolla 2. işlem yapılıyorsa, o zaman 2 işlem $n_1 \times n_2$ yolla yapılabilir.

ÖRNEK: Bir zar ve bir paranın atılmasıyla elde edilen outcome sayısı kaçtır?

n_1 : Zarın outcome sayısı → 6
n_2 : Paranın 〃 〃 → 2

$\left.\right\}$ $n_1 \times n_2 = 12$

✓ Eğer zardaki her nokta score 1'e, Tail 0'a ve Head 1'e sahipse ve zar ve madeni para için puanlar toplanırsa, toplamın 3'ten büyük olma ihtimali nedir?

$n(S) = 12$

$S = \{1H, 2H, 3H, 4H, 5H, 6H,$
$1T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T\}$ $\Big\} \frac{7}{12}$

! Generalized Multiplication kuralı genelleştirilebilir ve k operasyon için toplam yol sayısı (outcomes) $= n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ dır.

✓ Bir kilit 3 basamak üzerinde 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 rakamlarını kullanır. Kaç tane olası kod vardır? (Aynı sayı kullanılabilir)

$\underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} = 1000$

→ Sıralama önemlidir
Tekrarlar sayılır

Permütasyon : Sıranın sayıldığı düzenlemelerdir.

Tekrarlar Sayılır

n elemandan k eleman seçilecekse n^k permütasyon vardır.

Tekrarlar Sayılmaz

n elemanda n! permütasyon vardır. k tanesi seçilecekse

$_nP_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ perm. dur.

Kombinasyon : Sıranın sayılmadığı düzenlemelerdir.

Tekrarlar Sayılmaz

n eleman varsa 1 kombinasyon vardır.
k tanesi seçilirse

$_nC_k = \dfrac{_nP_k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ komb. oluşur.

Tekrarlar Sayılır

X

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ \ldots\ \cdot 1}\ k \text{ terms}$$

✓ Sınıfta 20 öğrenci bulunuyor. Başkan, başkan yard. ve yard. seçilecek. Bu durumda kaç farklı seçim yapılabilir?

$${}_{20}P_3 = \frac{20!}{(20-3)!} = 20\times19\times18$$

Kişiler sırayla seçiliyor ve bir seçilen birdaha seçilemiyor. Bu yüzden Perm > Tekrarlar sayılmaz yolunu kullandık.

✓ Seçilme sırası önemsenmeden 20 kişiden 3 kişilik bir komite oluşturmak istersek kaç farklı seçim yapabiliriz?

$${}_{20}C_3 = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!} = \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$$

Sıra önemsiz ve seçilen tekrar seçilmiyor. Bu yüzden comb > Tekrarlar Sayılmaz yolunu kullandık.

Neden bir öncekini 3!'e böldük?

Çünkü burada tekrar eden durumlar vardır. Sıra önemsiz old. için bunları atmamız gerekir. Örnekte 3 kişi seçiyorduk. Tekrar sayısına bakarsak:

$$\left.\begin{matrix} A\ B\ C \\ A\ C\ B \\ B\ A\ C \\ B\ C\ A \\ C\ A\ B \\ C\ B\ A \end{matrix}\right\}$$

6 tane tekrar vardır. Bu yüzden 3!'e böleriz.

✓ Consider that you have bought 6 batteries and charged only 4 of them, but you have forgotten which are charged! If, in a hurry, you now randomly select 4 batteries to use in a torch. What is the probability that you have selected at least 1 uncharged battery?

$$\frac{\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}\cdot\underbrace{\binom{2}{1}}_{2}+\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}\cdot\underbrace{\binom{2}{2}}_{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{14}{15}$$

