Appunti di Probabilità e Statistica
Parte 4: Teoremi Limite e Applicazioni

Alessandro Finocchiaro

1 Convergenze e Leggi dei Grandi Numeri (Lezione 22)

Teorema 1.1 (Legge (Debole) dei Grandi Numeri). *Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con media finita $E[X_i] = \mu$. Sia $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la media campionaria. Allora, per ogni $\epsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

In parole povere, al crescere del numero di prove, la media dei risultati tende a convergere alla media teorica.

Teorema 1.2 (Disuguaglianza di Chebyshev). *Per una v.a. X con media μ e varianza σ^2 finite, vale:*

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Questa disuguaglianza fornisce un limite (spesso non molto stringente) alla probabilità che una v.a. si discosti dalla sua media.

2 Il Teorema del Limite Centrale (TLC)

Teorema 2.1 (Teorema del Limite Centrale). *Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media μ e varianza σ^2 finite. Sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somma. Allora, per n sufficientemente grande, la variabile standardizzata converge in distribuzione a una Normale Standard:*

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dove $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ per $Z \sim N(0,1)$.

Proprietà 2.1 (Applicazione Pratica del TLC). *Per n grande (solitamente $n > 30$), si può approssimare la distribuzione della somma e della media campionaria con una Normale:*

- ***Somma**: $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$*
- ***Media Campionaria**: $\bar{X}_n \approx N(\mu, \sigma^2/n)$*

3 Approssimazione Normale e Correzione di Continuità

Proprietà 3.1 (Approssimazione della Binomiale alla Normale). *È un caso particolare del TLC. Se $X \sim Bin(n,p)$ e n è grande (regola pratica: $np > 5$ e $n(1-p) > 5$), allora:*

$$X \approx N(np, np(1-p))$$

Definizione 3.1 (Correzione di Continuità). *Quando si approssima una distribuzione discreta (come la Binomiale) con una continua (la Normale), si applica una correzione per migliorare l'accuratezza. L'idea è di associare a ogni intero k l'intervallo $[k-0.5, k+0.5]$.*

- $P(X \leq k) \quad \longrightarrow \quad P(X \leq k+0.5)$
- $P(X < k) \quad \longrightarrow \quad P(X \leq k-0.5)$
- $P(X \geq k) \quad \longrightarrow \quad P(X \geq k-0.5)$
- $P(X > k) \quad \longrightarrow \quad P(X \geq k+0.5)$
- $P(X = k) \quad \longrightarrow \quad P(k-0.5 \leq X \leq k+0.5)$

Esempio 3.1 (Uso del TLC con Correzione). *Si lancia una moneta equa 400 volte. Calcolare $P(190 \leq X \leq 210)$, dove X è il numero di teste.*

1. *$X \sim Bin(400, 0.5)$. Media $np = 200$, Varianza $np(1-p) = 100$.*
2. *Approssimiamo con $X \approx N(200, 100)$.*
3. *Applichiamo la correzione di continuità:*

$$P(190 \leq X \leq 210) \longrightarrow P(189.5 \leq X \leq 210.5)$$

4. *Standardizziamo e calcoliamo:*

$$P\left(\frac{189.5-200}{\sqrt{100}} \leq Z \leq \frac{210.5-200}{\sqrt{100}}\right) = P(-1.05 \leq Z \leq 1.05) = \Phi(1.05) - \Phi(-1.05)$$