

## 5 Последовательности суммируемых функций

Заметим, что множество  $L(E)$  всех суммируемых на измеримом множестве  $E$  функций является линейным пространством.

Сопоставим каждой функции  $f \in L(E)$  число

$$\|f\|_{L(E)} = \int_E |f(x)| dx.$$

Эту величину можно считать нормой, если ввести в  $L(E)$  равенство следующим образом:  $f = g$  тогда и только тогда, когда  $f \sim g$ , то есть  $f(x) = g(x)$  почти всюду на  $E$ .

Ясно, что  $L(E)$  является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L(E)} = \int_E |f(x) - g(x)| dx.$$

**Опр.** Пусть  $f \in L(E)$  и  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L(E)$ . Будем писать, что  $f_n \rightarrow f$  в  $L(E)$ , если

$$\|f_n - f\|_{L(E)} = \int_E |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 5.1.** Пусть  $f \in L(E)$ ,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L(E)$  и  $\delta > 0$ . Справедливо неравенство Чебышева

$$\text{meas } E[|f_n - f| > \delta] \leq \frac{1}{\delta} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f| dx &= \int_{E[|f_n - f| > \delta]} |f_n - f| dx + \int_{E[|f_n - f| \leq \delta]} |f_n - f| dx \geq \\ &\geq \int_{E[|f_n - f| > \delta]} |f_n - f| dx \geq \delta \cdot \text{meas } E[|f_n - f| > \delta] \end{aligned}$$

**Теорема доказана.**

**Следствие** Если  $f_n \rightarrow f$  в  $L(E)$ , то  $f_n \rightarrow f$  по мере на  $E$ .

**Теорема 5.2.** (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.) Пусть  $f \in L(E)$ ,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L(E)$  и существует функция  $F \in L(E)$  такая, что

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad \text{почти всюду на } E \quad \text{для всех } n \geq 1. \quad (5.1)$$

Если  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  почти всюду на  $E$ , то  $f_n \rightarrow f$  в  $L(E)$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Доказательство.** Переходя к пределу в (5.1), получаем, что функция  $f$  измерима и удовлетворяет неравенству  $|f(x)| \leq F(x)$  почти всюду на  $E$ . Следовательно  $f \in L(E)$ .

Положим  $E_N = E \cap B_N$  и заметим, что

$$\int_E |f_n - f| dx = \int_{E_N} |f_n - f| dx + \int_{E \setminus B_N} |f_n - f| dx \leq \int_{E_N} |f_n - f| dx + 2 \int_{E \setminus B_N} F dx.$$

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  второе слагаемое в правой части этого неравенства можно сделать меньше  $\frac{\varepsilon}{3}$  выбором  $N = N(\varepsilon)$ . Фиксируем это  $N = N(\varepsilon)$  и получим

$$\int_E |f_n - f| dx \leq \int_{E_N} |f_n - f| dx + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Заметим, что из  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E_N$  следует, что  $f_n \rightarrow f$  по мере на  $E_N$ , то есть для любого  $\delta > 0$  мера множества  $E_N[|f_n - f| > \delta]$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Положим  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3|E_N|}$  и заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{E_N} |f_n - f| dx &= \int_{E_N[|f_n - f| > \delta]} |f_n - f| dx + \int_{E_N[|f_n - f| \leq \delta]} |f_n - f| dx \leq \\ &\leq \int_{E_N[|f_n - f| > \delta]} 2F dx + \delta |E_N| \leq \int_{E_N[|f_n - f| > \delta]} 2F dx + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Из  $\text{meas } E_N[|f_n - f| > \delta] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что найдется  $n_0(\varepsilon)$  такое, что

$$\int_{E_N[|f_n - f| > \delta]} 2F dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } n > n_0(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\left| \int_E f_n dx - \int_E f dx \right| \leq \int_E |f_n - f| dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Теорема 5.2 останется верной, если в ее условиях заменить сходимость  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E$  на сходимость по мере на  $E$ .