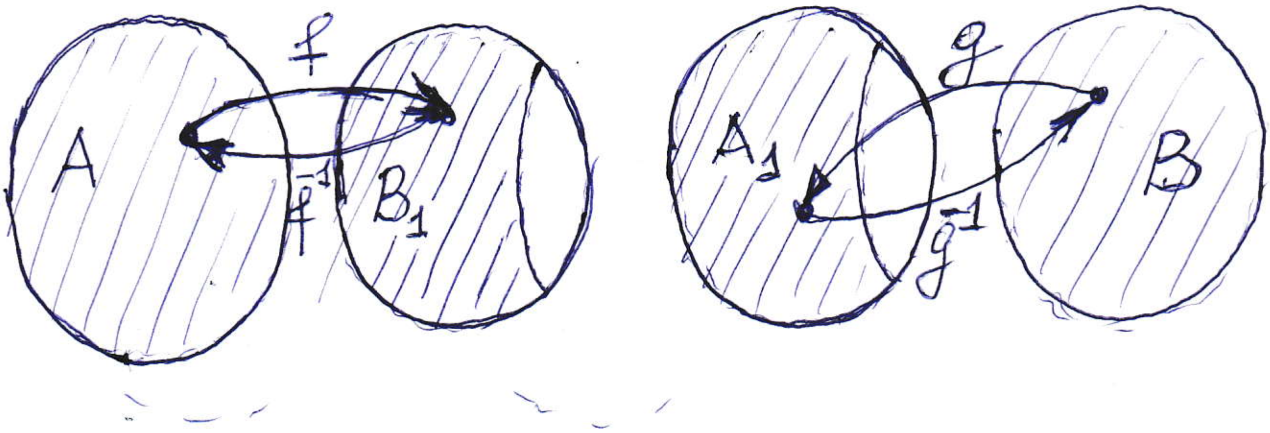
5 Теорема Кантора-Бернштейна

Следующая теорема является одной из основных в теории множеств.

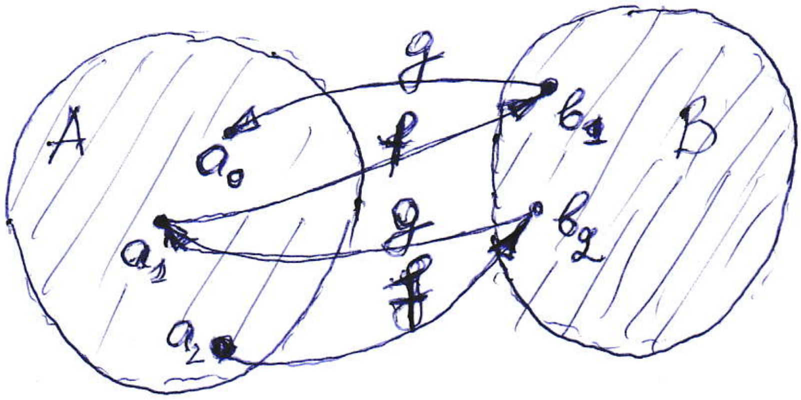
Теорема 5.1. *(Теорема Кантора – Бернштейна.) Пусть A и B – два произвольных непустых множества. Если существуют подмножества $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$ такие, что $A \sim B_1$ и $B \sim A_1$, то $A \sim B$.*

Доказательство.



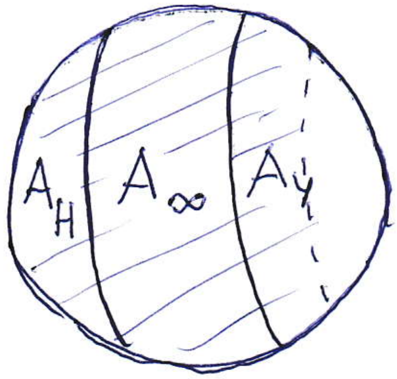
Пусть a – произвольный элемент, принадлежащий множеству A. Положим $a_0 = a$. Рассмотрим итерационный процесс:

$$b_1 = g^{-1}(a_0), \quad a_1 = f^{-1}(b_1), \quad b_2 = g^{-1}(a_1), \quad a_2 = f^{-1}(b_2), \ldots,$$
$$b_n = g^{-1}(a_{n-1}), \quad a_n = f^{-1}(b_n), \ldots,$$



Этот процесс либо обрывается после получения последнего a_n либо позволяет построить бесконечную последовательность. Соответственно множество A разбивается на три непересекающихся подмножества

$$A = A_{\text{ч}} \cup A_{\text{н}} \cup A_{\infty}.$$



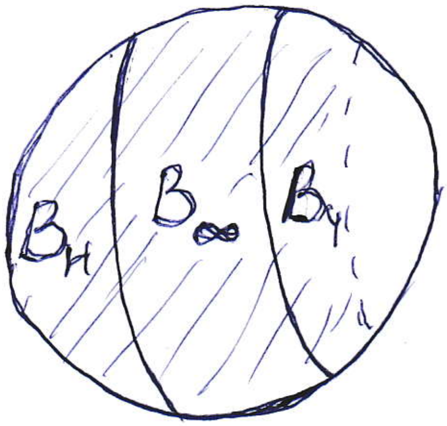
Здесь $A_{\text{ч}}$ состоит из тех элементов a, для которых процесс завершается за четное число шагов; $A_{\text{н}}$ состоит из тех элементов, для которых процесс завершается за нечетное число шагов; A_{∞} состоит из тех элементов, для которых процесс позволяет построить бесконечную последовательность.

