2003학년도 대학수학능력시험 문제지

수리 영역

제 2 교시

자 연 계

성명		수험번호		—	

홀수형 1

- 먼저 수험생이 선택한 계열의 문제인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 응시 계열, 문형, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 주관식 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점 또는 3점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$ 을 간단히 하면? [2점]

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

2. 이차방정식 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 의 두 근을 α 와 β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

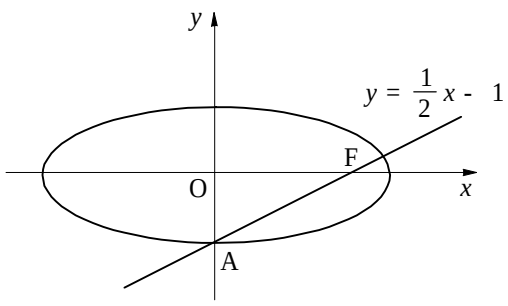
3. 두 벡터 $\vec{a} = (-1, 3)$ 과 $\vec{b} = (2, 1)$ 에 대하여 내적 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ 의 값은? [2점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

4. 두 행렬 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 과 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이 있다. 두 상수 a 와 b 가 $(E + 2A)^2 = aE + bA$ 를 만족시킬 때, $a + b$ 의 값은? [2점]

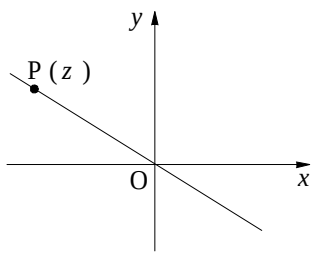
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 타원의 한 초점을 F 라 하고, 이 타원이 y 축과 만나는 한 점을 A 라고 하자. 직선 AF 의 방정식이 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이는? [2점]



① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ 5
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

6. 복소평면 위에서 어떤 복소수 z 를 나타내는 점 P 의 위치가 그림과 같을 때, <보기> 중에서 직선 OP 위에 있는 복소수를 모두 고르면? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.) [2점]

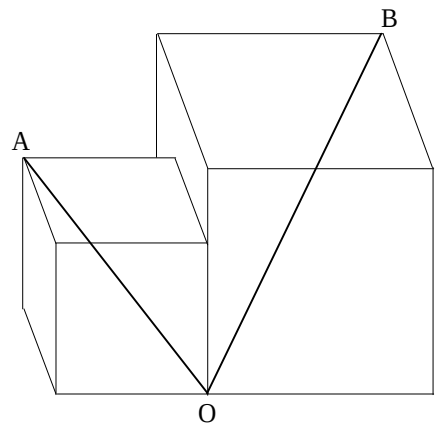


<보 기>

ㄱ. $\bar{z}$ ㄴ. $-z$ ㄷ. $\frac{1}{z}$ ㄹ. $-\frac{1}{\bar{z}}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

7. 한 모서리의 길이가 각각 2 와 3 인 두 정육면체를 그림과 같이 꼭지점 O 와 두 모서리가 겹치도록 붙여 놓았다. 두 정육면체의 대각선 OA 와 OB 에 대하여 $\angle AOB$ 의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? [2점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

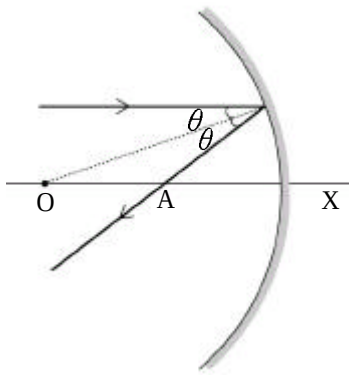
8. 함수 $f(x)$ 는 연속함수이고 모든 실수 x 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x) - 2\int_0^x e^t f(t)\,dt = 1$$

이때, $f''(0)$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$ 는 $f(x)$ 의 이계도함수이다.) [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 R 인 구면거울이 있다. 그림과 같이 OX 축에 평행하게 입사된 빛이 거울에 반사된 후 축과 만나는 점을 A 라고 할 때, 선분 OA 의 길이는?
(단, 입사각과 반사각의 크기는 θ 로 같고, $0° < \theta < 20°$ 이다.) [2점]



① $\frac{R}{2\cos\theta}$ ② $\frac{R}{2\sin\theta}$
③ $R(1-\cos\theta)$ ④ $\frac{R}{2\cos 2\theta}$
⑤ $\frac{R}{2\sin 2\theta}$

10. 제 1 사분면 위의 점 $P_0(x_0, y_0)$ 이 주어졌을 때, 자연수 n 에 대하여 점 $P_n(x_n, y_n)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ y_{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix}$$

이때, 점 P_{2003} 의 좌표는? [3점]

① (x_0, y_0)
② $(x_0, -y_0)$
③ $\left(\frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}}\right)$
④ $\left(\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}}\right)$
⑤ $\left(\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}}, \frac{-x_0 + y_0}{\sqrt{2}}\right)$

11. A 와 B 두 팀이 축구 경기에서 연장전까지 0 : 0 으로 승부를 가리지 못하여 승부차기를 하였다. 각 팀당 5 명의 선수가 A 팀부터 시작하여 1 명씩 교대로 승부차기를 할 때, B 팀이 5 : 4 로 이길 확률은? (단, 각 선수의 승부차기는 독립시행이고 성공할 확률은 0.8 이다.) [3점]

① 0.2×0.8^8 ② 0.8^8 ③ 0.2×0.8^9
④ 0.8^9 ⑤ 0.8^{10}

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x) = \frac{1}{3} f(x) + \frac{2}{3} g(x)$$

<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y = h(x)$ 의 그래프는 그 교점을 지난다.

ㄴ. $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 모두 y 축에 대하여 대칭이면 $y = h(x)$ 의 그래프도 y 축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 모두 일대일 대응이면 $y = h(x)$ 도 일대일 대응이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 실수 a 에 대하여 부등식

$$(x-8)(x-15)(x-a)<0$$

을 만족시키는 자연수 x 의 개수를 $f(a)$ 라고 할 때, $f(a)$ 의 최소값은? [3점]

① 14 ② 12 ③ 10 ④ 8 ⑤ 6

14. n 이 자연수일 때, <보기>의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\log_2(n+3) > \log_2(n+2)$

ㄴ. $\log_2(n+2) > \log_3(n+2)$

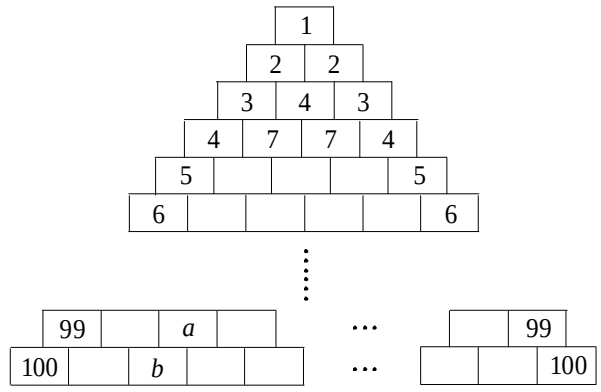
ㄷ. $\log_2(n+2) > \log_3(n+3)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 그림과 같이 제 1 행에는 1 개, 제 2 행에는 2 개, …, 제 100 행에는 100 개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 써 넣었다.

(규칙 1) 각 행의 양쪽 끝 직사각형에는 1부터 100까지의 자연수를 순서대로 써 넣는다.

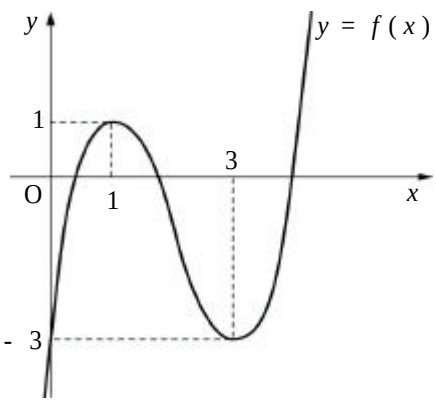
(규칙 2) 각 행의 안쪽 직사각형에는 바로 위 행의 인접한 직사각형에 쓰인 두 수의 합을 써 넣는다.



이때, $b-a$ 의 값은? [3점]

① 4878 ② 4872 ③ 4864
④ 4858 ⑤ 4852

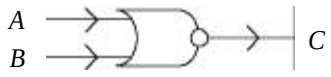
16. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$ 가 극대값 $f(1)=1$ 과 극소값 $f(3)=-3$ 을 가지며, $f(0)=-3$ 이다.



이때, $\int_0^3 |f'(x)|dx$ 의 값은? [3점]

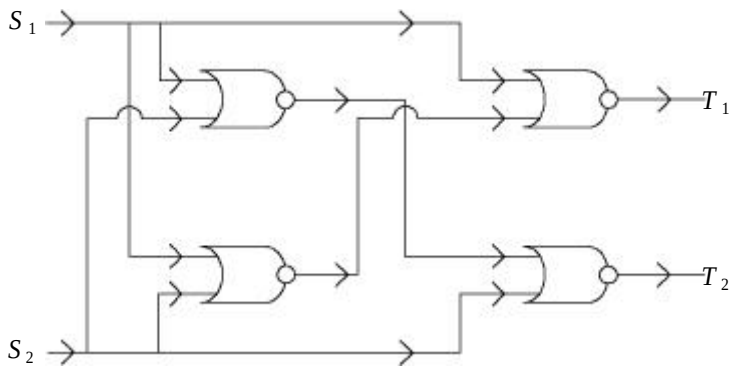
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

17. [그림 1]의 연산장치는 입력값이 A 와 B 일 때 출력값 C 를 표에 주어진 것과 같이 결정한다. 이 연산장치 4 개를 [그림 2]와 같이 연결하였다.



[그림 1]

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



[그림 2]

출력값이 $T_1 = 1$, $T_2 = 0$ 이 되는 입력값 S_1, S_2 를 <보기> 중에서 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ ㄴ. $S_1 = 0$, $S_2 = 1$

ㄷ. $S_1 = 1$, $S_2 = 0$ ㄹ. $S_1 = 1$, $S_2 = 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 다음은 세 자연수 a, b, c $(a < b < c)$ 에 대하여

$$P = (b^2 - a^2)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)$$

이 12 의 배수임을 증명한 것이다.

<증명>

a, b, c 를 각각 2 로 나누었을 때 나머지는 (가) 같다. 이 중 나머지가 같은 두 수를 a 와 b 라고 하면 $b^2 - a^2$ 은 4 의 배수이다.

그러므로 P 도 4 의 배수이다. …… ㉠

다음으로, a^2, b^2, c^2 을 3 으로 나누었을 때 나머지를 알아보자.

a^2, b^2, c^2 을 각각 3 으로 나눈 나머지는 (나) 이므로 a^2, b^2, c^2 중에는 3 으로 나눈 나머지가 같은 것이 적어도 2 개가 있다.

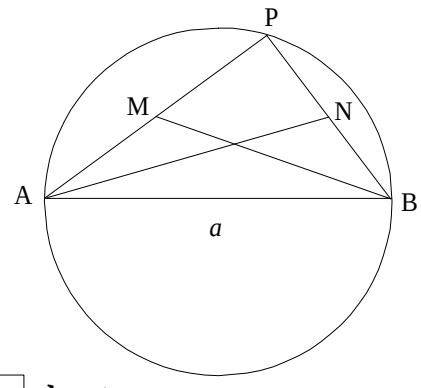
그러므로 P 는 3 의 배수이다. …… ㉡

㉠과 ㉡으로부터 P 는 12 의 배수이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [2점]

	(가)	(나)
①	모두	0 또는 1
②	모두	1 또는 2
③	적어도 2 개가	0 또는 1
④	적어도 2 개가	0 또는 2
⑤	적어도 2 개가	1 또는 2

19. 그림과 같이 길이가 a 인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P 가 있다. 선분 PA 와 선분 PB 의 중점을 각각 M 과 N 이라고 하면,



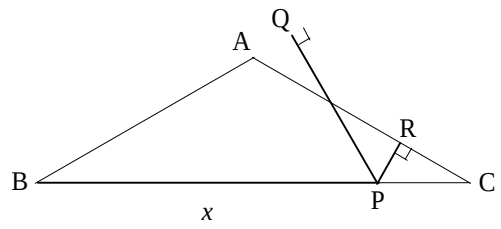
$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 =$ (가) 이다.

따라서 $\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 =$ (나) 이므로 $\overline{AN} \cdot \overline{BM}$ 의 최대값은 (다) 이다.

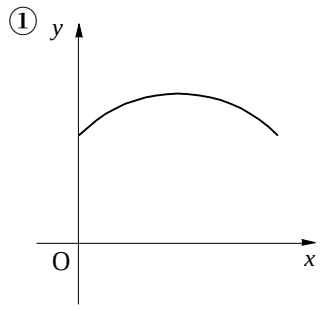
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

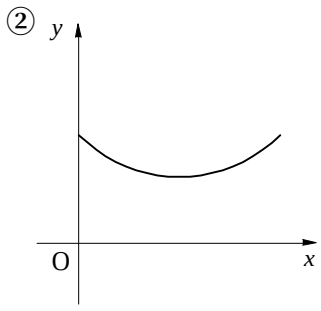
	(가)	(나)	(다)
①	a^2	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$
②	a^2	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{5}{8}a^2$
③	a^2	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{3}{4}a^2$
④	$2a^2$	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$
⑤	$2a^2$	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{5}{8}a^2$

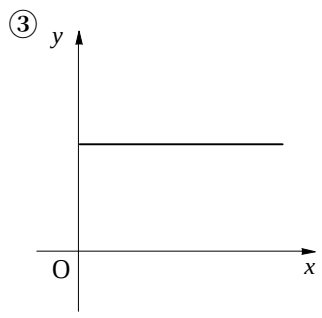
20. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 변 BC 위를 움직이는 점 P 가 있다. 점 P 에서 변 AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 Q, 변 AC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 R 라고 하자.

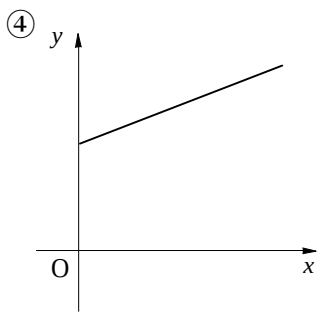


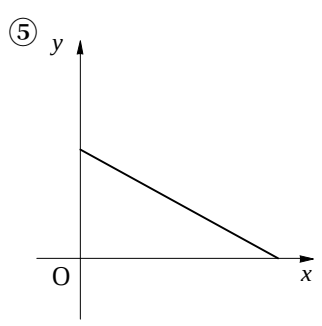
$\overline{BP} = x$ 와 $\overline{PQ} + \overline{PR} = y$ 에 대하여 y 를 x 의 함수로 나타낼 때, 그 그래프의 개형은? [3점]

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

21. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다.
이때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는?
(단, $0 \leqq a \leqq 8$) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

22. 겨울철에 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느껴진다. 이와 같이 실제 느껴지는 온도를 체감온도라고 하며, 기온을 t, 풍속을 v, 복사량을 I 라고 할 때 체감온도 T 는 다음과 같다고 한다.

$$T = t - 4\sqrt{v} + 12I$$

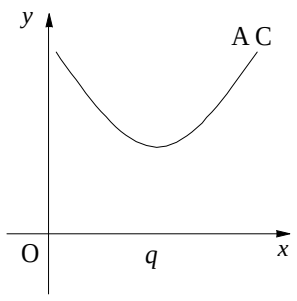
어느 해의 대학수학능력시험 날, 어떤 지역의 오후의 기온은 오전보다 6 도 상승했지만 오후의 풍속이 오전의 4 배가 되어 체감온도는 변하지 않았다. 이 지역의 그날 오전의 풍속은?
(단, 그날 오전과 오후의 복사량 I 의 값은 같았다.) [3점]

① 3 ② 2.75 ③ 2.5
④ 2.25 ⑤ 2

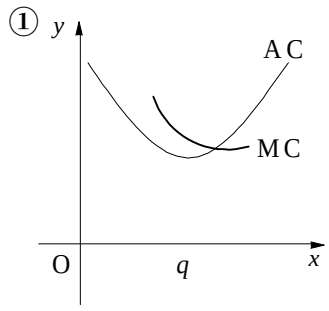
23. 광통신에서는 광섬유를 이용하여 신호를 먼 곳까지 보낸다. 신호가 광섬유를 1 km 지날 때마다 신호의 세기는 1 km 전의 세기의 99 % 가 된다고 하자. 신호의 세기가 처음 세기의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 곳에 중계소를 설치하려고 할 때, 처음 신호를 보내는 곳에서 중계소까지 광섬유의 길이는 약 몇 km 인가? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 9.9 = 0.9956$ 으로 계산한다.) [3점]

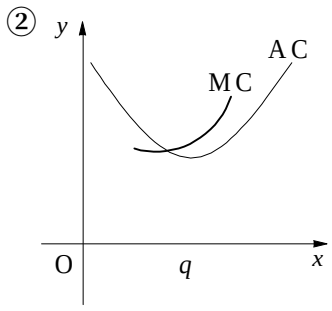
① 68 ② 78 ③ 88 ④ 98 ⑤ 108

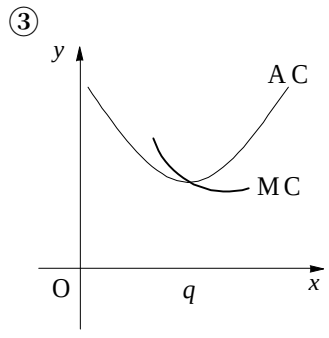
24. 어떤 제품의 생산량이 x 일 때 생산비를 $f(x)$ 라고 하자. 이때, $\frac{f(x)}{x}$ 를 평균생산비라 하고, AC 로 나타낸다. 또, $f(x)$ 가 미분가능하면 $f'(x)$ 를 생산량이 x 일 때의 한계생산비라 하고 MC 로 나타낸다.

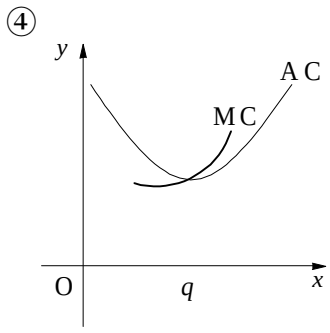


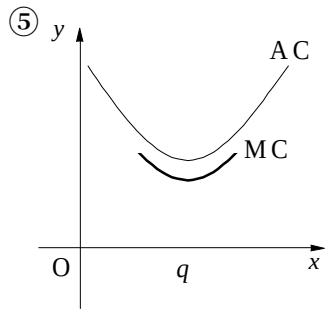
평균생산비 $AC = \frac{f(x)}{x}$ 의 그래프가 그림과 같고 $x = q$ 에서 극소값을 가질 때, $x = q$ 근방에서 한계생산비 $MC = f'(x)$ 의 그래프의 개형은? [3점]

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

주관식 문항 (25 30)

25. 전체집합 U 의 두 부분집합 A 와 B 에 대하여

$$A \cap B^{C} = A, \quad n(A) = 9, \quad n(B) = 14$$

일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.) [2점]

26. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{3} \right\}^n$ 의 합을 S 라고 할 때, $20S$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 다항식 $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ 에 대하여 $f(x)$ 를 $x - a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_1, $f(x)$ 를 $x + a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_2 라고 하자. $R_1 + R_2 = 6$ 일 때, $f(x)$ 를 $x - a^2$ 으로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

28. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$f(n) = \frac{\omega^{2n}}{\omega^n + 1}$$

이때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ 의 값을 구하시오. [3점]

29. x 에 대한 방정식 $\ln x - x + 20 - n = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

30. 다음은 첫째 항이 $a - 15d$, 공차가 d, 항의 개수가 31 인 등차수열이다.

$$a - 15d, \cdots, a - d, a, a + d, \cdots, a + 15d$$

위 항들의 값의 표준편차를 σ 라고 할 때, $\frac{\sigma}{d}$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.
(단, $d > 0$ 이고 $\sqrt{5} = 2.24$ 로 계산한다.) [3점]

* 확인 사항

○ 문제지와 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 문제지와 답안지를 함께 제출합니다. 답안지는 오른쪽에 문제지는 왼쪽에 놓으시오.