

1 Блок диаграммы. Вершинная функция.

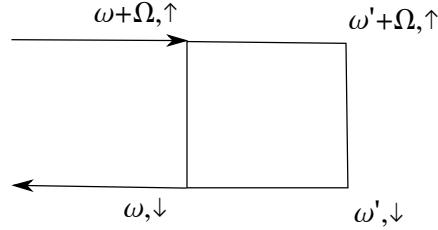


Рис. 1: Блок лестничной диаграммы

Рассматриваем лестничные ряды, составленные из изображенных на рисунке 1 блоков. В статьях по дуальной технике в узлах диаграмм стоят вершинные части примесной задачи, а линиями служат дуальные функции Грина. Нам будет удобнее в узлах разместить неприводимые части функций Грина, а линии, соответственно, домножить на g^{-2} .

Таким образом, “четырехугольный” узел равен

$$\begin{aligned} g_{1234}^{(2irr)} = & \left\langle c_{\downarrow}^{\dagger}(t+\tau)c_{\uparrow}(t)c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau')c_{\downarrow}(0) \right\rangle \\ & - \overline{\left\langle c_{\downarrow}^{\dagger}(t+\tau)c_{\uparrow}(t) \right\rangle} \overline{\left\langle c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau')c_{\downarrow}(0) \right\rangle} \\ & + \overline{\left\langle c_{\downarrow}^{\dagger}(t+\tau)c_{\downarrow}(0) \right\rangle} \overline{\left\langle c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau')c_{\uparrow}(t) \right\rangle} \end{aligned} \quad (1)$$

Линия, в нулевом приближении, равна

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\omega k} &= g_{\omega}^{-2} \tilde{G}_{\omega k}^{(0)} = (g_{\omega} - \epsilon_k^{-1})^{-1}, \text{ где} \\ g_{\omega} &= \int_0^{\beta} d\tau \left\langle c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau)c_{\uparrow}(0) \right\rangle e^{i\omega\tau} = \frac{i\omega}{\omega^2 + \mu^2} \\ \epsilon_k &= 2t(\cos k_x + \cos k_y). \end{aligned} \quad (2)$$

Лестница в целом характеризуется волновым вектором K и частотой Ω . “Внутренние” индексы будем использовать во временному представлении.

Таким образом, нам понадобятся величины

$$X_{\Omega K\tau}^{(0)} = \beta^{-1} \iint_{-\pi}^{\pi} d^2k \sum_{\omega} \tilde{G}_{\omega k} \tilde{G}_{K+k}^{(0)} e^{-i\omega\tau}, \quad (3)$$

где суммирование идёт по мацубаровским частотам $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$, $n \in \mathbb{Z}$, а интегрирование по 1-ой зоне Бриллюэна.

$$g_{\Omega\tau\tau'}^{(2irr)} = \int_0^{\beta} g_{t+\tau\downarrow, t\uparrow, \tau'\uparrow, 0\downarrow}^{(2irr)} e^{i\Omega t} dt. \quad (4)$$

Обсуждаемый блок представляет собой свертку

$$\int_0^\beta X_{\Omega K \tau - \tau_1}^{(0)} g_{\Omega \tau_1 \tau'}^{(2irr)} d\tau_1 \quad (5)$$

Задача 1. Хочется посмотреть на 3D график $g_{\Omega \tau \tau'}^{(2irr)}$ при $\Omega = 0$, и на график $X_{\Omega K \tau}^{(0)}$ при $\Omega = 0$ для нескольких характерных K .

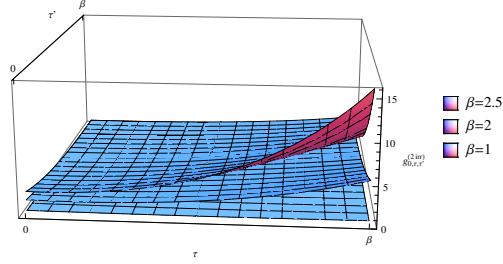


Рис. 2: 3D график $g_{0\tau\tau'}^{(2irr)}$

Легко заметить что $\tilde{G}_{\omega k} \xrightarrow[\omega \rightarrow \pm\infty]{} -\epsilon_k$. Поэтому определим $\tilde{X}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\Omega K \tau}^{(0)} &= X_{\Omega K \tau}^{(0)} - \beta^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} d^2 k \sum_{\omega} \epsilon_k \epsilon_{k+K} e^{-i\omega\tau} \\ &= X_{\Omega K \tau}^{(0)} - 4\pi^2 t \frac{\epsilon_K}{\beta} \delta(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом мы получим сходящуюся сумму по ω .

