Теорема 4.9. *Пусть* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– монотонная (возрастающая или убывающая) последовательность множеств конечной меры и* $E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$*. Тогда*

$$|E| = \lim_{n\to\infty} |E_n|.$$

Доказательство. 1. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность. Тогда

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{и} \quad E + \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E_{k+1}) = E_1.$$

Поэтому в силу счетной аддитивности меры Лебега

$$|E| + \sum_{k=1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1} = |E_1| < \infty.$$

Следовательно ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}|$ сходится.

Заметим теперь, что

$$E_n = E + \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_k \setminus E_{k+1}).$$

Поэтому

$$|E_n| = |E| + \sum_{k=n}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| \to |E| \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2. Пусть теперь $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность. Тогда

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{и} \quad E_1 + \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_{k+1} \setminus E_k) = E.$$

Поэтому

$$|E_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k| = |E|.$$

Возможны 2 случая: а) $|E| < \infty$, б) $|E| = \infty$.

Если $|E| < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k|$ сходится и

$$E = E_n + \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_{k+1} \setminus E_k) \Rightarrow |E| = |E_n| + \sum_{k=n}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k|.$$

Отсюда $|E| = \lim\limits_{n\to\infty} |E_n|$.

Пусть теперь $|E| = \infty$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k| = \infty$ и

$$E_n = E_1 + \bigcup_{k=1}^{n-1} (E_{k+1} \setminus E_k) \Rightarrow |E_n| = |E_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |E_{k+1} \setminus E_k| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

5 Существование неизмеримого множества.

Теорема 5.1. *Существует неизмеримое множество* $E \subset [0, 1)$.

Доказательство. Введем на $[0, 1)$ отношение эквивалентности, положив $x \sim y$, если $x - y$ рационально. В результате мы получим разбиение множества $[0, 1)$ на классы эквивалентности.

Выберем в каждом классе эквивалентности по одному элементу x и объединим все такие элементы в множество E. (Заметим, что расстояние между двумя различными элементами множества E иррационально.)

Покажем, что множество E неизмеримо. Для этого допустим, что оно измеримо.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел из полусегмента $[0, 1)$. Построим множества

$$E_n^- = E \cap \{x < \alpha_n\}, \quad E_n^+ = E \cap \{x \geqslant \alpha_n\},$$
$$E_n = [E_n^- + (1 - \alpha_n)] \cup [E_n^+ - \alpha_n].$$

Заметим, что

$$E_n^- + (1 - \alpha_n) \subset [1 - \alpha_n, 1), \quad E_n^+ - \alpha_n \subset [0, 1 - \alpha_n).$$

Поэтому эти множества не пересекаются.

Кроме того,

$$|E_n| = |E_n^- + (1 - \alpha_n)| + |E_n^+ - \alpha_n| = |E_n^+| + |E_n^-| = |E|.$$

Заметим также, что множества E_n не пересекаются и

$$[0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{5.1}$$

В самом деле, для всякой точки $x \in [0, 1)$ существует точка $y \in E$ такая, что $x - y$ рационально.

Если $x = y + (1 - \alpha_n)$, то $y \in E_n^-$ и $x \in E_n^- + (1 - \alpha_n) \subset E_n$.

Если же $x = y - \alpha_n$, то $y \in E_n^+$ и $x \in E_n^+ - \alpha_n \subset E_n$.

Но из (5.1) следует тогда

$$|[0, 1)| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |E|.$$

Если $|E| > 0$, то $|[0, 1)| = \infty$. Если же $|E| = 0$, то $|[0, 1)| = 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.