

2 Открытые и замкнутые множества

Опр. Пусть M – метрическое пространство. Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 (или окрестностью точки x_0 радиуса r) называется множество

$$B_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\}.$$

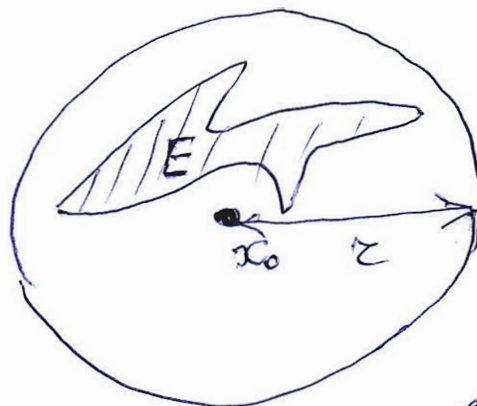
Опр. Замкнутым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 называется множество

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

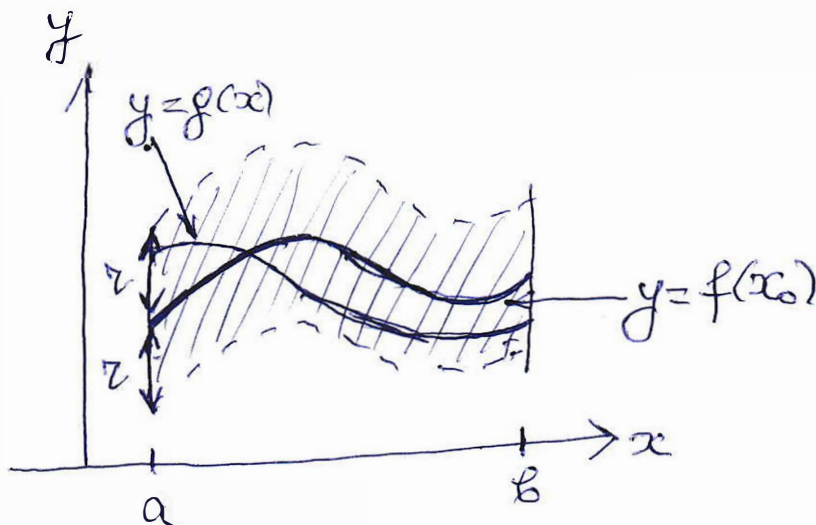
Опр. Множество $E \subset M$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.



Шар $B_r(x_0)$



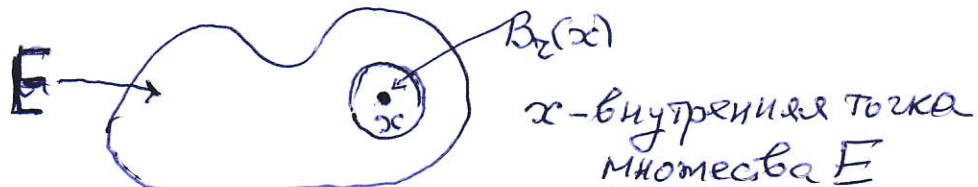
Ограниченное множество $E \subset B_r(x_0)$



Геометрическая иллюстрация шара $B_r(f_0)$ в пространстве $C[a, b]$. $f \in B_r(f_0)$

Опр. Пусть E - произвольное множество в метрическом пространстве M . Точка $x \in E$ называется *внутренней точкой* множества E , если существует окрестность точки x , целиком содержащаяся в E .

Множество всех внутренних точек множества E называется *внутренней частью* множества E и обозначается через $\text{int } E$.



Опр. Множество $G \subset M$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними (то есть если $\text{int } G = G$). Пустое множество \emptyset является открытым по определению.

Опр. Пусть E - произвольное множество в метрическом пространстве M . Точка $x \in M$ называется *предельной точкой* множества E , если в любой окрестности точки x содержатся точки множества E , отличные от x . Множество всех предельных для E точек обозначается через E' .

Опр. Множество $F \subset M$ называется *замкнутым*, если все предельные для F точки содержатся в F (то есть если $F' \subset F$). Заметим, что \emptyset - замкнутое множество.

Примеры.

1. Как нетрудно видеть, само метрическое пространство M является одновременно открытым и замкнутым множеством.

