

CAPITOLO 2:

INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

<http://www.mat.univpm.it/masci/obolattica-corso-ST.htm>

Un fenomeno è detto "fenomeno aleatorio" se il suo esito è incerto.
L'insieme dei possibili esiti (in genere "numerico", eventualmente multidimensionale) viene indicato con Ω

FENOMENO ALEATORIO

- DISCRETO se Ω è finito o numerabile
- CONTINUO se Ω è più che numerabile

Esempi discreti:

- Il punto (possibili risultati del lancio di un dado) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Il numerabile (Numero di telefonate ricevute da un centralino in un intervallo di tempo) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

Esempio continuo:

tempo di funzionamento di una lampadina rispetto ad una certe unità di misura

$$\Omega = [0, \infty)$$

In genere si introduce una "famiglia di eventi" A che viene individuata da una famiglia di sottosettori di Ω .

Tornando agli esempi:

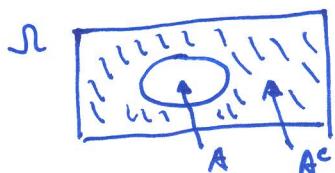
- "essere un numero pari" sono $\{2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- "il centralino riceve al più 2 telefonate" sono $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2, \dots\}$
- "la lampadina si fulmina dopo il tempo $t=5$ " sono $(5, \infty) \subset [0, \infty)$

Allora viene naturale ~~trovare~~ stabilire la corrispondenza tra "operazioni logiche sui eventi" e "operazioni insiemistiche":

SOMMA LOGICA $A \vee B$ \rightsquigarrow UNIONE $A \cup B$

PRODOTTO LOGICO $A \wedge B$ \rightsquigarrow INTERSEZIONE $A \cap B$

NEGAZIONE \bar{A} \rightsquigarrow COMPLEMENTAZIONE $A^c = \Omega \setminus A$.



Si vuole fare riferimento a "famiglie di eventi con buone proprietà".
 Si intende che, facendo operazioni indennistiche su elementi di \mathcal{A} ,
 si ottiene ancora un elemento di \mathcal{A} . [2]

DEFINIZIONE (σ -algebra)

Sia \mathcal{R} un insieme non vuoto e sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{R})$.

Allora \mathcal{A} è una σ -algebra (di eventi) se:

i) $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$

ii) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $\forall \{A_m\}_{m \geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{m \geq 1} A_m \in \mathcal{A}$

OSS. Si vede facilmente che anche $\emptyset \in \mathcal{A}$ e che $\bigcap_{m \geq 1} A_m \in \mathcal{A}$ nelle iii).

OSS. La richiesta delle numerabilità viene fatta per semplificare alcune cose successivamente. È una questione che non trattiamo in questo corso.

OSS. Si può prendere $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{R})$. Questa scelta dà altri problemi se

\mathcal{R} è più che numerabile (è una questione che non trattiamo).

Per questo motivo il caso con \mathcal{R} discreto viene trattato più

differentemente in questo corso.

DEFINIZIONE (misura di probabilità).

Sia \mathcal{R} un insieme non vuoto e \mathcal{A} una σ -algebra di eventi.

Allora una funzione $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ è una misura di probabilità

Se

1) $P(\mathcal{R}) = 1$

2) $\forall \{A_m\}_{m \geq 1} \subset \mathcal{A}$ tale che $\begin{cases} A_m \cap A_n = \emptyset \\ \text{per } m \neq n \end{cases}$ si ha

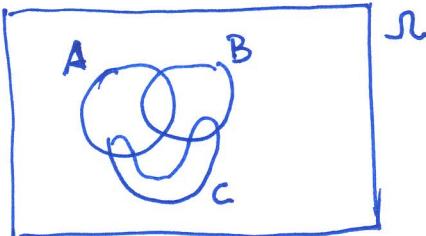
$$P\left(\bigcup_{m \geq 1} A_m\right) = \sum_{m \geq 1} P(A_m)$$

DISGIUNTI
A DUE A DUE

TERMINOLOGIA: La terza $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, P)$ è detta SPAZIO DI PROBABILITÀ.

