

Proposizioni

Sia $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ una v.a. m-dimensionale con densità conjunta $p_{\underline{X}}$ e con densità marginali p_{X_1}, \dots, p_{X_m} . Allora, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, si ha

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$$

lettere
minuscule

Quando si scrive \underline{x} si pensa
a $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ dove
la coordinate i-sime x_i
coincide con questo

Quindi, notate le coordinate, abbiamo
una formula che consente di ottenere
ciascuna delle m marginali.

DIMOSTRAZIONE

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ si ha

$$\begin{aligned}
 P_{X_i}(x_i) &= P(X_i = x_i) = P\left(\bigcup_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} \{\underline{X} = \underline{x}\}\right) = P\left(\bigcup_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} (\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_m = x_m\})\right) = \\
 &= \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} P(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_m = x_m\}) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} P(\underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} P_{\underline{X}}(\underline{x}),
 \end{aligned}$$

□

L'insieme $S_{\underline{X}}$ è al più numerabile e quindi si ha un'unione al più numerabile di eventi disgiunti a due a due

Ora presentiamo due diverse densità congiunte m -dimensionali, in particolare con $m=2$,

per cui si ha

- "P_{X₁} della 1^a congiunta" coincidente con "P_{X₁} delle 2^a congiunta"
- "P_{X₂} della 1^a congiunta" coincidente con "P_{X₂} delle 2^a congiunta".

In entrambi i casi otteniamo $m=2$ (come anticipato)

$$\mathcal{S}_{\underline{X}} = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

CONFIGURA N. 1: $P_{\underline{X}}(0,0) = P_{\underline{X}}(0,1) = P_{\underline{X}}(1,0) = P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{4}$. oss. E' ben poster.

MARGINALI

$$\left[\begin{array}{l} P_{X_1}(0) = P_{\underline{X}}(0,0) + P_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P_{X_1}(1) = P_{\underline{X}}(1,0) + P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} P_{X_2}(0) = P_{\underline{X}}(0,0) + P_{\underline{X}}(1,0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P_{X_2}(1) = P_{\underline{X}}(0,1) + P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Quindi le marginali di X_1 e X_2 coincidono, cioè si ha $P_{X_1} = P_{X_2}$.

Inoltre in entrambi i casi si ha la distribuzione Bernulliana di parametro $p=\frac{1}{2}$.

CONGIUNTA N.2: $P_{\underline{X}}(0,0) = P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{3}$ e $P_{\underline{X}}(1,0) = P_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{6}$. OSS, E' ben posta.

MARGINALI

$$\left[\begin{array}{l} P_{X_1}(0) = P_{\underline{X}}(0,0) + P_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \dots = \frac{1}{2} \\ P_{X_1}(1) = P_{\underline{X}}(1,0) + P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{1}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} P_{X_2}(0) = P_{\underline{X}}(0,0) + P_{\underline{X}}(1,0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \dots = \frac{1}{2} \\ P_{X_2}(1) = P_{\underline{X}}(0,1) + P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Quindi abbiamo le stesse marginali che avevamo ottenuto con la congiunta precedente.

In conclusione abbiamo ottenuto ciò che volevamo: due scelte diverse per $P_{\underline{X}}$ per cui si ha

" P_{X_i} delle 1^a congiunta" coincide con " P_{X_i} delle 2^a congiunta" $\forall i=1, \dots, m$.

(Poi nel caso specifico, dove $m=2$, ma entrambe le congiunte si ha $P_{X_1}=P_{X_2}$).

Questo non era vero).

Ora presentiamo un altro concetto collegato a questi argomenti.

DEFINIZIONE

Una famiglia finita di v.a. X_1, \dots, X_m , con $m \geq 2$, è una famiglia di v.a. indipendenti se sono discrete.

$$\forall A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R} \quad P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\}) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_m \in A_m).$$

Una famiglia infinita di v.a. discrete è una famiglia di v.a. indipendenti se questo accade per qualsiasi sottofamiglia finita.

Proposizione

Sia X_1, \dots, X_m , con $m \geq 2$, una famiglia finita di v.a. indipendenti.

Allora, per ogni $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$, gli eventi $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_m \in A_m\}$ sono eventi indipendenti.

