2004학년도 대학수학능력시험 문제지

제 2 교시 수리 영역

자연계 | 성명 | 수험 번호 — | 홀수형 |

○ 먼저 수험생이 선택한 계열의 문제인지 확인하시오.

○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.

○ 답안지에 수험 번호, 응시 계열, 문형, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점 또는 3점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_3 12 + \log_3 9 - \log_3 4$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $x = \sqrt{2}$ 일 때, $\dfrac{3}{x - \dfrac{x-1}{x+1}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}+1$ ② $2(\sqrt{2}+1)$ ③ $3(\sqrt{2}+1)$
④ $4(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $5(\sqrt{2}+1)$

3. $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ 일 때, $\sin\theta \cdot \tan\theta$ 의 값은? [2점]

① $-\dfrac{10}{3}$ ② $-\dfrac{8}{3}$ ③ $-\dfrac{5}{3}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

4. 부등식 $x \leqq \dfrac{10}{x-3}$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = 3$$

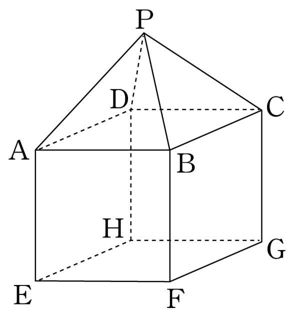
을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$의 값은? [2점]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{6}$

6. 직선 $y=x$에 대한 대칭변환 f와 원점을 중심으로 하는 회전변환 g가 있다. 합성변환 $g \circ f$에 의해 점 $(1,\ 0)$이 점
$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨졌을 때, 이 합성변환 $g \circ f$에 의해 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$으로 옮겨지는 점은? [2점]

① $(1,\ 1)$　② $(-1,\ -1)$　③ $(0,\ 1)$
④ $(0,\ -1)$　⑤ $(-1,\ 0)$

7. 오른쪽 그림과 같이 정육면체 위에 정사각뿔을 올려놓은 도형이 있다. 이 도형의 모든 모서리의 길이가 2이고, 면 PAB와 면 AEFB가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) [3점]



① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$　② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

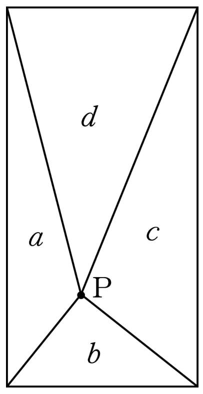
8. 두 실수 a와 b가 1이 아닌 양수일 때, 함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 항상 만나는 경우를 <보기>에서 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $a>1$이고 $b>1$
ㄴ. $a>1$이고 $0<b<1$
ㄷ. $0<a<1$이고 $0<b<1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

9. 점 P가 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 2인 직사각형의 내부에서 움직이고 있다. 그림과 같이 점 P와 각 꼭지점을 연결하였을 때 생기는 네 삼각형의 넓이를 a, b, c, d 라 하자.



행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 점 P의 자취의 길이는? [3점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $\sqrt{5}$　⑤ 3

10. z와 w가 복소수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $z=\overline{w}$이면 $|z+w| \leqq 2|z|$이다.
ㄴ. $z=iw$이면 $|z-w|=\sqrt{2}\,|z|$이다.
ㄷ. $z=-\overline{w}$이면 $|z+w| \leqq |z|^2$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

11. 두 함수 $f(x)=[x^2]$과 $g(x)=[x]^2$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2})$
ㄴ. x가 정수이면 $f(x)=g(x)$이다.
ㄷ. $f(x)=g(x)$이면 x는 정수이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

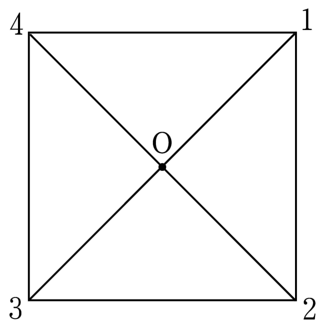
12. 집합 $A(k)$를 자연수 k를 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이라 하자.
예를 들면, $k=2$인 경우에 $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32, \cdots$ 이므로 $A(2)=\{2, 4, 6, 8\}$이다.
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $1 \in A(3)$
ㄴ. $A(6) \subset A(3)$
ㄷ. $A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다. (단, $n>1$)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

13. 아래 그림과 같이 정사각형의 네 꼭지점을 각각 1, 2, 3, 4라 하고, 두 대각선의 교점을 O라 하자.



