Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
**Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)**
*Anno Accademico:* `2024-2025`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
**Simulazione 1**
*L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.*

**Esercizio 1**. Un'urna ha 3 palline bianche, 3 rosse e 2 nere.
`D1)` Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore.
`D2)` Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline rosse.
`D3)` Si considerino estrazioni casuali di una pallina alla volta *con* reinserimento. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $X$ che conta il numero di estrazioni necessarie per estrarre per la prima volta una pallina nera.

**Esercizio 2**. Si lancia ripetutamente una moneta equa fino a quando esce per la prima volta testa. Per ogni lancio di moneta effettuato, si lancia anche un dado equo.
`D4)` Calcolare la probabilità di ottenere tutti numeri dispari nei lanci di dado effettuati.

**Esercizio 3**. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\binom{2}{x_1}\binom{3}{x_2}\binom{3}{2-x_2}}{60} \quad \text{per } x_1,x_2 \in \{0,1,2\}.$$

`D5)` Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6)` Calcolare $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = (1-|x|)1_{(-1,1)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua della variabile aleatoria $Y = -\log|X|$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[|X|^r] = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right)$.

**Esercizio 5**. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9)` Sia $X$ una variabile aleatoria Normale con media 3 e varianza 16. Trovare il valore di $x > 3$ per cui si ha $P(X \leq x) = \Phi(2)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 100. Dire per quale valore di $z$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1\right| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

**Esercizio 6**. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/100 & 9/100 & 90/100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/1000 & 990/1000 & 1/1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D11)` Dire se esistono $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}$, ed eventualmente calcolarli.
`D12)` Calcolare la probabilità di passare per $C = \{5,6\}$ partendo da 3 e da 4, rispettivamente.

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1**.
`D1)` Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è

$$P(BB \cup RR \cup NN) = P(BB) + P(RR) + P(NN) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{9+9+4}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}.$$

`D2)` La probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}.$$

`D3)` La variabile aleatoria $X$ ha distribuzione geometrica traslata con parametro $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Quindi il valore atteso è $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/4} = 4$.

**Esercizio 2**.
`D4)` Sia $E$ l'evento di interesse e sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di lanci di moneta (e quindi anche quelli del dado) effettuati. Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$\begin{aligned} P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E|X=k)P(X=k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Esercizio 3**.
`D5)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,2) \\ &= \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{0}\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{60} = \frac{3+18+3}{60} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

`D6)` Poniamo $S = X_1 + X_2$. La densità discreta di $S$ è la seguente:

$$\begin{aligned} p_S(0) &= p_{X_1,X_2}(0,0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{60} = \frac{3}{60}, \\ p_S(1) &= p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{60} = \frac{9+6}{60} = \frac{15}{60} \\ p_S(2) &= p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}\binom{3}{0} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{60} = \frac{3+18+3}{60} = \frac{24}{60} \\ p_S(3) &= p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{0} + \binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{60} = \frac{6+9}{60} = \frac{15}{60} \\ p_S(4) &= p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{60} = \frac{3}{60}. \end{aligned}$$

Allora il valore atteso richiesto è

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \sum_{k=0}^{4} k p_S(k) = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 3}{60} = \frac{120}{60} = 2.$$

*Osservazione.* Si può procedere in altro modo sfruttando la linearità del valore atteso, e facendo riferimento ai valori attesi delle marginali che hanno distribuzione notevole. Infatti si ha:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=0}^{2} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\binom{2}{x_1}(3+9+3)}{60} = \frac{\binom{2}{x_1}}{4} = \binom{2}{x_1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{per ogni } x_1 \in \{0,1,2\},$$

e quindi $X_1$ ha distribuzione Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = 1/2$, da cui segue $\mathbb{E}[X_1] = np = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;

$$p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=0}^{2} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{(1+2+1)\binom{3}{x_2}\binom{3}{2-x_2}}{60} = \frac{\binom{3}{x_2}\binom{3}{2-x_2}}{15} = \frac{\binom{3}{x_2}\binom{3}{2-x_2}}{\binom{6}{2}} \quad \text{per ogni } x_2 \in \{0, 1, 2\},$$

e quindi $X_2$ ha distribuzione Ipergeometrica, da cui segue $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot \frac{3}{6} = 1$. In conclusione

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 1 + 1 = 2.$$

**Esercizio 4**.

`D7)` Si ha $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0, \\ (*) & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

Per $y \in (0, \infty)$ si ha

$$(*) = P(-\log|X| \leq y) = P(|X| \geq e^{-y}) = \int_{-\infty}^{-e^{-y}} f_X(x)dx + \int_{e^{-y}}^{\infty} f_X(x)dx$$

e, per simmetria di $f_X$, si ha

$$(*) = 2\int_{e^{-y}}^{1} (1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=e^{-y}}^{x=1} = 2\left(1 - \frac{1}{2} - \left(e^{-y} - \frac{e^{-2y}}{2}\right)\right) = 1 - 2e^{-y} + e^{-2y} = (1 - e^{-y})^2.$$

Quindi la densità continua di $Y$ è $f_Y(y) = 2(1 - e^{-y})e^{-y}1_{(0,\infty)}(y)$.