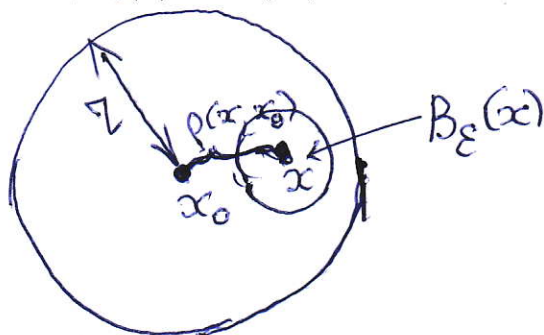
2. Интервал (a, b) является открытым множеством в \mathbb{R} . Действительно, для любой точки $x_0 \in (a, b)$ существует ее окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$.

3. Открытый шар $B_r(x_0)$ в метрическом пространстве M является открытым множеством.

Докажем это. Пусть $x \in B_r(x_0)$. Рассмотрим открытый шар $B_\varepsilon(x)$ с центром в точке x радиуса $\varepsilon < r - \rho(x_0, x)$. Пусть $y \in B_\varepsilon(x)$. Тогда

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \varepsilon + \rho(x, x_0) < r \Rightarrow y \in B_r(x_0).$$

Таким образом, $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Значит, все точки шара $B_r(x_0)$ являются внутренними.



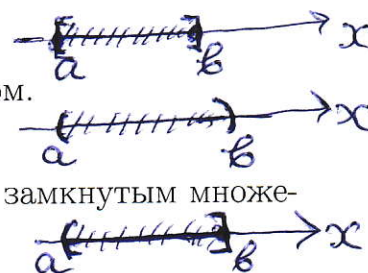
4. Отрезок $[a, b]$ является замкнутым множеством в \mathbb{R} .

5. Интервал (a, b) в \mathbb{R} не является замкнутым множеством.

6. Отрезок $[a, b]$ в \mathbb{R} не является открытым множеством.

7. Полуинтервал $(a, b]$ в \mathbb{R} не является ни открытым, ни замкнутым множеством.

8. Является ли множество рациональных чисел \mathbb{Q} открытым или замкнутым в \mathbb{R} ?



Предложение 2.1. Точка $x \in M$ является предельной точкой множества $E \subset M$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ такая, что $x_n \neq x$ и $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть x – предельная точка множества E . Тогда для каждого $n \geq 1$ найдется точка $x_n \in B_{1/n}(x)$, $x_n \neq x$. Следовательно

$$\rho(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow x.$$

Пусть теперь существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ такая, что $x_n \neq x$ и $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

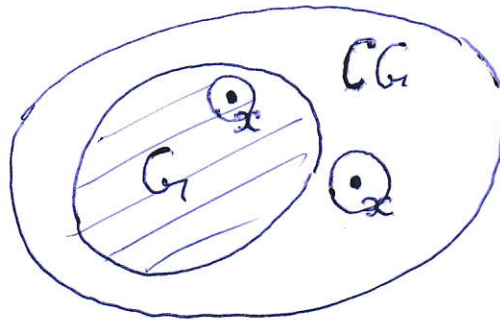
$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad x_n \in B_{\varepsilon}(x).$$

Предложение доказано.

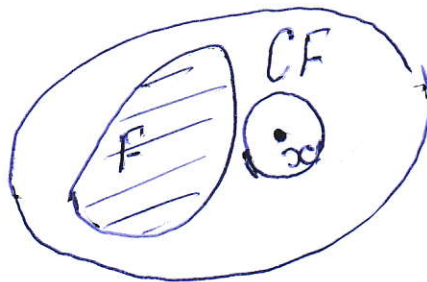
Теорема 2.1. 1). Пусть множество G открыто. Тогда его дополнение – множество $\complement G = M \setminus G$ замкнуто.

2). Пусть множество F замкнуто. Тогда его дополнение – множество $\complement F = M \setminus F$ открыто.

Доказательство. 1) Пусть G – открытое множество. Докажем, что все предельные точки множества $\complement G$ принадлежат этому множеству. Пусть $x \in (\complement G)'$. Тогда $x \notin G$, так как никакая окрестность точки x целиком не содержится в G . Следовательно $x \in \complement G$.



2) Пусть F – замкнутое множество. Докажем, что всякая точка множества $\complement F$ является его внутренней точкой. Пусть $x \in \complement F$, то есть x не является предельной точкой множества $\complement F$. Тогда существует окрестность точки x , целиком содержащаяся в $\complement F$. Следовательно x – внутренняя для $\complement F$ точка.



Теорема доказана.

Следствие 2.1. Множество G открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $\complement G = M \setminus G$ замкнуто.