Dimostrazione

$\forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ con $k \geq 2$ si deve avere

$$P(\{X_{i_1} \in A_{i_1}\} \cap \dots \cap \{X_{i_k} \in A_{i_k}\}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \dots P(X_{i_k} \in A_{i_k}).$$

Si vede subito che questo è vero se $k=m$ e quindi $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, m\}$.

Vediamo cosa succede nel caso in cui $2 \leq k \leq m-1$.

Sia $\{J_1, \dots, J_{m-n}\}$ il complementare di $\{i_1, \dots, i_n\}$; quindi

$$\{i_1, \dots, i_n\} \cup \{J_1, \dots, J_{m-n}\} = \{1, \dots, m\}.$$

Allora

$\nearrow \quad \searrow$
 Intersezione vuota

$$\begin{aligned}
 P(\{X_{i_1} \in A_{i_1}\} \cap \dots \cap \{X_{i_n} \in A_{i_n}\}) &= P(\{X_{i_1} \in A_{i_1}\} \cap \dots \cap \{X_{i_n} \in A_{i_n}\} \cap \{X_{J_1} \in R\} \cap \dots \cap \{X_{J_{m-n}} \in R\}) \\
 &= P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_n} \in A_{i_n}) \underbrace{P(X_{J_1} \in R)}_{= P(R) = 1} \cdots \underbrace{P(X_{J_{m-n}} \in R)}_{= P(R) = 1} = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_n} \in A_{i_n}),
 \end{aligned}$$

per motivi
delle v.a.

che è l'uguaglianza desiderata.



Ora presentiamo una condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza di famiglie finite di v.a. discrete.

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ una v.a. m-dimensionale, con $m \geq 2$. Allora

X_1, \dots, X_m è una famiglia di v.a. discrete indipendenti.



$$P_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_m) = P_{X_1}(x_1) \cdots P_{X_m}(x_m).$$

COMENTO:
la costante è il prodotto delle marginali

$$\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

lettere minuscole

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) Consideriamo la definizione di famiglia di v.a. indipendenti seguendo, $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$A_1 = \{x_1\}, \dots, A_m = \{x_m\}$. Allora, poiché si ha

$$\begin{aligned} & P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\}) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_m \in A_m), \\ & = P(\underline{X} = \underline{x}) = P_{\underline{X}}(\underline{x}) \\ & = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_m = x_m) \\ & = P_{X_1}(x_1) \cdots P_{X_m}(x_m) \end{aligned}$$

abbiamo quanto desideravamo.

lettere minuscole

\leftarrow) Supponiamo che le densità congiunte è uguale al prodotto delle densità marginali.

Allors ($A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$)

$$P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\}) = P((X_1, \dots, X_m) \in A_1 \times \dots \times A_m) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{x \in A_1 \times \dots \times A_m \\ x \in S_X}} P_X(x) \\
 &= \sum_{x_1 \in A_1 \cap S_{X_1}} P_{X_1}(x_1) \cdots \\
 &\quad \underbrace{\sum_{x_m \in A_m \cap S_{X_m}} P_{X_m}(x_m)}_{= P(X_m \in A_m)} = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_m \in A_m);
 \end{aligned}$$

che è l'ugualanza che vogliamo per dire X_1, \dots, X_m è una famiglia di v.g. indipendenti.

ESERCIZIO

oss. E' ben posta.

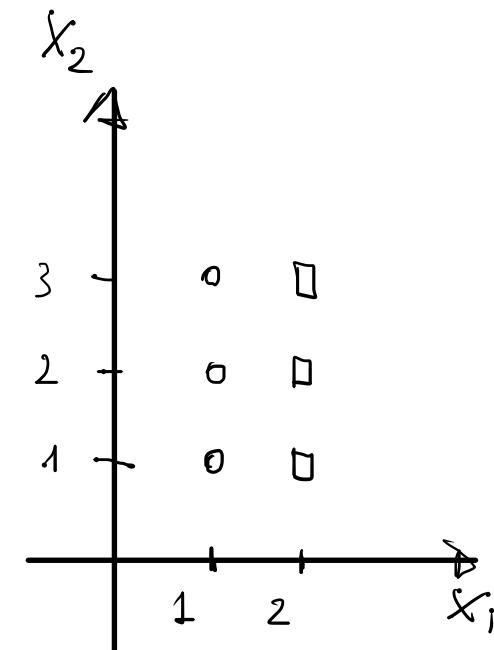
Consideriamo le seguenti densità congiunta: $\begin{cases} P_{\underline{X}}(1,1) = P_{\underline{X}}(1,2) = P_{\underline{X}}(1,3) = \frac{1}{12} \\ P_{\underline{X}}(2,1) = P_{\underline{X}}(2,2) = P_{\underline{X}}(2,3) = \frac{1}{4} \end{cases}$