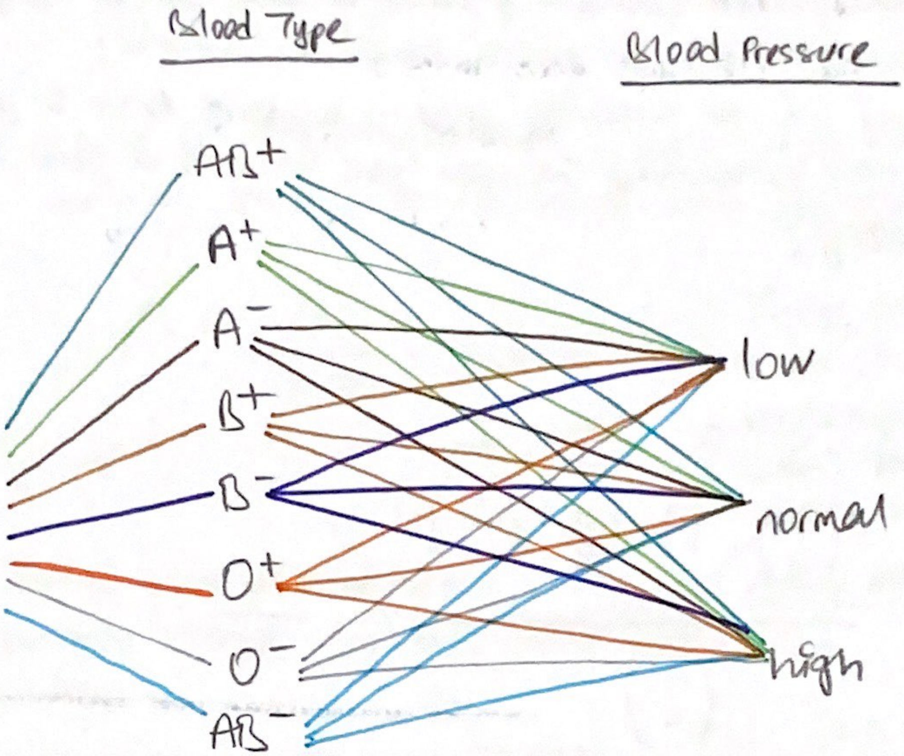
EXAMPLES

- In a medical study, patients are classified in 8 ways according to whether they have blood type AB^+, AB^-, A^+, A^-, B^+, B^-, O^+ or O^-, and also according to whether their blood pressure is low, normal, or high. Find the number of ways in which a patient can be classified.

$$n(S) = \underbrace{8}_{\text{blood type}} \times \underbrace{3}_{\text{blood pressure}} = 24$$

$S = \{(\text{low}, AB^+), (\text{low}, A^+), \ldots\}$

✓ Şimdi de tree haline bakalım :



$$8 \times 3 = 24$$

- In how many different ways can a true-false test consisting of 9 questions be answered ?

$$\underset{\{T, F\}}{\_\_} \ \underset{\{T, F\}}{\_\_} \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \underset{\{T, F\}}{\_\_}$$

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{9 \text{ tane}} = \underbrace{2^9}_{512} = n(S)$$

• In how many ways can 4 boys and 5 girls sit in a row if the boys and girls must alternate?

değişimli (E-K-E-K-E)

"Kız" ile başlamak zorunda çünkü E ile başlarsa 2 K yan yana gelir.

K E K E K E K E K

K için → 5!
E için → 4!
> 5!·4! (kendi aralarında yer değiştirebilselerdi 2 ile çarpardık!)

• How many distinct permutations can be made from the letters of the word INFINITY?

! Kombinasyonda bölme yapma sebebimiz tekrardan kurtulmaktı. Aslında burada da aynı mantık var. Normalde bu kelimenin harflerinden 8! permütasyon yazılabilir. Fakat bazı harfler tekrar ettiği için bu durumları elememiz gerekiyor. Buradan;

$$\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 3360$$

- Find the errors in each of the following statements:

(a) The probabilities that an automobile salesperson will sell 0,1,2 or 3 cars on any given day in February are, respectively 0.19, 0.38, 0.29 and 0.15.

$\therefore$ Tüm durum 1 olmalıdır! ($P(S)=1$)

$0.19+0.38+0.29+0.15 = 1{,}01 \rightarrow$ bu olamaz

(b) The probability that it will rain tomorrow is 0.40, and the probability that it will $\boxed{\text{not rain tomorrow}}$ is 0.52.

Bunun yerine snow olsaydı olurdu. Çünkü $\boxed{R/R'}$ kesişim olabilir! Veya farklı durumlar olabilir!

$\therefore$ Bir şeyin olma olasılığı + olmama olasılığı 1'dir. ($P(S)=1$)

$0.40+0.52=0.92 \rightarrow$ olamaz.

(c) The probabilities that a printer will make 0,1,2,3 or 4 or more mistakes in setting a document are, respectively, 0.19, 0.34, -0.25, 0.43 and 0.29.

var

$\therefore$ Olasılık negatif olamaz.

(d) On a single draw from a deck of playing cards, the probability of selecting heart is 1/4, the probability of selecting a black card is 1/2, and the prob. of selecting both a heart and black card is 1/8.

$\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ve siyah heart kart yok!

→ 0'dır. Çünkü en başta tek kart çekileceği söylenmiş!

