Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2024-2025`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 10 Febbraio 2025
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna ha 9 palline bianche e 18 nere.
`D1)` Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore.
`D2)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori (bianco, nero, bianco).
`D3)` Si estraggono a caso palline, una alla volta e con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte fino a quando esce per la seconda volta una pallina bianca. Calcolare la media della variabile aleatoria X.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce un numero minore di 5 (cioè 1, o 2, o 3, o 4), si lanciano due monete eque; se esce 5 o 6, si lancia una moneta equa.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver lanciato le due monete eque sapendo di aver ottenuto tutte teste nei lanci di moneta effettuati (due o una).

Esercizio 3. Siano $p, q \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = q^{x_2}(1-q)^{1-x_2}(1-p)^{x_1}p \quad \text{per } x_1 \geq 0 \text{ intero e } x_2 \in \{0,1\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = p(1-pq)$.
`D6)` Verificare che $P\left(\cup_{k\geq 0}(\{X_1 = 2k\} \cap \{X_2 = 0\})\right) = \frac{1-q}{2-p}$.

Esercizio 4. Sia $\alpha > 0$ arbitrariamente fissato, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} 1_{(0,1)}(x)$.
`D7)` Sia $b > 0$ arbitrariamente fissato. Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{bX}$.
`D8)` Sia $r > 0$ arbitrariamente fissato. Calcolare $\mathbb{E}[X^{\alpha r}]$ e verificare che non dipende da α.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza σ^2. Trovare, se esiste, $y > 2$ tale che $P(X < 2 | 0 < X < y) = \frac{1}{2}$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 16. Calcolare $P(80 < X_1 + \cdots + X_{100} < 90)$ con l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $q \in [0,1]$.
`D11)` Per ogni $n \geq 1$ si calcoli $P(X_n = 1 | X_0 = 1)$.
`D12)` Sia $q \neq 1$. Calcolare i tempi medi di assorbimento nello stato 3 partendo da 1 e da 2, rispettivamente; inoltre trovare i valori di q, se esistono, per cui questi due tempi medi coincidono.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è

$$P((B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap N_2))=P(B_1\cap B_2)+P(N_1\cap N_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)+P(N_1)P(N_2|N_1)$$
$$=\frac{9}{27}\frac{8}{26}+\frac{18}{27}\frac{17}{26}=\frac{1}{3}\frac{8}{26}+\frac{2}{3}\frac{17}{26}=\frac{8+34}{78}=\frac{42}{78}=\frac{7}{13}.$$

Commento. In altro modo si ha

$$P((B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap N_2))=P(B_1\cap B_2)+P(N_1\cap N_2)=\frac{\binom{9}{2}\binom{18}{0}}{\binom{27}{2}}+\frac{\binom{9}{0}\binom{18}{2}}{\binom{27}{2}}=\frac{36+153}{351}=\frac{189}{351}=\frac{7}{13}.$$

`D2)` Con notazioni ovvie, e per indipendenza degli eventi legati ad estrazioni diverse, la probabilità richiesta è

$$P(B_1\cap N_2\cap B_3)=P(B_1)P(N_2)P(B_3)=\frac{9}{27}\frac{18}{27}\frac{9}{27}=\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{2}{27}.$$

`D3)` Per la teoria della binomiale negativa traslata il valor medio richiesto è $\mathbb{E}[X]=\frac{2}{9/27}$, e quindi $\mathbb{E}[X]=6$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(D|T)=\frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D)+P(T|D^c)P(D^c)}=\frac{(1/2)^2\cdot 4/6}{(1/2)^2\cdot 4/6+1/2\cdot 2/6}=\frac{1/6}{1/6+1/6}=\frac{1/6}{2/6}=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$P(X_1=X_2)=p_{X_1,X_2}(0,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)=(1-q)p+q(1-p)p=p(1-q+q-pq)=p(1-pq).$$

`D6)` Si ha

$$P\left(\cup_{k\geq 0}(\{X_1=2k\}\cap\{X_2=0\})\right)=\sum_{k\geq 0}p_{X_1,X_2}(2k,0)=\sum_{k\geq 0}(1-q)(1-p)^{2k}p$$
$$=(1-q)p\sum_{k\geq 0}((1-p)^2)^k=\frac{(1-q)p}{1-(1-p)^2}=\frac{(1-q)p}{1-(1-2p+p^2)}=\frac{(1-q)p}{2p-p^2}=\frac{1-q}{2-p}.$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq e^b)=1$ e quindi

$$F_Y(y)=\left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{se } y\leq 1,\\ (*) & \text{se } 1<y<e^b,\\ 1 & \text{se } y\geq e^b.\end{array}\right.$$

Per $y\in(1,e^b)$ si ha

$$(*)=P(e^{bX}\leq y)=P(bX\leq\log y)=P\left(X\leq\frac{1}{b}\log y\right)=\int_0^{\frac{1}{b}\log y}\alpha x^{\alpha-1}dx=[x^\alpha]_{x=0}^{x=\frac{1}{b}\log y}=\left(\frac{1}{b}\log y\right)^\alpha.$$

