

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

**Лектор - профессор кафедры  
математического и компьютерного моделирования  
Амосов Андрей Авенирович**

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1976.
2. А.А. Амосов. Задачи по теории функций и функциональному анализу. Множества. Метрические и топологические пространства. Мера и интеграл Лебега. М.: Изд-во МЭИ. 1998.

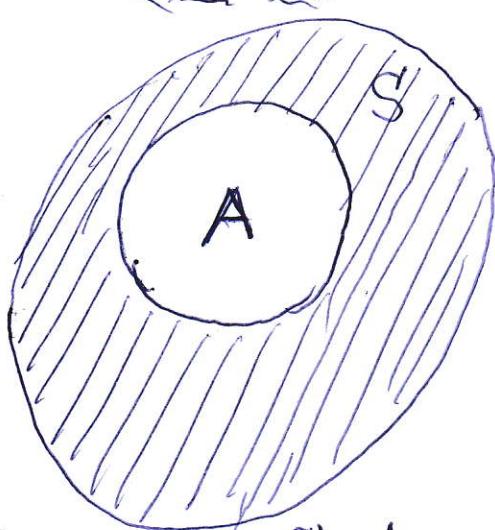
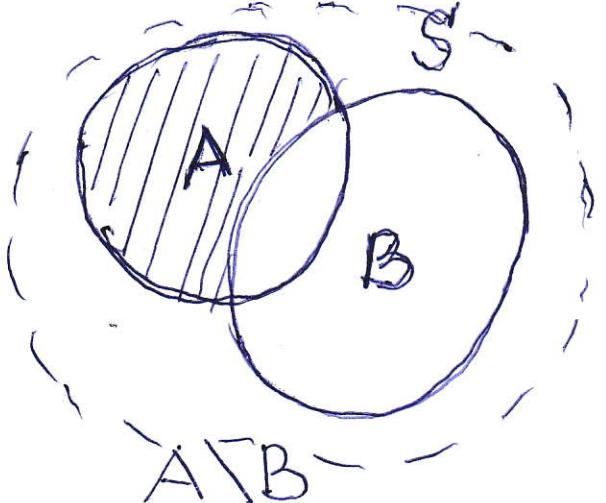
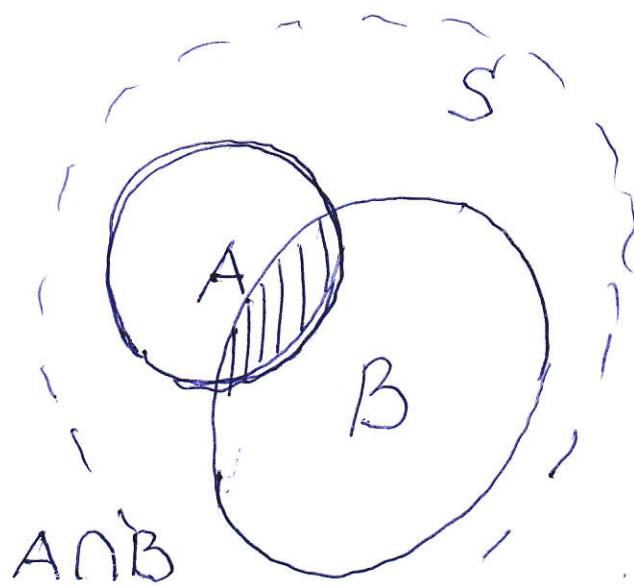
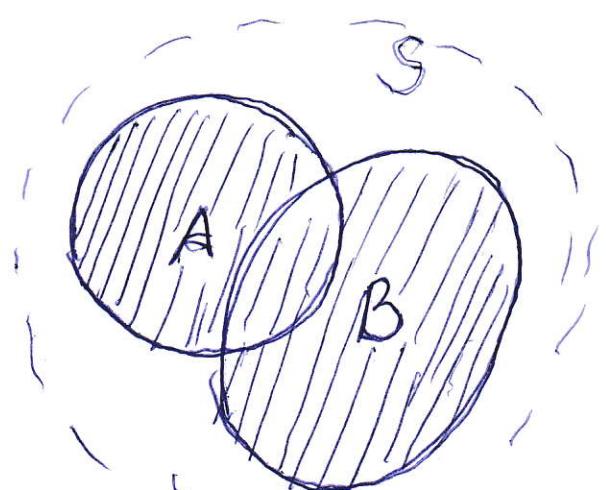
# ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

## 1 Операции над множествами

Пусть  $S$  - некоторое множество элементов произвольной природы, а  $A$  и  $B$  - его подмножества ( $A \subset S, B \subset S$ ). Важную роль в теории множеств играет *пустое множество*  $\emptyset$ , не содержащее ни одного элемента. По определению  $\emptyset \subset A$  для любого множества  $A$ .