`D8)` Si ha (nella seconda ugualianza si tiene conto che la funzione integranda è una funzione pari)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|^r] = \int_{-1}^{1} |x|^r(1-|x|)dx = 2\int_0^1 x^r(1-x)dx \\ = 2\int_0^1 x^r - x^{r+1}dx = 2\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^{r+2}}{r+2}\right]_{x=0}^{x=1} = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).\end{aligned}$$

*Osservazione.* Si può procedere in altro modo (più lungo) considerando la variabile aleatoria $Z = |X|^r$ e ottenendo la sua densità. Si ha $P(0 \leq Z \leq 1) = 1$ e quindi

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0, \\ (*) & \text{se } 0 < z < 1, \\ 1 & \text{se } z \geq 1. \end{cases}$$

Per $z \in (0, 1)$ si ha

$$(*) = P(|X|^r \leq z) = P(|X| \leq z^{1/r}) = \int_{-z^{1/r}}^{z^{1/r}} f_X(x)dx$$

e, per simmetria di $f_X$, si ha

$$(*) = 2\int_0^{z^{1/r}} (1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=z^{1/r}} = 2z^{1/r} - z^{2/r}.$$

Quindi la densità continua di $Z = |X|^r$ è

$$f_Z(z) = \left(\frac{2}{r}z^{1/r-1} - \frac{2}{r}z^{2/r-1}\right)1_{(0,1)}(z) = \frac{2}{r}\left(z^{1/r-1} - z^{2/r-1}\right)1_{(0,1)}(z).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|^r] = \int_0^1 z\frac{2}{r}\left(z^{1/r-1} - z^{2/r-1}\right)dz = \frac{2}{r}\int_0^1 z^{1/r} - z^{2/r}dz \\ = \frac{2}{r}\left[\frac{z^{1/r+1}}{1/r+1} - \frac{z^{2/r+1}}{2/r+1}\right]_{z=0}^{z=1} = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).\end{aligned}$$

**Esercizio 5.**
`D9)` Si ha
$$\Phi(2) = P(X \leq x) = P\left(X^* \leq \frac{x-3}{\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{x-3}{\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{x-3}{4}\right)$$
da cui segue (poiché $\Phi$ è invertibile) $\frac{x-3}{4} = 2$, e (con semplici calcoli) si ottiene $x = 11$.
`D10)` Si ha
$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1\right| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1 \leq \frac{3}{\sqrt{n}}\right).$$
Poi, dividendo membro a membro per $\sqrt{100}/\sqrt{n}$, si ha
$$\left\{-\frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1 \leq \frac{3}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{-\frac{3}{10} \leq \frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - 1}{10/\sqrt{n}} \leq \frac{3}{10}\right\}.$$
Allora per il Teorema Limite Centrale e per la condizione imposta dal testo dell'esercizio si deve avere l'uguaglianza
$$\Phi\left(\frac{3}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(z) - 1, \quad \Phi\left(\frac{3}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{10}\right)\right) = 2\Phi(z) - 1$$
$$2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) - 1 = 2\Phi(z) - 1, \quad 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(z) \quad \Phi\left(\frac{3}{10}\right) = \Phi(z)$$
e quindi, per invertibilità della funzione $\Phi$, possiamo concludere che $z = \frac{3}{10}$.