- A pair of fair dice is tossed. Find the probability of getting

(a) a total of 8;

$S = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$, $n(S)=36$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

(b) at most a total of 5;

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$
, $n(S)=36$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+ \cdots +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

- Suppose the manufacturer's specifications for the length of a certain type of computer cable are 2000 ± 10 milimeters. In this industry, it is known that small cable is just as likely to be defective (not meeting spec) as large cable. That is, the prob. of randomly producing a cable with length exceeding 2010 milimeters is equal to the prob. of producing a cable with length smaller than 1900 milimeters. The prob. that the production procedure meets specifications is known to be 0.99.

(a) What is the prob. that a cable selected randomly is too large?

$P(\text{large}) = 0.005.$

$1990 \le$ length of the cable ≤ 2010

Small — Meet — Large

$1 - 0.99 = 0.01 \div 2 = 0.005$ | $P(S)=1$ old. için

$$P(S) = P(\text{Small}) + P(\text{Meet}) + P(\text{Large})$$

$$\underbrace{1}_{} = x + \underbrace{0.99}_{} + x$$

$x = 0.005$

(b) What is the prob. that a randomly selected cable is larger than 1990 millimeters?

$$P(\text{Meet}) + P(\text{Large}) = 0.995$$

$$\underbrace{0.99}_{} \quad \underbrace{0.005}_{}$$

Lecture 2 - Rules of Probability

- A vault can be opened by pressing 4 out of 16 buttons in the correct order. Once a button is pressed, it cannot be pressed again. ↳ permütasyon

  How many different codes can this vault value?

$$_{16}P_{4} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 = \frac{16!}{(16-4)!} = 16 \times 15 \times 14 \times 13$$

- A vault can be opened by pressing 4 out of 16 buttons. Once a button is pressed, it cannot be pressed again. Order is not important. How many different codes can this vault have?
  kasa
  ↳ kombinasyon

$$_{16}C_{4} = \frac{16!}{4! \cdot (16-4)!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

- A vault can be opened by pressing 4 out of 16 buttons in the correct order. A button press can be repeated. How many different codes can this vault have?

permütasyon

$$\underline{16} \times \underline{16} \times \underline{16} \times \underline{16} = 16^4 = 65536$$

- You have time to try 1000 different permutations (codes) before the police arrive! What is the probability that you will open the vault?

$$P(A) = \frac{1000}{65536} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

→ istenen durum

→ Tüm durum

A: 1000 deneme sonra kasanın açılma olasılığı

Probability of an Event

✓ Event, bir olasılık atayabileceğimiz bir dizi outcome'dır.

✓ Olasılık, bir event'in meydana gelme olasılığının ölçüsüdür.

✓ Bir S örnek uzayı ve A event'i verildiğinde ve her örnek noktanın düşme olasılığı aynı ise, şunu söyleyebiliriz:

↓ equally likely

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

✓ Olasılığın sınırları ise şöyledir:

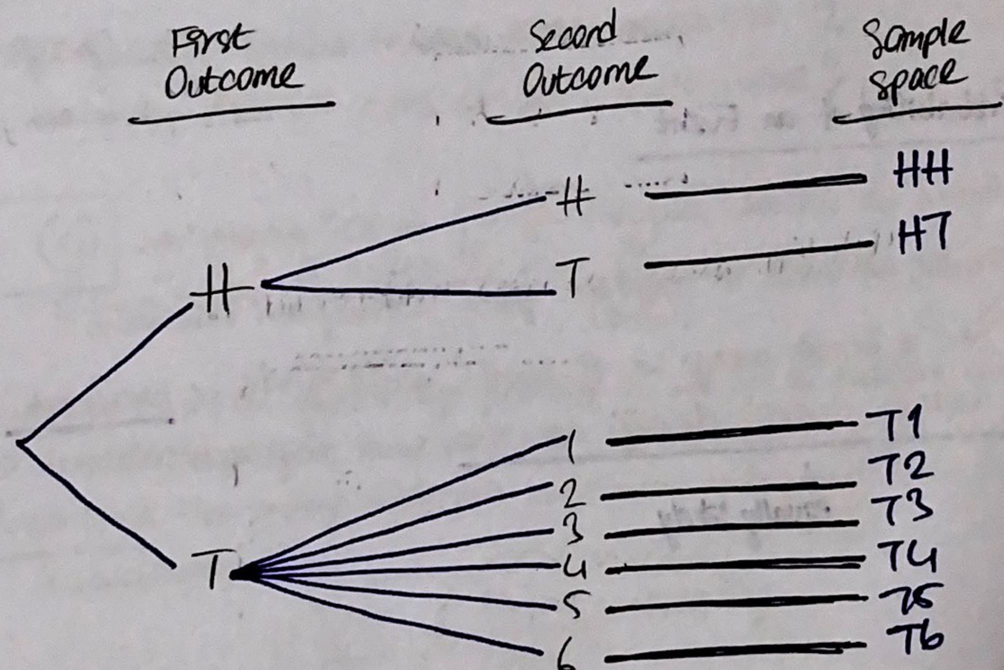
$$P(S)=1,\ P(\emptyset)=0,\ \text{ve buradan}\ 0 \le P(A) \le 1$$

