

Appunti di Probabilità e Statistica

Parte 1: Fondamenti di Probabilità

Alessandro Finocchiario

1 Introduzione alla Probabilità (Lezione 1)

Definizione 1.1 (Fenomeno Aleatorio e Spazio Campionario). Un **fenomeno aleatorio** è un esperimento il cui esito è incerto. L'insieme di tutti i possibili esiti è detto **spazio campionario** e si indica con Ω .

- **Discreto**: se Ω è un insieme finito o numerabile (es. lancio di un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
- **Continuo**: se Ω è un insieme non numerabile (es. durata di una lampadina, $\Omega = [0, \infty)$).

Definizione 1.2 (Evento). Un **evento** è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio campionario Ω a cui si può associare una probabilità. Le operazioni logiche tra eventi corrispondono a operazioni insiemistiche:

- **Somma Logica (OR)**: Unione ($A \cup B$)
- **Prodotto Logico (AND)**: Intersezione ($A \cap B$)
- **Negazione (NOT)**: Complementare ($A^c = \Omega \setminus A$)

Definizione 1.3 (Spazio di Probabilità). Uno **spazio di probabilità** è una terna (Ω, \mathcal{A}, P) dove:

- Ω è lo spazio campionario.
- \mathcal{A} è una σ -algebra di eventi (sottoinsiemi di Ω).
- P è una **misura di probabilità** che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Per ogni successione di eventi $\{A_n\}_{n \geq 1}$ a due a due disgiunti ($A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$):

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additività})$$

Proprietà 1.1 (Proprietà della Probabilità). • $P(\emptyset) = 0$.

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- Se $A \subset B$, allora $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definizione 1.4 (Probabilità Condizionata). Dati due eventi A e B , con $P(B) > 0$, la **probabilità condizionata di A dato B** è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2 Formule Avanzate e Indipendenza (Lezione 2)

Teorema 2.1 (Regola del Prodotto). *Dalla definizione di probabilità condizionata si ricava:*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Questa regola si estende a più eventi:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

Teorema 2.2 (Formula delle Probabilità Totali). *Data una partizione $\{E_i\}_{i \in I}$ di Ω (eventi disgiunti la cui unione è Ω), la probabilità di un evento A è:*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|E_i)P(E_i)$$

Teorema 2.3 (Formula di Bayes). *Data una partizione $\{E_i\}_{i \in I}$ e un evento A , la probabilità "a posteriori" dell'evento E_m dato A è:*

$$P(E_m|A) = \frac{P(A|E_m)P(E_m)}{\sum_{i \in I} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Definizione 2.1 (Indipendenza tra Eventi). *Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Se $P(B) > 0$, questo è equivalente a $P(A|B) = P(A)$.*

3 Indipendenza Multipla e Calcolo Combinatorio (Lezione 3)

Definizione 3.1 (Indipendenza di una Famiglia di Eventi). *Una famiglia di eventi $\{A_1, \dots, A_n\}$ è indipendente se per ogni sottoinsieme di indici $\{i_1, \dots, i_k\}$ vale:*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

Nota: l'indipendenza a coppie non implica l'indipendenza dell'intera famiglia.

3.1 Calcolo Combinatorio

Definizione 3.2 (Disposizioni e Combinazioni). *Dato un insieme di n elementi:*

- **Disposizioni Semplici** $D_{n,k}$: numero di sequenze **ordinate** di k elementi distinti.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Combinazioni Semplici** $C_{n,k}$: numero di sottoinsiemi **non ordinati** di k elementi.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esempio 3.1 (Estrazioni in Blocco - Modello Ipergeometrico). *Da un'urna con n_1 oggetti di tipo 1 e n_2 di tipo 2, si estraggono n oggetti in blocco. La probabilità di estrarre k oggetti di tipo 1 (e quindi $n-k$ di tipo 2) è:*

$$p_k = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$