winger 9 августа 2009 в 23:40

Структуры данных: бинарные деревья. Часть 1

Алгоритмы

Интро

Этой статьей я начинаю цикл статей об известных и не очень структурах данных а так же их применении на практике.

В своих статьях я буду приводить примеры кода сразу на двух языках: на Java и на Haskell. Благодаря этому можно будет сравнить императивный и функциональный стили программирования и увидить плюсы и минусы того и другого.

Начать я решил с бинарных деревьев поиска, так как это достаточно базовая, но в то же время интересная штука, у которой к тому же существует большое количество модификаций и вариаций, а так же применений на практике.

Зачем это нужно?

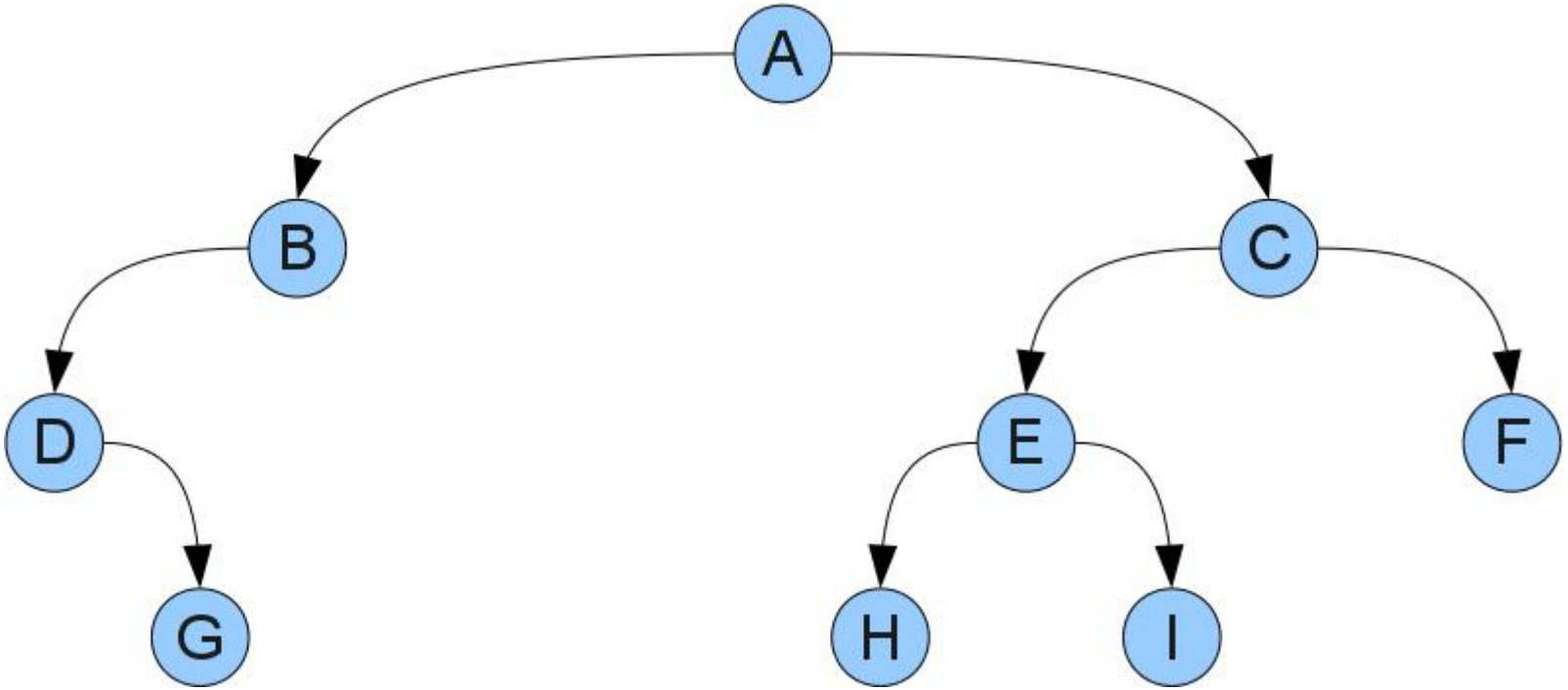
Бинарные деревья поиска обычно применяются для реализации множеств и ассоциативных массивов (например, set и map в c++ или TreeSet и TreeMap в java). Более сложные применения включают в себя ropes (про них я расскажу в одной из следующих статей), различные алгоритмы вычислительной геометрии, в основном в алгоритмах на основе «сканирующей прямой».

В этой статье деревья будут рассмотрены на примере реализации ассоциативного массива. Ассоциативный массив —

обобщенный массив, в котором индексы (их обычно называют ключами) могут быть произвольными.

Ну-с, приступим

Двоичное дерево состоит из вершин и связей между ними. Конкретнее, у дерева есть выделенная вершина-корень и у каждой вершины может быть левый и правый сыновья. На словах звучит несколько сложно, но если взглянуть на картинку все становится понятным:



У этого дерева корнем будет вершина A. Видно, что у вершины D отсутствует левый сын, у вершины B — правый, а у вершин G, H, F и I — оба. Вершины без сыновей принято называть листьями.