COMMENTI

- la minima di probabilità $P: A \rightarrow [0, \infty)$ in realtà assume valori in $[0, 1]$; questo sarà chiaro successivamente.
- la richiesta $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$, cioè "insiemi disgiunti a due a due", è più forte delle condizione $\bigcap_{m \geq 1} A_m = \emptyset$. Per fornire le idee consideriamo una famiglia di 3 insiemi A, B, C ; allora in questo caso



$$\text{R} \quad \begin{array}{l} A \cap B \neq \emptyset \\ A \cap C \neq \emptyset \\ B \cap C \neq \emptyset \end{array} \quad A \cap B \cap C = \emptyset.$$

CONSEGUENZE DELLA DEFINIZIONE DI MINIMA DI PROBABILITÀ

$$1) P(\emptyset) = 0$$

Infatti, se consideriamo $A_m = \emptyset \forall m \geq 1$, si ha $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$
(anche per $m = n$) che cui segue

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(\bigcup_{m \geq 1} A_m\right) = P\left(\bigcup_{m \geq 1} \emptyset\right) = P(\emptyset) \\ \sum_{m \geq 1} P(A_m) = \sum_{m \geq 1} P(\emptyset) \end{array} \right. \Rightarrow P(\emptyset) = \sum_{m \geq 1} P(\emptyset)$$

Questa condizione non può essere vera $\text{P}(\emptyset) > 0$; infatti il 2^o membro sarebbe infinito (e il 1^o membro è finito). Quindi si deve avere $P(\emptyset) = 0$ e l'ugualmente vale come $0 = 0$.

~~$$2) \text{Se } \bigcup_{m \geq 1} (B_m \setminus B_m) = \emptyset \text{ per } m \neq n \text{ e } B_1, B_m \in \mathcal{A}. \text{ Allora } P\left(\bigcup_{m \geq 1} B_m\right) = \sum_{m \geq 1} P(B_m).$$~~

2) Sia $h \geq 1$ intero e $B_1, \dots, B_h \in \mathcal{F}$ con $B_m \cap B_n = \emptyset$ per $m \neq n$
 $(m, n \in \{1, \dots, h\})$. Allora $P\left(\bigcup_{m=1}^h B_m\right) = \sum_{m=1}^h P(B_m)$.

Infatti basta fare riferimento alle condizioni ii) nelle definizioni con

$$A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots, A_h = B_h, A_{h+1} = A_{h+2} = A_{h+3} = \dots = \emptyset.$$

Infatti, con queste scelte (e per le ipotesi), si ha $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$ e si ha

$$P\left(\bigcup_{m \geq 1} A_m\right) = \sum_{m \geq 1} P(A_m) \text{ da cui segue:}$$

$$\begin{cases} \bigcup_{m \geq 1} A_m = B_1 \cup \dots \cup B_h \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \dots = \bigcup_{m=1}^h B_m \Rightarrow P\left(\bigcup_{m \geq 1} A_m\right) = \cancel{P\left(\bigcup_{m=1}^h B_m\right)} \\ \sum_{m \geq 1} P(A_m) = P(B_1) + \dots + P(B_h) + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \dots + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \dots = \sum_{m=1}^h P(B_m) \end{cases}$$

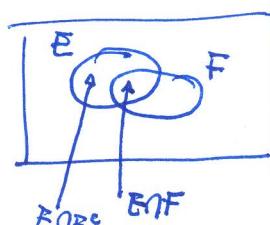
$$\text{e quindi si ottiene } P\left(\bigcup_{m=1}^h B_m\right) = \sum_{m=1}^h P(B_m).$$

3) Specalizziamo l'uguaglianza appena verificata prendendo $E, F \in \mathcal{F}$,

$$\cancel{\text{h}} \geq 2, B_1 = E \cap F, B_2 = E \cap F^c. \text{ Allora}$$

$$\begin{aligned} P((E \cap F) \cup (E \cap F^c)) &= \cancel{P(E \cap F)} + P(E \cap F^c) \\ &\stackrel{?}{=} P(F) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$



