Appunti di Probabilità e Statistica
Parte 3: Variabili Continue e Indicatori Numerici

Alessandro Finocchiaro

1 Indicatori Numerici (Lezioni 13-14)

Definizione 1.1 (Valore Atteso - Media)**.** *Il **valore atteso** di una v.a. discreta X è la media ponderata dei suoi valori:*

$$E[X] = \sum_k k \cdot p_X(k)$$

Per una v.a. continua con densità $f_X(x)$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

Definizione 1.2 (Varianza)**.** *La **varianza** misura la dispersione di una v.a. attorno alla sua media.*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

*Lo **scarto quadratico medio** (o deviazione standard) è $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.*

Definizione 1.3 (Covarianza e Correlazione)**.**

- ***Covarianza**: Misura la dipendenza lineare tra due v.a. X e Y.*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

- ***Correlazione**: Normalizza la covarianza nell'intervallo* $[-1, 1]$.

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Nota: Se X e Y sono indipendenti, allora $Cov(X, Y) = 0$.

2 Variabili Aleatorie Continue (Lezione 15)

Definizione 2.1 (V.A. Continua e Densità)**.** *Una v.a. X è **continua** se la sua funzione di ripartizione $F_X(t)$ può essere scritta come l'integrale di una funzione non negativa $f_X(x)$, detta **funzione di densità di probabilità** (pdf).*

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$$

Per una v.a. continua, $P(X = x) = 0$ per ogni x.

2.1 Distribuzioni Continue Notevoli

- **Uniforme Continua** $U(a,b)$: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ per $x \in [a,b]$.
- **Esponenziale** $Exp(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$. Modella tempi di attesa e ha la proprietà di **assenza di memoria**.
- **Normale (Gaussiana)** $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. È la distribuzione più importante in statistica.
- **Gamma** $Gamma(\alpha, \beta)$: Una generalizzazione dell'Esponenziale. La somma di n v.a. esponenziali i.i.d. di parametro λ è una $Gamma(n, \lambda)$.

3 Trasformazioni di V.A. e Teoremi (Lezioni 16-21)

Teorema 3.1 (Trasformazione di V.A. $Y = g(X)$)**.** *Per trovare la distribuzione di $Y = g(X)$ si parte dalla definizione della sua CDF:*

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

Si risolve la disuguaglianza per X e si calcola la probabilità risultante usando la distribuzione di X. La densità $f_Y(y)$ si ottiene derivando $F_Y(y)$.

Teorema 3.2 (Combinazioni Lineari di Normali Indipendenti)**.** *Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ sono v.a. indipendenti, allora la loro combinazione lineare è ancora Normale:*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2\right)$$