Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2024-2025`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Simulazione 2

L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Si lancia due volte un dado equo.

`D1)` Calcolare la probabilità che escano un numero minore di 3 (cioè 1, o 2) e un numero maggiore di 4 (cioè 5, o 6) in un qualsiasi ordine.

`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte esce un numero maggiore di 2 (cioè 3, o 4, o 5, o 6). Calcolare media e varianza di X.

`D3)` Calcolare la probabilità che escano due numeri uguali sapendo che la somma dei due numeri ottenuti è uguale a 8.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce 1 o 2 si lancia una moneta equa, se esce uno degli altri numeri (3, 4, 5 o 6), si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $\frac{5}{8}$.

`D4)` Calcolare la probabilità che di aver lanciato la moneta equa sapendo che è uscita testa.

Esercizio 3. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e con distribuzioni Geometriche traslate di parametri $p_1 \in (0,1)$ e $p_2 \in (0,1)$ rispettivamente.

`D5)` Sia $k \geq 1$ intero. Verificare che $P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \geq k\}) = \frac{p_1 p_2 ((1-p_1)(1-p_2))^{k-1}}{p_1+p_2-p_1p_2}$.

`D6)` Verificare che $P(X_1 = 1 | X_1 + X_2 = 4) = \frac{(1-p_2)^2}{(1-p_2)^2+(1-p_1)(1-p_2)+(1-p_1)^2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (a^2, b^2) per $b > a > 0$.

`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{\sqrt{X}}$.

`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{b^2-a^2}(be^b - ae^a - (e^b - e^a))$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 9.

`D9)` Dire per quale valore di $r > 0$ si ha $P(0 \leq X \leq 2) = 2\Phi(r) - 1$.

Siano $X_1, \ldots, X_{10000}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 4.

`D10)` Calcolare $P(10080 \leq X_1 + \cdots + X_{10000} \leq 10120)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1-q & q \end{pmatrix},$$

per $q \in [0,1]$.

`D11)` Sia $q \in (0,1)$. Dire se esiste $\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)}$, ed eventualmente calcolarlo.

`D12)` Sia $q \neq 0$. Calcolare il tempo medio di primo passaggio nello stato 4 partendo dallo stato 1.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Faremo riferimento all'insieme l'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ costituito da elementi (coppie) equiprobabili, ciascuno con probabilità 1/36.
`D1)` La probabilità richiesta riguarda l'evento

$$E = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(5,1),(5,2),(6,1),(6,2)\}$$

che ha 8 elementi. Quindi si ha $P(E) = \frac{\#E}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Quindi

$$\mathbb{E}[X] = np = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}[X] = np(1-p) = 2 \cdot \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}.$$

`D3)` La probabilità condizionata richiesta è $P(A|B)$ dove

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \quad \text{e} \quad B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}.$$

Quindi $A \cap B = \{(4,4)\}$, $P(A \cap B) = \frac{\#(A\cap B)}{36} = \frac{1}{36}$ e $P(B) = \frac{\#B}{36} = \frac{5}{36}$. In conclusione

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}.$$

Osservazione. In questo caso, poiché si ha a che fare con uno spazio uniforme discreto, non sorprende che si abbia $P(A|B) = \frac{\#(A\cap B)}{\#B} = \frac{1}{5}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(E|T)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(T)$) si ha

$$P(E|T) = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\frac{2}{6} + \frac{5}{8}\frac{4}{6}} = \frac{1/6}{(2+5)/12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{2}{7}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$\begin{aligned} P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \geq k\}) &= \sum_{h \geq k} p_{X_1,X_2}(h,h) = \sum_{h\geq k}(1-p_1)^{h-1}p_1(1-p_2)^{h-1}p_2 \\ &= \frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} \sum_{h\geq k}((1-p_1)(1-p_2))^h = \frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} \frac{((1-p_1)(1-p_2))^k}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \\ &= \frac{p_1p_2((1-p_1)(1-p_2))^{k-1}}{1-(1-p_1-p_2+p_1p_2)} = \frac{p_1p_2((1-p_1)(1-p_2))^{k-1}}{p_1+p_2-p_1p_2}. \end{aligned}$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_1+X_2 = 4) &= \frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_1+X_2 = 4\})}{P(X_1+X_2 = 4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,3)}{p_{X_1,X_2}(1,3) + p_{X_1,X_2}(2,2) + p_{X_1,X_2}(3,1)} \\ &= \frac{(1-p_1)^{1-1}p_1(1-p_2)^{3-1}p_2}{(1-p_1)^{1-1}p_1(1-p_2)^{3-1}p_2 + (1-p_1)^{2-1}p_1(1-p_2)^{2-1}p_2 + (1-p_1)^{3-1}p_1(1-p_2)^{1-1}p_2} \\ &= \frac{(1-p_2)^2}{(1-p_2)^2 + (1-p_1)(1-p_2) + (1-p_1)^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^a \leq Y \leq e^b) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq e^a, \\ (*) & \text{se } e^a < y < e^b, \\ 1 & \text{se } y \geq e^b. \end{cases}$$