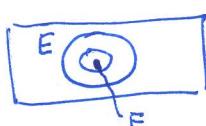
$$\Rightarrow (E \cap F) \cup (E \cap F^c) = E$$

3.1) (con $E = \Omega$)

$$\boxed{1 = P(F) + P(F^c) \quad \forall F \in \mathcal{F}}$$

e quindi $\begin{cases} P(F) = 1 - P(F^c) \\ P(F^c) = 1 - P(F) \end{cases}$

3.2) (con $\cancel{E \subset F} F \subset E$)



$$\Rightarrow P(E) = P(F) + P(E \cap F^c) \geq P(F)$$

$$\Rightarrow P(B) \geq P(F)$$

$\cancel{E \subset F}$ Da questo segue che $P(A) \leq P(\Omega) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

3.3) Svilupriamo la formula al punto 2) con $E, F \in A$,

$$h=2, B_1 = E \cap F^c, B_2 = E \cap F, B_3 = F \cap E^c$$

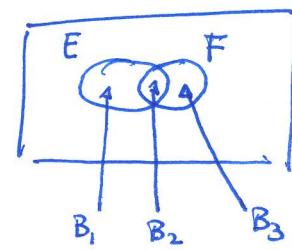
Ovviamente $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = E \cup F$, e quindi

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

$$= P(E \cap F^c) + P(E \cap F) + P(F \cap E^c)$$

$$= \underbrace{P(E \cap F^c)}_{= P(E)} + \underbrace{P(E \cap F)}_{\text{man}} + \underbrace{P(F \cap E^c)}_{\text{man}} + \underbrace{P(E \cap F)}_{= P(F)} - P(E \cap F)$$

$$\Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$



Si somma e si sottrae le stesse quantità

Q.E.D.

OSSERVAZIONE: L'uguaglianza ottenuta ha una interpretazione naturale.

Prendendo $P(B) + P(R)$, si ha che $P(B \cap R)$ viene "preso due volte" e quindi dobbiamo sottrarre queste quantità. Se $E \cap F = \emptyset$ ritroviamo le 2) con $h=2, B_1 = E$ e $B_2 = F$.

La formula ottenuta nelle 3.3) si estende al caso di più di due eventi (IDENTITÀ DI BONFERRONI). Qui chiamiamo quelle per $n \geq 3$: $\forall E, F, G \in A$

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G).$$

COMENTO GENERALE

Le proprietà delle misure di probabilità sono stimolate dalla costruzione del modello, e quindi da come si definisce la misura di probabilità in questione, per descrivere il fenomeno casuale (tale definizione può dipendere dallo stato di conoscenze dell'osservatore).

SPAZIO DI PROBABILITÀ UNIFORME DISCRETO.

Questa terminologia si usa nel caso in cui si ha la seguente situazione:

- Ω insieme finito (per fissare le idee con m elementi, n°1).
- $A = P(\Omega)$
- $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# A}{m}$. (dove $\# A$ è la cardinalità di A)

Questa situazione viene fissa imponendo la seguente condizione:

$$\forall w \in \Omega \quad P(\{w\}) \text{ assume sempre lo stesso valore,}$$

Infatti, se questo valore lo indichiamo con p , allora abbiamo le seguenti significante:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{w \in \Omega} \{w\}\right) = \sum_{w \in \Omega} \underbrace{P(\{w\})}_{=p} = \sum_{w \in \Omega} p = mp$$

Così se $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$

allora $\Omega = \{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \dots \cup \{w_m\}$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{m}.$$

Allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$, si ha

$$P(A) = P\left(\bigcup_{w \in A} \{w\}\right) = \sum_{w \in A} \underbrace{P(\{w\})}_{=p} = p \cdot \# A = \frac{\# A}{m}.$$

COMMENTI.

