1 Блок диаграммы. Вершинная функция.

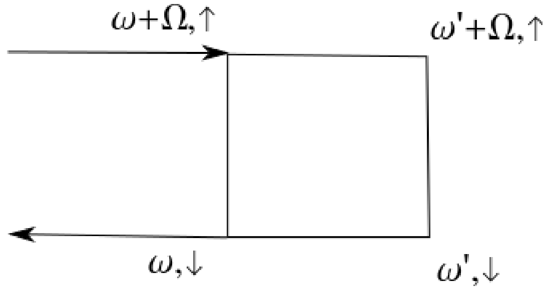

Рис. 1: Блок лестничной диаграммы

Рассматриваем лестничные ряды, составленные из изображенных на рисунке 1 блоков. В статьях по дуальной технике в узлах диаграмм стоят вершинные части примесной задачи, а линиями служат дуальные функции Грина. Нам будет удобнее в узлах разместить неприводимые части функций Грина, а линии, соответственно, домножить на g^{-2}.

Неприводимая двухчастичная функция Грина

$$\chi^{\sigma_1\sigma_2}_{\sigma_3\sigma_4}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = \left\langle \mathrm{T}\hat{c}_1\hat{c}_2\hat{c}_3^\dagger\hat{c}_4^\dagger \right\rangle \tag{1}$$

Определим новые временные переменные, соответсвующие порядку операторов на рисунке 2

$$\begin{aligned} \tau_3 &\to 0 \\ \tau_1 &\to \tau_1 \\ \tau_4 &\to T \\ \tau_2 &\to \tau_2 - T \end{aligned} \tag{2}$$

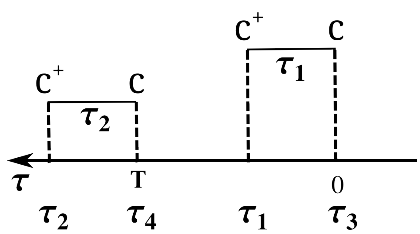

Рис. 2:

Линия, в нулевом приближении, равна

$$\begin{aligned} &\tilde{G}_{\omega k} = g_\omega^{-2}\tilde{G}^{(0)}_{\omega k} = -(g_\omega - \epsilon_k^{-1})^{-1}, \text{ где} \\ &g_\omega = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \left(-\left\langle c_\uparrow^\dagger(\tau)c_\uparrow(0)\right\rangle\right) e^{i\omega\tau} = \frac{-i\omega}{\omega^2+\mu^2} \\ &\epsilon_k = -2t(\cos k_x + \cos k_y). \end{aligned} \tag{3}$$

Лестница в целом характеризуется волновым вектором K и частотой Ω. “Внутренние” индексы будем использовать во временно́м представлении.

Таким образом, нам понадобятся величины

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K\omega} &= -\int_k \tilde{G}_{\omega k}\tilde{G}_{\substack{\Omega+\omega\\K+k}} \\ \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K\tau} &= \beta^{-1}\sum_\omega \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K\omega} e^{-i\omega\tau}, \end{aligned} \tag{4}$$

где суммирование $\sum_\omega$ проводится по мацубаровским частотам $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, n \in \mathbb{Z}$ и $\int_k \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}^2k$.

$$\chi_{\underset{\tau\tilde{\tau}'}{\Omega}} = \int_0^\beta g^{(2irr)}_{t+\tau\downarrow,t\uparrow,\tau'\uparrow,0\downarrow} e^{i\Omega t} dt. \tag{5}$$

Обсуждаемый блок представляет собой свертку

$$\int_0^\beta \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K \tau-\tau_1} \chi_{\underset{\tau_1\tau'}{\Omega}} d\tau_1 \tag{6}$$

Легко заметить что $\tilde{G}_{\omega k} \xrightarrow[\omega\to\pm\infty]{} \epsilon_k$. Поэтому определим $\tilde{X}^{(0)'}$

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(0)'}_{\Omega K\tau} &= \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K\tau} - \beta^{-1} \int_k \sum_\omega \epsilon_k \epsilon_{k+K} e^{-i\omega\tau} \\ &= \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K\tau} + \pi\ t\ \epsilon_K\ \delta(\tau) \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом мы получим сходящуюся сумму по ω.