Аналогичное разбиение

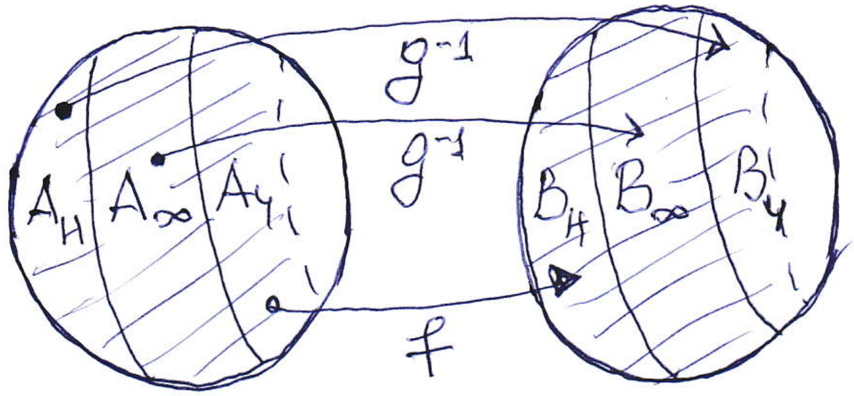
$$B = B_{\text{ч}} \cup B_{\text{н}} \cup B_\infty$$

множества B производится с помощью итерационного процесса

$$b_0 = b \in B, \quad a_1 = f^{-1}(b_0), \quad b_1 = g^{-1}(a_1), \quad a_2 = f^{-1}(b_1), \quad b_2 = g^{-1}(a_2), \ldots,$$
$$a_n = f^{-1}(b_{n-1}), \quad b_n = g^{-1}(a_n), \ldots,$$



Заметим, что g^{-1} осуществляет взаимно однозначное отображение $A_н$ на $B_ч$ и A_∞ на B_∞, а f осуществляет взаимно однозначное отображение $A_ч$ на $B_н$.



Таким образом отображение

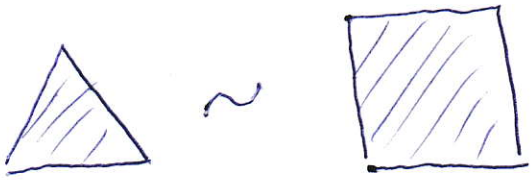
$$\psi(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & \text{если} \quad x \in A_н, \\ g^{-1}(x), & \text{если} \quad x \in A_\infty, \\ f(x), & \text{если} \quad x \in A_ч \end{cases}$$

осущёствляет взаимно однозначное соответствие между A и B.

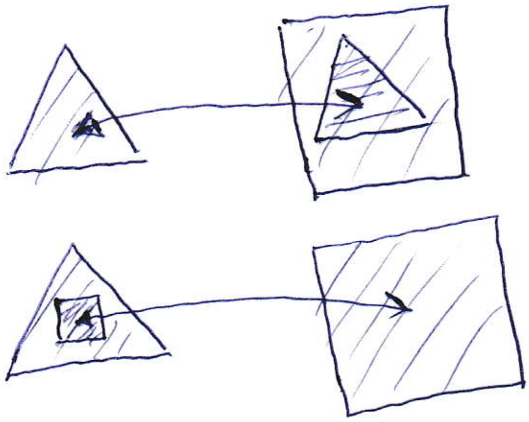
Теорема доказана.

Примеры

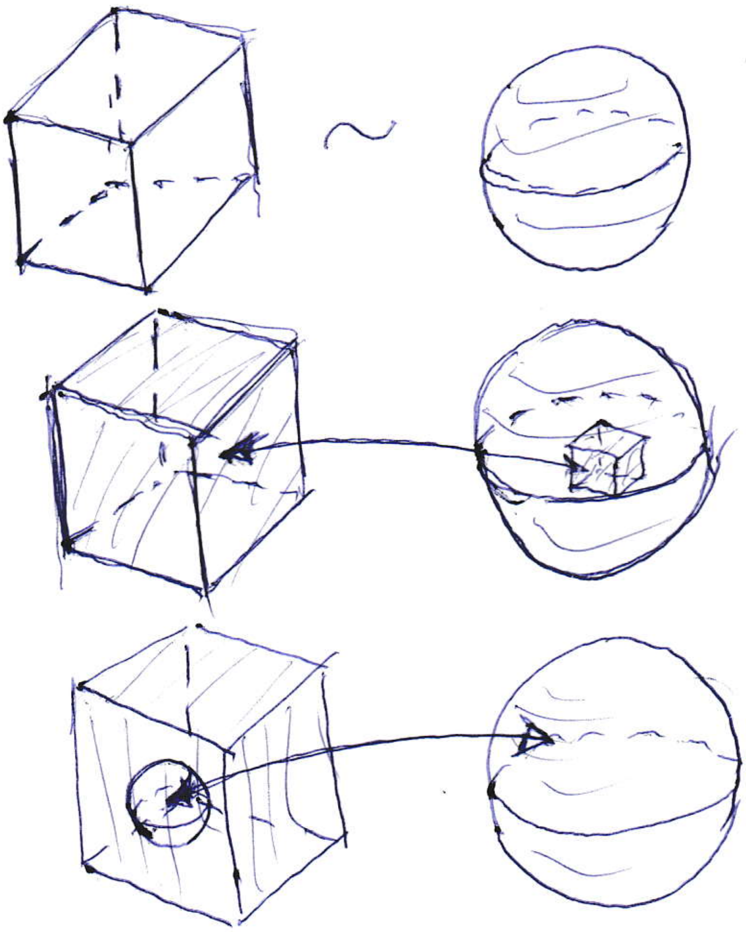
1 Треугольник на плоскости эквивалентен квадрату