`D8)` Si ha

$$\mathbb{E}[X^{\alpha r}]=\int_0^1 x^{\alpha r}\alpha x^{\alpha-1}dx=\alpha\int_0^1 x^{\alpha r+\alpha-1}dx=\alpha\left[\frac{x^{\alpha r+\alpha-1+1}}{\alpha r+\alpha-1+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{\alpha}{\alpha r+\alpha}=\frac{1}{r+1},$$

che effettivamente non dipende da α.
Osservazione. In alternativa possiamo procedere come segue. Sia $Z=X^{\alpha r}$; allora si ha $P(0\leq Z\leq 1)=1$ e quindi

$$F_Z(z)=\left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{se } z\leq 0,\\ (*) & \text{se } 0<z<1,\\ 1 & \text{se } z\geq 1.\end{array}\right.$$

Per $z \in (0,1)$ si ha

$$(*) = P(X^{\alpha r} \le z) = P(X \le z^{1/(\alpha r)}) = \int_0^{z^{1/(\alpha r)}} \alpha x^{\alpha-1} dx = [x^\alpha]_{x=0}^{x=z^{1/(\alpha r)}} = \left(z^{1/(\alpha r)}\right)^\alpha = z^{1/r}.$$

Quindi $Z = X^{\alpha r}$ ha densità continua $f_Z(z) = \frac{1}{r} z^{1/r-1} 1_{(0,1)}(z)$ (che non dipende da α), e in corrispondenza il valore atteso è

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^1 z \frac{1}{r} z^{1/r-1} dz = \frac{1}{r} \int_0^1 z^{1/r} dz = \frac{1}{r} \left[\frac{z^{1/r+1}}{1/r+1} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{r(1/r+1)} = \frac{1}{1+r}.$$

Esercizio 5.
`D9)` La variabile aleatoria $X^* = \frac{X-2}{\sigma}$ ha distribuzione Normale standard. Allora si ha (si ricorda che $\Phi(0) = 0.5$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = P(X < 2 | 0 < X < y) &= \frac{P(\{X < 2\} \cap \{0 < X < y\})}{P(0 < X < y)} = \frac{P(0 < X < 2)}{P(0 < X < y)} \\ &= \frac{P((0-2)/\sigma < X^* < (2-2)/\sigma)}{P((0-2)/\sigma < X^* < (y-2)/\sigma)} = \frac{\Phi(0) - \Phi(-2/\sigma)}{\Phi((y-2)/\sigma) - \Phi(-2/\sigma)} \\ &= \frac{0.5 - (1 - \Phi(2/\sigma))}{\Phi((y-2)/\sigma) - (1 - \Phi(2/\sigma))} = \frac{\Phi(2/\sigma) - 0.5}{\Phi(2/\sigma) + \Phi((y-2)/\sigma) - 1},\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}&2(\Phi(2/\sigma) - 0.5) = \Phi(2/\sigma) + \Phi((y-2)/\sigma) - 1, \\ &2\Phi(2/\sigma) - 1 = \Phi(2/\sigma) + \Phi((y-2)/\sigma) - 1, \quad \Phi(2/\sigma) = \Phi((y-2)/\sigma), \\ &\frac{2}{\sigma} = \frac{y-2}{\sigma} \text{ (perché } \Phi \text{ è strettamente crescente e quindi invertibile)}, \quad 2 = y-2, \quad y = 4.\end{aligned}$$

`D10)` Si ha

$$P(80 < X_1 + \cdots + X_{100} < 90) = P\left(\frac{80-100}{\sqrt{16}\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100}{\sqrt{16}\sqrt{100}} < \frac{90-100}{\sqrt{16}\sqrt{100}} \right)$$
$$\approx \Phi((90-100)/40) - \Phi((80-100)/40) = \Phi(-1/4) - \Phi(-1/2) = 1 - \Phi(1/4) - (1 - \Phi(1/2)) = \Phi(1/2) - \Phi(1/4).$$

Esercizio 6.
`D11)` Osserviamo che, se la catena parte da 1 e arriva in un altro stato, allora non torna nello stato 1. Quindi

$$P(X_n = 1 | X_0 = 1) = P(\cap_{k=1}^n \{X_k = 1\} | X_0 = 1) = \underbrace{p_{11} \cdots p_{11}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

`D12)` Indichiamo i tempi medi richiesti con μ_1 e μ_2. Allora questi valori sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{\mu_1}{3} + \frac{\mu_2}{3} \\ \mu_2 = 1 + q\mu_2. \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene $\mu_2 = \frac{1}{1-q}$ dalla seconda equazione e, sostituendo nella prima equazione, si ottiene

$$\frac{2}{3}\mu_1 = 1 + \frac{1}{3(1-q)}, \quad \text{da cui segue } \mu_1 = \frac{3}{2} \frac{3(1-q)+1}{3(1-q)} = \frac{4-3q}{2(1-q)}.$$

In conclusione si ha $\mu_1 = \frac{4-3q}{2(1-q)}$ e $\mu_2 = \frac{1}{1-q}$. Inoltre i valori di q richiesti (per cui i due tempi medi coincidono) devono essere soluzione dell'equazione

$$\frac{4-3q}{2(1-q)} = \frac{1}{1-q}, \quad \text{da cui segue } 4 - 3q = 2,\ 3q = 2,\ q = \frac{2}{3}$$

(quindi esiste un unico valore che soddisfa la condizione richiesta).
Osservazione. Non sorprende che $\mu_2 = \frac{1}{1-q}$. In effetti, come si capisce osservando la seconda riga della matrice di transizione, il tempo di assorbimento in 3 partendo da 2 è una variabile aleatoria geometrica traslata di parametro $1 - q$.