이 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 90° 회전시키면 1은 2의 위치로, 2는 3의 위치로, 3은 4의 위치로, 4는 1의 위치로 이동한다. 이러한 꼭지점 사이의 이동을 함수 f_1로 나타내면,

$$f_1(1)=2,\ f_1(2)=3,\ f_1(3)=4,\ f_1(4)=1$$

이다. 이와 같은 방법으로 이 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 90°, 180°, 270°, 360° 회전시켰을 때, 꼭지점 사이의 이동을 나타내는 함수를 각각 f_1, f_2, f_3, f_4라 하자.
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, f^{-1}은 f의 역함수이다.) [3점]

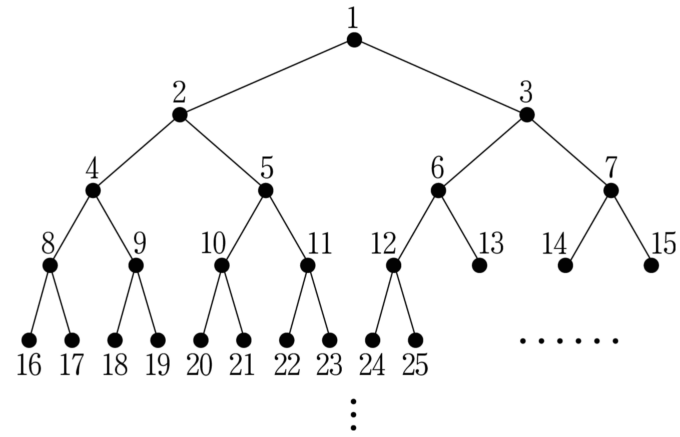
<보 기>
ㄱ. $f_2 \circ f_3 = f_4$
ㄴ. $f_1^{-1} = f_3$
ㄷ. $f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [3점]

① 58 ② 56 ③ 54
④ 52 ⑤ 50

15. 아래 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 $N(a, b)$라 하자. 예를 들면, $N(4, 6)=4$이고 $N(12, 27)=3$이다.
$N(32, 33)+N(32, 34)+N(32, 35)+\cdots+N(32, 63)$의 값은? [3점]

① 196 ② 258 ③ 270
④ 312 ⑤ 344

16. 함수 $f(x)=x^2-4x$에 대하여 좌표평면 위의 점 (a, b)가 부등식 $y>f(x)$의 영역에 속할 때, <보기>에서 항상 성립하는 부등식을 모두 고른 것은? [3점]

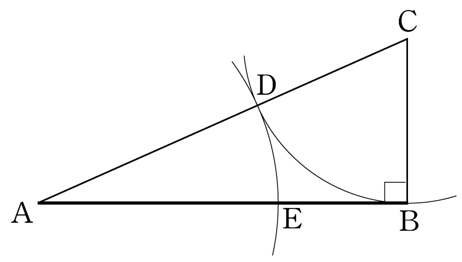
<보 기>
ㄱ. $\frac{b}{2} > f\left(\frac{a}{2}\right)$
ㄴ. $2b > f(2a)$
ㄷ. $-b < f(-a)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

17. 다음 순서로 선분 AB 위에 점 E를 작도하여 보자.

(i) 점 B에서 선분 AB에 수직인 직선을 그어 그 위에 $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$인 점 C를 잡는다.

(ii) 선분 AC 위에 $\overline{CD} = \overline{CB}$인 점 D를 잡는다.



(iii) 선분 AB 위에 $\overline{AE} = \overline{AD}$인 점 E를 잡는다.

그러면 점 E는 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$를 만족시킨다.