Каждой вершине X можно сопоставить свое дерево, состоящее из вершины, ее сыновей, сыновей ее сыновей, и т.д. Такое дерево

называют поддеревом с корнем X. Левым и правым поддеревьями X называют поддеревья с корнями соответственно в левом и правом сыновьях X. Заметим, что такие поддеревья могут оказаться пустыми, если у X нет соответствующего сына.

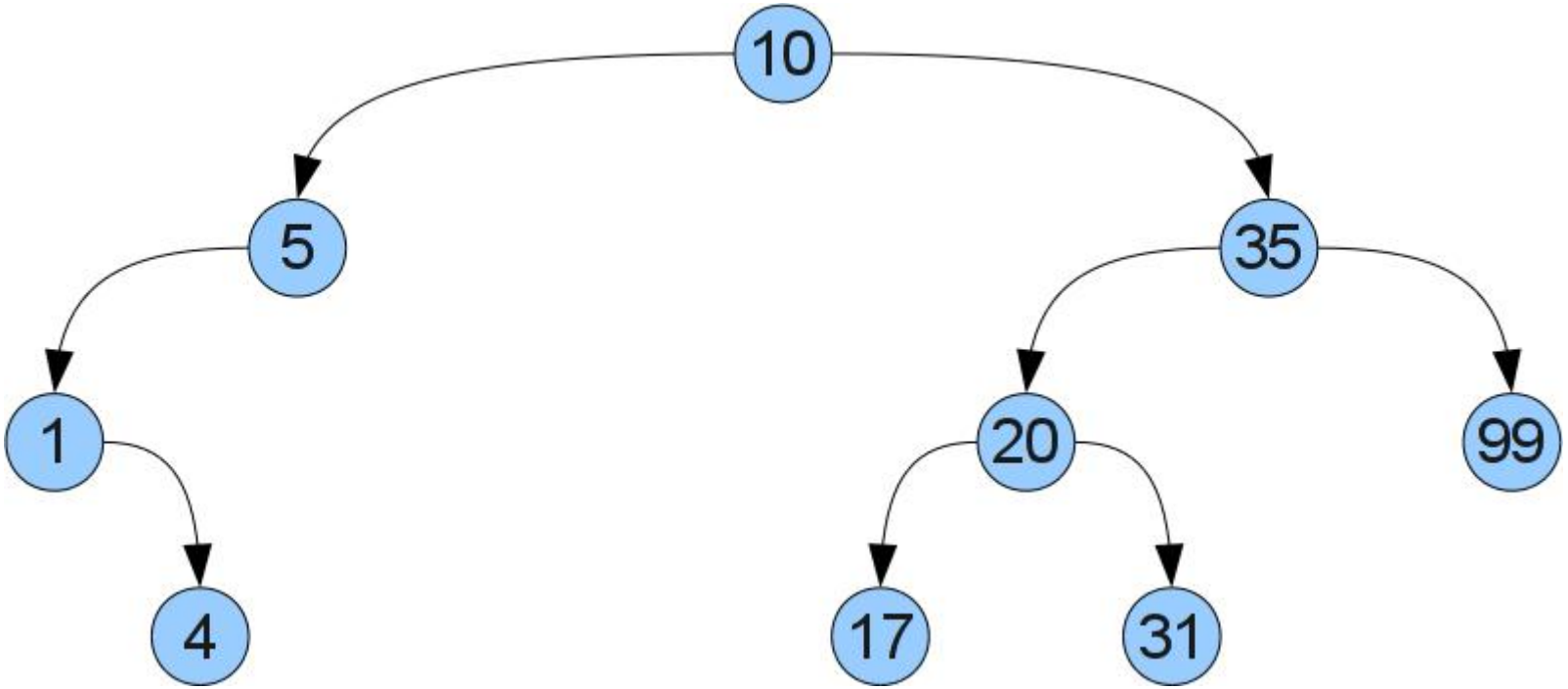
Данные в дереве хранятся в его вершинах. В программах вершины дерева обычно представляют структурой, хранящей данные и две ссылки на левого и правого сына. Отсутствующие вершины обозначают null или специальным конструктором Leaf:

```haskell
data Ord key => BSTree key value = Leaf | Branch key value (BSTree key value) (BSTree key value)
                                 deriving (Show)
```