*Объединением* (или *суммой*) множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C = A \cup B$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A, B$ .

*Пересечением* (или *произведением*) множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C = A \cap B$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих как  $A$ , так и  $B$ . Для множеств  $A \cup B$  и  $A \cap B$  используются также обозначения  $A + B$  и  $A \cdot B$  соответственно.



$$C_S A = C A = S \setminus A$$

Отметим следующие свойства операций объединения и пересечения.

1.  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$   
(коммутативность).
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   
(ассоциативность).
3.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$   
(дистрибутивность).

*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C = A \setminus B$ , состоящее из всех элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ . Для множества  $C = A \setminus B$  используется также обозначение  $C = A - B$ .

*Дополнением* множества  $A$  (до множества  $S$ ) называется множество  $\complement A = S \setminus A$ .

( $\complement$  – от латинского ”complementum” - дополнение.)

Пусть теперь  $I$  - некоторое множество (множество индексов), элементы которого (индексы) будем обозначать через  $\alpha$ . Пусть каждому индексу  $\alpha$  сопоставлено некоторое множество  $A_\alpha \subset S$ .

*Объединением* множеств  $A_\alpha$  называется множество  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств  $A_\alpha$ :

$$a \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff \exists \alpha \in I : a \in A_\alpha.$$

*Пересечением* множеств  $A_\alpha$  называется множество  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ , состоящее из элементов, которые принадлежат всем множествам  $A_\alpha$ :

$$a \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \iff a \in A_\alpha \quad \forall \alpha \in I.$$

**Теорема 1.1.** (*Принцип двойственности.*) Справедливы следующие равенства:

$$\complement \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} \complement A_\alpha, \tag{1.1}$$

$$\complement \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} \complement A_\alpha. \tag{1.2}$$

Доказательство. Установим справедливость равенства (1.1).

$$\begin{aligned} a \in \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} &\Leftrightarrow a \notin \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \Leftrightarrow a \notin A_{\alpha} \quad \forall \alpha \in I \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{\alpha} \complement A_{\alpha} \quad \forall \alpha \in I \Leftrightarrow a \in \bigcap_{\alpha} \complement A_{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый элемент множества  $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$  является элементом множества  $\bigcap_{\alpha} \complement A_{\alpha}$  и наоборот. Поэтому эти два множества совпадают.

Аналогичным образом доказывается справедливость равенства (1.2):

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} &\Leftrightarrow a \notin \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I : a \notin A_{\alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in I : a \in \complement A_{\alpha} \Leftrightarrow a \in \bigcup_{\alpha} \complement A_{\alpha}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Опр.** *Декартовым произведением*  $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$  множеств  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  элементов  $x_i \in X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . В случае  $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$  возникает *декартова степень множества*  $X$  – множество  $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ .

### Последовательности множеств

Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность множеств.

**Опр.** *Верхним пределом* последовательности  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется множество

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

**Опр.** *Нижним пределом* последовательности  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется множество

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

**Замечание 1.1.** Элемент  $a$  принадлежит множеству  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность  $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  такой, что  $a \in A_{n_k}$  для всех  $k \geq 1$ .

**Замечание 1.2.** Элемент  $a$  принадлежит множеству  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  тогда и только тогда, когда существует номер  $n_a \geq 1$  такой, что  $a \in A_k$  для всех  $k \geq n_a$ .

**Замечание 1.3.** Ясно, что  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**Опр.** Последовательность  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется *сходящейся*, если  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ . В этом случае полагают  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**Замечание 1.4.** Предел последовательности множеств  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  существует тогда и только тогда, когда либо любой элемент  $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  принадлежит лишь конечному числу множеств  $A_n$  либо этот элемент содержится во всех множествах  $A_n$ , начиная с некоторого  $n = n_a$  (объединение элементов последнего типа и дает  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ ).

**Опр.** Последовательность  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется *возрастающей*, если  $A_n \subset A_{n+1}$  для всех  $n \geq 1$  и называется *убывающей*, если  $A_n \supset A_{n+1}$  для всех  $n \geq 1$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  – убывающая последовательность множеств. Тогда она сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Доказательство. Заметим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

так как  $A_k \subset A_n$  для всех  $k \geq n$ .