아래 증명은 이 성질을 증명한 것이다.

<증명>

△ABC에서 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AC} = \boxed{\quad(가)\quad}\ \overline{BC}$$

따라서

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \boxed{\quad(나)\quad}\ \overline{BC}$$

$$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = \boxed{\quad(다)\quad}\ \overline{BC}$$

이므로

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$$

위의 빈칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2점]

	(가)	(나)	(다)
①	2	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$(3+\sqrt{5})$
②	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{5}+1)$
③	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
④	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}-1)$	$(3-\sqrt{5})$
⑤	3	2	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

18. 다음은 두 자연수 x와 y에 대하여 x^2+xy+y^2이 10의 배수이면 x와 y가 어떤 성질을 가짐을 증명한 것이다.

<증명>

$N = x^2+xy+y^2$이라 하고 N이 10의 배수라 하자.

N이 10의 배수이므로 x, y는 모두 짝수이다.

만일 x, y 중 하나만 10의 배수이면 N은 10의 배수가 아니다.

한편, x, y가 모두 10의 배수가 아니면 x^2과 y^2의 일의 자리의 수는 4 또는 6이다.

(i) x^2의 일의 자리의 수가 4이고 y^2의 일의 자리의 수가 6인 경우에 x의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 2 또는 8 뿐이고, y의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 4 또는 6 뿐이다. 따라서 xy의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 $\boxed{\quad(가)\quad}$ 뿐이므로 N은 10의 배수가 아니다.

(ii) x^2의 일의 자리의 수가 6이고 y^2의 일의 자리의 수가 4인 경우에는 (i)의 경우와 마찬가지로 N은 10의 배수가 아니다.

(iii) x^2과 y^2의 일의 자리의 수가 모두 4이거나 모두 6인 경우에 (i)의 경우처럼 하면 xy의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 $\boxed{\quad(나)\quad}$ 뿐이므로 N은 10의 배수가 아니다.

따라서 x^2+xy+y^2이 10의 배수이면 $\boxed{\quad(다)\quad}$ 10의 배수이다.

위의 빈칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	4 또는 6	2 또는 8	x, y는 모두
②	4 또는 6	4 또는 6	x, y는 모두
③	2 또는 8	4 또는 6	x, y는 모두
④	2 또는 8	2 또는 8	x, y 중 하나만
⑤	2 또는 4	6 또는 8	x, y 중 하나만

19. 두 타원이 점 F를 한 초점으로 공유하고 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 두 타원의 장축의 길이가 각각 16, 24이고, 두 타원의 나머지 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때,
$\left|\overline{\mathrm{PF}_1}-\overline{\mathrm{PF}_2}\right|+\left|\overline{\mathrm{QF}_1}-\overline{\mathrm{QF}_2}\right|$의 값은? [3점]

① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

20. 좌표평면 위의 점 A가 부등식 $y \geqq \frac{1}{4}x^2+3$이 나타내는 영역에서 움직일 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$의 종점 B가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ 3

21. 함수 $y=\dfrac{16}{x}$의 그래프와 함수 $y=-x^2+a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

22. 다음 표는 10진법의 수를 16진법의 수로 나타낸 것이다.

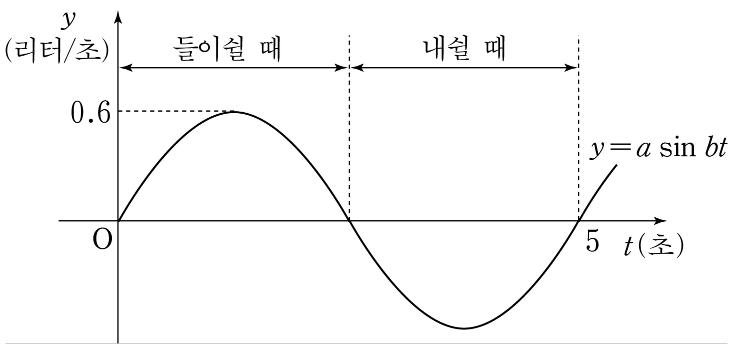
10진법	0	1	⋯	9	10	11	12	13	14	15
16진법	0	1	⋯	9	A	B	C	D	E	F

