

1 Блок диаграммы. Вершинная функция.

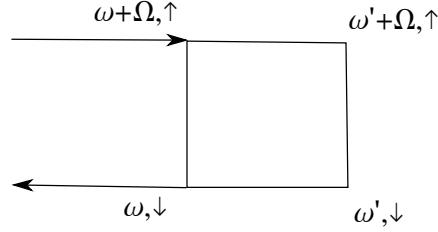


Рис. 1: Блок лестничной диаграммы

Рассматриваем лестничные ряды, составленные из изображенных на рисунке 1 блоков. В статьях по дуальной технике в узлах диаграмм стоят вершинные части примесной задачи, а линиями служат дуальные функции Грина. Нам будет удобнее в узлах разместить неприводимые части функций Грина, а линии, соответственно, домножить на g^{-2} .

Таким образом, “четырехугольный” узел равен

$$g_{1234}^{(2irr)} = \left\langle c_{\downarrow}^{\dagger}(t+\tau)c_{\uparrow}(t)c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau')c_{\downarrow}(0) \right\rangle - \frac{\left\langle c_{\downarrow}^{\dagger}(t+\tau)c_{\uparrow}(t) \right\rangle \left\langle c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau')c_{\downarrow}(0) \right\rangle}{\left\langle c_{\downarrow}^{\dagger}(t+\tau)c_{\downarrow}(0) \right\rangle \left\langle c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau')c_{\uparrow}(t) \right\rangle} \quad (1)$$

Линия, в нулевом приближении, равна

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\omega k} &= g_{\omega}^{-2} \tilde{G}_{\omega k}^{(0)} = -(g_{\omega} - \epsilon_k^{-1})^{-1}, \text{ где} \\ g_{\omega} &= \int_0^{\beta} d\tau \left(-\left\langle c_{\uparrow}^{\dagger}(\tau)c_{\uparrow}(0) \right\rangle \right) e^{i\omega\tau} = \frac{-i\omega}{\omega^2 + \mu^2} \\ \epsilon_k &= -2t(\cos k_x + \cos k_y). \end{aligned} \quad (2)$$

Лестница в целом характеризуется волновым вектором K и частотой Ω . “Внутренние” индексы будем использовать во временному представлении.

Таким образом, нам понадобятся величины

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\Omega K \omega}^{(0)} &= -\beta^{-1} \int_k \tilde{G}_{\omega k} \tilde{G}_{\Omega+k}^{(0)} \\ \tilde{X}_{\Omega K \tau}^{(0)} &= \sum_{\omega} \tilde{X}_{\Omega K \omega}^{(0)} e^{-i\omega\tau}, \end{aligned} \quad (3)$$

где суммирование \sum_{ω} проводится по мацубаровским частотам $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\int_k \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\pi}^{\pi} d^2 k$.

$$\chi_{\Omega \tau'} = \int_0^{\beta} g_{t+\tau \downarrow, t \uparrow, \tau' \uparrow, 0 \downarrow}^{(2irr)} e^{i\Omega t} dt. \quad (4)$$

Обсуждаемый блок представляет собой свертку

$$\int_0^\beta \tilde{X}_{\Omega K\tau - \tau_1}^{(0)} \chi_{\frac{\Omega}{\tau_1 \tau'}} d\tau_1 \quad (5)$$

Задача 1. Хочется посмотреть на 3D график $\chi_{\frac{\Omega}{\tau\tau'}}$ при $\Omega = 0$, и на график $X_{\Omega K\tau}^{(0)}$ при $\Omega = 0$ для нескольких характерных K .

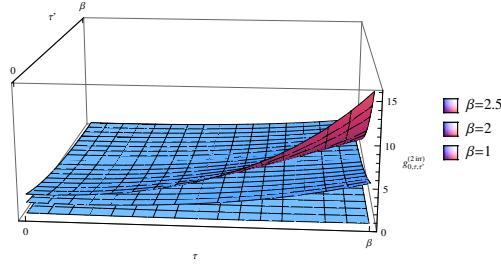


Рис. 2: 3D график $\chi_{\frac{\Omega}{\tau\tau'}}$

Легко заметить что $\tilde{G}_{\omega k} \xrightarrow[\omega \rightarrow \pm\infty]{} \epsilon_k$. Поэтому определим $\tilde{X}_{\Omega K\tau}^{(0)'} \quad (6)$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\Omega K\tau}^{(0)'} &= \tilde{X}_{\Omega K\tau}^{(0)} - \beta^{-1} \int_k \sum_\omega \epsilon_k \epsilon_{k+K} e^{-i\omega\tau} \\ &= \tilde{X}_{\Omega K\tau}^{(0)} + \pi t \epsilon_K \delta(\tau) e^{-i\pi\frac{\tau}{\beta}} \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом мы получим сходящуюся сумму по ω .