**Esercizio 6.**
`D11)` Osserviamo che $\{1, 2\}$ e $\{5, 6\}$ sono classi chiuse irriducibili, e quindi possiamo considerare le catene ristrette a tali classi.
• La catena ristretta a $\{1, 2\}$ è irriducibile, ed è anche regolare per l'Osservazione 5.16 (applicata alla catena ristretta); in corrispondenza, per il Teorema di Markov (applicato alla catena ristretta) è garantita l'esistenza del limite di $p_{11}^{(n)}$ per $n$ che tende ad infinito. Inoltre la catena ristretta a $\{1, 2\}$ è bistocastica, e quindi la distribuzione stazionaria è quella uniforme, cioè $(\pi_1, \pi_2) = (1/2, 1/2)$. In conclusione
$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1}{2}.$$
• Se consideriamo la catena ristretta a $\{5, 6\}$ osserviamo che la catena non è regolare. In effetti si ha
$$p_{55}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari, perché } p_{56}^{(n)} = 1. \end{cases}$$
In conclusione $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}$ non esiste.
`D12)` Consideriamo il sistema delle probabilità di passaggio per $C = \{5, 6\}$; in questo caso si ha $D_C = \{3, 4\}$. In corrispondenza le probabilità di passaggio richieste, cioè quelle per $C = \{5, 6\}$ partendo da 3 e da 4 rispettivamente, le indicheremo con $\lambda_3$ e $\lambda_4$ e sono le soluzioni del seguente sistema:
$$\begin{cases} \lambda_3 = p_{35} + p_{36} + p_{33}\lambda_3 + p_{34}\lambda_4 \\ \lambda_4 = p_{45} + p_{46} + p_{43}\lambda_3 + p_{44}\lambda_4, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0 + \frac{9}{100}\lambda_3 + \frac{9}{10}\lambda_4 \\ \lambda_4 = \frac{1}{1000} + \frac{9}{1000}\lambda_3 + \frac{990}{1000}\lambda_4. \end{cases}$$
Dalla prima equazione si ottiene $\frac{91}{100}\lambda_3 = \frac{9}{10}\lambda_4$, e quindi $\lambda_4 = \frac{91}{90}\lambda_3$. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene
$$\frac{91}{90}\lambda_3 = \frac{1}{1000} + \frac{9}{1000}\lambda_3 + \frac{990}{1000}\frac{91}{90}\lambda_3, \quad \left(\frac{91}{90} - \frac{9}{1000} - \frac{9009}{9000}\right)\lambda_3 = \frac{1}{1000},$$
$$\frac{9100 - 81 - 9009}{9000}\lambda_3 = \frac{1}{1000}, \quad \frac{10}{9000}\lambda_3 = \frac{1}{1000}, \quad \lambda_3 = \frac{9}{10}.$$
Poi, sostituendo nella relazione precedente, si trova anche il valore di $\lambda_4$. In conclusione si ha
$$\lambda_3 = \frac{9}{10}, \quad \lambda_4 = \frac{91}{100}.$$

*Osservazione.* Si può fare riferimento ad un analogo sistema di equazioni per le probabilità di passaggio per $C^* = \{1,2\}$; in questo caso si ha $D_{C^*} = \{3,4\}$. In corrispondenza le probabilità di passaggio richieste, cioè quelle per $C^* = \{1,2\}$ partendo da 3 e da 4 rispettivamente, le indicheremo con $\eta_3$ e $\eta_4$ e sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \eta_3 = p_{31} + p_{32} + p_{33}\eta_3 + p_{34}\eta_4 \\ \eta_4 = p_{41} + p_{42} + p_{43}\eta_3 + p_{44}\eta_4, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \eta_3 = \frac{1}{100} + \frac{9}{100}\eta_3 + \frac{9}{10}\eta_4 \\ \eta_4 = 0 + \frac{9}{1000}\eta_3 + \frac{990}{1000}\eta_4, \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\frac{10}{1000}\eta_4 = \frac{9}{1000}\eta_3$, e quindi $\eta_4 = \frac{9}{10}\eta_3$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\eta_3 = \frac{1}{100} + \frac{9}{100}\eta_3 + \frac{9}{10}\frac{9}{10}\eta_3, \quad \left(1 - \frac{9}{100} - \frac{81}{100}\right)\eta_3 = \frac{1}{100},$$
$$\frac{100-9-81}{100}\eta_3 = \frac{1}{100}, \quad \frac{10}{100}\eta_3 = \frac{1}{100}, \quad \eta_3 = \frac{1}{10}.$$

Poi, sostituendo nella relazione precedente, si trova anche il valore di $\eta_4$. In conclusione si ha

$$\eta_3 = \frac{1}{10}, \quad \eta_4 = \frac{9}{100}.$$

Infine, in accordo con la teoria, si ha

$$\lambda_3 + \eta_3 = 1, \quad \lambda_4 + \eta_4 = 1;$$

infatti, partendo da 3 o da 4, prima o poi si viene assorbiti in $C = \{1,2\}$ o in $C^* = \{5,6\}$.