- 1) Trovare le densità marginali
- 2) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

SVOLGIMENTO

Margionale di X_1 : $P_{X_1}(1) = P_{\underline{X}}(1,1) + P_{\underline{X}}(1,2) + P_{\underline{X}}(1,3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ SOMMA = 1

$$P_{X_1}(2) = P_{\underline{X}}(2,1) + P_{\underline{X}}(2,2) + P_{\underline{X}}(2,3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



Margionale di X_2 : $P_{X_2}(1) = P_{\underline{X}}(1,1) + P_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ SOMMA = 1

$$P_{X_2}(2) = P_{\underline{X}}(1,2) + P_{\underline{X}}(2,2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P_{X_2}(3) = P_{\underline{X}}(1,3) + P_{\underline{X}}(2,3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2) Per verificare se c'è indipendenza, vogliamo fare riferimento alle Proposizioni dimostrate

prime dell'esercizio (è una CNES). Si deve verificare se vale

lettere minuscole

$$P_{\underline{X}}(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2)$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

In realtà basta fare riferimento a $(x_1, x_2) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$; in tutti gli altri casi si ha $P_{\underline{X}} = P \cdot P$, e quindi la condizione richiesta è verificata.

Ora (per i valori nel testo dell'esercizio e per le risposte alle domande precedenti) ci chiediamo:

per $(x_1, x_2) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$$\frac{1}{12} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

RISPOSTA: SI

per $(x_1, x_2) \in \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

$$\frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

RISPOSTA: SI.

CONCLUSIONE: X_1 e X_2 sono indipendenti perché vale la condizione richiesta per ognuno dei questi 6 casi.

OSS. In generale, se c'è una sola coppia per cui non vale l'ugualanza richiesta, allora non c'è indipendenza.

ESERCIZIO

✓ oss. E' ben posta.

Consideriamo le seguenti densità congiunta: $\begin{cases} P_{\underline{X}}(1,1) = \frac{10}{29}, P_{\underline{X}}(1,2) = \frac{2}{29}, P_{\underline{X}}(1,3) = \frac{7}{29} \\ P_{\underline{X}}(2,1) = P_{\underline{X}}(2,2) = \frac{5}{29} \end{cases}$

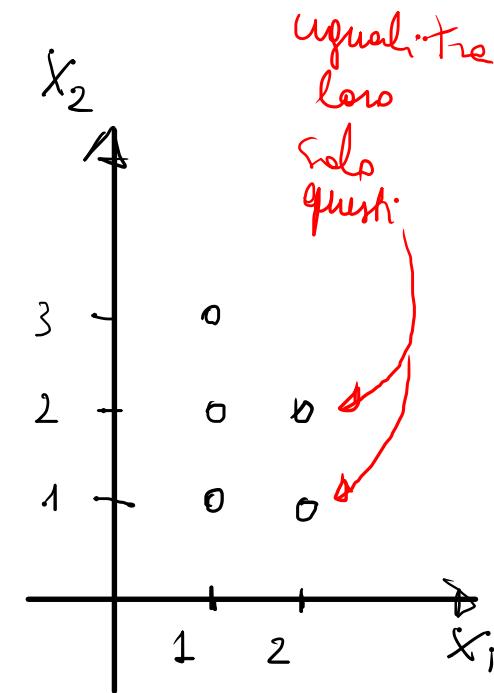
- 1) Trovare le densità marginali
- 2) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