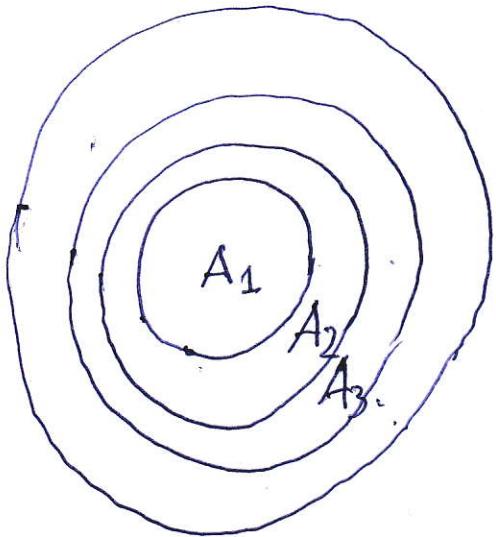
Кроме того,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Следовательно

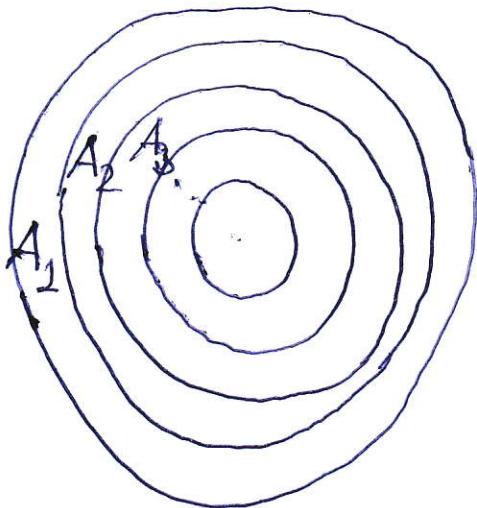
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Теорема доказана.



$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

Возрастающая  
последовательность



$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

Убывающая  
последовательность

**Теорема 1.3.** Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  – возрастающая последовательность множеств. Тогда она сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Доказательство. Заметим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

поскольку  $A_k \subset A_n$  для всех  $k \leq n$ .

Кроме того,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Теорема доказана.

**Теорема 1.4.** Для произвольной последовательности множеств справедливо справедливы следующие формулы:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}), \quad (1.3)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n). \quad (1.4)$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы (1.3). Пусть  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Тогда  $a \in A_1$  и  $a \notin A_n \setminus A_{n+1}$  для всех  $n \geq 1$ . Значит,  $a \in A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$ .

Пусть теперь  $a \in A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$ . Тогда  $a \in A_1$  и  $a \notin A_n \setminus A_{n+1}$  для всех  $n \geq 1$ . Так как  $a \in A_1$  и  $a \notin A_1 \setminus A_2$ , то  $a \in A_2$ . Но  $a \notin A_2 \setminus A_3$  и поэтому  $a \in A_3$ . Аналогичным образом имеем  $a \in A_n$  для всех  $n \geq 1$ . Следовательно  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Докажем теперь справедливость формулы (1.4). Напомним ее

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n).$$

Пусть  $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Тогда либо  $a \in A_1$  либо существует номер  $n_a \geq 1$  такой, что  $a \in A_{n_a+1}$  и  $a \notin A_k$  для всех  $k \leq n_a$ ; в последнем случае  $a \in A_{n_a+1} \setminus A_{n_a}$ . Таким образом,  $a \in A_1 + \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)$ .

Очевидно, что из  $a \in A_1 + \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)$  следует, что  $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Теорема доказана.