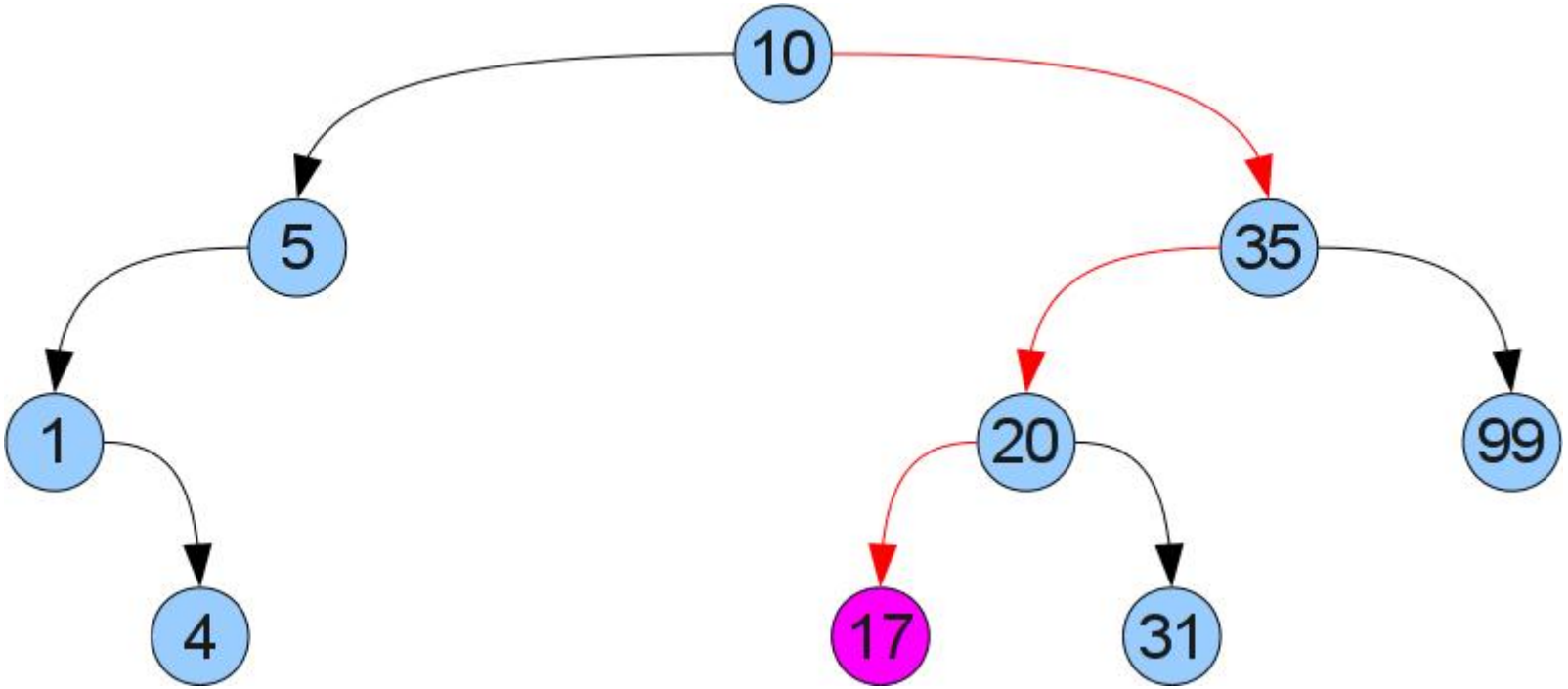
```java
static class Node<T1, T2> {
        T1 key;
        T2 value;
         Node<T1, T2> left, right;

        Node(T1 key, T2 value) {
                this.key = key;
                this.value = value;
        }
}
```

Как видно из примеров, мы требуем от ключей, чтобы их можно было сравнивать между собой (`Ord a` в haskell и `T1 implements Comparable<T1>` в java). Все это не спроста — для того, чтобы дерево было полезным данные должны храниться в нем по каким-то правилам.

Какие же это правила? Все просто: если в вершине X хранится ключ x, то в левом (правом) поддереве должны храниться только ключи меньшие (соответственно большие) чем x. Проиллюстрируем:



Что же нам дает такое упорядочевание? То, что мы легко можем отыскать требуемый ключ x в дереве! Просто сравним x со значением в корне. Если они равны, то мы нашли требуемое. Если же x меньше (больше), то он может оказаться только в левом (соответственно правом) поддереве. Пусть например мы ищем в дереве число 17:



Функция, получающая значение по ключу:

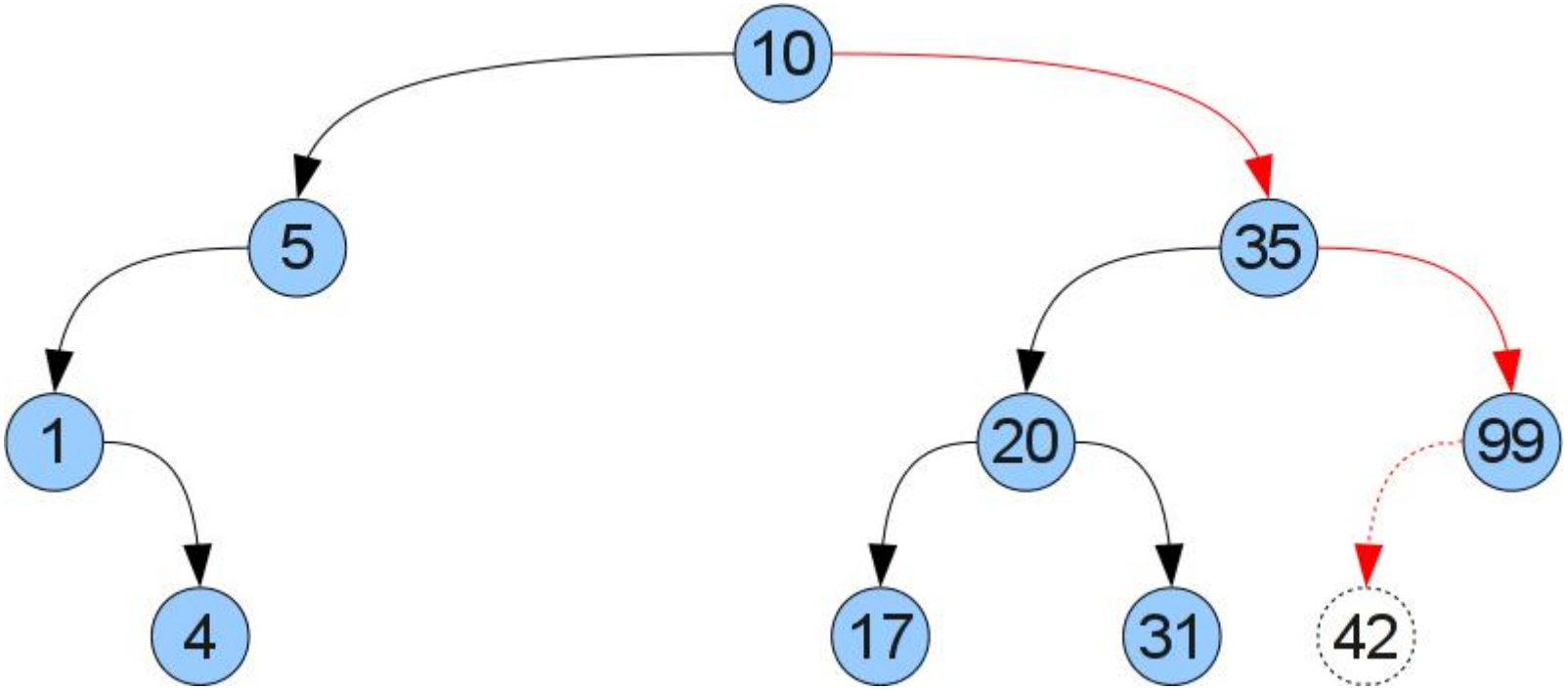
```
get :: Ord key => BSTree key value -> key -> Maybe value
get Leaf _ = Nothing
get (Branch key value left right) k
    | k < key  = get left k
    | k > key  = get right k
    | k == key = Just value
```

```
public T2 get(T1 k) {
        Node<T1, T2> x = root;
        while (x != null) {
                int cmp = k.compareTo(x.key);
```

```
                if (cmp == 0) {
                        return x.value;
                }
                if (cmp < 0) {
                        x = x.left;
                } else {
                        x = x.right;
                }
        }
        return null;
}
```

Добавление в дерево

Теперь попробуем сделать операцию добавления новой пары ключ/значение (a,b). Для этого будем спускаться по дереву как в функции get, пока не найдем вершину с таким же ключем, либо не дойдем до отсутсвующего сына. Если мы нашли вершину с таким же ключем, то просто меняем соответствующее значение. В противно случае легко понять что именно в это место следует вставить новую вершину, чтобы не нарушить порядок. Рассмотрим вставку ключа 42 в дерево на прошлом рисунке:



Код:

```
add :: Ord key => BSTree key value -> key -> value -> BSTree key value
add Leaf k v = Branch k v Leaf Leaf
add (Branch key value left right) k v
    | k < key  = Branch key value (add left k v) right
    | k > key  = Branch key value left (add right k v)
    | k == key = Branch key value left right
```

```
public void add(T1 k, T2 v) {
        Node<T1, T2> x = root, y = null;
        while (x != null) {
                int cmp = k.compareTo(x.key);
```

```
                if (cmp == 0) {
                        x.value = v;
                        return;
                } else {
                        y = x;
                        if (cmp < 0) {
                                x = x.left;
                        } else {
                                x = x.right;
                        }
                }
        }
        Node<T1, T2> newNode = new Node<T1, T2>(k, v);
        if (y == null) {
                root = newNode;
        } else {
                if (k.compareTo(y.key) < 0) {
                        y.left = newNode;
                } else {
                        y.right = newNode;
                }
        }
}
```