Теорема 2.2. *Объединение любой совокупности открытых множеств в M есть открытое множество. Пересечение конечного числа открытых множеств в M есть открытое множество.*

Доказательство. Пусть $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, где G_α – открытые множества. Пусть $x \in G$. Тогда $x \in G_\alpha$ для некоторого α . Поэтому существует $B_r(x) \subset G_\alpha \subset G$.

Пусть теперь $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$, где G_k – открытые множества. Если $x \in G$, то $x \in G_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно для каждого k существует открытый шар $B_{r_k}(x) \subset G_k$. Выбрав $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$, получим $B_r(x) \subset G_k$ для всех

k . Тогда $B_r(x) \subset G = \bigcap_{k=1}^n G_k$. Следовательно x – внутренняя для G точка.

Теорема доказана.

Следствие 2.2. *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств в M являются замкнутыми множествами.*

Доказательство. Пусть $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$, где F_α – замкнутые множества. Тогда $\complement F = \bigcup_{\alpha \in I} \complement F_\alpha$ – открытое множество. Следовательно $F = M \setminus \complement F$ – замкнуто.

Пусть $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$, где F_k – замкнутые множества. Тогда $\complement F = \bigcap_{k=1}^n \complement F_k$ – открытое множество. Следовательно F замкнуто.

Следствие доказано.

Замечание 2.1. *Пересечение бесконечной совокупности открытых множеств в M не обязано быть открытым множеством. Например,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b + 1/n) = [a, b].$$

Вопрос. Обязано ли объединение произвольной совокупности замкнутых множеств в M быть замкнутым множеством?

Предложение 2.2. Пусть G – открытое множество, а F – замкнутое множество. Тогда множество $G \setminus F$ открыто, а множество $F \setminus G$ замкнуто.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}G \setminus F &= G \cap (M \setminus F), \\F \setminus G &= F \cap (M \setminus G).\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 2.3. Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ из $x_n \rightarrow x$ следует, что $x \in F$.

Доказательство. Пусть F замкнуто, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ и $x_n \rightarrow x$. Если $x \notin F$, то существует окрестность, не содержащая ни одной точки из F . Это противоречит тому, что $x_n \rightarrow x$.

Пусть теперь для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ из $x_n \rightarrow x$ следует, что $x \in F$. Тогда всякая предельная для F точка принадлежит F . Следовательно F замкнуто.

Предложение доказано.

Предложение 2.4. *Справедливы неравенства*

$$|\rho(x, y_1) - \rho(x, y_2)| \leq \rho(y_1, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in M, \quad (2.1)$$

$$|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2) \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M. \quad (2.2)$$

Доказательство. В силу неравенства треугольника

$$\rho(x, y_1) \leq \rho(x, y_2) + \rho(y_1, y_2) \Rightarrow \rho(x, y_1) - \rho(x, y_2) \leq \rho(y_1, y_2),$$

$$\rho(x, y_2) \leq \rho(x, y_1) + \rho(y_1, y_2) \Rightarrow \rho(x, y_2) - \rho(x, y_1) \leq \rho(y_1, y_2).$$

Следовательно

$$-\rho(y_1, y_2) \leq \rho(x, y_1) - \rho(x, y_2) \leq \rho(y_1, y_2) \Rightarrow |\rho(x, y_1) - \rho(x, y_2)| \leq \rho(y_1, y_2).$$

Задание: Неравенство (2.2) доказать самостоятельно.

Следствие 2.3. *Пусть $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$. Тогда*

$$\rho(x, y_n) \rightarrow \rho(x, y) \quad \text{и} \quad \rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y).$$

Доказательство.

$$|\rho(x, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(y_n, y) \rightarrow 0,$$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \rightarrow 0.$$

Опр. Точка $x \in M$ называется *точкой прикосновения* множества E , если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из E .

Опр. *Замыканием* множества E называется множество $\overline{E} = E \cup E'$. Для замыкания множества E используется также обозначение $[E]$.

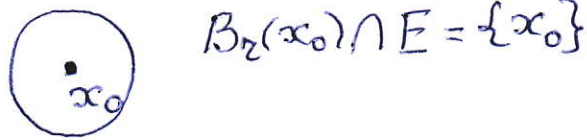
Замечание. Замыкание множества E является множеством, элементами которого являются все точки прикосновения множества E .

Предложение 2.5. *Замыкание множества E является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть $x \in \complement \overline{E}$. Тогда существует окрестность точки x , не содержащая ни одной точки из \overline{E} . Следовательно $\complement \overline{E}$ открыто и \overline{E} замкнуто.