Д-во



2 Куб эквивалентен шару



6 Понятие о мощности множества

Опр. Если множества A и B эквивалентны, то говорят, что они имеют одинаковую *мощность* ($A \sim B \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$).

Для конечных множеств понятие мощности совпадает с понятием числа элементов множества. Все счетные множества по определению имеют одинаковую мощность. которая обозначается символом $\aleph_0$ ("алеф нуль").

Про множества, эквивалентные множеству чисел из отрезка $[0,1]$, говорят, что они имеют *мощность континуума*. Эта мощность обозначается символом c или символом $\aleph$ ("алеф").

Таким образом,

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0, \quad \overline{\overline{\mathbb{Z}}} = \aleph_0, \quad \overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0, \quad \overline{\overline{[0,1]}} = c, \quad \overline{\overline{[0,1]}} = \aleph.$$

Опр. Пусть множество A эквивалентно некоторому подмножеству множества B. Тогда говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B и пишут $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.

Опр. Если $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, но $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, то говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B и пишут $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. Например, $\aleph_0 < c$.

С использованием введеных понятий теорему Кантора-Бернштейна можно переформулировать следующим образом.

Теорема 6.1. *(Переформулировка теоремы Кантора- Бернштейна.)*
Если $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, то $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.

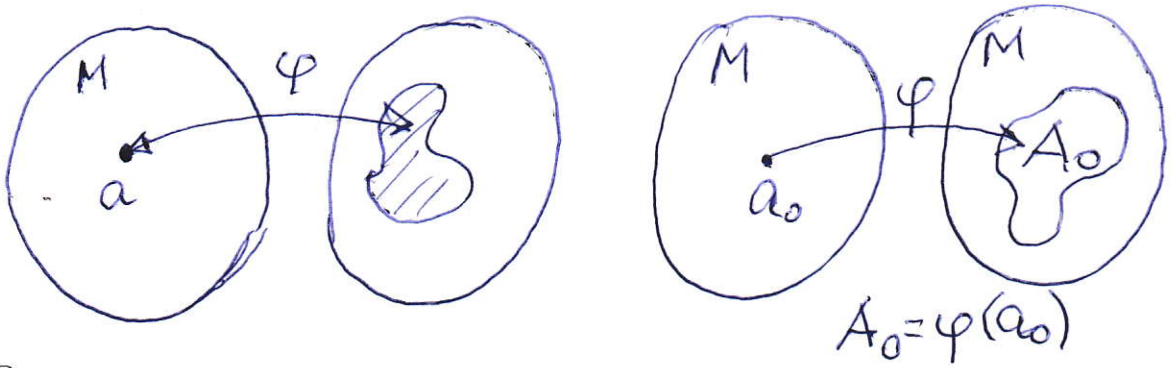
Среди бесконечных множеств наименьшую мощность имеет счетное множество. Существует ли множество наибольшей мощности? Оказывается, что – нет.

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество, элементами которого являются всевозможные подмножества данного множества M. Мощность множества $\mathfrak{M}$ обозначается через $2^{\overline{\overline{M}}}$. Множество всех подмножеств чисел из отрезка $[0, 1]$ имеет мощность 2^c (*мощность гиперконтинуума*).

Теорема 6.2. $\overline{\overline{M}} < 2^{\overline{\overline{M}}}$.

Доказательство. Ясно, что $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$. Докажем, что $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$.

Предположим противное; существует взаимно однозначное соответствие $\varphi : M \to \mathfrak{M}$.



Рассмотрим множество

$$A_0 = \{a \in M \mid a \notin \varphi(a)\}.$$

Пусть $a_0 = \varphi^{-1}(A_0)$. Тогда

$$a_0 \in A_0 \Rightarrow a_0 \notin \varphi(a_0) = A_0 \Rightarrow a_0 \notin A_0,$$
$$a_0 \notin A_0 = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \in A_0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. Для любого множества существует множество большей мощности.