SVOLGIMENTO

Marginali di X_1 :

$$\begin{cases} P_{X_1}(1) = P_{\underline{X}}(1,1) + P_{\underline{X}}(1,2) + P_{\underline{X}}(1,3) = \frac{10}{29} + \frac{2}{29} + \frac{7}{29} = \frac{19}{29} \\ P_{X_1}(2) = P_{\underline{X}}(2,1) + P_{\underline{X}}(2,2) + P_{\underline{X}}(2,3) = \frac{5}{29} + \frac{5}{29} = \frac{10}{29} \end{cases}$$

SOMMA = 1



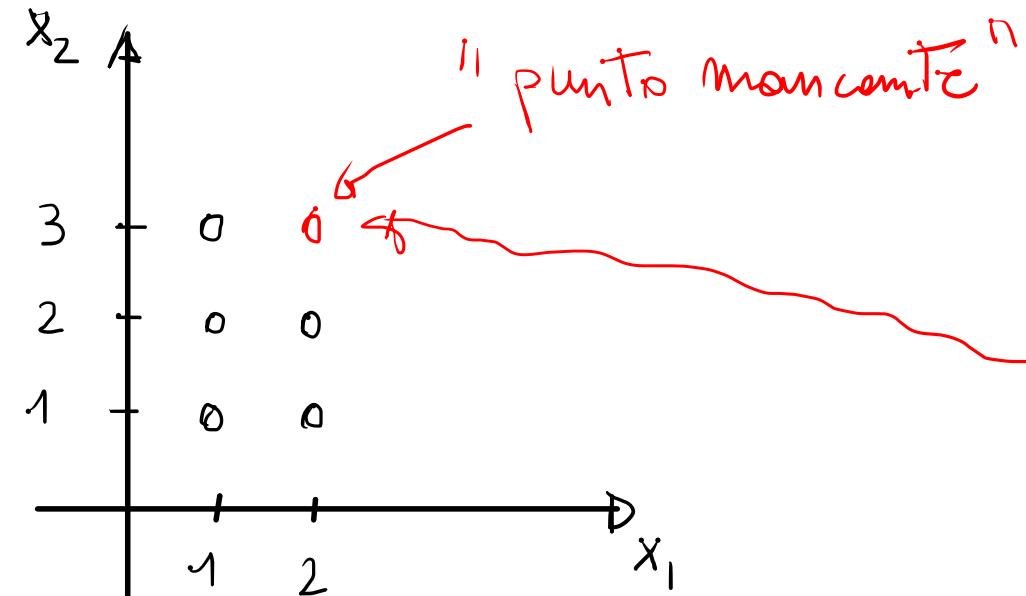
Marginali di X_2 :

$$\begin{cases} P_{X_2}(1) = P_{\underline{X}}(1,1) + P_{\underline{X}}(2,1) = \frac{10}{29} + \frac{5}{29} = \frac{15}{29} \\ P_{X_2}(2) = P_{\underline{X}}(1,2) + P_{\underline{X}}(2,2) = \frac{2}{29} + \frac{5}{29} = \frac{7}{29} \\ P_{X_2}(3) = P_{\underline{X}}(1,3) = \frac{7}{29} \end{cases}$$

SOMMA = 1

2) Si vede subito che X_1 e X_2 non sono indipendenti.

Per capire questo riprendiamo i punti del piano cartesiano dello slide precedente:



I 5 punti non costituiscono un prodotto cartesiano; però, se aggiungiamo il punto (2,3), abbiamo 6 punti che costituiscono il prodotto cartesiano $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$.

Allora il punto mancante formisce un caso in cui le conclusioni

lettere minuscole $P_X(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2)$ non è verificata.

Nel caso specifico si ha

$$\underbrace{P_X(2,3)}_{=0} \neq \underbrace{P_{X_1}(2) P_{X_2}(3)}_{\neq 0 \text{ perché } \begin{cases} P_{X_1}(2) \neq 0 \\ P_{X_2}(3) \neq 0 \end{cases}}$$

In dettaglio:

$$P_{X_1}(2) = \frac{10}{29} \text{ e } P_{X_2}(3) = \frac{7}{29}$$

come visto nella risposta alle prime domande

COMMENTO GENERALE

Se l'insieme $\{(x_1, \dots, x_m) : P_X(x_1, \dots, x_m) > 0\}$ non è un prodotto cartesiano, allora non c'è indipendenza.

