Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2024-2025`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 25 Luglio 2025
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline bianche e 4 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1)` Calcolare la probabilità che tutte le palline estratte abbiano lo stesso colore (cioè tutte palline bianche, o tutte palline nere).
`D2)` Calcolare la varianza della variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
`D3)` Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\mathrm{bianco}, \mathrm{nero}, \mathrm{bianco})$.

Esercizio 2. Supponiamo di avere un mazzo di 5 carte numerate da 1 a 5. Si estrae una carta a caso: se escono i numeri 1 o 2, si lanciano due monete eque; se escono i numeri 3 o 4 o 5, si lanciano due monete la cui probabilità che esca testa lanciando ciascuna di loro è uguale a $\frac{2}{3}$.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta equa sapendo che sono uscite due teste nei lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3. Sia $r \in (0,1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = r\frac{e^{-1}}{k!} \quad \text{per ogni } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,1) = (1-r)\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1} \quad \text{per ogni } h \geq 2 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_1 = 2)$.
`D6)` Calcolare $P(X_2 = 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = x^{-2}1_{(1,\infty)}(x)$.
`D7)` Sia $b > 0$ arbitrariamente fissato. Verificare che $Y = \frac{b}{X}$ ha distribuzione uniforme.
`D8)` Siano $t > 0$ e $s \geq 1$ arbitrariamente fissati. Calcolare $P(X > t + s|X > s)$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 3 e varianza 16. Calcolare $P(4 < X < 5)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Siano $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 7 e varianza 25. Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n > 7n + z\sqrt{n}) = 1 - \Phi(1).$$

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

per $q \in (0,1)$.
`D11)` Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$, dopo aver motivato l'esistenza del limite.
`D12)` Calcolare i tempi medi di primo passaggio per lo stato 7 partendo da 5 e da 6, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
`D1)` La probabilità richiesta è

$$P(\{X=0\}\cup\{X=3\}) = P(X=0)+P(X=3) = \frac{\binom{4}{0}\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}.$$

Osservazione. In maniera alternativa la probabilità richiesta si ottiene come segue:

$$\begin{aligned} &P((B_1\cap B_2\cap B_3)\cup(N_1\cap N_2\cap N_3)) = P(B_1\cap B_2\cap B_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)\\ &\quad = P(B_3|B_1\cap B_2)P(B_2|B_1)P(B_1)+P(N_3|N_1\cap N_2)P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{2}{6}\frac{3}{7}\frac{4}{8}+\frac{2}{6}\frac{3}{7}\frac{4}{8} = \frac{1}{14}+\frac{1}{14} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

`D2)` Usando formule note sulla distribuzione ipergeometrica si ha

$$\mathrm{Var}[X] = 3\cdot\frac{4}{8}\left(1-\frac{4}{8}\right)\frac{4+4-3}{4+4-1} = \frac{3}{4}\frac{5}{7} = \frac{15}{28}.$$

`D3)` Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è

$$P(B_1\cap N_2\cap B_3) = P(B_3|B_1\cap N_2)P(N_2|B_1)P(B_1) = \frac{3}{6}\frac{4}{7}\frac{4}{8} = \frac{1}{7}.$$

Osservazione. Come noto dalla teoria tutte le sequenze con *2 palline bianche e 1 nera* (come ad esempio quella appena analizzata) hanno la stessa probabilità. In tutto tali sequenze sono 3, e questo è in accordo con il fatto che $P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$.

Esercizio 2.
`D4)` Si usa la formula di Bayes, combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore. Con notazioni ovvie si ha

$$\begin{aligned} P(E|D) = \frac{P(D|E)P(E)}{P(D)} &= \frac{P(D|E)P(E)}{P(D|E)P(E)+P(D|E^c)P(E^c)}\\ &= \frac{(1/2)^2(2/5)}{(1/2)^2(2/5)+(2/3)^2(3/5)} = \frac{1/10}{1/10+4/15} = \frac{1/10}{(6+16)/60} = \frac{1}{10}\frac{60}{22} = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$P(X_1=2) = p_{X_1,X_2}(2,1)+p_{X_1,X_2}(2,2) = (1-r)\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} + r\frac{e^{-1}}{2!} = \frac{1-r+re^{-1}}{2}.$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_2=1) &= p_{X_1,X_2}(1,1)+\sum_{h\geq 2}p_{X_1,X_2}(h,1) = re^{-1}+(1-r)\sum_{h\geq 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\\ &= re^{-1}+(1-r)\frac{(1/2)^1}{1-(1/2)} = re^{-1}+1-r. \end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq b)=1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y\leq 0,\\ (*) & \text{se } 0<y<b,\\ 1 & \text{se } y\leq b. \end{cases}$$