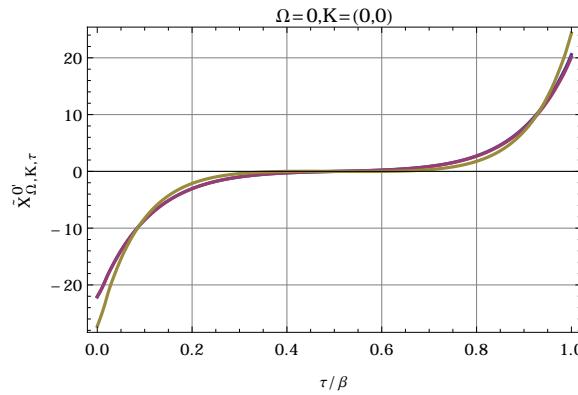


Рис. 3:

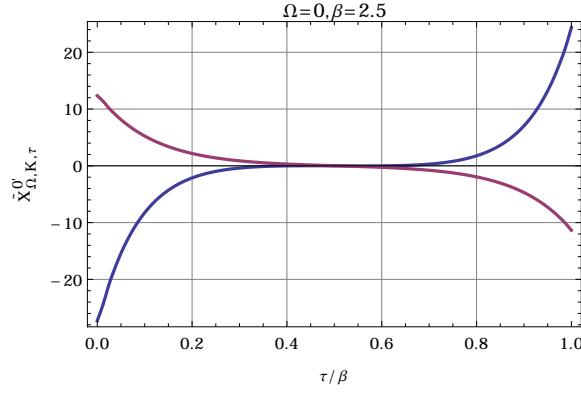


Рис. 4:

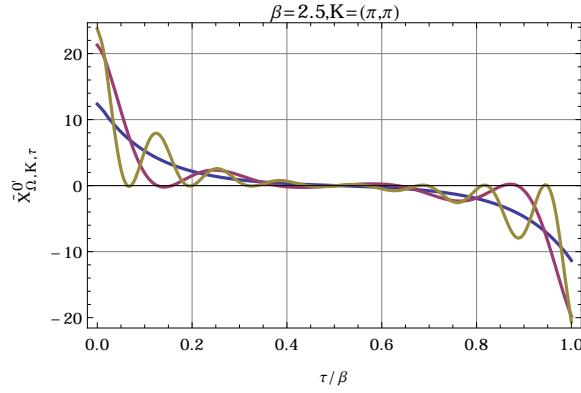


Рис. 5:

2 Расчет диаграммы

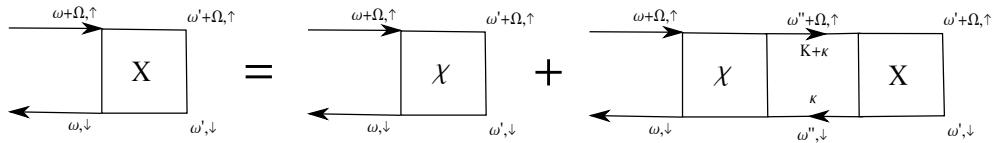


Рис. 6:

$$X_{\omega\omega'} = \chi_{\omega\omega'} + \sum_{\omega''} \chi_{\omega\omega''} \underbrace{\left(\beta^{-1} \int_k \tilde{G}_{\Omega+\omega''} \tilde{G}_{\omega'' k} \right)}_{-\tilde{X}_{\Omega K}^{(0)}} X_{\omega''\omega'} \quad (7)$$

Делаем Фурье преобразования

$$\begin{aligned}
X_{\Omega K} &= \chi_{\tau\tau'} - \sum_{\omega\omega'\omega''} \chi_{\omega\omega''} X_{\Omega K}^{(0)} X_{\omega''\omega'} e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} \\
&= \chi_{\tau\tau'} - \sum_{\omega''} \chi_{\tau\omega''} X_{\Omega K}^{(0)} X_{\omega''\tau'} \\
&= \chi_{\tau\tau'} - \sum_{\omega''} \chi_{\tau\omega''} X_{\Omega K}^{(0)} \left(\int_{\tau''} X_{\Omega K} e^{i\omega''\tau''} \right) \\
&= \chi_{\tau\tau'} - \int_{\tau''} \left(\sum_{\omega''} \chi_{\tau\omega''} X_{\Omega K}^{(0)} e^{i\omega''\tau''} \right) X_{\tau''\tau'} \\
\sum_{\omega''} \chi_{\tau\omega''} X_{\Omega K}^{(0)} e^{i\omega''\tau''} &= \sum_{\omega''} \left(\int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\tau\tilde{\tau}''} e^{i\omega''\tilde{\tau}''} \right) X_{\Omega K}^{(0)} e^{i\omega''\tau''} = \int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\tau\tilde{\tau}''} X_{-\tilde{\tau}''-\tau''}^{(0)} \\
(8)
\end{aligned}$$

Получаем интегральное уравнение

$$X_{\Omega K} + \int_0^\beta d\tau'' \underbrace{\left(\int_{\tilde{\tau}''} \chi_{\tau\tilde{\tau}''} X_{-\tilde{\tau}''-\tau''}^{(0)} \right) X_{\tau''\tau'}}_{A_{\tau\tau''}} = \chi_{\tau\tau'}, \quad (9)$$

Образуем сетку $N \times N$ по τ -переменным: $\tau_i = i\Delta\tau$, $i \in \overline{0, N}$, где $\Delta\tau = \frac{\beta}{N}$, тогда интегральное уравнение можно будет заменить на систему $(N+1)^2$ линейных уравнений с $(N+1)^2$ неизвестными

$$X_{ij} + \sum_{k=0}^N a_{ik} X_{kj} = b_{ij} \quad (10)$$

где $X_{ij} = X_{\Omega K}$, $a_{ik} = \int_{\tau_i} \chi_{\tau_i\tau} X_{-\tau-\tau_k}^{(0)}$, $b_{ij} = \chi_{\tau_i\tau_j}$

3 Расчет восприимчивости

$$X_{\Omega K} = \int_{\tau} X_{\Omega K}^{(0)} + \int_{\tau\tau'} \int_{kk'} X_{\Omega K}^{(0)} X_{\Omega K} X_{\Omega K}^{(0)} \quad (11)$$