In generale non vale il viceversa: ciò è possibile costruire esempi in cui non c'è indipendenza

ma l'insieme $\{(x_1, \dots, x_m) : P_X(x_1, \dots, x_m) > 0\}$ è un prodotto cartesiano.

lettere minusecole

Vedere prossime slide

ESEMPIO

Consideriamo le seguenti densità congiunte: per $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si ha

$$P_{\underline{X}}(a, a) = P_{\underline{X}}(b, b) = \frac{1}{3} \quad \text{oss. E' ben posta}$$

$$P_{\underline{X}}(a, b) = P_{\underline{X}}(b, a) = \frac{1}{6}$$

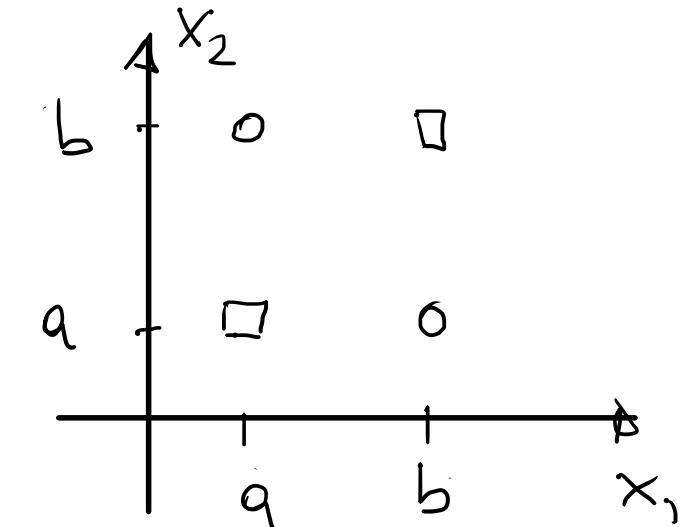
Ora calcoliamo le marginali di X_1 e X_2 :

$$\left[P_{X_1}(a) = P_{\underline{X}}(a, a) + P_{\underline{X}}(a, b) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[P_{X_1}(b) = P_{\underline{X}}(b, a) + P_{\underline{X}}(b, b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[P_{X_2}(a) = P_{\underline{X}}(a, a) + P_{\underline{X}}(b, a) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[P_{X_2}(b) = P_{\underline{X}}(a, b) + P_{\underline{X}}(b, b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right]$$



Inoltre osserviamo che

$$\underbrace{P_{\underline{X}}(a, a)}_{= \frac{1}{3}} \neq \underbrace{P_{X_1}(a) P_{X_2}(a)}_{= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

Quindi X_1 e X_2 sono non indipendenti,

ESERCIZIO

Un'urna ha 4 palline con i numeri 0, 1, 1, 2. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.

Consideriamo le seguenti v.a. $\begin{cases} X_1 = \text{Somma dei due numeri estratti} \\ X_2 = \text{medietà dei due numeri estratti} \end{cases}$

1) Trovare la densità congiunta di $X = (X_1, X_2)$

2) Calcolare $P(\{X_1 \geq 2\} \cap \{X_2 \leq 1\})$

3) Calcolare $P(X_1=1 | X_2=0)$.

SOLIMENTO

Si tratta di fare un riferimento all'insieme Ω che induce i possibili modi di estrarre le

2 palline in blocco; sono $\binom{4}{2} = 6$ con equiprobabili (bisogna distinguere le due palline con il numero).