Предложение доказано.

Опр. Точка $x_0 \in E$ называется *изолированной точкой* множества E , если существует окрестность этой точки, не содержащая ни одной точки из E кроме x_0 .



Опр. Множество E называется *совершенным*, если оно замкнуто и не содержит ни одной изолированной точки.

Пример. Простейший пример совершенного множества – отрезок $[a, b]$.

Опр. Множество E называется *нигде не плотным*, если его замыкание \bar{E} не содержит целиком ни одного открытого шара.

Опр. Точка $x \in M$ называется *граничной точкой* множества E , если любая ее окрестность содержит как точки множества E , так и точки множества $M \setminus E$.

Множество всех граничных точек множества E называется *границей* множества E и обозначается через ∂E .

Примеры. 1. Для интервала $E = (a, b)$ границей является $\partial E = \{a, b\}$.

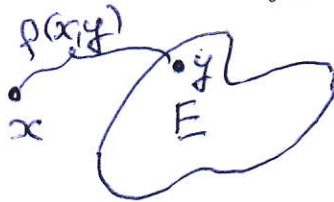
2. Для отрезка $E = [a, b]$ границей является $\partial E = \{a, b\}$.

3. Что является границей множества $E = \mathbb{Q}$ в \mathbb{R} ?



Опр. Определим расстояние от точки $x \in M$ до множества $E \subset M$ формулой

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y).$$



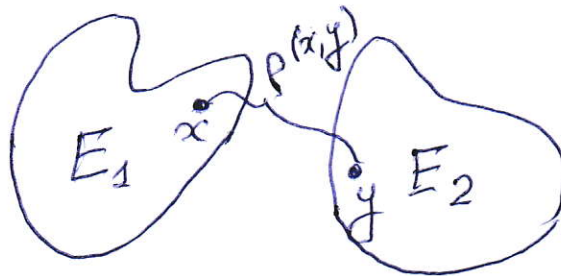
Заметим, что $\rho(x, E) \geq 0$. Однако из $\rho(x, E) = 0$ не следует, что $x \in E$.

В то же время из $x \in E$ следует, что $\rho(x, E) = 0$.

Кроме того, если множество E замкнуто и $x \notin E$, то $\rho(x, E) > 0$.

Опр. Расстояние между множествами E_1 и E_2 метрического пространства определяется формулой

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} \rho(x, y).$$



Теорема 2.3. (Теорема об отделимости замкнутых множеств.)

Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества метрического пространства M . Тогда существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$.

Доказательство. Пусть $x \in F_1$. Ясно, что $\rho(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} \rho(x, y) > 0$. В противном случае точка x была бы предельной для множества F_2 и принадлежала бы F_1 и F_2 одновременно.

Положим

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} B_{\frac{1}{2}\rho(x, F_2)}(x), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} B_{\frac{1}{2}\rho(y, F_1)}(y).$$

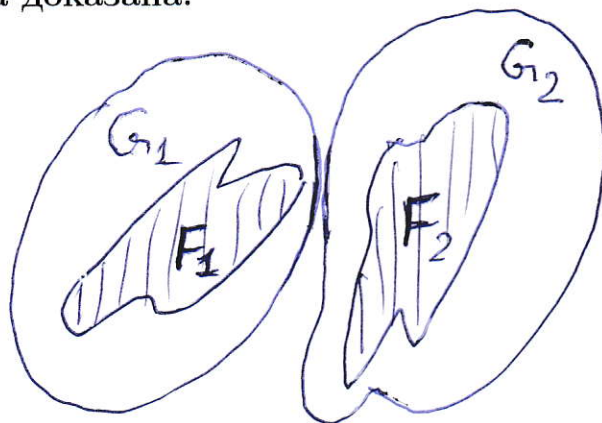
Ясно, что G_1 и G_2 открыты и $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$.

Предположим, что существует $z \in G_1 \cap G_2$. Тогда существуют $x \in F_1$ и $y \in F_2$ такие, что $\rho(x, z) < \frac{1}{2}\rho(x, F_2)$ и $\rho(y, z) < \frac{1}{2}\rho(y, F_1)$. Таким образом,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{1}{2}\rho(x, F_2) + \frac{1}{2}\rho(y, F_1) \leq \frac{1}{2}\rho(x, y) + \frac{1}{2}\rho(y, x) = \rho(x, y).$$

Полученное противоречие доказывает, что $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Теорема доказана.



$$F_1 \subset G_1, \quad F_2 \subset G_2$$

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset$$