Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2024-2025`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 20 Giugno 2025
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Si lanciano 3 dadi equi.
`D1)` Per ogni lancio si definisce *successo* l'uscita di un numero minore o uguale a 2. Calcolare la probabilità di avere al massimo un successo.
`D2)` Calcolare il valore medio della variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 4.
`D3)` Calcolare la probabilità che non esca esca il numero 6 nei primi due lanci sapendo che esce per la prima volta un numero dispari al terzo lancio.

Esercizio 2. Sia $p \in (0,1)$ arbitriamente fissato. Abbiamo due monete: lanciando la prima, esce testa con probabilità p; lanciando la seconda, esce testa con probabilità $1-p$. Si sceglie una moneta a caso e la si lancia due volte.
`D4)` Verificare che la probabilità che esca due volte testa nei due lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{1-2p+2p^2}{2}$.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \quad \text{per ogni } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,0) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{h} \quad \text{per ogni } h \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(0,h) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{h} \quad \text{per ogni } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_1 = 0)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia $b > 1$ arbitrariamente fissato. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{b^3}-e^b} 1_{(b,b^3)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = \sqrt{1+\frac{X}{b}}$.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[X^2 e^{-X}]$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4. Trovare il valore di $z > 3$ per cui si ha $P(3 \leq X \leq z) = \Phi(2) - \Phi(1)$.
`D10)` Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 81. Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 202)$ sfruttando l'approssimazione Normale ed esprimendo il risultato tramite la funzione Φ.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/4 & 1/6 & 1/12 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D11)` Discutere l'esistenza di $\lim_{n\to\infty} p_{66}^{(n)}$ e, nel caso in cui esista, calcolare tale limite.
`D12)` Calcolare la probabilità di assorbimento in $C = \{1,2\}$ partendo da 3 e da 4, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero dei successi. Tale variabile aleatoria ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 3$ e $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Allora la probabilità richiesta è

$$P(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-0} + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{8}{27} + \frac{12}{27} = \frac{20}{27}.$$

`D2)` Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 4. Tale variabile aleatoria ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{6}$. Allora il valore medio richiesto è $\mathbb{E}[Y] = np = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ per formule note sulla distribuzione Binomiale.
`D3)` Sia E l'evento "non esce il numero 6 nei primi due lanci", e sia F l'evento "esce per la prima volta un numero dispari al terzo lancio". Allora la probabilità condizionata richiesta è (uso un abuso di notazione)

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P((2 \vee 4, 2 \vee 4, \text{dispari}))}{P((\text{pari}, \text{pari}, \text{dispari}))} = \frac{(2/6)(2/6)(3/6)}{(3/6)(3/6)(3/6)} = \frac{4}{9}.$$

Osservazioni. Il denominatore nella divisione che appare è uguale a $\frac{1}{8}$; questo valore segue anche da formule note sulla distribuzione Geometrica traslata perché si ha $(1-\frac{3}{6})^{3-1} \cdot \frac{3}{6}$. Il risultato $\frac{4}{9}$ può essere interpretato come il seguente rapporto che fa riferimento ai possibili risultati nei primi due lanci dei dadi:

$$\frac{\#\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}}{\#\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse. Allora, usando la formula delle probabilità totali, con notazioni ovvie si ha

$$P(E) = P(E|M_1)P(M_1) + P(E|M_2)P(M_2) = p^2 \cdot \frac{1}{2} + (1-p)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{p^2 + (1-2p+p^2)}{2} = \frac{1-2p+2p^2}{2}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$P(X_1 = 0) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{h\geq 1} p_{X_1,X_2}(0,h) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+2} + \sum_{h\geq 1} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\frac{(1/2)^1}{1-1/2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 2) &= p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0) \\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(\sqrt{2} \leq Y \leq \sqrt{1+b^2}) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq \sqrt{2}, \\ (*) & \text{se } \sqrt{2} < y < \sqrt{1+b^2}, \\ 1 & \text{se } y \geq \sqrt{1+b^2}. \end{cases}$$