1) Vediamo, per ciascuno dei $\binom{4}{2} = 6$ casi, come sono definite le v.a. X_1 e X_2 :

| ω | $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ |
|----------------|------------------------------------------|
| $\{0, 1_A\}$ | $(0+1, 0 \cdot 1) = (1, 0)$ |
| $\{0, 1_B\}$ | $(0+1, 0 \cdot 1) = (1, 0)$ |
| $\{0, 2\}$ | $(0+2, 0 \cdot 2) = (2, 0)$ |
| $\{1_A, 1_B\}$ | $(1+1, 1 \cdot 1) = (2, 1)$ |
| $\{1_A, 2\}$ | $(1+2, 1 \cdot 2) = (3, 2)$ |
| $\{1_B, 2\}$ | $(1+2, 1 \cdot 2) = (3, 2)$ |

La densità congiunta richiesta è:

$$P_{\underline{X}}(1,0) = \frac{2}{6}, \quad P_{\underline{X}}(2,0) = \frac{1}{6}, \quad P_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{6}, \quad P_{\underline{X}}(3,2) = \frac{2}{6}.$$

$(2,0), (2,1)$ soddisfano l'evento

$(1,e)$ No, perché $X_1 < 2$

$(3,2)$ No, perché $X_2 > 1$

$$2) P(\{X_1 \geq 2\} \cap \{X_2 \leq 1\}) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\underline{X}}(2,0) + P_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A denominatore si prendono le coppie $(1,0)$ e $(2,0)$; al contrario $(2,1)$ e $(3,2)$ non vanno presi perché si ha $X_2 \neq 0$.

$$3) P(X_1=1 | X_2=0) = \frac{P(\{X_1=1\} \cap \{X_2=0\})}{P(X_2=0)} = \frac{P_{\underline{X}}(1,0)}{P_{\underline{X}}(1,0) + P_{\underline{X}}(2,0)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

ESERCIZIO

Sia $q \in (0, 1)$. Consideriamo le seguenti densità congiunte:

$$P_{X_1}(k, 0) = q \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero}$$

$$P_{X_2}(h, 1) = (1-q) \left(\frac{3}{4}\right)^{h-1} \frac{1}{4} \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero}$$

1) Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 \geq 1)$

2) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti

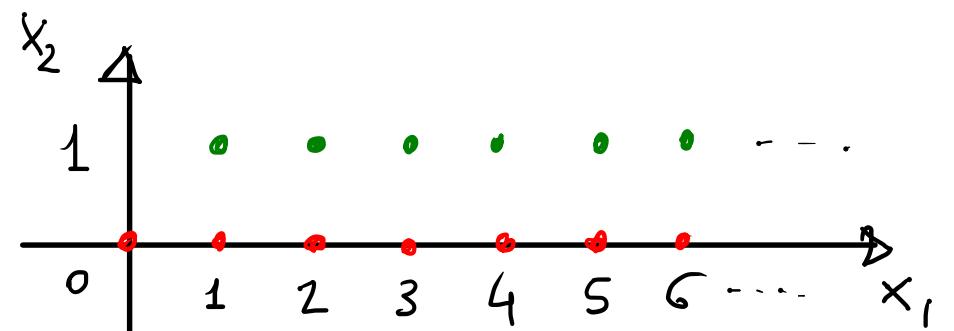
3) Calcolare $P(X_1 \in D | X_2 = 0)$ dove $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ è l'insieme dei numeri dispari

OSS E' ben posta perché

$$\sum_{k=0}^{\infty} q \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \sum_{h=1}^{\infty} (1-q) \left(\frac{3}{4}\right)^{h-1} \frac{1}{4} = q \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1-q}{4} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^0}{1-\frac{3}{4}} = q \cdot \frac{1}{2} + \frac{1-q}{4} \cdot 1 = q + 1 - q = 1.$$

SVOLGIMENTO

Intriamo con il seguente grafico



- = punti del tipo $(h, 1)$ con $h \geq 1$ intero

- = punti del tipo $(k, 0)$ con $k \geq 0$ intero

$$1) P(X_1 = X_2 | X_1 \geq 1) = \frac{P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \geq 1\})}{P(X_1 \geq 1)} = ?$$

• Le uniche coppie con " $x_1 = x_2$ " sono $(0,0)$ e $(1,1)$; quindi il numeratore è $P_{\underline{X}}(1,1)$.

• $P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 < 1) = 1 - P_{\underline{X}}(0,0)$ l'unico punto con " $x_1 < 1$ " è $(0,0)$.