bir event'in gerçekleşme olasılığı

✓ Eğer örnek uzaydaki sample (örnek) noktaları eşit olasılığa sahip değilse, olasılıklarını nokta nokta hesaplamalıyız.

ÖRNEK: Deney yazı tura atılmasını ve tura gelirse paranın, yazı gelirse zarın atılmasını içerir. Tüm olası örnek noktaları (sonuçları) ve olasılıklarını listeleyin.

Tree ile gösterelim:



Sample space (S) = {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6} = 8 öğe

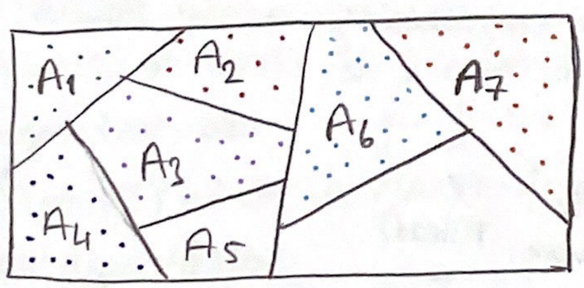
- $P(HH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(HT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(T1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
- $P(T2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
- $P(T3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
- $P(T4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
- $P(T5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
- $P(T6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Toplam olasılık (P(S)) $= \frac{12}{12} = 1$

ADDITIVE RULES

Eğer $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eventleri mutually exclusive ise (kesişimleri yok, $\emptyset$) bu eventlerin birleşimlerinin gerçekleşme olasılığı, eventlerin gerçekleşme olasılıklarının toplamıdır

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

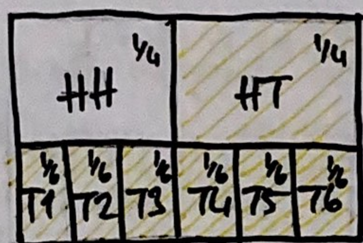


- In the previous example, what is the prob. of obtaining a Tail?

Sample Space (S) = $\{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$

Event set (A) = $\{HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\} = \frac{3}{4}$

Tüm eventler disjoint old. için hepsini toplayıp bulduk!



$P(A) = P(\{HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\})$

$P(HT \cup T1 \cup T2 \cup T3 \cup T4 \cup T5 \cup T6)$

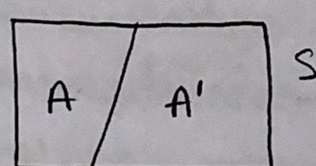
$P(HT) + P(T1) + P(T2) + P(T3) + P(T4) +$
$P(T5) + P(T6) = \frac{3}{4} = 0.75$

THEOREM

A ve A' complementary (tamamlayıcı) eventler ise, buradan

$\boxed{P(A) + P(A') = 1}$ olur.

$\boxed{P(S) = 1}$

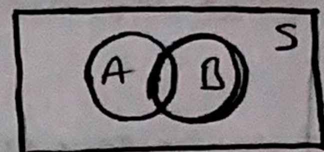


Önceki soruyu bu mantıkla çözersek T olma olasılığı ve H olma olasılığı complementary eventler oldukları için:

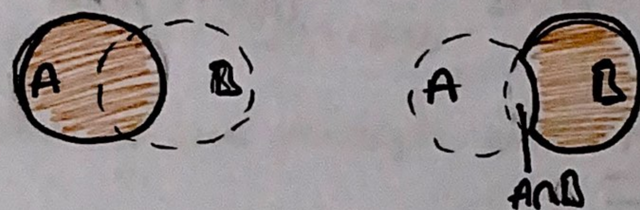
$P(Tail) = \underbrace{1}_{\text{Tüm durum}} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{P(Head)} = \frac{3}{4}$

THEOREM

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



! Eğer A ve B disjoint setler ise kesişimleri $\emptyset$ olacağından $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olacaktır.