Per $y \in (e^a, e^b)$ si ha

$$(*) = P(e^{\sqrt{X}} \le y) = P(\sqrt{X} \le \log y) = P(X \le (\log y)^2)$$
$$= \int_{a^2}^{(\log y)^2} \frac{1}{b^2-a^2} dx = \left[\frac{x}{b^2-a^2}\right]_{x=a^2}^{x=(\log y)^2} = \frac{(\log y)^2 - a^2}{b^2-a^2}.$$

D8) A partire dalla risposta precedente si ha che $f_Y(y) = \frac{2\log y}{(b^2-a^2)y} 1_{(e^a,e^b)}(y)$. Quindi

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{e^a}^{e^b} y \frac{2\log y}{(b^2-a^2)y} dy = \frac{2}{b^2-a^2} \int_{e^a}^{e^b} \log y dy.$$

Allora, integrando per parti, si ottiene

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{b^2-a^2}\left([y\log y]_{y=e^a}^{y=e^b} - \int_{e^a}^{e^b} y \cdot \frac{1}{y} dy\right) = \frac{2}{b^2-a^2}(be^b - ae^a - [y]_{y=e^a}^{y=e^b}) = \frac{2}{b^2-a^2}(be^b - ae^a - (e^b - e^a)).$$

Osservazione. In realtà non serve fare riferimento alla risposta precedente. Infatti si ha (nei passaggi di seguito ad un certo punto si considera il cambio di variabile $r = \sqrt{x}$, da cui segue $x = r^2$ e $dx = 2rdr$)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{\sqrt{X}}] = \int_{a^2}^{b^2} \frac{e^{\sqrt{x}}}{b^2-a^2} dx = \int_a^b \frac{e^r}{b^2-a^2} 2rdr = \frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b re^r dr$$

e, integrando per parti, si ottiene

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{b^2-a^2}\left([re^r]_{r=a}^{r=b} - \int_a^b e^r dr\right) = \frac{2}{b^2-a^2}(be^b - ae^a - [e^r]_{r=a}^{r=b}) = \frac{2}{b^2-a^2}(be^b - ae^a - (e^b - e^a)).$$

Esercizio 5.
D9) La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{9}} = \frac{X-1}{3}$; quindi si ha

$$2\Phi(r) - 1 = P(0 \le X \le 2) = P\left(\frac{0-1}{3} \le \frac{X-1}{3} \le \frac{2-1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} \le X^* \le \frac{1}{3}\right)$$
$$= \Phi(1/3) - \Phi(-1/3) = \Phi(1/3) - (1 - \Phi(1/3)) = \Phi(1/3) - 1 + \Phi(1/3) = 2\Phi(1/3) - 1,$$

da cui segue
$$2\Phi(r) - 1 = 2\Phi(1/3) - 1, \quad 2\Phi(r) = 2\Phi(1/3), \quad \Phi(r) = \Phi(1/3),$$
e in conclusione, per invertibilità di Φ, $r = \frac{1}{3}$.
D10) Si ha

$$P(10080 \le X_1 + \cdots + X_{10000} \le 10120)$$
$$= P\left(\frac{10080 - 10000}{\sqrt{4}\sqrt{10000}} \le \frac{X_1 + \cdots + X_{10000} - 10000}{\sqrt{4}\sqrt{10000}} \le \frac{10120 - 10000}{\sqrt{4}\sqrt{10000}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{120}{200}\right) - \Phi\left(\frac{80}{200}\right) = \Phi\left(\frac{3}{5}\right) - \Phi\left(\frac{2}{5}\right).$$