Quindi:

$$P(X_1 = X_2 | X_1 \geq 1) = \frac{P_{\underline{X}}(1,1)}{1 - P_{\underline{X}}(0,0)} = \frac{(1-q)\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{4}}{1 - q\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}} = \frac{\frac{1-q}{4}}{1 - \frac{q}{2}} = \frac{\frac{1-q}{4}}{\frac{2-q}{2}} = \frac{1-q}{4} \cdot \frac{2}{2-q} = \frac{1-q}{2(2-q)}.$$

2) I punti dove $P_{\underline{X}}(x_1, x_2) > 0$ (vedere i punti rossi e verdi del grafico)

Non costituiscono un prodotto cartesiano perché c'è un

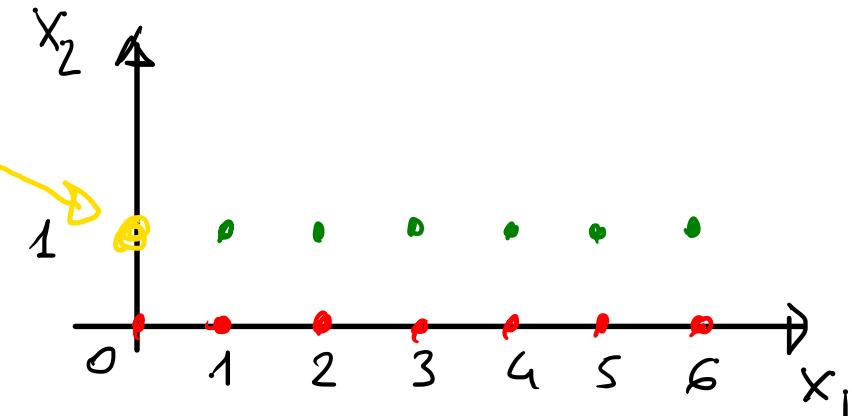
"punto mancante"; si tratta del punto $(0, 1)$
(e si ha $\{0, 1, 2, 3, \dots\} \times \{0, 1\}$).

Allora

$$\underbrace{P_{\underline{X}}(0, 1)}_{=0} \neq \underbrace{P_{X_1}(0)}_{\neq 0} P_{X_2}(1)$$

(ovviamente)

perché $P_{X_1}(0) \neq 0$ e $P_{X_2}(1) \neq 0$



Dettaglio:

$$P_{X_1}(0) = P_{\underline{X}}(0, 0) = q \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \frac{q}{2} \quad (\text{ricorda che } q > 0);$$

$$P_{X_2}(1) = \sum_{h=1}^{\infty} (1-q) \left(\frac{3}{4}\right)^{h-1} \frac{1}{4} = \frac{1-q}{4} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{h-1} = \frac{1-q}{4} \cdot \frac{(3/4)^0}{1 - 3/4} = \frac{1-q}{4} \cdot \frac{1}{1/4} = 1-q \quad (\text{ricorda che } q < 1).$$

$$3) P(X_1 \in D | X_2 = 0) = \frac{P(\{X_1 \in D\} \cap \{X_2 = 0\})}{P(X_2 = 0)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_X(2k-1, 0)}{\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k, 0)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} q \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}}{\sum_{k=0}^{\infty} q \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}{q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\frac{(1/4)^1}{1-1/4}}{\frac{(1/2)^1}{1-1/2}} = \frac{\frac{1/4}{3/4}}{\frac{1/2}{1/2}} = \frac{1}{3}.$$

OSS. Se vogliamo calcolare $P(X_1 \in D^c | X_2 = 0)$, per le teorie e per il valore $\frac{1}{3}$ ottenuto

possiamo dire che è uguale a $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Infatti si ha

$$P(X_1 \in D^c | X_2 = 0) = \frac{P(\{X_1 \in D^c\} \cap \{X_2 = 0\})}{P(X_2 = 0)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_X(2k, 0)}{\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k, 0)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} q \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\frac{q}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k}{q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{(1/4)^0}{1-1/4}}{\frac{(1/2)^1}{1-1/2}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3/4}}{\frac{1/2}{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