Per $y \in (\sqrt{2}, \sqrt{1+b^2})$ si ha

$$\begin{aligned} (*) &= P\left(\sqrt{1+\frac{X}{b}} \leq y\right) = P\left(1+\frac{X}{b} \leq y^2\right) = P\left(\frac{X}{b} \leq y^2 - 1\right) = P(X \leq b(y^2-1)) \\ &= \int_{-\infty}^{b(y^2-1)} f_X(x)dx = \int_b^{b(y^2-1)} \frac{e^x}{e^{b^3}-e^b}dx = \frac{[e^x]_{x=b}^{x=b(y^2-1)}}{e^{b^3}-e^b} = \frac{e^{b(y^2-1)}-e^b}{e^{b^3}-e^b}. \end{aligned}$$

D8) Si ha

$$\mathbb{E}[X^2e^{-X}] = \int_b^{b^3} x^2e^{-x}\frac{e^x}{e^{b^3}-e^b}dx = \int_b^{b^3} \frac{x^2}{e^{b^3}-e^b}dx = \frac{[x^3]_{x=b}^{x=b^3}}{3(e^{b^3}-e^b)} = \frac{b^9-b^3}{3(e^{b^3}-e^b)}.$$

Esercizio 5.
D9) La variabile aleatoria $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{4}} = \frac{X-1}{2}$ ha distribuzione Normale standard. Allora si ha

$$P(3 \leq X \leq z) = P\left(\frac{3-1}{2} \leq X^* \leq \frac{z-1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{z-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{z-1}{2}\right) - \Phi(1).$$

A questo punto, imponendo $P(3 \leq X \leq z) = \Phi(2) - \Phi(1)$, si ha

$$\Phi\left(\frac{z-1}{2}\right) - \Phi(1) = \Phi(2) - \Phi(1), \quad \Phi\left(\frac{z-1}{2}\right) = \Phi(2), \quad \frac{z-1}{2} = 2, \quad z-1=4, \quad z=5$$

(ad un certo punto si è tenuto conto che Φ è invertibile).
D10) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1+\cdots+X_{100} > 202) &= P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}} > \frac{202-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}}\right) \\ &= P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}} > \frac{2}{90}\right) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}} > \frac{1}{45}\right) \simeq 1-\Phi\left(\frac{1}{45}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 6.
D11) La catena ristretta a $\{5,6,7\}$ è irriducibile. Inoltre, detta

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice di transizione ristretta a tali stati, si ha

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$Q^n = \begin{cases} Q & \text{se } n=3k+1 \text{ per } k \geq 0 \text{ intero} \\ Q^2 & \text{se } n=3k+2 \text{ per } k \geq 0 \text{ intero} \\ Q^3 = I & \text{se } n=3k \text{ per } k \geq 0 \text{ intero.} \end{cases}$$

Questo dimostra che la catena ristretta agli stati $\{5,6,7\}$ non è regolare. In effetti possiamo dire che il limite non esiste perché

$$p_{66}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=3k \text{ per } k \geq 0 \text{ intero} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

D12) Consideriamo il sistema delle probabilità di passaggio per $C = \{1,2\}$ (in questo caso si tratta di assorbimento); allora si ha $D_C = \{3,4\}$. Indicheremo con λ_3 e λ_4 le probabilità di assorbimento richieste, le quali sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_3 = p_{31}+p_{32}+p_{33}\lambda_3+p_{34}\lambda_4 \\ \lambda_4 = p_{41}+p_{42}+p_{43}\lambda_3+p_{44}\lambda_4, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \lambda_3 = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}\lambda_3 \\ \lambda_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\lambda_3+\frac{1}{6}\lambda_4 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $\lambda_3 = \frac{1}{2}$; poi sostituendo tale valore nella seconda equazione si ottiene $\lambda_4 = \frac{11}{20}$. In conclusione le soluzioni sono $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_4 = \frac{11}{20}$.
Osservazione. Partendo da 3, si può rimanere in tale stato per un po' e poi, o si va in 1 (assorbimento in C) o si va in 6 (non assorbimento in C). Quindi non sorprende che si abbia $\lambda_3 = \frac{p_{31}}{p_{31}+p_{36}} = \frac{1/6}{1/6+1/6} = \frac{1}{2}$.