## 2 Отображения. Взаимно однозначные соответствия

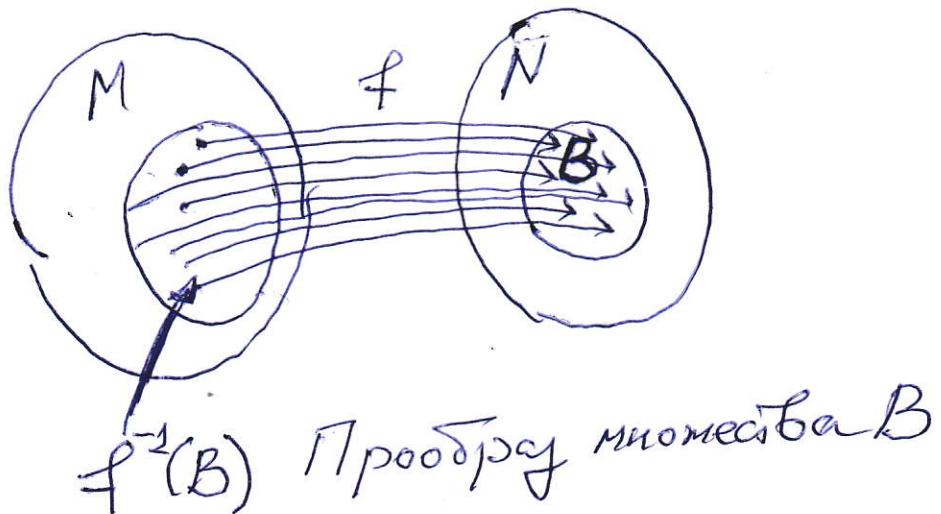
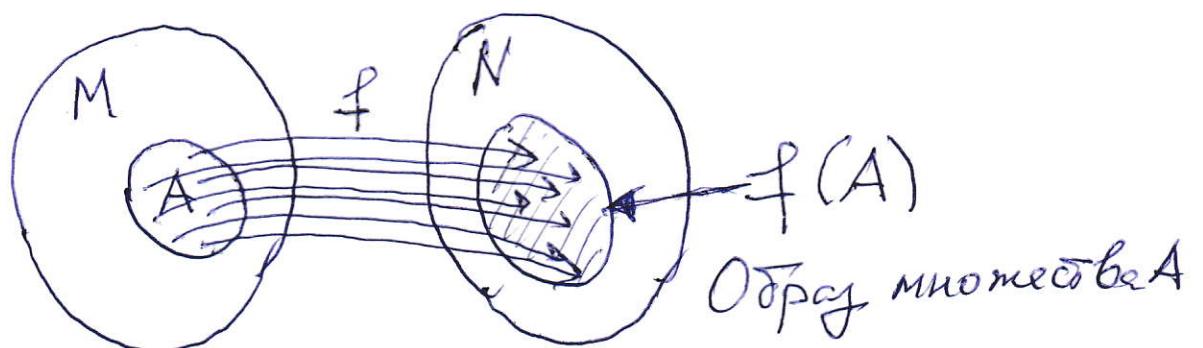
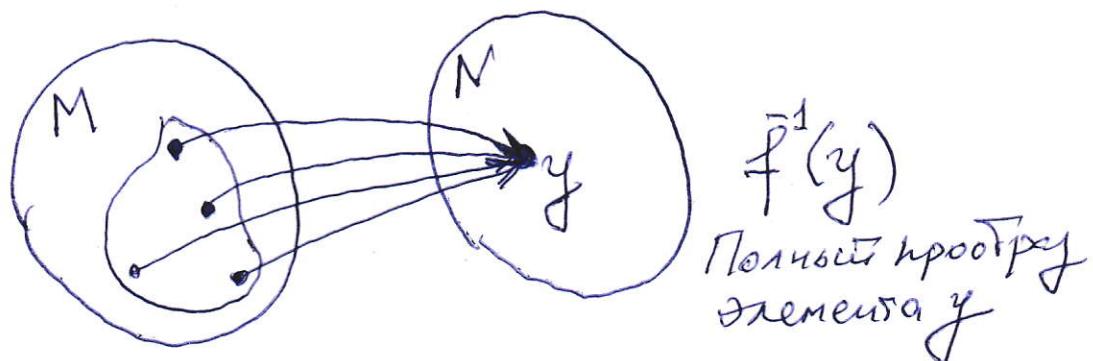
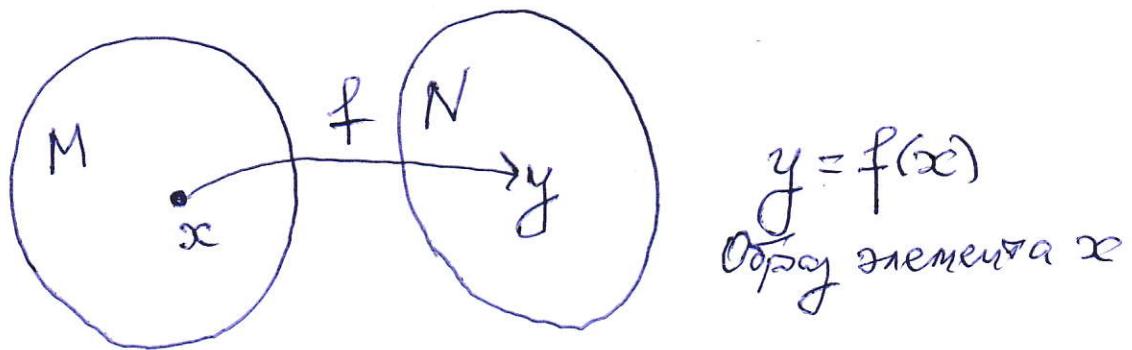
**Опр.** Пусть  $M$  и  $N$  – два произвольных множества. Говорят, что на  $M$  определено *отображение (функция)*  $f$  со значениями в  $N$ , если задано правило, согласно которому каждому элементу  $x \in M$  поставлен в соответствие элемент  $y = f(x) \in N$ . В этом случае пишут  $f : M \rightarrow N$  либо  $M \xrightarrow{f} N$  и говорят, что  $f$  есть отображение  $M$  в  $N$ .