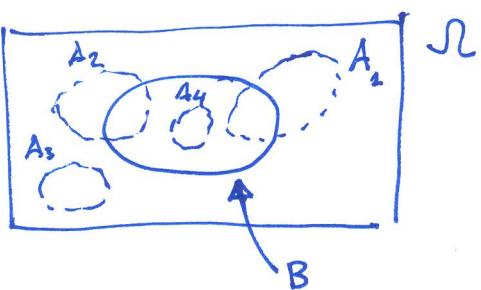
- 1) In questo caso $P(A) = 0$ se e solo se $A = \emptyset$.
- 2) Questa situazione esce fuori quando si compiono "estrazioni a caso da un insieme di n oggetti".
- 3) Questa costruzione non può essere fatta nel caso in cui Ω è infinito numerabile perché si avrebbe infinito denominatore e quindi si avrebbe sempre $P(A) = 0$. In altri termini non si riuscirebbe a modellizzare il caso di estrazioni a caso da un insieme infinito numerabile di oggetti.
- 4) Questo modello si può usare nel caso del lancio di un dado equo con $m = 6$ e $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

DEFINIZIONE

Sia (Ω, \mathcal{A}, P) uno spazio di probabilità. Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) \neq 0$. Allora si definisce "probabilità condizionata di A dato B " (oppure sapendo che si è verificato l'evento B) la seguente quantità:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

MOTIVAZIONE



Nel voler definire $P(A|B)$ è naturale ~~che~~ considerare una quantità che dipende da $P(A \cap B)$ proporzionalmente, con una costante di proporzionalità che non dipende da A (e che dipende da B):

$$P(A|B) = c_B \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Inoltre si vuole fare in modo che $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$ sia uno spazio di probabilità. Quindi per $A \in \Omega$ si ha

$$P(\Omega|B) = c_B \underbrace{P(\Omega \cap B)}_{= P(B)} \Rightarrow c_B = \frac{1}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

COMMENTO

La costruzione fatta nelle "motivazioni" ~~permette~~ consente di trovare un valore per c_B solo se $P(B) \neq 0$; infatti, se fosse $P(B) = 0$, si avrebbe $1 = c_B \cdot 0$.

Quindi si mette un ~~ostacolo~~ dare significato alla probabilità condizionata per $P(B) \neq 0$ ma questa restrizione non è grave.

~~COMENTO Se $P(B) = 0$~~

COMMENTO

Supponiamo che $P(B) = 1$. Allora $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{1} = P(A \cap B)$.

Inoltre $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ dove $\underbrace{0 \leq P(A \cap B^c) \leq P(B^c) = 0}_{\text{ovvio}}$ quindi $P(A) = P(A \cap B)$, e sostituendo nell'uguaglianza precedente si ha

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

Questa conclusione si può spiegare come segue. Il verificarsi di un evento di probabilità 1 è una informazione "buona" e quindi le prob. condizionate coincidono con quelle che si ha senza il condizionamento.

COMMENTO (PROB. CONDIZIONATA PER SPAZI DI PROBABILITÀ UNIFORMI DISCRETI).

Sia $B \subset A$ t.c. $P(B) \neq 0$; quindi $B \neq \emptyset$. Allora

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\#(A \cap B)/N}{\#B/N} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

ESEMPIO

Un'urna ha 10 palline numerate da 1 a 10.

Si estrae una pallina a caso.

- 1) Calcolare le probabilità di estrazione di un numero maggiore di 5 sapendo che è stato estratto un numero pari.
- 2) Calcolare le stesse probabilità nel caso in cui vengano aggiunte due palline, una con il numero 1 e l'altra con il numero 10.

RISPOSTA

Abbiamo $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; quindi $A \cap B = \{6, 8, 10\}$.

Nel 1° caso abbiamo uno spazio di prob. uniforme chiuso e quindi

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{3}{5}.$$

Nel 2° caso abbiamo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{6, 8, 10\})}{P(\{2, 4, 6, 8, 10\})} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} = \frac{2}{3}.$$

~~DA CONTROLLARE~~