Per $y \in (0,b)$ si ha

$$(*) = P\left(\frac{b}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{b}{y}\right) = \int_{b/y}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{b/y}^{\infty} x^{-2}dx = \frac{[x^{-2+1}]_{x=b/y}^{x=\infty}}{-2+1} = \frac{0-(b/y)^{-1}}{-1} = \frac{y}{b}.$$

In conclusione Y ha distribuzione uniforme su $(0,b)$.

`D8)` Si ha

$$P(X > t+s | X > s) = \frac{P(\{X > t+s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{\int_{t+s}^{\infty} x^{-2}dx}{\int_{s}^{\infty} x^{-2}dx}$$
$$= \frac{[x^{-2+1}]_{x=t+s}^{x=\infty}/(-2+1)}{[x^{-2+1}]_{x=s}^{x=\infty}/(-2+1)} = \frac{1/(t+s)}{1/s} = \frac{s}{t+s}.$$

Esercizio 5.

`D9)` La variabile aleatoria $X^* = \frac{X-3}{\sqrt{16}} = \frac{X-3}{4}$ ha distribuzione Normale standard. Allora si ha

$$P(4 < X < 5) = P\left(\frac{4-3}{4} < X^* < \frac{5-3}{4}\right) = \Phi\left(\frac{2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right).$$

`D10)` Osserviamo che

$$P(X_1 + \cdots + X_n > 7n + z\sqrt{n}) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 7n}{\sqrt{n}} > z\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 7n}{\sqrt{25}\sqrt{n}} > \frac{z}{\sqrt{25}}\right).$$

Inoltre per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 7n}{\sqrt{25}\sqrt{n}} > \frac{z}{\sqrt{25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{z}{5}\right).$$

Quindi si cerca z tale che $1 - \Phi\left(\frac{z}{5}\right) = 1 - \Phi(1)$, da cui segue facilmente (anche tenendo conto che la funzione Φ è invertibile) che $z = 5$.

Esercizio 6.

`D11)` La catena ristretta a $\{1,2,3,4\}$ è irriducibile. Inoltre, per l'Osservazione 5.16, è anche regolare (in effetti tutti gli elementi diagonali della matrice di transizione ristretta a tali stati

$$Q = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 1-q & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

sono uguali a $q > 0$). Allora il limite in questione esiste per il Teorema di Markov applicato a tale catena ristretta. Inoltre la matrice Q legata alla catena ristretta è bistocastica; quindi in corrispondenza l'unica distribuzione stazionaria relativa a tale catena ristretta è quella uniforme. In conclusione il limite da calcolare è uguale a $\frac{1}{4}$ perché più in generale si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{4} \quad \text{per ogni } i,j \in \{1,2,3,4\}.$$

`D12)` Indichiamo con μ_5 e μ_6 i tempi medi da calcolare. Consideriamo la catena ristretta agli stati $\{5,6,7\}$ (che è una classe chiusa e irriducibile), e in corrispondenza abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu_5 = 1 + p_{55}\mu_5 + p_{56}\mu_6 \\ \mu_6 = 1 + p_{65}\mu_5 + p_{66}\mu_6, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mu_5 = 1 + \mu_5/3 + \mu_6/3 \\ \mu_6 = 1 + \mu_5/3 + \mu_6/3. \end{cases}$$

Dal confronto delle due equazioni si vede subito che $\mu_5 = \mu_6$; quindi (sostituisco nella prima equazione ottenendo come sola incognita μ_5, ma si potrebbe sostituire nella seconda ottenendo come sola incognita μ_6) si ha

$$\mu_5 = 1 + \mu_5/3 + \mu_5/3, \quad \left(1 - \frac{2}{3}\right)\mu_5 = 1, \quad \mu_5 = 3.$$

In conclusione si ha $\mu_5 = 3$ e $\mu_6 = 3$.