컴퓨터에서 색을 표현하는 RGB 방식에서는 빛의 삼원색인 빨강(R), 초록(G), 파랑(B)의 양을 여섯 자리 문자열로 지정하여 원하는 색을 얻는다. 여섯 자리 문자열 중 처음 두 자리는 R의 양, 다음 두 자리는 G의 양, 마지막 두 자리는 B의 양을 나타낸다. 이때, 각각의 두 자리 문자열은 0부터 255까지의 정수에 대응되는 16진법의 수이다.
예를 들어, 문자열 FF021A를 입력하였다고 하자.
FF, 02, 1A는 각각 16진법의 수 FF, 2, 1A를 나타내고, 이것은 각각 10진법의 수 255, 2, 26에 대응된다. 따라서, R, G, B의 양이 각각 255, 2, 26인 색을 얻게 된다.
R, G, B의 양이 각각 100, 245, 64인 색을 얻기 위하여 입력해야 할 문자열은? [2점]

① 80F840 ② 64F540 ③ 64F840
④ 40F580 ⑤ 80F380

23. 다음 그래프는 어떤 사람이 정상적인 상태에 있을 때 시각에 따라 호흡기에 유입되는 공기의 흡입률(리터/초)을 나타낸 것이다.

숨을 들이쉬기 시작하여 t초일 때 호흡기에 유입되는 공기의 흡입률을 y라 하면, 함수 $y = a \sin bt$ (a, b는 양수)로 나타낼 수 있다. 이때, y의 값은 숨을 들이쉴 때는 양수, 내쉴 때는 음수가 된다.



이 함수의 주기가 5초이고, 최대 흡입률이 0.6(리터/초)일 때, 숨을 들이쉬기 시작한 시각으로부터 처음으로 흡입률이 -0.3(리터/초)이 되는 데 걸리는 시간은? [3점]

① $\frac{35}{12}$ 초　② $\frac{37}{12}$ 초　③ $\frac{30}{11}$ 초
④ $\frac{31}{11}$ 초　⑤ $\frac{35}{31}$ 초

24. 지면에 정지해 있던 열기구가 수직 방향으로 출발한 후 t분일 때, 속도 $v(t)$(m/분)를

$$v(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 20) \\ 60 - 2t & (20 \leq t \leq 40) \end{cases}$$

라 하자. 출발한 후 $t = 35$분일 때, 지면으로부터 열기구의 높이는? (단, 열기구는 수직 방향으로만 움직이는 것으로 가정한다.) [3점]

① 225 m　② 250 m　③ 275 m
④ 300 m　⑤ 325 m

주관식 문항 (25～30)

25. 역행렬이 존재하는 두 행렬 A와 B가

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} B$$

를 만족시킬 때, 행렬 $AB^{-1} + BA^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [2점]

26. $\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x+11} - 3}$의 값을 구하시오. [2점]

27. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{3}\,i$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$ 이다.) [3점]

28. 세 집합 A, B, C 에 대하여

$$n(A)=14,\ n(B)=16,\ n(C)=19,$$
$$n(A\cap B)=10,\ n(A\cap B\cap C)=5$$

일 때, $n(C-(A\cup B))$ 의 최소값을 구하시오.
(단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.) [3점]

29. x 축에 접하는 서로 다른 두 원이 점 A$(2,\ 5)$ 와 점 B$(4,\ 1)$ 에서 만날 때, 두 원의 중심을 지나는 직선과 공통외접선과의 교점의 x 좌표를 구하시오. [3점]

30. 곡선 $y=\frac{1}{2}\ln x$ 와 x 축, y 축 및 직선 $y=\ln 2$ 로 둘러싸인 영역을 y 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V 라 할 때, $\frac{V}{\pi}$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [3점]

＊ 확인 사항

○ 문제지와 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 문제지와 답안지를 함께 제출합니다. 답안지는 오른쪽에 문제지는 왼쪽에 놓으시오.