Esercizio 6.
D11) Per $q \in (0,1)$ si verifica che la catena è irriducibile (questo non è vero per $q = 0$ perché lo stato 1 è assorbente, e non è vero neanche per $q = 1$ perché lo stato 4 è assorbente). Inoltre la catena è regolare per l'Osservazione 5.16 (c'è almeno un elemento sulla diagonale principale positivo, ad esempio $p_{22} = \frac{1}{2} > 0$). Allora possiamo applicare il Teorema di Markov e il limite esiste; precisamente si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \pi_2,$$

dove $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è l'unica distribuzione stazionaria. Quindi calcoliamo la distribuzione stazionaria. Abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} (1-q)\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_1 \\ q\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_2 + (1-q)\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{3}\pi_3 + q\pi_4 = \pi_4 \end{cases}$$

con la condizione $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$. Troviamo dalla prima e dalla quarta equazione π_1 e π_4 in funzione di π_3:

$$\pi_1 = \frac{1}{3q}\pi_3, \quad \pi_4 = \frac{1}{3(1-q)}\pi_3;$$

tenendo conto di queste due relazioni, e isolando π_2 dalla terza equazione si ottiene

$$\pi_2 = 2(\pi_3 - (1-q)\pi_4) = 2\left(\pi_3 - (1-q)\frac{1}{3(1-q)}\pi_3\right) = \frac{4}{3}\pi_3.$$

Quindi abbiamo

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \frac{1}{3q}\pi_3 + \frac{4}{3}\pi_3 + \pi_3 + \frac{1}{3(1-q)}\pi_3 = \frac{\pi_3}{3}\left(\frac{1}{q} + 7 + \frac{1}{1-q}\right) = \pi_3\frac{7q(1-q)+1}{3q(1-q)},$$

da cui segue $\pi_3 = \frac{3q(1-q)}{7q(1-q)+1}$. In conclusione, con semplici calcoli, si vede che la distribuzione stazionaria è

$$\left(\frac{1-q}{7q(1-q)+1}, \frac{4q(1-q)}{7q(1-q)+1}, \frac{3q(1-q)}{7q(1-q)+1}, \frac{q}{7q(1-q)+1}\right),$$

da cui segue

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \frac{4q(1-q)}{7q(1-q)+1}.$$

`D12)` Dobbiamo considerare la matrice di transizione modificata ottenuta rendendo lo stato 4 assorbente:

$$P = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora, secondo questa nuova catena, $T = \{1,2,3\}$ è l'insieme degli stati transitori. In corrispondenza, se indichiamo con μ_i il tempo medio di assorbimento in 4 partendo da $i \in T$, abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + p_{11}\mu_1 + p_{12}\mu_2 + p_{13}\mu_3 = 1 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2 \\ \mu_2 = 1 + p_{21}\mu_1 + p_{22}\mu_2 + p_{23}\mu_3 = 1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + p_{31}\mu_1 + p_{32}\mu_2 + p_{33}\mu_3 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2. \end{cases}$$

Inoltre μ_1 è il valore medio richiesto. Per risolvere procediamo in questo modo: si trova μ_2 in funzione di μ_3 dalla seconda equazione, poi si sostituisce nella terza e si trova μ_1 in funzione di μ_3, e infine si sostituiscono le due relazioni ottenute nella prima equazione, e si trova μ_3. In dettaglio

$$\begin{cases} q\mu_1 = 1 + q\mu_2 \\ \frac{1}{2}\mu_2 = 1 + \frac{1}{2}\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2, \end{cases} \quad \begin{cases} q\mu_1 = 1 + q\mu_2 \\ \mu_2 = 2 + \mu_3 \\ 3\mu_3 = 3 + \mu_1 + \mu_2, \end{cases} \quad \begin{cases} q\mu_1 = 1 + q\mu_2 \\ \mu_2 = 2 + \mu_3 \\ \mu_1 = 3\mu_3 - 3 - 2 - \mu_3 = 2\mu_3 - 5, \end{cases}$$

da cui segue

$$q(2\mu_3 - 5) = 1 + q(2 + \mu_3), \quad q\mu_3 = 5q + 1 + 2q, \quad \mu_3 = \frac{7q+1}{q} = 7 + \frac{1}{q};$$

inoltre, sostituendo μ_3 nelle altre due relazioni inerenti μ_1 e μ_2, si ha

$$\mu_2 = 2 + \mu_3 = 9 + \frac{1}{q}, \quad \mu_1 = 2\mu_3 - 5 = 2\left(7 + \frac{1}{q}\right) - 5 = 9 + \frac{2}{q}.$$

In conclusione il valore medio richiesto è $\mu_1 = 9 + \frac{2}{q}$.
Osservazione. Se si osserva la matrice di transizione, e si pensa ai valori medi di opportune geometriche traslate, non sorprende che $\mu_1 = \mu_2 + \frac{1}{q}$ (che segue dalla prima equazione del sistema) e $\mu_2 = \mu_3 + \frac{1}{1/2} = \mu_3 + 2$ (che segue dalla seconda equazione del sistema).