Лирическое отступление о плюсах и минусах функционального подхода

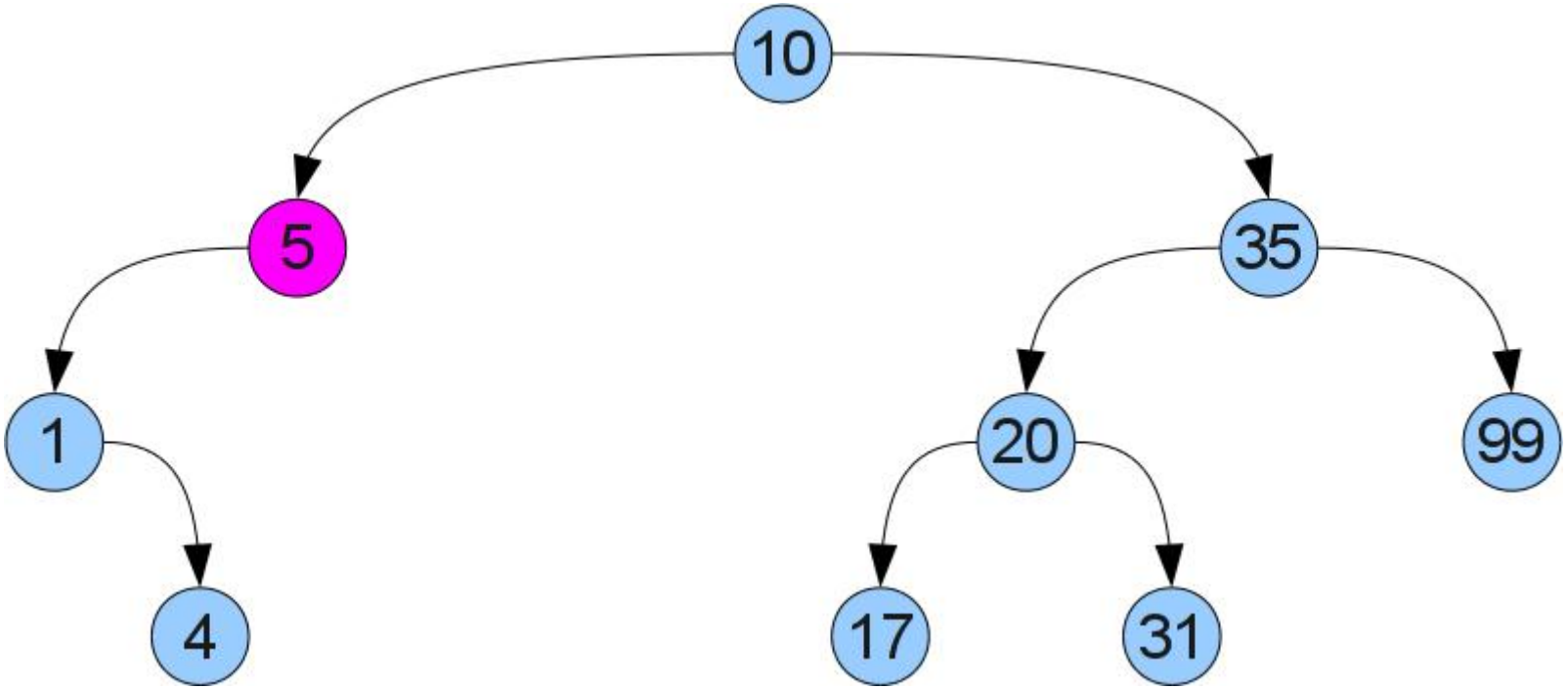
Если внимательно рассмотреть примеры на обоих языках, можно увидеть некоторое различие в поведении функциональной и императивной реализаций: если на java мы просто модифицируем данные и ссылки в имеющихся вершинах, то версия на haskell создает новые вершины вдоль всего пути, пройденного рекурсией. Это связано с тем, что в чисто функциональных языках нельзя

делать разрушающие присваивания. Ясно, что это ухудшает производительность и увеличивает потребляемую память. С другой стороны, у такого подхода есть и положительные стороны: отсутствие побочных эффектов сильно облегчает понимание того, как функционирует программа. Более подробно об этом можно прочитать в практически любом учебнике или вводной статье про функциональное программирование.

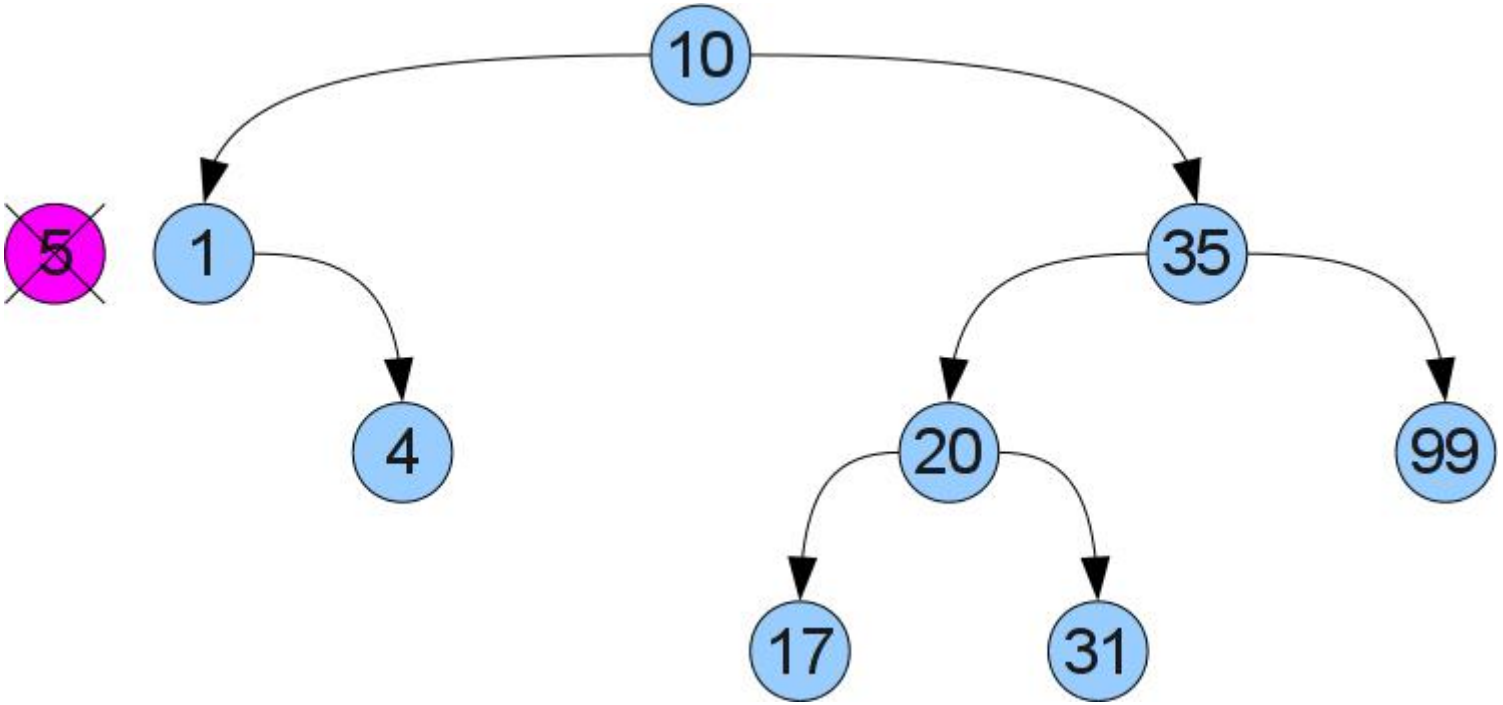
В этой же статье я хочу обратить внимание на другое следствие функционального подхода: даже после добавления в дерево нового элемента старая версия останется доступной! За счет этого эффекта работают ropes, в том числе и в реализации на императивных языках, позволяя реализовывать строки с асимптотически более быстрыми операциями, чем при традиционном подходе. Про ropes я расскажу в одной из следующих статей.