ÖRNEK:

An engineering graduate has job interviews with Company A and Company B. Experience tells us that there is prob. of 0.8 of being offered by a job by Company A, and a prob. of 0.6 for Company B, and a prob. of 0.5 of being offered a job by both companies. What is the prob. that the graduate will be offered a job?

↓

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.5 = \underline{0.9}$$

- Peki bu eventler dependent mıdır, independent mıdır?

Eğer $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, bu 2 event dependent olur. Eşitse independent olur.

Sonuçta $P(A) \times P(B) = 0.48$ ve $P(A \cap B) = 0.5$ olduğu için bu 2 event dependent'tır.

∴ Burada eventler dependent'tır.

DE MORGAN'S LAWS

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

THEOREM

- 3 event A, B, C için

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Bu eventler disjoint ise; $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ olur.

INDEPENDENCE

A ve B eventleri $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ koşulunu sağlamaları halinde independent olurlar.

Örnek: Consider throwing 2 dice What is the probability of obtaining a blue 1 and a red 4.

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Bu 2 zarın atılmasıyla elde edilen çıktının birbirlerine bir etkisi yoktur! Bu yüzden independent!

∴ Yani burada $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ olur. Çünkü bu 2 event independent'tır.

ÖRNEK: Consider 2 events A and B (independent). If the prob. of event A is 0.2, and the prob. of event B is 0.3. What is the prob. of $A \cap B$?

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.2 \times 0.3 = \underline{0.06}$$

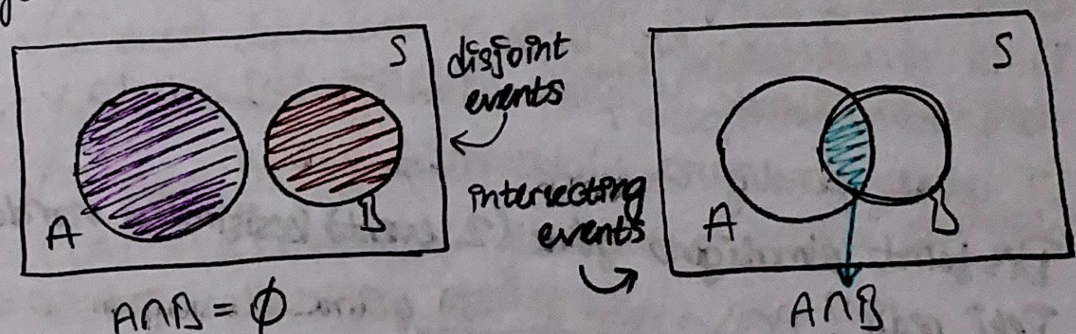
❗ Eğer independent olduklarını bilmeseydik herhangi bir şey söyleyemezdik.

❗ Independent'tan kastımız A olayının gerçekleşmiş olup olmadığını bilsek, dahi B olayının bundan etkilenmemesidir.
veya A'ya herhangi bir şey eklesek

★ Mesela 2 örnek öncesinde blue 1 değil de blue 2 zar düşünseydik bu red 4'ü etkilemeyecekti. Aslında independent'tan kastımız tam olarak budur.

DISJOINT EVENTLER (AYRIK OLAYLAR) VE INDEPENDENCE HAKKINDA NOT

Eğer 2 event disjoint ise, o zaman tamamen dependent'tırlar; yani bir event meydana gelirse diğeri meydana gelmiş olamaz.



Experiment | Toss a coin.

A: The outcome is a Head
B: The outcome is a Tail
} Dept / Indept. dept old. için disjoint
Disjoint / Not disjoint

Çünkü Tail olma olasılığını bulduğumuzda Head olma olasılığı otomatikmen 0 olacaktır. Yani bir event diğerinin değerini etkilemiş olur. $S=\{H,T\}$

$\underbrace{P(A)=\frac{1}{2} \quad P(B)=0}$

Head ise Tail değildir!

Experiment | Toss a coin 2 times.

A: The outcome is a Head (for the 1st toss)
B: The outcome is a Tail (for the 2nd toss)
} Dept / Indept
Disjoint / Not disjoint

Çünkü burada Head olması Tail olmasını etkilemez.
Aynı anda hem Head hem de Tail olabilir.
Çünkü bu 2'si ayrı zamanlarda gerçekleşen eventlerdir. $S=\{HH, HT, TH, TT\}$
para atılış ilkinde H gelme olasılığının 2. atışta T gelme olasılığına hiçbir etkisi yoktur.
Disjoint olmadığına göre (2 event) kesişimleri vardır.
Peki nedir? $A \cap B \rightarrow$ Head ve Tail gelme olasılığıdır o da

Arka Sayfada →