Для  $x \in M$  элемент  $y = f(x) \in N$  называется *образом элемента*  $x$ ; при этом элемент  $x$  называется *прообразом элемента*  $y$ .

Множество  $\{x \in M \mid f(x) = y\}$  (т.е. множество всех тех  $x \in M$ , для которых  $f(x) = y$ ), называется *полным прообразом элемента*  $y$  при отображении  $f$  и обозначается через  $f^{-1}(y)$ .

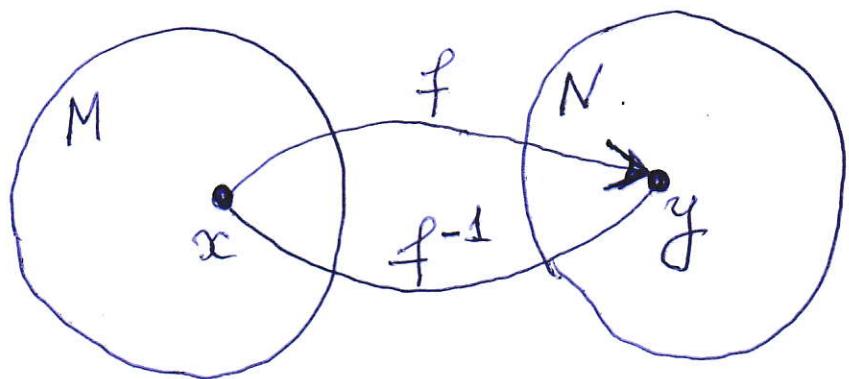
Пусть  $A \subset M$ . Множество  $f(A) = \{y \in N \mid y = f(x), x \in A\}$  называется *образом множества*  $A$  при отображении  $f$ .

Пусть  $B \subset N$ . Множество  $f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) = y, y \in B\}$  называется *полным прообразом множества*  $B$  при отображении  $f$ .



**Опр.** Говорят, что  $f$  есть отображение  $M$  на  $N$ , если  $f(M) = N$ .

Отображение  $f$  называется *взаимно однозначным*, если оно является отображением  $M$  на  $N$  и для любого элемента  $y \in N$  его полный прообраз  $f^{-1}(y)$  состоит ровно из одного элемента. В этом случае можно определить *обратное отображение*  $f^{-1} : N \rightarrow M$  правилом  $x = f^{-1}(y)$ . Оно также будет взаимно однозначным.



Взаимно однозначное отображение  
множества  $M$  на множество  $N$

**Теорема 2.1.** *Прообраз объединения любой совокупности множеств равен объединению их прообразов:*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \Leftrightarrow \exists \alpha : f(x) \in B_{\alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha : x \in f^{-1}(B_{\alpha}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.2.** *Прообраз пересечения любой совокупности множеств равен пересечению их прообразов:*

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\alpha} B_{\alpha} \Leftrightarrow f(x) \in B_{\alpha} \quad \forall \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_{\alpha}) \quad \alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.3.** *Образ обединения любой совокупности множеств равен обединению их образов:*

$$f\left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f(B_{\alpha}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}\right) &\Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} : y = f(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \text{ и } \exists x \in B_{\alpha} : y = f(x) \Leftrightarrow \exists \alpha : y \in f(B_{\alpha}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{\alpha} f(B_{\alpha}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание 2.1.** Утверждать, что образ пересечения равен пересечению образов нельзя даже для двух множеств. (Привести соответствующий пример.) Однако всегда

$$f\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right) \subset \bigcap_{\alpha} f(B_{\alpha}). \quad (2.1)$$