Вернемся к нашим баранам

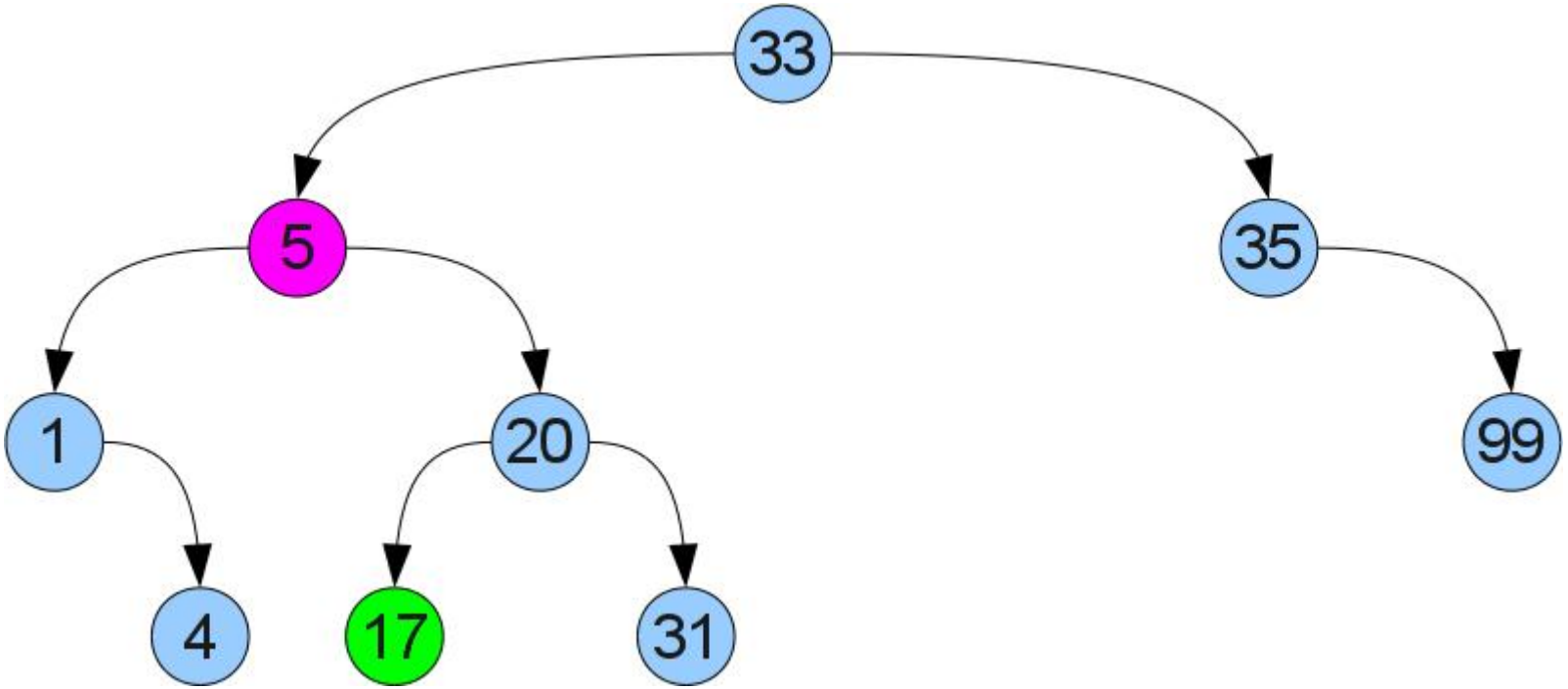
Теперь мы подобрались к самой сложной операции в этой статье — удалению ключа x из дерева. Для начала мы, как и раньше, найдем нашу вершину в дереве. Теперь возникает два случая. Случай 1 (удаляем число 5):



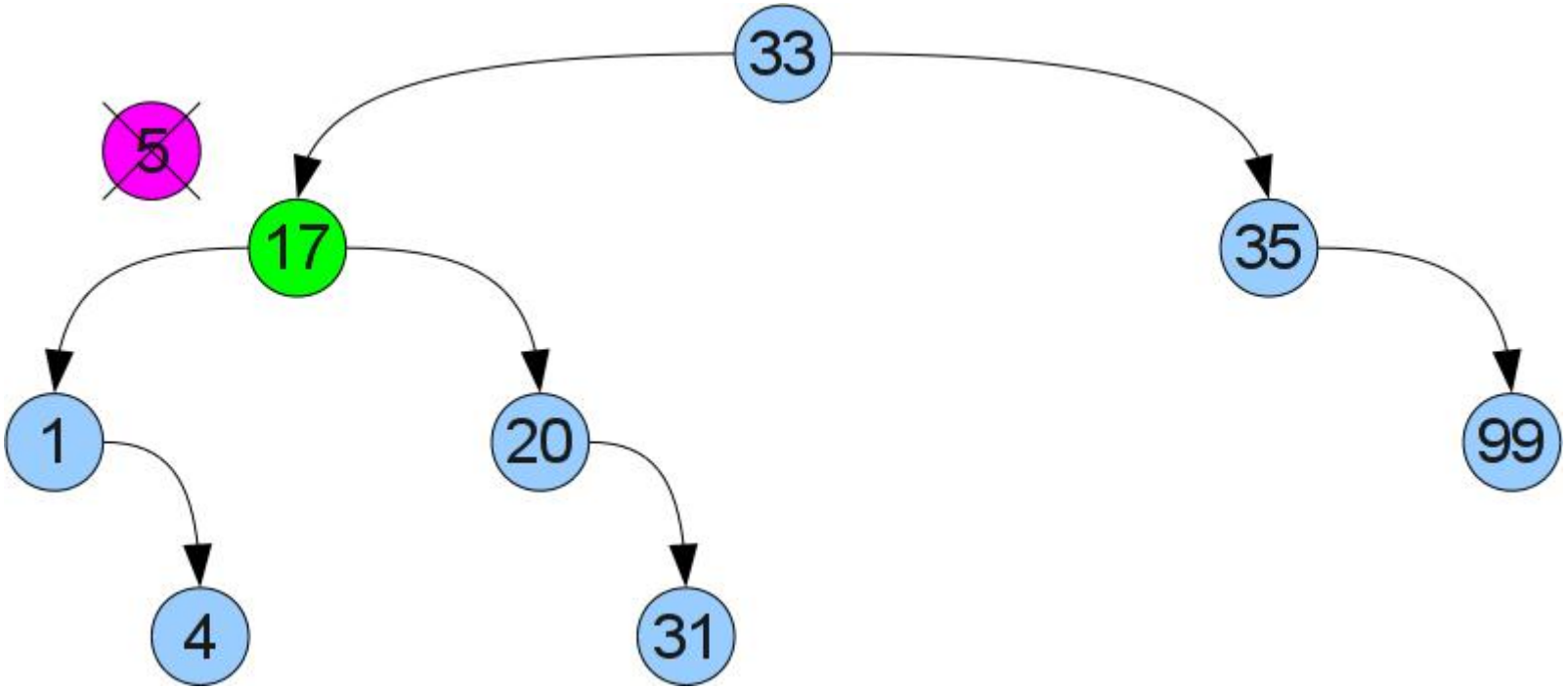
Видно, что у удаляемой вершины нет правого сына. Тогда мы можем убрать ее и вместо нее вставить левое поддерево, не нарушая упорядоченность:



Если же правый сын есть, налицо случай 2 (удаляем снова вершину 5, но из немного другого дерева):



Тут так просто не получится — у левого сына может уже быть правый сын. Поступим по-другому: найдем в правом поддереве минимум. Ясно, что его можно найти если начать в правом сыне и идти до упора влево. Т.к у найденного минимума нет левого сына, можно вырезать его по аналогии со случаем 1 и вставить его вместо удалеемой вершины. Из-за того что он был минимальным в правом поддереве, свойство упорядоченности не нарушится:



Реализация удаления:

```
remove :: Ord key => BSTree key value -> key -> BSTree key value
remove Leaf _ = Leaf
remove (Branch key value left right) k
    | k < key  = Branch key value (remove left k) right
    | k > key  = Branch key value left (remove right k)
    | k == key = if isLeaf right
                 then left
                 else Branch leftmostA leftmostB left right'
                     where
                       isLeaf Leaf = True
                       isLeaf _    = False
                       ((leftmostA, leftmostB), right') = deleteLeftmost right
                       deleteLeftmost (Branch key value Leaf right) = ((key, value), right)
```

```
deleteLeftmost (Branch key value left right) = (pair, Branch key value left' right)
    where (pair, left') = deleteLeftmost left
```

```
public void remove(T1 k) {
        Node<T1, T2> x = root, y = null;
        while (x != null) {
                int cmp = k.compareTo(x.key);
                if (cmp == 0) {
                        break;
                } else {
                        y = x;
                        if (cmp < 0) {
                                x = x.left;
                        } else {
                                x = x.right;
                        }
                }
        }
        if (x == null) {
                return;
        }
        if (x.right == null) {
                if (y == null) {
                        root = x.left;
                } else {
                        if (x == y.left) {
                                y.left = x.left;
                        } else {
                                y.right = x.left;
                        }
                }
        } else {
```

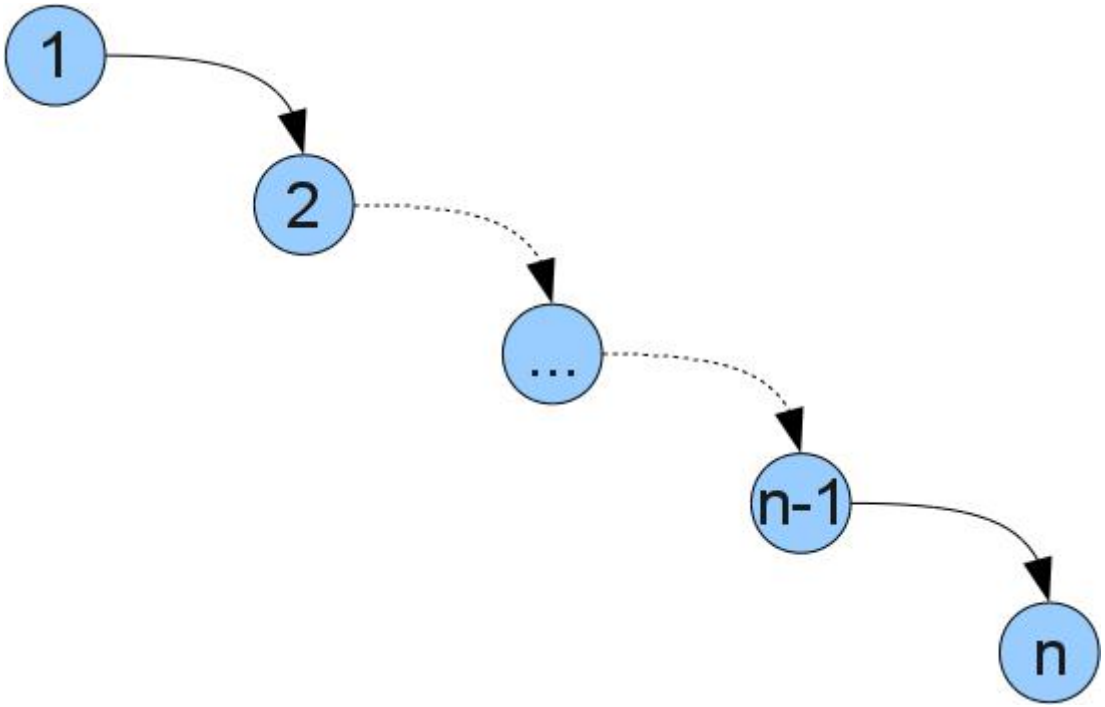
```
                Node<T1, T2> leftMost = x.right;
                y = null;
                while (leftMost.left != null) {
                        y = leftMost;
                        leftMost = leftMost.left;
                }
                if (y != null) {
                        y.left = leftMost.right;
                } else {
                        x.right = leftMost.right;
                }
                x.key = leftMost.key;
                x.value = leftMost.value;
        }
}
```

На десерт, пара функций, которые я использовал для тестирования:

```
fromList :: Ord key => [(key, value)] -> BSTree key value
fromList = foldr (\(key, value) tree -> add tree key value) Leaf

toList :: Ord key => BSTree key value -> [(key, value)]
toList tree = toList' tree []
    where
      toList' Leaf list = list
      toList' (Branch key value left right) list = toList' left ((key, value):(toList' left list))
```

Чем же все это полезно?

У читателя возможно возникает вопрос, зачем нужны такие сложности, если можно просто хранить список пар [(ключ, значение)]. Ответ прост — операции с деревом работают быстрее. При реализации списком все функции требуют O(n) действий, где n — размер структуры. (Запись O(f(n)) грубо говоря означает «пропорционально f(n)», более корректное описание и подробности можно почитать тут). Операции с деревом же работают за O(h), где h — максимальная глубина дерева (глубина — расстояние от корня до вершины). В оптимальном случае, когда глубина всех листьев одинакова, в дереве будет n=2^h вершин. Значит, сложность операций в деревьях, близких к оптимуму будет O(log(n)). К сожалению, в худшем случае дерево может выродится и сложность операций будет как у списка, например в таком дереве (получится, если вставлять числа 1..n по порядку):



К счастью, существуют способы реализовать дерево так, чтобы оптимальная глубина дерева сохранялась при любой последовательности операций. Такие деревья называют сбалансированными. К ним например относятся красно-черные деревья,

AVL-деревья, splay-деревья, и т.д.

Анонс следующих серий

В следующей статье я сделаю небольшой обзор различных сбалансированных деревьев, их плюсы и минусы. В следующих статьях я расскажу о каком-нибудь (возможно нескольких) более подробно и с реализацией. После этого я расскажу о реализации ropes и других возможных расширениях и применениях сбалансированных деревьев.

Оставайтесь на связи!

Полезные ссылки

Исходники примеров целиком:

на haskell

на java

Статья на википедии

Интерактивный визуализатор операций с BST

Также очень советую почитать книгу Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.: «Алгоритмы: построение и анализ», которая является прекрасным учебником по алгоритмам и структурам данных

UPD: картинки восстановлены, спасибо @Xfrid!