Universidade do Minho

Departamento de Produção e Sistemas

# Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Trabalho 3

Benjamim Coelho, Henrique Neto, Leonardo Marreiros e Paulo Ricardo Pereira

e-mail: {a89616,a89618,a89537,a86475}@alunos.uminho.pt

28 de Dezembro - 2020

# Conteúdo


**1 Contextualização** **2**

1.1 Problema . . . . . . . . . . 2

1.2 Objetivo . . . . . . . . . . 3

**2 Diagrama de Gantt inicial** **3**

**3 Nova rede do Projecto** **4**

**4 Novas restrições e função objetivo** **4**

4.1 Novas variáveis . . . . . . . . . . 4

4.2 Actividades com variações continuas . . . . . . . . . . 4

4.2.1 Restrições . . . . . . . . . . 5

4.3 Atividades com variações discretas . . . . . . . . . . 5

4.4 Função Objetivo . . . . . . . . . . 6

4.4.1 Custo com variação continua . . . . . . . . . . 6

4.4.2 Custo com variação discreta . . . . . . . . . . 6

**5 Modelo de programação linear inteira mista** **7**

5.1 Função objetivo . . . . . . . . . . 7

5.2 Restrições . . . . . . . . . . 7

5.2.1 Tempo máximo para terminar o projeto . . . . . . . . . . 7

5.2.2 Relações de precedência . . . . . . . . . . 7

5.2.3 Restrições às variáveis binárias $Ba$ e $Bb$ . . . . . . . . . . 7

5.2.4 Decomposição da redução $R$ nas reduções $Ra$ e $Rb$ . . . . . . . . . . 7

5.2.5 Limites das reduções $Ra$ e $Rb$ . . . . . . . . . . 7

**6 Ficheiro de Input** **8**

**7 Ficheiro de output** **9**

7.1 Registo do output . . . . . . . . . . 9

7.2 Resultado . . . . . . . . . . 9

**8 Discussão do resultado** **11**

8.1 Interpretação . . . . . . . . . . 11

8.2 Diagrama de Gantt resultante . . . . . . . . . . 11

**9 Validação da solução ótima** **11**

9.1 Função Objetivo . . . . . . . . . . 11

9.2 Restrições . . . . . . . . . . 12

# Contextualização

## 1.1 Problema

O método do caminho crítico, designado na literatura anglo–saxónica por *critical path method* (CPM), constitui uma ferramenta muito importante em gestão de projectos. O método do caminho crítico é aplicado a projectos que podem ser decompostos num conjunto de actividades, que se considera terem durações determinísticas, entre as quais existem relações de precedência. As restrições de precedência traduzem o facto de o instante em que se pode dar início a uma dada actividade ter de ser posterior aos instantes em que terminam as actividades que lhe são precedentes. Por fim é estabelecida uma rede que representa o projecto que conforme o problema pode seguir varias representações. Neste projeto representaremos as actividades do projecto como nós de uma rede.

Tendo isto em conta foi apresentado um plano de um projeto consistente em 10 atividades com várias dependências entre si, visto que certas atividades são impossíveis de concluir antes das outras terminarem. Exemplificando, na construção de uma casa, antes de se poder realizar a atividade "pintar as paredes", tem-se primeiro de acabar a atividade "construir as paredes". A tabela 1.1 identifica as atividades e as suas respetivas dependências e durações.

| Atividade | Duração | Dependencias |
|---|---|---|
| 0 | 4 | – |
| 2 | 7 | 0,4 |
| 3 | 2 | 2,5 |
| 4 | 9 | 0,7 |
| 5 | 4 | 4,7,10 |
| 6 | 5 | – |
| 7 | 6 | 6 |
| 9 | 2 | 7,10,11 |
| 10 | 8 | 6 |
| 11 | 7 | 10 |

Tabela 1.1: Tabela de Atividades

Por fim é possível construir um grafo e um diagrama sequencial das atividades, denominado Diagrama de Gantt (figuras 3.1 e 2.1 respetivamente). Desta forma, tendo em conta que todas as atividades serão concluídas, é possível determinar a duração mínima do projeto que corresponderá à largura do diagrama e também ao comprimento do caminho mais longo entre o vértice de inicio e o vértice final do grafo (uma vez que são problemas duais um do outro). Neste projeto o caminho mais longo, ou seja, o caminho $6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ indica que o projeto tem uma duração mínima de 29 unidades de tempo.

Ora, isto é problemático, visto que, devido a motivos como: gestão de funcionários, disponibilidade de recursos e gestão de funcionamento, foi imposta uma data limite, o que implica que o projeto fosse acabado no máximo em 26 unidades de tempo.

Assim, para possibilitar a conclusão do projeto a tempo, é possível diminuir a duração das atividades, com um custo suplementar. Este custo varia conforme as atividades, sendo possível o aumento de custo estar associado a uma variação contínua ou a um simples conjunto discreto de opções.

Neste projeto, todas as atividades, com a exceção das atividades 7 e 9, sofrem uma variação linear do custo suplementar onde a certo ponto passa a ser imposto outra variação linear que, geralmente, é menor que a primeira. Na vida real isto poderia retratar um caso em que o número de recursos necessários diminui à medida que se reduz o tempo necessário para concluir a atividade.

Desta forma, foi disponibilizada a tabela 1.2, na qual a cada atividade está associado o custo normal e o custo suplementar inicial e final de redução, identificados respetivamente por $c_A$ e $c_B$ e os seus respetivos limites máximos de redução.

| Actividade | Custo Normal | $c_A$ | Máx. red. $c_A$ | $c_B$ | Máx. red. $c_B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 400 | 200 | 0,5 | 100 | 0,5 |
| 2 | 1400 | 1000 | 3 | 500 | 1 |
| 3 | 300 | 200 | 0,5 | 100 | 0,5 |
| 4 | 2000 | 800 | 2 | 400 | 1 |
| 5 | 1000 | 1600 | 0,5 | 800 | 0,5 |
| 6 | 800 | 180 | 1 | 90 | 1 |
| 7 | 900 | - | - | - | |
| 9 | 300 | - | - | - | |
| 10 | 1600 | 1000 | 0,5 | 500 | 0,5 |
| 11 | 1400 | 600 | 1 | 300 | 1 |

Tabela 1.2: Tabela de valores das reduções

Por outro lado, as atividades 7 e 9 estão sujeitas a variações discretas quer da redução da duração, quer da redução do custo adicional, tendo assim ambas duas opções.
Para a atividade 7 é possível fazer:

- uma redução de 1 Unidade de Tempo ao custo de 300 Unidades Monetárias;
- uma redução de 2 Unidades de Tempo ao custo de 1100 Unidades Monetárias;

Para a atividade 9 é possível fazer:

- uma redução de 1 Unidade de Tempo ao custo de 200 Unidades Monetárias;
- uma redução de 2 Unidades de Tempo ao custo de 400 Unidades Monetárias.

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste projeto é calcular quais as reduções que serão feitas de maneira a que cumpra a data limite do projeto (ou seja diminuir a duração total do projeto em pelo menos 3 unidades de tempo) com o menor custo possível. Para isso estabeleceremos um modelo de programação inteira mista, ao qual resolveremos com recurso à ferramenta *LPSolve IDE v.5.5.2.3.*

# Diagrama de Gantt inicial

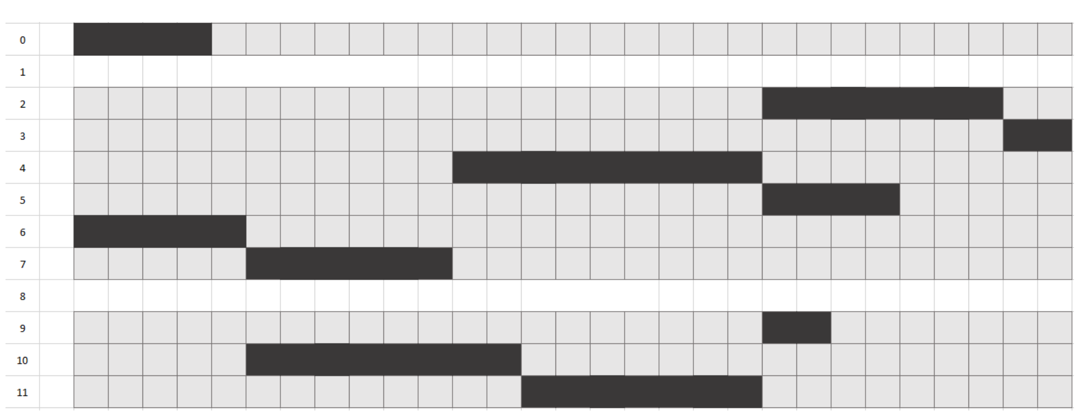



Figura 2.1: Diagrama de Gantt inicial

# Nova rede do Projecto

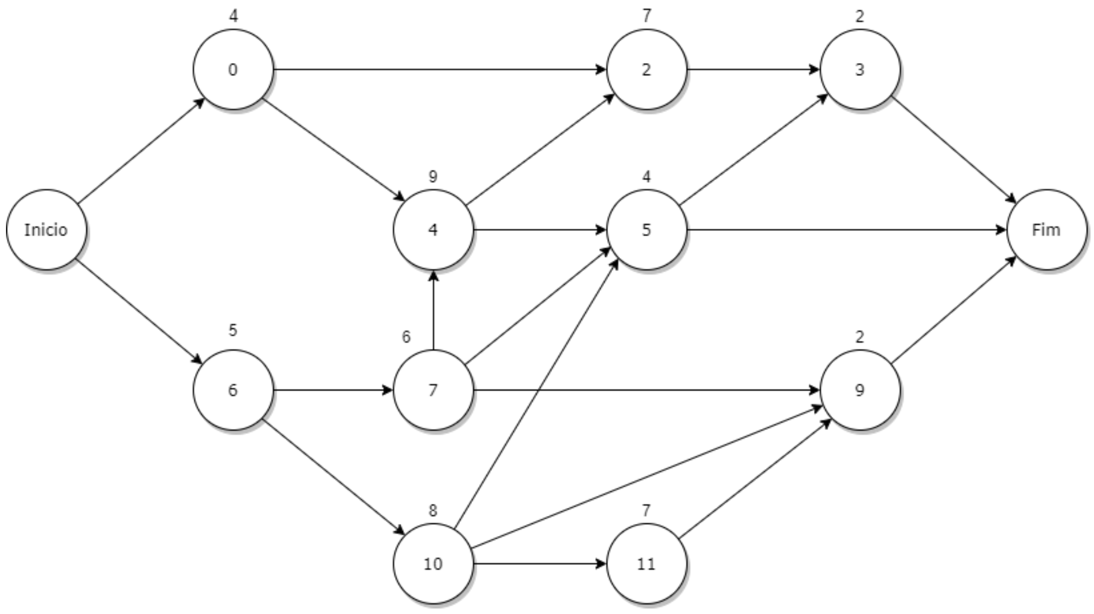



Figura 3.1: Rede do projeto - Valor 89618

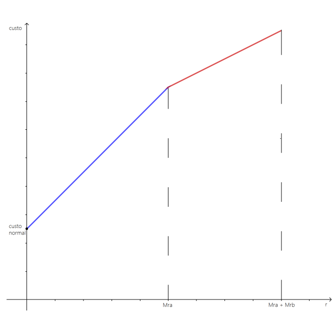
# Novas restrições e função objetivo

## 4.1 Novas variáveis

- $Ra_x$ - valor da redução $a$ da atividade $x$, $Ra_{x\in\{7,9\}} \in \mathbb{N}^0$, $Ra_{x\in\{0,2,3,4,5,6,10,11\}} \in \mathbb{R}^0+$
- $Rb_x$ - valor da redução $b$ da atividade $x$, $Rb_{x\in\{7,9\}} \in \mathbb{N}^0$, $Rb_{x\in\{0,2,3,4,5,6,10,11\}} \in \mathbb{R}^0+$
- $Ba_x$ - Variável binária que indica se estamos a trabalhar na 1ª parte da função da atividade x $x \in \{0,2,3,4,5,6,7,9,10,11\}, Ba_x \in \{0,1\}$
- $Bb_x$ - Variável binária que indica se estamos a trabalhar na 2ª parte da função da atividade x $x \in \{0,2,3,4,5,6,7,9,10,11\}, Bb_x \in \{0,1\}$

## 4.2 Actividades com variações continuas

Como referido no problema formulado, para cada actividade com variação contínua do custo, estabeleceremos uma função contínua por 2 partes, ou seja constituída por dois ramos, como indicado na figura seguinte.



$$\begin{cases} c_n + Ca \times r \ , 0 \leq r \leq Mra \\ c_n + Ca \times Mra + Cb \times (r - Mra) \ , Mra \leq r \leq Mra + Mrb \end{cases}$$

O primeiro ramo descreve a variação inicial do custo e consiste na soma do custo normal com o preço associado a variação da redução, sendo este produto entre custo suplementar inicial (denominado como $c_A$) e o valor de redução atual. O segundo ramo descreve a variação final do custo que consiste na soma entre o custo normal, o custo total da redução inicial e o preço associado que consiste produto entre custo suplementar final (denominado como $c_B$) e o valor de redução atual.

### 4.2.1 Restrições

Como a nossa função está dividida em 2 partes, iremos precisar de duas variáveis binárias ($b_A$ e $b_B$) que nos indicam que reduções estamos a fazer. Deste modo, se $b_A = 1$ e $b_B = 0$, estaremos a trabalhar no primeiro ramo da função e estaremos perante uma de duas situações diferentes: ou estamos a reduzir apenas por $c_A$ ou não fizemos nenhuma redução. Por outro lado, se $b_A = 0$ e $b_B = 1$ estaremos a trabalhar no segundo ramo, e desta forma estamos a fazer a redução total por $c_A$ e possivelmente uma redução por $c_B$. Assim, apenas uma destas variáveis pode tomar o valor 1, resultando assim a seguinte restrição.

$$1 = b_A + b_B$$

Da mesma forma, a redução total da atividade ($r$) irá decompor-se em duas reduções, a primeira ($r_A$) corresponde a redução feita pelo primeiro ramo e a segunda ($r_B$) corresponde a redução feita pelo segundo ramo. No caso em que a redução feita é no segundo ramo, o valor total da redução vai ser a soma do valor máximo da primeira redução com o valor da segunda redução. Logicamente, $r_A$ e $r_B$ seriam reais e positivas e em conjunto estas formariam o valor total da redução da duração, originando assim a restrição:

$$r = r_A + r_B + Mr_A \times b_B$$

De seguida, temos de definir os limites de $r_A$ conforme o ramo que estará em questão, desta forma se $b_A = 1$ esta necessariamente estará contida entre 0 e o valor máximo que ele pode tomar (definido como $Mr_A$), caso contrário deverá ser nula. O mesmo processo aplica-se a $r_B$, tendo por fim as seguintes restrições.

$$0 \times b_A \leq r_A \leq Mr_A \times b_A$$

$$0 \times b_B \leq r_B \leq Mr_B \times b_B$$

Tendo em conta que $r_A$ e $r_B$ já são definidas como variáveis positivas, estas restrições podem ser simplificadas para

$$r_A \leq Mr_A \times b_A$$

$$r_B \leq Mr_B \times b_B$$

## 4.3 Atividades com variações discretas

Estas atividades apenas mudam alguns detalhes nas restrições mencionadas anteriormente.

As variáveis binárias não representaram o ramo de uma função mas sim valores discretos aos quais estamos escolher, havendo a possibilidade de nenhum ser escolhido, caso não seja desejada nenhuma redução. Por questões de coerência mantive-mos os nomes $b_A$ e $b_B$ porém a restrições entre estas variáveis será:

$$1 \geq b_A + b_B$$

A redução total ($r$) decompor-se-á da mesma forma que anteriormente, porém sendo cada uma das reduções são independentes de si próprias, a condição resultante simplifica para:

$$r = r_A + r_B$$

Todavia, as componentes de $r$ ($r_A$ e $r_B$) já não irão variar entre um intervalo de valores e em contrapartida tomaram valores inteiros discretos. Desta forma, conforme as suas respetivas variáveis binárias, estas tomaram o valor total de redução suplementar a que estão associados (definidos como $Mr_A$ e $Mr_B$) ou serão nulas.

$$r_A = Mr_A \times b_A$$

$$r_B = Mr_B \times b_B$$

## 4.4 Função Objetivo

A função objetivo consistirá na minimização da soma dos custos suplementares impostos pelas reduções efetuadas em cada atividade. Estes custos são calculados de duas formas diferentes conforme a atividade, ou seja, se o custo desta variar linearmente ou discretamente.

### 4.4.1 Custo com variação continua

Nestas atividades, o custo será ditado conforme a parte da função que esteja a ser considerada.

Como discutido anteriormente, se estivermos perante o primeiro ramo a única variável binária não nula será $b_A$. Desta forma podemos concluir que o custo será a soma entre o valor constante do primeiro ramo (o custo normal) e o custo adicional implicado pela primeira redução surgindo então o parâmetro $(CustoNormal \times b_A + c_A \times r_A)$.

Por outro lado, se estivermos perante o segundo ramo a variável binária não nula será $b_B$. Semelhante ao primeiro ramo o custo será na mesma a soma do valor constante com o valor do custo adicional implicado pela segunda redução. A diferença surge em que o valor constante decompõem-se no custo normal e no custo total de fazer a primeira redução. Desta forma surge o parâmetro $[(CustoNormal + c_A \times Mr_A) \times b_B + c_B \times r_B]$.

Por fim concluímos que o custo de cada atividade será:

$$Custo = (CustoNormal \times b_A + c_A \times r_A) + [(CustoNormal + c_A \times Mr_A) \times b_B + c_B \times r_B]$$

Ora, podemos agregar os parâmetros contendo o Custo Normal resultando na expressão:

$$Custo = CustoNormal \times (b_A + b_B) + c_A \times r_A + [c_A \times Mr_A \times b_B + c_B \times r_B]$$

Que por sua vez pode ser simplificada ainda mais a partir da restrição das variáveis binárias $(1 = b_A + b_B)$, ou seja:

$$Custo = CustoNormal + c_A \times r_A + [c_A \times Mr_A \times b_B + c_B \times r_B]$$

Desta forma o custo normal é uma constante na função objetivo, ou seja não é relevante para determinar a solução ótima do modelo misto final. Desta forma podemos omiti-lo ficando assim com a forma do custo suplementar de cada atividade:

$$Custo_{suplementar} = c_A \times r_A + [c_A \times Mr_A \times b_B + c_B \times r_B]$$

### 4.4.2 Custo com variação discreta

Nestas atividades o custo total corresponde simplesmente à soma do custo normal com o custo associado à redução discreta que esta a ser feita na atividade. Dito de outra forma, o custo variará de forma discreta conforme as variáveis binárias que indicam a redução que pode estar a ser realizada. Caso não esteja a ser realizada nenhuma redução, as variáveis terão valor nulo e por sua vez o custo coincidirá com o custo normal. Desta forma, tendo em conta que as actividades do projecto com estas variações possuem duas possibilidades e as atribuições feitas, chegamos a conclusão que o custo será dado por:

$$Custo = CustoNormal + c_A \times b_A + c_B \times b_B$$

Semelhante ao caso anterior, o custo normal é uma constante e é irrelevante para determinar a solução ótima, daí ser novamente omitido resultando:

$$Custo_{suplementar} = c_A \times b_A + c_B \times b_B$$

# Modelo de programação linear inteira mista

## 5.1 Função objetivo

$$z = \sum(Ca_i \times Ra_i + Ca_i \times Mra_i \times Bb_i + Cb_i \times Rb_i) + \sum(Ca_j \times Ba_j + Cb_j \times Bb_j)$$

$$i \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}, j \in \{7, 9\}$$

$Ca_i$ - fator do custo suplementar inicial da atividade $i$,
$Cb_i$ - fator do custo suplementar final da atividade $i$,
$Mra_i$ - valor máximo da redução inicial da duração da atividade $i$,

## 5.2 Restrições

### 5.2.1 Tempo máximo para terminar o projeto

Uma vez que temos que diminuir a duração do projeto em pelo menos 3 unidades de tempo, então o tempo total do projeto tem de ser menor que 29-3 unidades de tempo:

$$T_f \leq 26$$

$T_f$ - tempo de conclusão da atividade f (vértice do fim)

### 5.2.2 Relações de precedência

Para representar as relações de precedência entre os vértices criámos as seguintes restrições sobre os arcos ij:

$$T_j \geq T_i - R_i + D_i$$

$T_x$ - tempo de conclusão da atividade x, $\in \mathbb{N}^0$
$R_x$ - valor da redução da atividade x, $R_{x\in\{7,9\}} \in \mathbb{N}^0, R_{x\in\{0,2,3,4,5,6,10,11\}} \in \mathbb{R}^0+$,
$D_x$ - duração da atividade x

Nota: Para representar os vértices de Início e Fim utilizamos os carateres 'i' e 'f' respetivamente. Assim, $i \in [0, 11] \cup \{'i'\}, j \in [0, 11] \cup \{'f'\}$

### 5.2.3 Restrições às variáveis binárias $Ba$ e $Bb$

| Variação continua | Variação discreta |
|---|---|
| $1 = Ba_x + Bb_x$ | $1 \geq Ba_x + Bb_x$ |

### 5.2.4 Decomposição da redução $R$ nas reduções $Ra$ e $Rb$

| Variação continua | Variação discreta |
|---|---|
| $R_x = Ra_x + Rb_x + Mra_x \times Bb_x$ | $R_x = Ra_x + Rb_x$ |

### 5.2.5 Limites das reduções $Ra$ e $Rb$

| Variação continua | Variação discreta |
|---|---|
| $Ra_x \leq Mra_x \times Ba_x$ | $Ra_x = Mra_x \times Ba_x$ |
| $Rb_x \leq Mrb_x \times Bb_x$ | $Rb_x = Mrb_x \times Bb_x$ |

# Ficheiro de Input

```
// custo associado à redução das durações das actividades;
min: 200 ra0 + 100 bb0 + 100 rb0 + 1000 ra2 + 3000 bb2 + 500 rb2 +
 200 ra3 + 100 bb3 + 100 rb3 + 800 ra4 + 1600 bb4 + 400 rb4 +
  1600 ra5 + 800 bb5 + 800 rb5 + 180 ra6 + 180 bb6 + 90 rb6 +
   300 ba7 + 1100 bb7 + 200 ba9 + 400 bb9 +
    1000 ra10 + 500 bb10 + 500 rb10 + 600 ra11 + 600 bb11 + 300 rb11;


// tempo máximo para concluir o projecto
tf <= 26;  //(29-3 = 26)

//Restrições Mantidas
arco_23: t3 >= t2 - r2 + 7 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_04: t4 >= t0 - r0 + 4 ;
arco_42: t2 >= t4 - r4 + 9 ;
arco_53: t3 >= t5 - r5 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 - r3 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 - r4 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 - r5 + 4 ;
arco_i6: t6 >= ti + 0 ;
arco_74: t4 >= t7 - r7 + 6 ;
arco_9f: tf >= t9 - r9 + 2 ;
arco_67: t7 >= t6 - r6 + 5 ;
arco_610: t10 >= t6 - r6 + 5 ;
arco_119: t9 >= t11 - r11 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 - r10 + 8;

//Restrições Alteradas
arco_02: t2 >= t0 - r0 + 4 ;
arco_75: t5 >= t7 - r7 + 6 ;
arco_79: t9 >= t7 - r7 + 6 ;
arco_105: t5 >= t10 - r10 + 8 ;
arco_109: t9 >= t10 - r10 + 8 ;

//Restriçoes novas
r0 = ra0 + rb0 + 0.5 bb0;
r2 = ra2 + rb2 + 3 bb2;
r3 = ra3 + rb3 + 0.5 bb3;
r4 = ra4 + rb4 + 2 bb4;
r5 = ra5 + rb5 + 0.5 bb5;
r6 = ra6 + rb6 + 1 bb6;
r7 = ra7 + rb7;
r9 = ra9 + rb9;
r10 = ra10 + rb10 +  0.5 bb10;
r11 = ra11 + rb11 +  1 bb11;

1 = ba0 + bb0;
1 = ba2 + bb2;
1 = ba3 + bb3;
1 = ba4 + bb4;
1 = ba5 + bb5;
1 = ba6 + bb6;
1 >= ba7 + bb7;
1 >= ba9 + bb9;
1 = ba10 + bb10;
1 = ba11 + bb11;

ra0 <= 0.5 ba0;
ra2 <= 3 ba2;
ra3 <= 0.5 ba3;
ra4 <= 2 ba4;
ra5 <= 0.5 ba5;
ra6 <= 1 ba6;
ra7 = 1 ba7;
ra9 = 1 ba9;
ra10 <= 0.5 ba10;
ra11 <= 1 ba11;

rb0 <= 0.5 bb0;
rb2 <= 1 bb2;
rb3 <= 0.5 bb3;
rb4 <= 1 bb4;
rb5 <= 0.5 bb5;
rb6 <= 1 bb6;
rb7 = 2 bb7;
rb9 = 2 bb9;
rb10 <= 0.5 bb10;
rb11 <= 1 bb11;

int ra7, rb7, ra9, rb9 ;
bin ba0, bb0, ba2, bb2, ba3, bb3, ba4, bb4, ba5, bb5, ba6, bb6, ba7, bb7,
    ba9, bb9, ba10, bb10, ba11, bb11 ;
```

# Ficheiro de output

## 7.1 Registo do output

```
Model name:  'LPSolver' - run #1
Objective:   Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:       60 constraints,      62 variables,          148 non-zeros.
Sets:                                   0 GUB,                  0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.


Relaxed solution        1180 after       40 iter is B&B base.

Feasible solution       1180 after       40 iter,         0 nodes (gap 0.0%)

Optimal solution        1180 after       40 iter,         0 nodes (gap 0.0%).

Relative numeric accuracy ||*|| = 2.29446e-015

 MEMO:  lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
        In the total iteration count 40, 0 (0.0%) were bound flips.
        There were 1 refactorizations, 0 triggered by time and 1 by density.
        ... on average 40.0 major pivots per refactorization.
        The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 104 NZ entries, 1.0x largest
        basis.
        The maximum B&B level was 1, 0.0x MIP order, 1 at the optimal
        solution.
        The constraint matrix inf-norm is 3, with a dynamic range of 6.
        Time to load data was 0.003 seconds, presolve used 0.015 seconds,
        ... 0.031 seconds in simplex solver, in total 0.049 seconds.
```

## 7.2 Resultado

| Variables | MILP Feasible | result |
|---|---|---|
| | 420 | 420 |
| ba0 | 1 | 1 |
| ba10 | 1 | 1 |
| ba11 | 1 | 1 |
| ba2 | 1 | 1 |
| ba3 | 0 | 0 |
| ba4 | 1 | 1 |
| ba5 | 1 | 1 |
| ba6 | 0 | 0 |
| ba7 | 0 | 0 |
| ba9 | 0 | 0 |

| Variables | MILP Feasible | result |
|---|---|---|
| bb0 | 0 | 0 |
| bb10 | 0 | 0 |
| bb11 | 0 | 0 |
| bb2 | 0 | 0 |
| bb3 | 1 | 1 |
| bb4 | 0 | 0 |
| bb5 | 0 | 0 |
| bb6 | 1 | 1 |
| bb7 | 0 | 0 |
| bb9 | 0 | 0 |
| r0 | 0 | 0 |
| r10 | 0 | 0 |
| r11 | 0 | 0 |
| r2 | 0 | 0 |
| r3 | 1 | 1 |
| r4 | 0 | 0 |
| r5 | 0 | 0 |
| r6 | 2 | 2 |
| r7 | 0 | 0 |
| r9 | 0 | 0 |
| ra0 | 0 | 0 |
| ra10 | 0 | 0 |
| ra11 | 0 | 0 |
| ra2 | 0 | 0 |
| ra3 | 0 | 0 |
| ra4 | 0 | 0 |
| ra5 | 0 | 0 |
| ra6 | 0 | 0 |
| ra7 | 0 | 0 |
| ra9 | 0 | 0 |
| rb0 | 0 | 0 |
| rb10 | 0 | 0 |
| rb11 | 0 | 0 |
| rb2 | 0 | 0 |
| rb3 | 0,5 | 0,5 |
| rb4 | 0 | 0 |
| rb5 | 0 | 0 |
| rb6 | 1 | 1 |
| rb7 | 0 | 0 |
| rb9 | 0 | 0 |
| t0 | 0 | 0 |
| t10 | 3 | 3 |
| t11 | 11 | 11 |
| t2 | 18 | 18 |
| t3 | 25 | 25 |
| t4 | 9 | 9 |
| t5 | 21 | 21 |
| t6 | 0 | 0 |
| t7 | 3 | 3 |
| t9 | 18 | 18 |
| tf | 26 | 26 |
| ti | 0 | 0 |

# Discussão do resultado

## 8.1 Interpretação

Com o resultado obtido podemos concluir que a atividade 3 teve uma redução de 1 unidade (r3=1) e a atividade 6 uma redução de 2 unidades (r6=2). Ora, para além disto, sabemos que o custo destas reduções é 420 (uma vez que o resultado da nossa função objetivo é 420). Logo, o custo do projeto total com estas reduções é $420 + 10100 = 10520$.

## 8.2 Diagrama de Gantt resultante

Nas figuras seguintes podemos comparar o diagrama de Gantt inicial (figura 8.1) com o diagrama de Gantt resultante (figura 8.2)

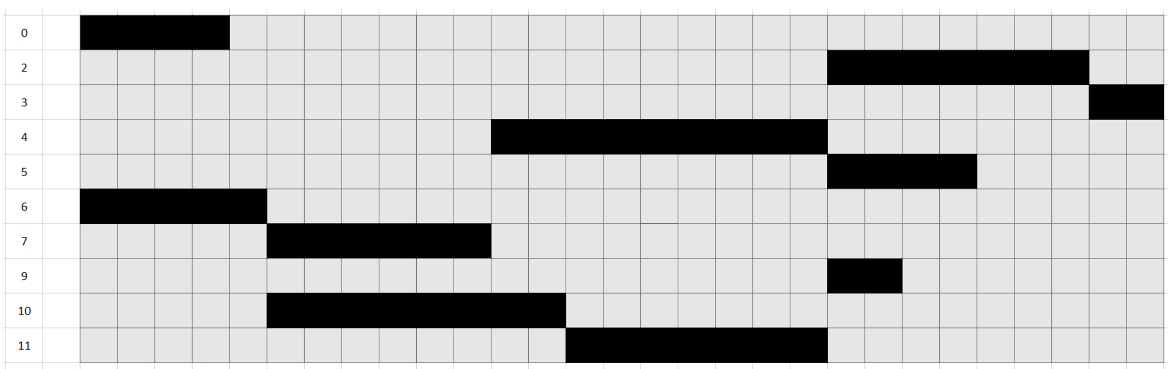



Figura 8.1: Diagrama de Gantt inicial

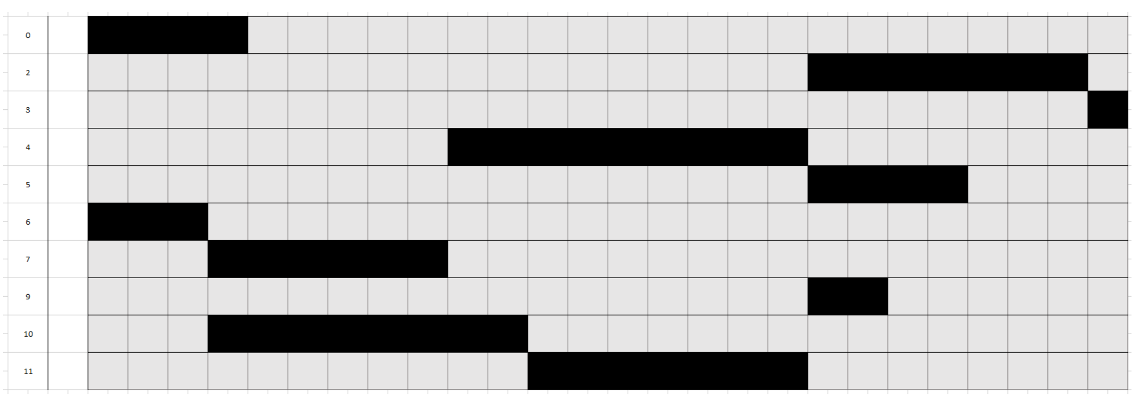


Figura 8.2: Diagrama de Gantt resultante

# Validação da solução ótima

## 9.1 Função Objetivo

Substituindo na função objetivo os valores das variáveis pelos resultados obtidos, a solução deve coincidir com a solução ótima obtida.
$200\times0+100\times0+100\times0+1000\times0+3000\times0+500\times0+200\times0+100\times1+100\times0,5+800\times0+1600\times0+400\times0+1600\times0+800\times0+800\times0+180\times0+180\times1+90\times1+300\times0+1100\times0+200\times0+400\times0+1000\times0+500\times0+500\times0+600\times0+600\times0+300\times0$

$= 0+0+0+0+0+0+0+100+50+0+0+0+0+0+0+0+180+90+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0$
$= 420$
pelo que a solução coincide com a solução ótima obtida.

## 9.2 Restrições

$Arco23$
$t3 \geq t2 - r2 + 7$
$25 \geq 18 - 0 + 7$
$25 \geq 25$

$Arcoi0$
$t0 \geq ti + 0;$
$0 \geq 0 + 0$
$0 \geq 0$

$Arco04$
$t4 \geq t0 - r0 + 4;$
$9 \geq 0 - 0 + 4$
$9 \geq 4$

$Arco42$
$t2 \geq t4 - r4 + 9;$
$18 \geq 9 - 0 + 9$
$18 \geq 9$

$Arco53$
$t3 \geq t5 - r5 + 4;$
$25 \geq 21 - 0 + 4$
$25 \geq 25$

$Arco3f$
$tf \geq t3 - r3 + 2;$
$26 \geq 25 - 1 + 2$
$26 \geq 26$

$Arco45$
$t5 \geq t4 - r4 + 9;$
$21 \geq 9 - 0 + 9$
$21 \geq 18$

$Arco5f$
$tf \geq t5 - r5 + 4;$
$26 \geq 21 - 0 + 4$
$26 \geq 25$

$Arcoi6$
$t6 \geq ti + 0;$
$0 \geq 0 + 0$
$0 \geq 0$

$Arco74$
$t4 \geq t7 - r7 + 6;$
$9 \geq 3 - 0 + 6$
$9 \geq 9$

$Arco9f$
$tf \geq t9 - r9 + 2;$
$26 \geq 18 - 0 + 2$
$26 \geq 20$

$Arco67$
$t7 \geq t6 - r6 + 5;$
$3 \geq 0 - 2 + 5$
$3 \geq 3$

$Arco610$
$t10 \geq t6 - r6 + 5;$
$3 \geq 0 - 2 + 5$
$3 \geq 3$

$Arco119$
$t9 \geq t11 - r11 + 7;$
$18 \geq 11 - 0 + 7$
$18 \geq 18$

$Arco1011$
$t11 \geq t10 - r10 + 8;$
$11 \geq 3 - 0 + 8$
$11 \geq 11$

$Arco02$
$t2 \geq t0 - r0 + 4;$
$18 \geq 0 - 0 + 4$
$18 \geq 4$

$Arco75$
$t5 \geq t7 - r7 + 6;$
$21 \geq 3 - 0 + 6$
$21 \geq 9$

$Arco79$
$t9 \geq t7 - r7 + 6;$
$18 \geq 3 - 0 + 6$
$18 \geq 9$

$Arco105$
$t5 \geq t10 - r10 + 8;$
$21 \geq 3 - 0 + 8$
$21 \geq 11$

$Arco109$
$t9 \geq t10 - r10 + 8;$
$18 \geq 3 - 0 + 8$
$18 \geq 11$

$r0 = ra0 + rb0 + 0.5 \times bb0;$
$0 = 0 + 0 + 0$
$0 = 0$

$r2 = ra2 + rb2 + 3 \times bb2;$
$0 = 0 + 0 + 0$
$0 = 0$

$r3 = ra3 + rb3 + 0.5 \times bb3;$
$1 = 0 + 0,5 + 0,5 \times 1$
$1 = 1$

$r4 = ra4 + rb4 + 2 \times bb4;$
$0 = 0 + 0 + 2 \times 0$
$0 = 0$

$r5 = ra5 + rb5 + 0.5 \times bb5;$
$0 = 0 + 0 + 0,5 \times 0$
$0 = 0$

$r6 = ra6 + rb6 + 1 \times bb6;$
$2 = 0 + 1 + 1 \times 1$
$2 = 2$

$r7 = ra7 + rb7;$
$0 = 0 + 0$
$0 = 0$

$r9 = ra9 + rb9;$
$0 = 0 + 0$
$0 = 0$

$r10 = ra10 + rb10 + 0.5 \times bb10;$
$0 = 0 + 0 + 0,5 \times 0$
$0 = 0$

$r11 = ra11 + rb11 + 1 \times bb11;$
$0 = 0 + 0 + 1 \times 0$
$0 = 0$

$1 = ba0 + bb0;$
$1 = 1 + 0$
$1 = 1$

$1 = ba2 + bb2;$
$1 = 1 + 0$

$1 = 1$

$1 = ba3 + bb3;$
$1 = 0 + 1$
$1 = 1$

$1 = ba4 + bb4;$
$1 = 1 + 0$
$1 = 1$

$1 = ba5 + bb5;$
$1 = 1 + 0$
$1 = 1$

$1 = ba6 + bb6;$
$1 = 0 + 1$
$1 = 1$

$1 \geq ba7 + bb7;$
$1 \geq 0 + 0$
$1 \geq 1$

$1 \geq ba9 + bb9;$
$1 \geq 0 + 0$
$1 \geq 0$

$1 = ba10 + bb10;$
$1 = 1 + 0$
$1 = 1$

$1 = ba11 + bb11;$
$1 = 1 + 0$
$1 = 1$

$ra0 \leq 0,5 \times ba0;$
$0 \leq 0,5 \times 1$
$0 \leq 0,5$

$ra2 \leq 3 \times ba2;$
$0 \leq 3 \times 1$
$0 \leq 3$

$ra3 \leq 0.5 \times ba3;$
$0 \leq 0,5 \times 0$
$0 \leq 0$

$ra4 \leq 2 \times ba4;$
$0 \leq 2 \times 1$
$0 \leq 2$

$ra5 \leq 0.5 \times ba5;$
$0 \leq 0,5 \times 1$
$0 \leq 0,5$

$ra6 \leq 1 \times ba6;$
$0 \leq 1 \times 0$
$0 \leq 0$

$ra7 = 1 \times ba7;$
$0 = 1 \times 0$
$0 = 0$

$ra9 = 1 \times ba9;$
$0 = 1 \times 0$
$0 = 0$

$ra10 \leq 0.5 \times ba10;$
$0 \leq 0,5 \times 1$
$0 \leq 0,5$

$ra11 \leq 1 \times ba11;$
$0 \leq 1 \times 1$
$0 \leq 1$

$rb0 \leq 0.5 \times bb0;$
$0 \leq 0,5 \times 0$
$0 \leq 0$

$rb2 \leq 1 \times bb2;$
$0 \leq 1 \times 0$
$0 \leq 0$

$rb3 \leq 0.5 \times bb3;$
$0,5 \leq 0,5 \times 1$
$0,5 \leq 0,5$

$rb4 \leq 1 \times bb4;$
$0 \leq 1 \times 0$
$0 \leq 0$

$rb5 \leq 0.5 \times bb5;$
$0 \leq 0,5 \times 0$
$0 \leq 0$

$rb6 \leq 1 \times bb6;$
$1 \leq 1 \times 1$
$1 \leq 1$

$rb7 = 2bb7;$
$0 = 2 \times 0$
$0 = 0$

$rb9 = 2bb9;$
$0 = 2 \times 0$
$0 = 0$

$rb10 \leq 0.5 \times bb10;$
$0 \leq 0,5 \times 0$
$0 \leq 0$

$rb11 \leq 1 \times bb11;$
$0 \leq 1 \times 0$
$0 \leq 0$