ESERCIZIO

Consideriamo le seguenti densità congruite

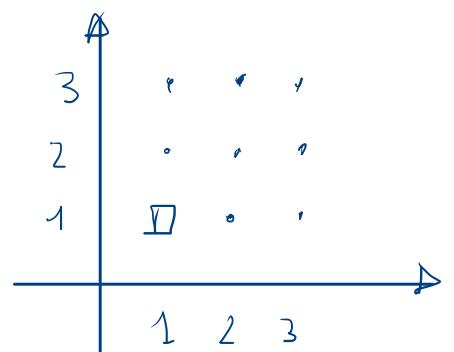
$$P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2/10 & \text{per } x_1 = x_2 = 1 \\ 1/10 & \text{per } (x_1, x_2) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}, \text{ con } (x_1, x_2) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) Calcolare $P(X_1 + X_2 \geq 5)$

2) Calcolare $P(X_1 = 1 | X_2 = 1)$

3) Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 + X_2 \geq 5)$

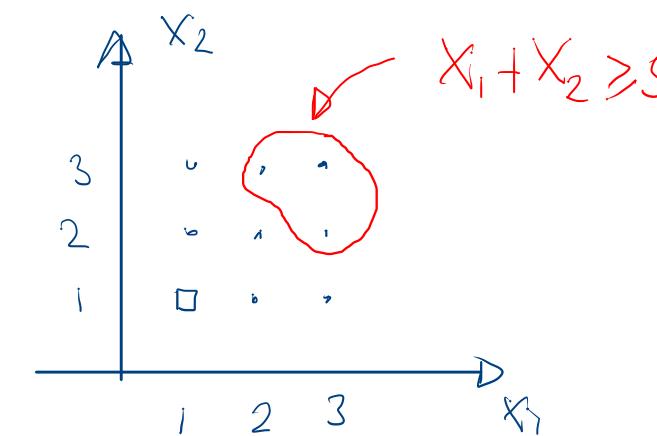
SOLUZIONI



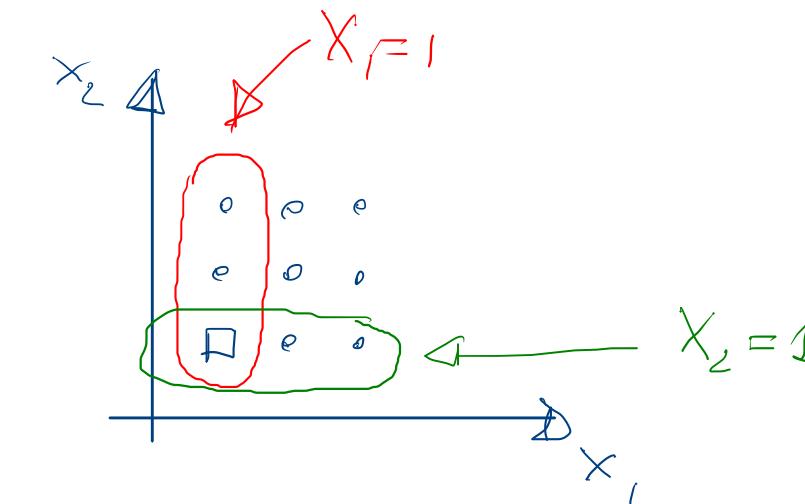
$$\square = 2/10$$

$$\bullet = 1/10$$

$$1) P(X_1 + X_2 \geq 5) = P_{X_1, X_2}(3,3) + P_{X_1, X_2}(3,2) + P_{X_1, X_2}(2,3) = \\ = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$



$$2) P(X_1 = 1 \mid X_2 = 1) = \frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\})}{P(X_2 = 1)} = \\ = \frac{P_{X_1, X_2}(1,1)}{P_{X_1, X_2}(1,1) + P_{X_1, X_2}(2,1) + P_{X_1, X_2}(3,1)} = \\ = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$3) P(X_1 = X_2 \mid X_1 + X_2 \geq 5) = \frac{P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 + X_2 \geq 5\})}{P(X_1 + X_2 \geq 5)} = \\ = \frac{P_{X_1, X_2}(3,3)}{P_{X_1, X_2}(3,3) + P_{X_1, X_2}(3,2) + P_{X_1, X_2}(2,3)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

OSS. E' come se ci ponessimo un modello uniforme ...

