# 1 Блок диаграммы. Вершинная функция.

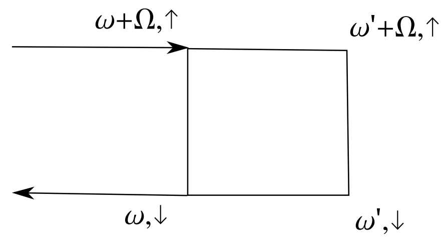


Рис. 1: Блок лестничной диаграммы

Рассматриваем лестничные ряды, составленные из изображенных на рисунке 1 блоков. В статьях по дуальной технике в узлах диаграмм стоят вершинные части примесной задачи, а линиями служат дуальные функции Грина. Нам будет удобнее в узлах разместить неприводимые части функций Грина, а линии, соответственно, домножить на $g^{-2}$.

Таким образом, "четырехугольный" узел равен

$$\begin{aligned} g^{(2irr)}_{1234} = & \left\langle c^\dagger_\downarrow(t+\tau) c_\uparrow(t) c^\dagger_\uparrow(\tau') c_\downarrow(0) \right\rangle \\ & \cancel{- \left\langle c^\dagger_\downarrow(t+\tau) c_\uparrow(t) \right\rangle \left\langle c^\dagger_\uparrow(\tau') c_\downarrow(0) \right\rangle} \\ & + \left\langle c^\dagger_\downarrow(t+\tau) c_\downarrow(0) \right\rangle \left\langle c^\dagger_\uparrow(\tau') c_\uparrow(t) \right\rangle \end{aligned} \tag{1}$$

Линия, в нулевом приближении, равна

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_{\omega k} = g_\omega^{-2} \tilde{G}^{(0)}_{\omega k} = (g_\omega - \epsilon_k^{-1})^{-1}, \text{ где} \\ & g_\omega = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \left\langle c^\dagger_\uparrow(\tau) c_\uparrow(0) \right\rangle e^{i\omega\tau} = \frac{i\omega}{\omega^2 + \mu^2} \\ & \epsilon_k = 2t(\cos k_x + \cos k_y). \end{aligned} \tag{2}$$

Лестница в целом характеризуется волновым вектором $K$ и частотой $\Omega$. "Внутренние" индексы будем использовать во временно́м представлении.

Таким образом, нам понадобятся величины

$$X^{(0)}_{\Omega K \tau} = \beta^{-1} \iint_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}^2 k \sum_\omega \tilde{G}_{\omega k} \tilde{G}_{\substack{\Omega+\omega \\ K+k}} e^{-i\omega\tau}, \tag{3}$$

где суммирование идёт по мацубаровским частотам $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, n \in \mathbb{Z}$, а интегрирование по 1-ой зоне Бриллюэна.

$$g^{(2irr)}_{\Omega\tau\tau'} = \int_0^\beta g^{(2irr)}_{t+\tau\downarrow, t\uparrow, \tau'\uparrow, 0\downarrow} e^{i\Omega t} dt. \tag{4}$$

Обсуждаемый блок представляет собой свертку

$$\int_0^\beta X^{(0)}_{\Omega K \tau-\tau_1} g^{(2irr)}_{\Omega \tau_1 \tau'} d\tau_1 \tag{5}$$

**Задача 1**. Хочется посмотреть на 3D график $g^{(2irr)}_{\Omega\tau\tau'}$ при $\Omega = 0$, и на график $X^{(0)}_{\Omega K\tau}$ при $\Omega = 0$ для нескольких характерных $K$.

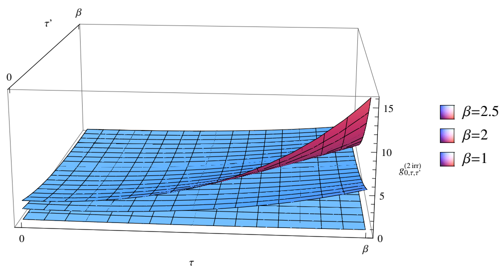


Рис. 2: 3D график $g^{(2irr)}_{0\tau\tau'}$

Легко заметить что $\tilde{G}_{\omega k} \xrightarrow[\omega\to\pm\infty]{} -\epsilon_k$. Поэтому определим $\tilde{X}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(0)}_{\Omega K\tau} &= X^{(0)}_{\Omega K\tau} - \beta^{-1} \iint_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}^2 k \sum_{\omega} \epsilon_k \epsilon_{k+K} e^{-i\omega\tau} \\ &= X^{(0)}_{\Omega K\tau} - 4\pi^2 t \frac{\epsilon_K}{\beta} \delta(\tau) \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом мы получим сходящуюся сумму по $\omega$.