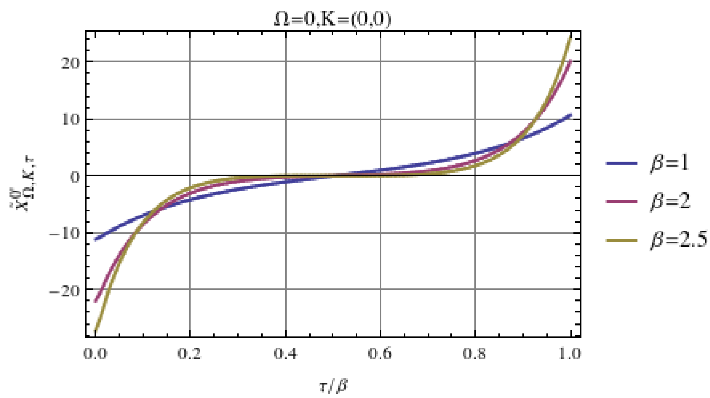

Рис. 3:

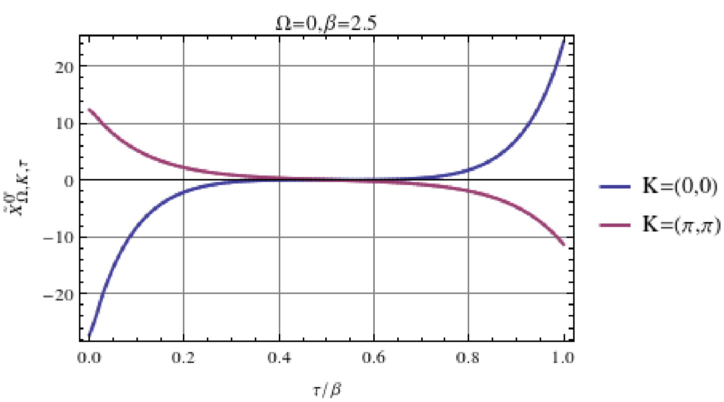

Рис. 4:

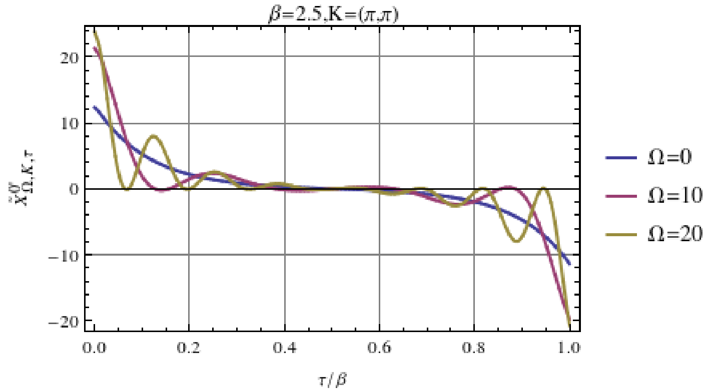

Рис. 5:

2 Расчет диаграммы

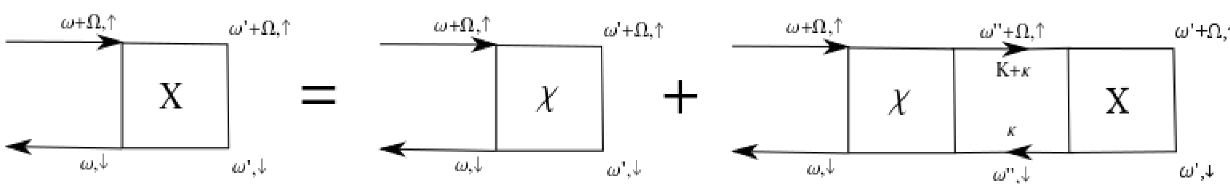

Рис. 6:

$$X^{\alpha}_{\substack{\Omega K\\ \omega\omega'}} = \chi_{\substack{\Omega\\ \omega\omega'}} + \beta^{-1}\sum_{\omega''}\chi^{\alpha}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} \overbrace{\left(\int_k \tilde{G}_{\substack{\Omega+\omega''\\ K+k}}\tilde{G}_{\substack{\omega''\\ k}}\right)}^{-X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}}} X^{\alpha}_{\substack{\Omega K\\ \omega''\omega'}} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \chi^{d}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} &= \chi^{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} + \chi^{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} \\ \chi^{m}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} &= \chi^{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} - \chi^{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow}_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} \end{aligned} \tag{9}$$

Делаем Фурье преобразования

$$\begin{aligned} X_{\substack{\Omega K\\ \tau\tau'}} &= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \beta^{-3}\sum_{\omega\omega'\omega''}\chi_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} X_{\substack{\Omega K\\ \omega''\omega'}} e^{-i\omega\tau}e^{-i\omega'\tau'} \\ &= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \beta^{-1}\sum_{\omega''}\chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} X_{\substack{\Omega K\\ \omega''\tau'}} \\ &= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \beta^{-1}\sum_{\omega''}\chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} \left(\int_{\tau''} X_{\substack{\Omega K\\ \tau''\tau'}} e^{i\omega''\tau''}\right) \\ &= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \int_{\tau''}\left(\beta^{-1}\sum_{\omega''}\chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} e^{i\omega''\tau''}\right) X_{\substack{\Omega K\\ \tau''\tau'}} \\ \beta^{-1}\sum_{\omega''}\chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} e^{i\omega''\tau''} &= \beta^{-1}\sum_{\omega''}\left(\int_{\tilde{\tau}''}\chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tilde{\tau}''}} e^{i\omega''\tilde{\tau}''}\right) X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} e^{i\omega''\tau''} = \int_{\tilde{\tau}''}\chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tilde{\tau}''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tilde{\tau}''-\tau''}} \end{aligned} \tag{10}$$

Для вычисления $X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tilde{\tau}''-\tau''}}$ понадобятся граничные условия периодичности

$$X_{\beta+\tau} = -X_{\tau} = -X_{-\tau} \tag{11}$$

Получаем интегральное уравнение

$$X_{\substack{\Omega K\\ \tau\tau'}} + \int_0^\beta \mathrm{d}\tau'' \underbrace{\left(\int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tilde{\tau}''}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tilde{\tau}''-\tau''}}\right)}_{A_{\tau\tau''}} X_{\substack{\Omega K\\ \tau''\tau'}} = \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} \tag{12}$$

Образуем сетку $N \times N$ по τ-переменным: $\tau_i = i\Delta\tau, i \in \overline{0, N}$, где $\Delta\tau = \frac{\beta}{N}$, тогда интегральное уравнение можно будет заменить на систему $(N+1)^2$ линейных уравнений с $(N+1)^2$ неизвестными

$$X_{ij} + \sum_{k=0}^{N} a_{ik} X_{kj} = b_{ij} \tag{13}$$

где $X_{ij} = X_{\substack{\Omega K\\ \tau_i\tau_j}}, a_{ik} = \int_\tau \chi_{\substack{\Omega\\ \tau_i\tau}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tau-\tau_k}}, b_{ij} = \chi_{\substack{\Omega\\ \tau_i\tau_j}}$

3 Расчет восприимчивости

$$X^\alpha_{\Omega K} = \int_\tau X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \tau}} + \int_{\tau\tau'} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \tau}} X^\alpha_{\substack{\Omega K\\ \tau\tau'}} X^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \tau'}} \tag{14}$$