Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2024-2025`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 24 Febbraio 2025
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline numerate da 1 a 4. Si estraggono a caso due palline in blocco e sia X la variabile aleatoria che indica la differenza tra il massimo e il minimo tra i due numeri estratti.
`D1)` Calcolare la densità discreta di X.
`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D3)` Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina con il numero 1 sapendo che si è verificato l'evento $\{X = 1\}$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lancia il dado equo: se esce 1 o 2, si lanciano due dadi equi, e si vince il gioco se la somma dei due numeri ottenuti dai due dadi è uguale a 7; se esce 3, o 4, o 5, o 6, si lanciano due dadi equi e si vince il gioco se i due numeri ottenuti dai due dadi sono entrambi minori di 4 (cioè 1, o 2, o 3).
`D4)` Calcolare la probabilità di vincere il gioco.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{2^{x_1}}{x_1!}e^{-2} \cdot \frac{\binom{3}{x_2}\binom{3}{2-x_2}}{\binom{6}{2}} \quad \text{per } x_1 \geq 0 \text{ intero, e } x_2 \in \{0, 1, 2\}.$$

`D5)` Calcolare $P(X_1X_2 = 0)$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 \leq 1) = \frac{6}{5}e^{-2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-b}}1_{(0,b)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = \sqrt{X}$.
`D8)` Sia $r > 0$ arbitrariamente fissato. Verificare $\mathbb{E}[X^r e^X] = \frac{b^{r+1}}{(r+1)(1-e^{-b})}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 81. Trovare il valore di $z > 0$ per cui si ha $P(0 \leq X \leq 4) = 2\Phi(z) - 1$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 4. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n - n \leq \sqrt{n}),$$

esprimendo il risultato tramite la funzione Φ.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/40 & 9/10 & 0 & 3/40 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

`D11)` Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)}$ dopo aver motivato la sua esistenza.
`D12)` Calcolare la probabilità di assorbimento in $C = \{1, 2\}$ partendo da 3 e da 4, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Ognuno dei sottoinsiemi elencati di seguito (come elementi di Ω) ha la stessa probabilità, uguale ad 1/6):

$$\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$$

`D1)` Si ha

$$p_X(1) = P(\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}) = \frac{3}{6}, \quad p_X(2) = P(\{\{1,3\},\{2,4\}\}) = \frac{2}{6}, \quad p_X(3) = P(\{\{1,4\}\}) = \frac{1}{6}.$$

`D2)` Si ha

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{3} k p_X(k) = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1}{6} = \frac{3+4+3}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

`D3)` Sia E l'evento "estratta la pallina con il numero 1". Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(\{\{1,2\}\})}{p_X(1)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia X la variabile aleatoria che indica il numero che esce lanciando il dado all'inizio del gioco. Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$\begin{aligned}
P(V) &= P(V|X\leq 2)P(X\leq 2) + P(V|X>2)P(X>2) \\
&= \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{36}\frac{2}{6} + \frac{\#\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}}{36}\frac{4}{6} \\
&= \frac{6}{36}\cdot\frac{2}{6} + \frac{9}{36}\cdot\frac{4}{6} = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$\begin{aligned}
P(X_1X_2 = 0) &= \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(0,2) \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{2^k}{k!}e^{-2}\cdot\frac{1\cdot 3}{15} + \frac{2^0}{0!}e^{-2}\cdot\frac{9+3}{15} = \frac{3}{15}e^{-2}e^{2} + \frac{12}{15}e^{-2} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}e^{-2}.
\end{aligned}$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq 1) &= p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) \\
&= e^{-2}\cdot\frac{3}{15} + e^{-2}\cdot\frac{9}{15} + 2e^{-2}\cdot\frac{3}{15} = \frac{3+9+6}{15}e^{-2} = \frac{6}{5}e^{-2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq\sqrt{b}) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y\leq 0, \\ (*) & \text{se } 0<y<\sqrt{b}, \\ 1 & \text{se } y\leq\sqrt{b}. \end{cases}$$

Per $y\in(0,\sqrt{b})$ si ha

$$(*) = P(\sqrt{X}\leq y) = P(X\leq y^2) = \int_{-\infty}^{y^2} f_X(x)dx = \int_0^{y^2}\frac{e^{-x}}{1-e^{-b}}dx = \frac{[-e^{-x}]_{x=0}^{x=y^2}}{1-e^{-b}} = \frac{1-e^{-y^2}}{1-e^{-b}}.$$