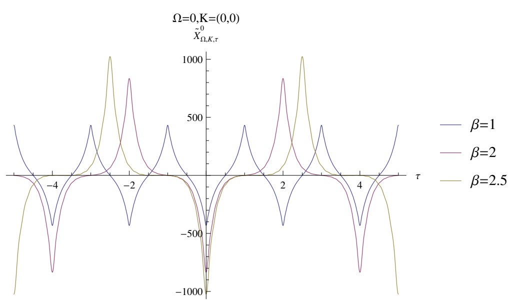


Рис. 3:

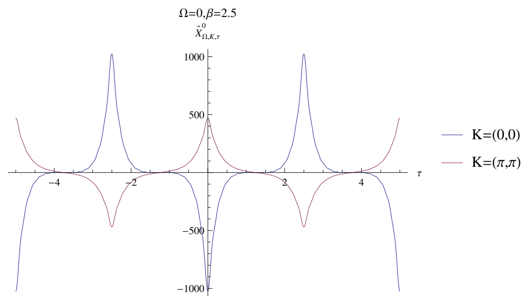


Рис. 4:

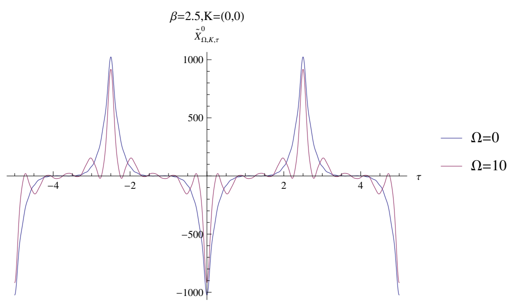


Рис. 5:

## 2 Расчет диаграммы

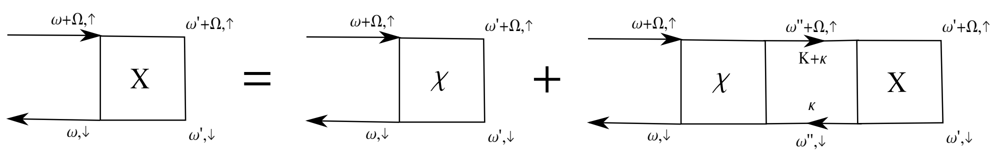


Рис. 6:

$$X_{\substack{\Omega K\\ \omega\omega'}} = \chi_{\substack{\Omega\\ \omega\omega'}} + \frac{1}{\beta}\sum_{\omega''} \chi_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} \overbrace{\left(\int_k \tilde{G}_{\substack{\Omega+\omega''\\ K+k}} \tilde{G}_{\substack{\omega''\\ k}}\right)}^{-\chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}}} X_{\substack{\Omega K\\ \omega''\omega'}} \tag{7}$$

Делаем Фурье преобразования

$$
\begin{aligned}
X_{\substack{\Omega K\\ \tau\tau'}} &= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \sum_{\omega\omega'\omega''} \chi_{\substack{\Omega\\ \omega\omega''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} X_{\substack{\Omega K\\ \omega''\omega'}} e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} \\
&= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \sum_{\omega''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} X_{\substack{\Omega K\\ \omega''\tau'}} \\
&= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \sum_{\omega''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} \left( \int_{\tau''} X_{\substack{\Omega K\\ \tau''\tau'}} e^{i\omega''\tau''} \right) \\
&= \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} - \int_{\tau''} \left( \sum_{\omega''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} e^{i\omega''\tau''} \right) X_{\substack{\Omega K\\ \tau''\tau'}}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{\omega''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\omega''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} e^{i\omega''\tau''} = \sum_{\omega''} \left( \int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tilde{\tau}''}} e^{i\omega''\tilde{\tau}''} \right) \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ \omega''}} e^{i\omega''\tau''} = \int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tilde{\tau}''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tilde{\tau}''-\tau''}} \tag{8}
$$

Получаем интегральное уравнение

$$
X_{\substack{\Omega K\\ \tau\tau'}} + \int_0^\beta \mathrm{d}\tau'' \underbrace{\left( \int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tilde{\tau}''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tilde{\tau}''-\tau''}} \right)}_{A_{\tau\tau''}} X_{\substack{\Omega K\\ \tau''\tau'}} = \chi_{\substack{\Omega\\ \tau\tau'}} \tag{9}
$$

Образуем сетку $N \times N$ по $\tau$-переменным: $\tau_i = i\Delta\tau, i \in \overline{0, N}$, где $\Delta\tau = \frac{\beta}{N}$, тогда интегральное уравнение можно будет заменить на систему $(N+1)^2$ линейных уравнений с $(N+1)^2$ неизвестными

$$
X_{ij} + \sum_{k=0}^{N} a_{ik} X_{kj} = b_{ij} \tag{10}
$$

где $X_{ij} = X_{\substack{\Omega K\\ \tau_i\tau_j}}, a_{ik} = \int_0^\beta \mathrm{d}\tilde{\tau}'' \chi_{\substack{\Omega\\ \tau_i\tilde{\tau}''}} \chi^{(0)}_{\substack{\Omega K\\ -\tilde{\tau}''-\tau_k}}, b_{ij} = \chi_{\substack{\Omega\\ \tau_i\tau_j}}$