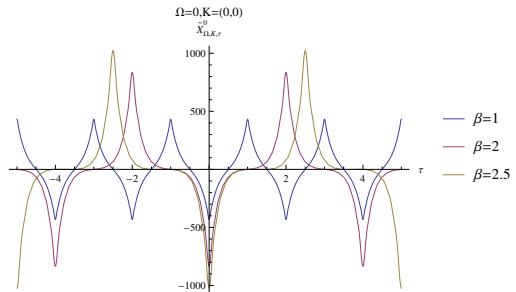


Рис. 3:

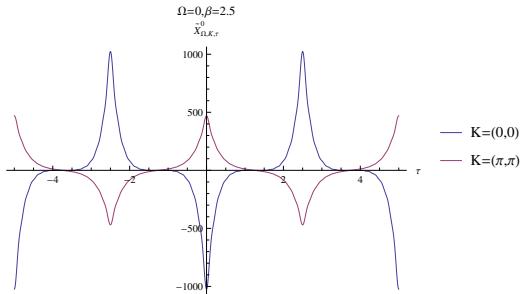


Рис. 4:

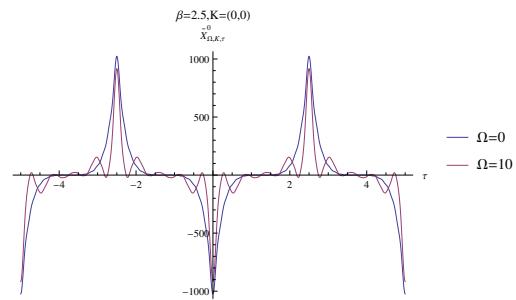


Рис. 5:

2 Расчет диаграммы

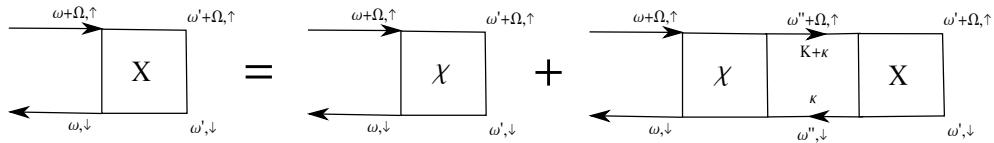


Рис. 6:

$$X_{\Omega K'} = \chi_{\Omega \omega'} + \frac{1}{\beta} \sum_{\omega''} \chi_{\Omega \omega''} \overbrace{\left(\int_k \tilde{G}_{\Omega+\omega''} \tilde{G}_{\omega'' k} \right)}^{\chi_{\Omega K'}^{(0)}} X_{\omega'' \omega'} \quad (7)$$

После обратного Фурье преобразования, получаем интегральное уравнение

$$X_{\Omega K} = \chi_{\Omega \tau \tau'} + \chi_{\Omega \tau \tau'} \int_0^\beta d\tau'' \chi_{\Omega K}^{(0)} X_{-\tau'' \tau'} \quad (8)$$

Образуем сетку $N \times N$ по τ -переменным: $\tau_i = i\Delta\tau, i \in \overline{0, N}$, где $\Delta\tau = \frac{\beta}{N}$, тогда интегральное уравнение можно будет заменить на систему $(N + 1)^2$ линейных уравнений с $(N + 1)^2$ неизвестными

$$X_{ij} + \sum_{k=0}^N a_{ijk} X_{kj} = b_{ij} \quad (9)$$

где $X_{ij} = X_{\Omega K}, a_{ijk} = -\chi_{\tau_i \tau_j} \chi_{\Omega K}^{(0)} \Delta\tau, b_{ij} = \chi_{\tau_i \tau_j}$

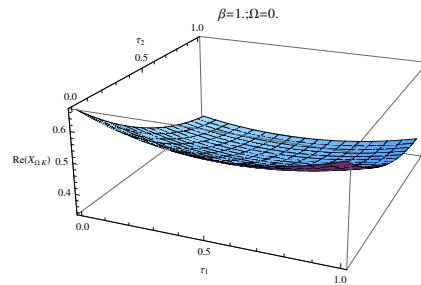


Рис. 7:

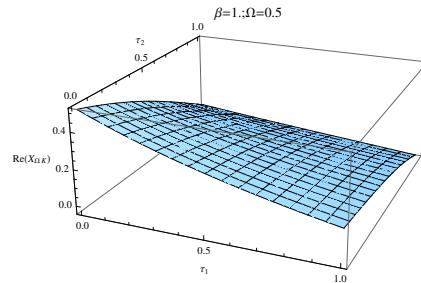


Рис. 8: