Métodos Numéricos e Otimização não Linear

Trabalho 1 | Versão A | Grupo 22

Eduardo Coelho, Henrique Neto, Leonardo Marreiros e
Paulo Ricardo Pereira

e-mail: {a89616,a89618,a89537,a86475}@alunos.uminho.pt

Resumo

Este trabalho tem como objetivo resolver um problema de equações ou sistemas de equações não lineares. Para isso, usar-se-á a rotina *fsolve* do **MATLAB**.

1 Problema

Em engenharia ambiental, a equação que se segue pode ser usada para calcular o nível de oxigénio, c, existente num rio a jusante de um local de descarga de esgoto,

$$c = 10 - 15(e^{-0.1x} - e^{-0.5x}),$$

em que x representa a distância a partir do local de descarga. Usando um método à sua escolha, determine o local (a partir da descarga) em que o nível de oxigénio atinge o valor 4.

Sugestão: Sabe-se que o referido local se encontra, no máximo, a 5 km a jusante do local de descarga. [1]

2 Formulação do problema

Substituindo $c = 4$ em

$$10 - 15(e^{-0.1x} - e^{-0.5x}) = c$$

obtemos:

$$\begin{aligned} 10 - 15(e^{-0.1x} - e^{-0.5x}) &= 4 \\ \Leftrightarrow 10 - 15(e^{-0.1x} - e^{-0.5x}) - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &= 0 \end{aligned}$$

[1] `http://www.mat.uc.pt/~alma/publicat/coursenotes/MatematicaComputacional.pdf`

3 Ficheiro MATLAB

Aqui está a nossa função definida:

```
function [f] = tp1(x)

f=10-15*(exp(-0.1*x)) +15*(exp(-0.5*x))-4;
end
```

Criámos também um pequeno *script* para mudar o valor inicial e parâmetros do **fsolve** mais facilmente:

```
x0 = 0;
options = optimset('Display','iter','PlotFcn',@optimplotfirstorderopt)
[x,fval,exitflag,output] = fsolve ('tp1',x0,options)
```

4 Testes Computacionais

Na nossa primeira tentativa, usamos, como aproximação inicial para a distância, $x_1 = 5$, que, segundo o enunciado do problema, é a distância máxima em que o referido nível de oxigénio se encontra. Ora, como podemos ver na figura 1, a aproximação inicial convergiu para $x^* \approx 8.8710$.

```
                                         Norm of      First-order   Trust-region
 Iteration  Func-count     f(x)          step         optimality    radius
     0          2         3.48451                         0.549           1
     1          4         2.20632             1           0.668           1
     2          6       0.0389117           2.5           0.105         2.5
     3          8     7.84109e-07      0.369304        0.000468        6.25
     4         10     5.89642e-16    0.00167412        1.28e-08        6.25

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

ans =

    8.8710
```

Figura 1: Resultado do **fsolve** com aproximação inicial $x_1 = 5$

No entanto, é dito que o local se encontra, no máximo, a 5 km do local de descarga. Isto indica que a função tem, pelo menos, duas raízes. A raiz que procuramos encontra-se no intervalo $[0, 5]$.

Assim, decidimos mudar a nossa aproximação inicial para o valor mínimo possível no contexto do nosso problema, ou seja, $x_1 = 0$, pois uma distância não pode ser negativa.

```
                                         Norm of      First-order   Trust-region
 Iteration  Func-count     f(x)          step         optimality    radius
     0          2              36                          36               1
     1          4         2.32684              1          4.87               1
     2          6       0.0506208       0.477923         0.515             2.5
     3          8     6.23256e-05      0.0983283        0.0168             2.5
     4         10     1.17399e-10     0.00370821       2.3e-05             2.5
     5         12     4.16364e-22    5.10336e-06      4.33e-11             2.5

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

ans =

    1.5800
```

Figura 2: Resultado do fsolve com aproximação inicial $x_1 = 0$

Como podemos observar pela figura 2, desta vez, a aproximação inicial convergiu para $x^* \approx 1.5800$, o que cumpre a restrição de pertencer ao intervalo [0, 5]. Após a análise gráfica da função, através da rotina **fplot** do MATLAB (figura 3), decidimos diminuir os parâmetros **TolX** e **TolFun** do *optimset* para testarmos a qualidade desta solução. Chegámos à conclusão que esta é uma boa solução, pois, após várias mudanças destes parâmetros, o resultado foi sempre o mesmo, apesar de o número de iterações ter aumentado para 6 com os valores $TolX = 1 \times 10^{-10}$ e $TolFun = 1 \times 10^{-20}$.

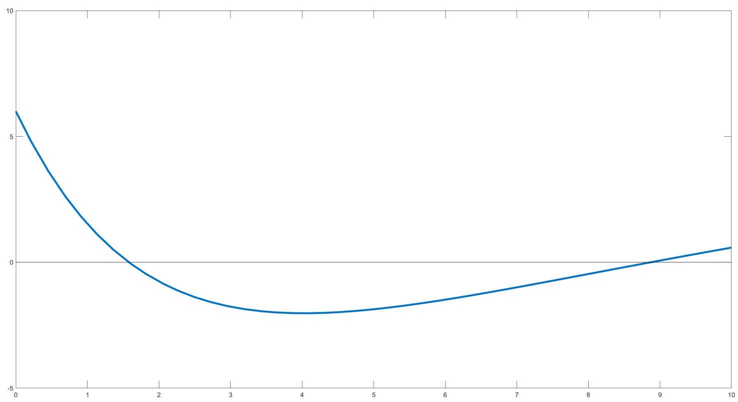

Figura 3: Gráfico da função

5 Resultado

Com uma solução válida, mediante o problema, de $x^* \approx 1.5800$, podemos concluir que, a, aproximadamente, 1.58 km de distância do local de descarga do esgoto, o nível de oxigénio atinge o valor 4.

Como teste final, executamos a rotina $fzero(@tp1, 0)$, cujo resultado foi 1.5800, o que confirma a nossa resolução do problema.