

제 2 교시

## 수리 영역

나 형

성명

수험 번호

홀수형

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험 번호를 써 넣고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.  
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1.  $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{5}{6}}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{25}$     ②  $\frac{1}{5}$     ③ 1    ④ 5    ⑤ 25

2. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 에 대하여  
 $2A + X = AB$ 를 만족시키는 행렬  $X$ 는? [2점]

- ①  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$     ②  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$     ③  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$   
 ④  $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$     ⑤  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = 4a_3, \quad a_2 + a_4 = 4$$

가 성립할 때,  $a_6$ 의 값은? [2점]

- ① 5    ② 8    ③ 11    ④ 13    ⑤ 16

4. 사건 전체의 집합  $S$ 의 두 사건  $A$ 와  $B$ 는 서로

배반사건이고,  $A \cup B = S$ ,  $P(A) = 2P(B)$ 일 때,  $P(A)$ 의  
 값은? [3점]

- ①  $\frac{2}{3}$     ②  $\frac{1}{2}$     ③  $\frac{2}{5}$     ④  $\frac{1}{3}$     ⑤  $\frac{1}{4}$

5. 확률변수  $X$ 가 이항분포  $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따를 때, 확률변수  $3X-4$ 의 표준편차는? [3점]

- ① 12      ② 15      ③ 18      ④ 21      ⑤ 24

6. 다음 세 조건을 만족시키는 영행렬이 아닌 모든 이차정사각행렬  $A, B$ 에 대하여  $B^3+2EA^3$ 과 항상 같은 행렬은? (단,  $E$ 는 단위행렬이다.) [3점]

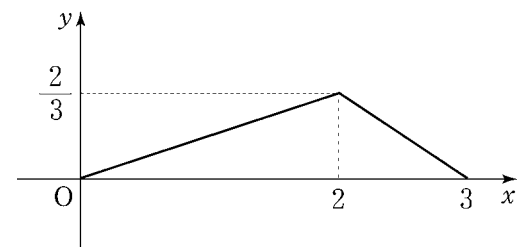
- (가)  $AB=EA$   
(나)  $(E-B)^2=E-B$   
(다)  $AB=-B$

- ①  $2A$       ②  $-A$       ③  $E$       ④  $2B$       ⑤  $-B$

7. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $n < a_n < n+1$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

8. 연속확률변수  $X$ 가 갖는 값의 범위가  $0 \leq X \leq 3$ 이고, 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다.



$P(m \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 3)$ 일 때,  $m$ 의 값은?  
(단,  $0 < m < 2$ 이다.) [3점]

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ③ 1      ④  $\sqrt{2}$       ⑤  $\sqrt{3}$

9. 부등식  $a^m < a^n < b^n < b^m$ 을 만족시키는 양수  $a, b$ 와 자연수  $m, n$ 에 대하여 옳은 것은? [3점]

- ①  $a < 1 < b, m > n$       ②  $a < 1 < b, m < n$   
 ③  $a < b < 1, m < n$       ④  $1 < a < b, m > n$   
 ⑤  $1 < a < b, m < n$

10. 오른쪽 그림은 중심이  $(1, 1)$ 이고 반지름의 길이가 각각  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$ 인 6개의 반원을 그린 것이다. 세 함수

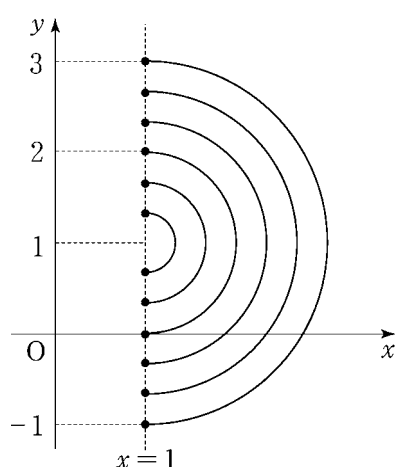
$$y = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$y = 3^x$$

의 그래프가 반원과 만나는 교점의 개수를 각각  $a, b, c$ 라 하자.  $a, b, c$ 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?  
 (단,  $x \geq 1$ 이고 반원은 지름의 양 끝점을 포함한다.) [4점]

- ①  $a < b < c$       ②  $a < c < b$       ③  $b < c < a$   
 ④  $c < a < b$       ⑤  $c < b < a$



11. 양수  $a$ 에 대하여  $\log a$ 의 지표와 가수를 각각  $f(a), g(a)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ.  $f(2006) = 3$

ㄴ.  $g(2) + g(6) = g(12) + 1$

ㄷ.  $f(ab) = f(a) + f(b)$ 이면  $g(ab) = g(a) + g(b)$ 이다.

- ① ㄱ      ② ㄱ, ㄴ      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 좌표평면에서 두 점  $A(1, \sqrt{3}), B(1, -\sqrt{3})$ 에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 점  $P(x, y)$ 가 나타내는 도형 전체의 길이는? [4점]

(가)  $x^2 + y^2 = 4$

(나) 선분 AB 위의 임의의 점  $(1, a)$ 에 대하여  
 행렬  $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 는 역행렬을 갖는다.

- ①  $\frac{1}{3}\pi$     ②  $\frac{1}{2}\pi$     ③  $\pi$     ④  $\frac{4}{3}\pi$     ⑤  $\frac{3}{2}\pi$

13. 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 이 각각

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{(n-1)\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수  $k$ 에 대하여  $a_{3k} \leq 0$ 이다.

ㄴ. 모든 자연수  $k$ 에 대하여  $a_{4k-1} + b_{4k-1} = 0$ 이다.

ㄷ.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄷ  
④ ㄱ, ㄴ                ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게가 정규분포

$N(11, 2^2)$ 을 따른다고 하자.  $A$ 와  $B$  두 사람이 크기가 4인 표본을 각각 독립적으로

임의추출하였다.  $A$ 와  $B$ 가

추출한 표본의 평균이 모두

10 이상 14 이하가 될 확률을

오른쪽 표준정규분포표를

이용하여 구한 것은? [3점]

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
1	0.3413
2	0.4772
3	0.4987

- ① 0.8123                ② 0.7056                ③ 0.6587  
④ 0.5228                ⑤ 0.2944

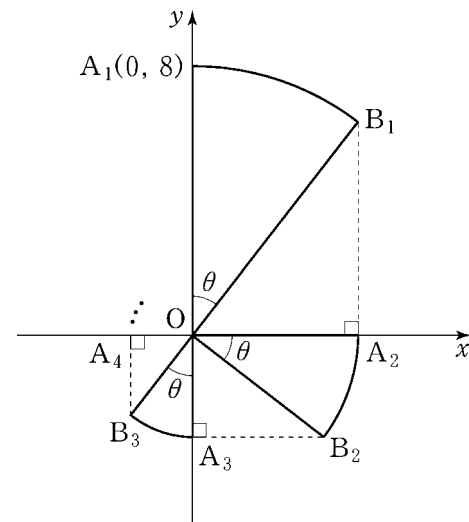
15. 그림과 같이 원점  $O$ 와 점  $A_1(0, 8)$ 을 이은 선분  $OA_1$ 을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가  $\theta$ 인 부채꼴  $OA_1B_1$ 을 그린다.

점  $B_1$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $A_2$ 라 하고, 반지름이 선분  $OA_2$ 이고 중심각의 크기가  $\theta$ 인 부채꼴  $OA_2B_2$ 를 그린다.

점  $B_2$ 에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을  $A_3$ 이라 하고, 반지름이 선분  $OA_3$ 이고 중심각의 크기가  $\theta$ 인 부채꼴  $OA_3B_3$ 을 그린다.

이와 같이 시계 방향으로  $x$ 축과  $y$ 축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴  $OA_nB_n$ 의 호  $A_nB_n$ 의 길이를  $l_n$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$ 일 때,  $\sin \theta$ 의 값은?

(단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



- ①  $\frac{1}{7}$                       ②  $\frac{1}{6}$                       ③  $\frac{1}{5}$                       ④  $\frac{1}{4}$                       ⑤  $\frac{1}{3}$

16. 다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1)  $n=1$ 일 때, (좌변) = 2, (우변) = 2 이므로  
주어진 등식은 성립한다.

(2)  $n=m$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{m(5m+3)}{4} \end{aligned}$$

이다.  $n=m+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) + \frac{\text{(가)}}{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{\text{(나)}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m (5k-3) + \frac{\text{(가)}}{m+1} \\ &= \frac{m(5m+3)}{4} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \left( \frac{\text{(다)}}{k} \right) \\ &= \frac{(m+1)(5m+8)}{4} \end{aligned}$$

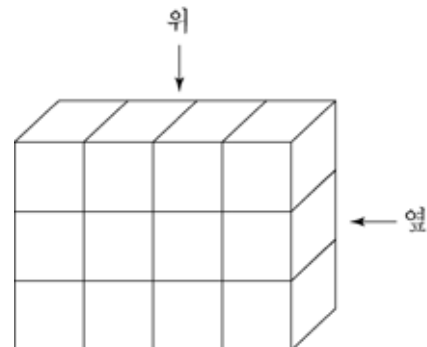
그러므로  $n=m+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

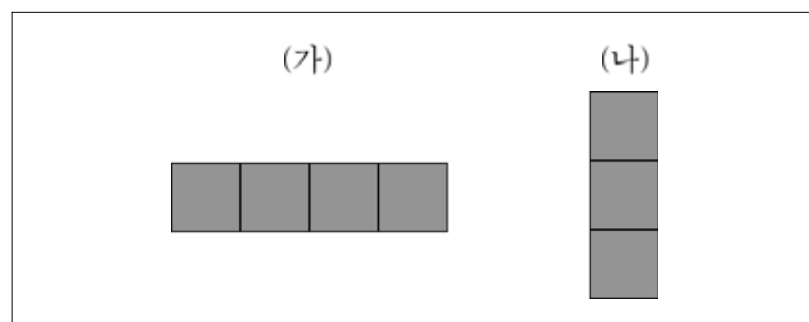
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

(가)	(나)	(다)
① $5m-3$	$m$	$5k+2$
② $5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③ $5m+2$	$m$	$5k-3$
④ $5m+2$	$m$	$5k+2$
⑤ $5m+2$	$m+1$	$5k-3$

17. 다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [4점]



- ① 54    ② 48    ③ 42    ④ 36    ⑤ 30

## 단답형

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$  의 값을 구하시오. [3점]

19. 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_1=1$ ,  $a_2=4$ ,  $a_3=10$  이고, 수열  $\{a_{n+1}-a_n\}$ 은 등비수열일 때,  $a_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 두 양수  $a$ ,  $b$ 에 대하여

$$\begin{cases} ab=27 \\ \log_3 \frac{b}{a} = 5 \end{cases}$$

가 성립할 때,  $4\log_3 a + 9\log_3 b$ 의 값을 구하시오. [3점]

21. 방정식  $4^x - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$ 의 두 근을  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 할 때,  $2^{2\alpha} + 2^{2\beta}$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 다음은 확률변수  $X$ 의 확률분포표이다.

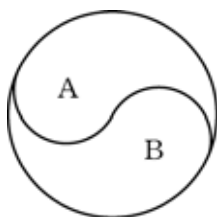
$X$	$k$	$2k$	$4k$	계
$P(X=x)$	$\frac{4}{7}$	$a$	$b$	1

$\frac{4}{7}$ ,  $a$ ,  $b$ 가 이 순서로 등비수열을 이루고  $X$ 의 평균이 24일 때,  $k$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 각 면에 1, 1, 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다.

이 상자를 던져서 밑면에 적힌 숫자가 1이면 오른쪽 그림의 영역 A에, 숫자가 2이면 영역 B에 색을 칠하기로 하였다.

두 영역에 색이 모두 칠해질 때까지 이 상자를 계속 던질 때, 3번째에 마칠 확률을  $\frac{q}{p}$  라 하자.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



24. 정의역이  $\{x | 1 \leq x \leq 81\}$ 인 함수

$$y = (\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x) + 2\log_3 x + 10$$

의 최대값을  $M$ , 최소값을  $m$ 이라 할 때,  $M+m$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. 어느 물탱크에 서식하고 있는 박테리아를 제거하기 위하여 약품을 투여하려고 한다. 물탱크에 있는 물 1mL당 초기 박테리아 수를  $C_0$ , 약품을 투여한 지  $t$ 시간이 지나는 순간 1mL당 박테리아 수를  $C$ 라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 하자.

$$\log \frac{C}{C_0} = -kt \quad (k \text{는 양의 상수})$$

물 1mL당 초기 박테리아 수가  $8 \times 10^5$ 이고, 약품을 투여한 지 3시간이 지나는 순간 1mL당 박테리아 수는  $2 \times 10^5$ 이 된다고 한다. 약품을 투여한 지  $a$ 시간 후에 처음으로 1mL당 박테리아 수가  $8 \times 10^3$  이하가 되었다.  $a$ 의 값을 구하시오. (단,  $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.) [4점]

#### 5지선다형

26. 어느 학급은 남학생 18명, 여학생 16명으로 이루어져 있다. 이 학급의 모든 학생은 중국어와 일본어 중 한 과목만 수업을 받는다고 한다. 남학생 중에서 중국어 수업을 받는 학생은 12명이고, 여학생 중에서 일본어 수업을 받는 학생은 7명이다. 이 학급에서 선택된 한 학생이 중국어 수업을 받는다고 할 때, 이 학생이 여학생일 확률은? [3점]

- ①  $\frac{1}{7}$     ②  $\frac{2}{7}$     ③  $\frac{3}{7}$     ④  $\frac{4}{7}$     ⑤  $\frac{5}{7}$

27. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 집합  $S, T$ 를

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \text{은 자연수} \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \text{은 자연수} \right\},$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S \text{이면 } \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in T \text{ 이다.}$$

$$\neg. \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in S \text{ 이면 } \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \in S \text{ 이다.}$$

$$\neg. \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in T \text{ 이면}$$

$$\text{행렬 } \begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix} \text{는 역행렬을 갖는다.}$$

- ①  $\neg$                       ②  $\neg, \neg$                       ③  $\neg, \neg$   
 ④  $\neg, \neg$                       ⑤  $\neg, \neg, \neg$

28. 1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는? [4점]

- ① 43      ② 41      ③ 39      ④ 37      ⑤ 35

29.  $p \geq 2$ 인 자연수  $p$ 에 대하여 수열  $\{a_n\}$ 이 다음 세 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_1 = 0$$

$$(나) \ a_{k+1} = a_k + 1 \ (1 \leq k \leq p-1)$$

$$(다) \ a_{k+p} = a_k \ (k=1, 2, 3, \dots)$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. a_{2k} = 2a_k$$

$$\neg. a_1 + a_2 + \dots + a_p = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\neg. a_p + a_{2p} + \dots + a_{kp} = k(p-1)$$

- ①  $\neg$                       ②  $\neg$                       ③  $\neg$   
 ④  $\neg, \neg$                       ⑤  $\neg, \neg, \neg$

### 단답형

30. 다항식  $2(x+a)^n$ 의 전개식에서  $x^{n-1}$ 의 계수와 다항식  $(x-1)(x+a)^n$ 의 전개식에서  $x^{n-1}$ 의 계수가 같게 되는 모든 순서쌍  $(a, n)$ 에 대하여  $an$ 의 최대값을 구하시오. (단,  $a$ 는 자연수이고,  $n$ 은  $n \geq 2$ 인 자연수이다.) [4점]

\* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.