`D8)` Si ha

$$\mathbb{E}[X^r e^X] = \int_0^b x^r e^x \frac{e^{-x}}{1-e^{-b}} dx = \int_0^b \frac{x^r}{1-e^{-b}} dx = \frac{1}{1-e^{-b}} \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{b^{r+1}}{(r+1)(1-e^{-b})}.$$

Esercizio 5.
`D9)` La variabile aleatoria $X^* = \frac{X-2}{\sqrt{81}} = \frac{X-2}{9}$ ha distribuzione Normale standard. Allora si ha

$$P(0 \leq X \leq 4) = P\left(\frac{0-2}{9} \leq X^* \leq \frac{4-2}{9}\right) = \Phi(2/9) - \Phi(-2/9) = \Phi(2/9) - (1 - \Phi(2/9)) = 2\Phi(2/9) - 1.$$

A questo punto, imponendo $P(0 \leq X \leq 4) = 2\Phi(z) - 1$, si ha

$$2\Phi(2/9) - 1 = 2\Phi(z) - 1, \quad 2\Phi(2/9) = 2\Phi(z), \quad \Phi(2/9) = \Phi(z), \quad z = \frac{2}{9}$$

(all'ultimo passo si tiene conto che Φ è invertibile).
`D10)` Dividendo membro a membro per $\sqrt{4}\sqrt{n}$ si ha

$$P(X_1 + \cdots + X_n - n \leq \sqrt{n}) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{4}\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}\right).$$

Quindi il limite richiesto esiste per il Teorema Limite Centrale, ed è uguale a $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 6.
`D11)` La catena ristretta a $\{1,2\}$ è irriducibile, ed è anche regolare per l'Osservazione 5.16 (applicata alla catena ristretta); in corrispondenza, per il Teorema di Markov (applicato alla catena ristretta), è garantita l'esistenza del limite di $p_{12}^{(n)}$ per n che tende ad infinito. Il limite è uguale a π_2, dove (π_1, π_2) è l'unica distribuzione stazionaria per la catena ristretta a $\{1,2\}$. Allora si ha il sistema

$$\begin{cases} \frac{\pi_1}{4} + \frac{7}{8}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{\pi_2}{8} = \pi_2 \end{cases} \quad \text{ed entrambe forniscono la relazione } \frac{7}{8}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1, \text{ cioè } \pi_1 = \frac{7}{6}\pi_2.$$

Allora, poiché $\pi_1 + \pi_2 = 1$, si ha $\frac{13}{6}\pi_2 = 1$, e quindi $(\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right)$. In conclusione il limite richiesto è

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \frac{6}{13}.$$

`D12)` Consideriamo il sistema delle probabilità di passaggio per $C = \{1,2\}$ (in questo caso si tratta di assorbimento); allora si ha $D_C = \{3,4\}$. Indicheremo con λ_3 e λ_4 le probabilità di assorbimento richieste, le quali sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_3 = p_{31} + p_{32} + p_{33}\lambda_3 + p_{34}\lambda_4 \\ \lambda_4 = p_{41} + p_{42} + p_{43}\lambda_3 + p_{44}\lambda_4, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0 + \frac{1}{40} + \frac{9}{10}\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, mentre dalla seconda si ottiene $\lambda_3 = \lambda_4$. In conclusione le soluzioni sono $\lambda_3 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_4 = \frac{1}{4}$.
Osservazione. Partendo da 4, si può rimanere in tale stato per un po' e poi si arriva nello stato 3; da lì, dopo un eventuale tempo di permanenza nello stesso stato, si va in 2 (e quindi si viene assorbiti in C) o in 5 (e quindi non si viene assorbiti in C). In conclusione

- poiché se si lascia lo stato 4 si finisce in 3 senza tornare indietro, e da lì si può essere assorbiti in C (transizione da 3 a 2) o no (transizione da 3 a 5), non sorprende che si abbia $\lambda_3 = \lambda_4$;
- non sorprende che si abbia $\lambda_3 = \frac{p_{32}}{p_{32}+p_{35}} = \frac{1/40}{1/40+3/40} = \frac{1}{4}$.