Appunti di Probabilità e Statistica
Parte 1: Fondamenti di Probabilità

Alessandro Finocchiaro

1 Introduzione alla Probabilità (Lezione 1)

Definizione 1.1 (Fenomeno Aleatorio e Spazio Campionario)**.** *Un **fenomeno aleatorio** è un esperimento il cui esito è incerto. L'insieme di tutti i possibili esiti è detto **spazio campionario** e si indica con* Ω*.*

- ***Discreto**: se* Ω *è un insieme finito o numerabile (es. lancio di un dado,* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*).*
- ***Continuo**: se* Ω *è un insieme non numerabile (es. durata di una lampadina,* $\Omega = [0, \infty)$*).*

Definizione 1.2 (Evento)**.** *Un **evento** è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio campionario* Ω *a cui si può associare una probabilità. Le operazioni logiche tra eventi corrispondono a operazioni insiemistiche:*

- *Somma Logica (OR): Unione* $(A \cup B)$
- *Prodotto Logico (AND): Intersezione* $(A \cap B)$
- *Negazione (NOT): Complementare* $(A^c = \Omega \setminus A)$

Definizione 1.3 (Spazio di Probabilità)**.** *Uno **spazio di probabilità** è una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *dove:*

- Ω *è lo spazio campionario.*
- $\mathcal{A}$ *è una **σ-algebra** di eventi (sottoinsiemi di* Ω*).*
- P *è una **misura di probabilità** che soddisfa i seguenti assiomi:*
  1. $P(\Omega) = 1$.
  2. *Per ogni successione di eventi* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *a due a due disgiunti (*$A_m \cap A_n = \emptyset$ *per* $m \neq n$*):*

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additività})$$

Proprietà 1.1 (Proprietà della Probabilità)**.**

- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- *Se* $A \subset B$*, allora* $P(A) \leq P(B)$*.*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definizione 1.4 (Probabilità Condizionata)**.** *Dati due eventi* A *e* B*, con* $P(B) > 0$*, la probabilità condizionata di* A *dato* B *è:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2 Formule Avanzate e Indipendenza (Lezione 2)

Teorema 2.1 (Regola del Prodotto). *Dalla definizione di probabilità condizionata si ricava:*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Questa regola si estende a più eventi:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

Teorema 2.2 (Formula delle Probabilità Totali). *Data una partizione* $\{E_i\}_{i \in I}$ *di* Ω *(eventi disgiunti la cui unione è* Ω*), la probabilità di un evento* A *è:*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|E_i)P(E_i)$$

Teorema 2.3 (Formula di Bayes). *Data una partizione* $\{E_i\}_{i \in I}$ *e un evento* A*, la probabilità "a posteriori" dell'evento* E_m *dato* A *è:*

$$P(E_m|A) = \frac{P(A|E_m)P(E_m)}{\sum_{i \in I} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Definizione 2.1 (Indipendenza tra Eventi). *Due eventi* A *e* B *si dicono* ***indipendenti*** *se* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$*. Se* $P(B) > 0$*, questo è equivalente a* $P(A|B) = P(A)$*.*

3 Indipendenza Multipla e Calcolo Combinatorio (Lezione 3)

Definizione 3.1 (Indipendenza di una Famiglia di Eventi). *Una famiglia di eventi* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *è indipendente se per ogni sottoinsieme di indici* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *vale:*

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

Nota: l'indipendenza a coppie non implica l'indipendenza dell'intera famiglia.

3.1 Calcolo Combinatorio

Definizione 3.2 (Disposizioni e Combinazioni). *Dato un insieme di* n *elementi:*

- ***Disposizioni Semplici*** $D_{n,k}$*: numero di sequenze* ***ordinate*** *di* k *elementi distinti.*

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ***Combinazioni Semplici*** $C_{n,k}$*: numero di sottoinsiemi* ***non ordinati*** *di* k *elementi.*

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esempio 3.1 (Estrazioni in Blocco - Modello Ipergeometrico). *Da un'urna con* n_1 *oggetti di tipo 1 e* n_2 *di tipo 2, si estraggono* n *oggetti in blocco. La probabilità di estrarre* k *oggetti di tipo 1 (e quindi* $n-k$ *di tipo 2) è:*

$$p_k = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$