ЗАНЯТИЕ 13 ОКТЯБРЯ

Домашнее задание к 20 октября.
Задачи 3.6 – 3.14, 3.5.

1.12. Доказать, что множество всех ограниченных вещественнозначных функций, заданных на произвольном множестве E, образует метрическое пространство, если за расстояние между функциями φ и ψ принять

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

1.13. Доказать полноту введенного в предыдущей задаче метрического пространства.

Решение. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{\varphi\}_{n=1}^{\infty}$. Фундаментальность этой последовательности означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_{t \in E} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon).$$

как следствие, для всякого $t \in E$

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon) \quad \forall\, t \in E. \tag{1}$$

Таким образом, числовая последовательность $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а значит, – сходится.

Определим на E функцию φ правилом

$$\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (1), имеем

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon \;\forall\, n > N(\varepsilon) \;\forall\, t \in E \Rightarrow \sup_{t \in E} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon \;\forall\, n > N(\varepsilon). \tag{2}$$

Таким образом,

$$\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0 \quad \text{при} \;\; n \to \infty.$$

Осталось показать, что функция φ ограниченная.

При фиксированных ε и n из неравенства (2) следует

$$|\varphi(t)| \leqslant |\varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant |\varphi_n(t)| + \varepsilon \leqslant C \qquad \forall\, t \in E.$$

Следовательно φ - ограниченная функция.

2.13. Показать, что замкнутый шар $\overline{B}_r(x_0)$ является замкнутым множеством.

Решение 1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{B}_r(x_0)$ и $x_n \to x$. Тогда

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant r \Rightarrow \rho(x, x_0) \leqslant r.$$

Решение 2. Пусть $x \in \complement\overline{B}_r(x_0)$. Тогда $d = \rho(x, x_0) > r$.
Положим $\varepsilon = d - r$. Для всякой точки $y \in B_r(x)$ имеем

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x_0) \Rightarrow d < \varepsilon + \rho(y, x_0) \Rightarrow r < \rho(y, x_0).$$

Следовательно $B_\varepsilon(x) \subset \complement\overline{B}_r(x_0)$.
Множество $\complement\overline{B}_r(x_0)$ открытое. Следовательно $\overline{B}_r(x_0)$ замкнуто.

2.19. Верно ли утверждение: "Внутренняя часть пересечения двух множеств равна пересечению их внутренних частей"? Верно ли аналогичное утверждение для пересечения бесконечной совокупности множеств ?

Решение. Покажем, что

$$\mathrm{int}(E_1 \cap E_2) = \mathrm{int}E_1 \cap \mathrm{int}E_2.$$

Пусть $x \in \mathrm{int}(E_1) \cap E_2)$. Тогда существует $B_\varepsilon(x) \in E_1 \cap E_2$. Ясно, что

$$B_\varepsilon(x) \in E_1, \quad B_\varepsilon(x) \in E_2 \Rightarrow x \in \mathrm{int}E_1 \cap \mathrm{int}E_2.$$

Пусть теперь $x \in \mathrm{int}E_1 \cap \mathrm{int}E_2$. Тогда существуют $B_{r_1}(x) \in E_1$ и $B_{r_2}(x) \in E_2$. Для $r = \min r_1, r_2$ имеем

$$B_r(x) \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow x \in \mathrm{int}(E_1 \cap E_2).$$

Контрпример. Для $E_n = (-1/n, 1/n)$ имеем $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\}$.

$$\mathrm{int}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \emptyset, \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) = \{0\}$$

Ясно, что для любой системы множеств $\{E_\alpha\}$

$$\mathrm{int}(\bigcap\limits_{\alpha} E_\alpha) \subset {}_{\alpha} \cap \mathrm{int}\, E_\alpha.$$

2.20. Верно ли утверждение: "Внутренняя часть объединения двух множеств равна объединению их внутренних частей"? Если нет, то имеется ли вместо равенства включение в какую-либо сторону?

Контрпример. $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [1,2]$.

$$\operatorname{int}(E_1 \cup E_2) = (0,2), \quad \operatorname{int} E_1 \cup \operatorname{int} E_2 = (0,1) \cup (1,2).$$

Ясно, что всегда

$$\bigcup_{\alpha} \operatorname{int} E_\alpha \subset \operatorname{int}(\bigcup_{\alpha} E_\alpha).$$

2.21. Доказать, что

$$\partial E = \overline{E} \setminus int\, E.$$

Решение. Пусть $x \in \partial E$. Тогда $x \in \overline{E}$ и $x \notin \operatorname{int} E \Rightarrow x \in \overline{E} \setminus int\, E$.

Пусть теперь $x \in \overline{E} \setminus int\, E$. Тогда во всякой окрестности $B_r(x)$ точки x находятся точки, принадлежащие E. Кроме того точка x не является внутренней. Следовательно в ${}_r(x)$ находятся точки, не принадлежащие E. Значит, $x \in \partial E$.

Замечание. Справедлива формула

$$\overline{E} = int\, E \cup \partial E.$$

2.22. Доказать, что граница объединения конечного числа множеств содержится в объединении их границ. Показать на примере, что аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств неверно.

Решение. Докажем, что

$$\partial(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \partial E_k.$$

Заметим, что

$$\partial(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} \setminus \operatorname{int}(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{E}_k \setminus \operatorname{int}(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \subset$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{E}_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\overline{E}_k \setminus \operatorname{int} E_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \partial E_k.$$

2.23. Доказать, что граница каждого множества замкнута.

Решение.

$$\partial E = \overline{E} \setminus int\, E = \overline{E} \cap \complement(int\, E).$$

2.28. Пусть f_0 – фиксированная непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция. Доказать, что множество всех функций $f \in C[0,1]$, удовлетворяющих неравенству $f(x) \leqslant f_0(x)$ на $[0,1]$, замкнуто в пространстве $C[0,1]$.

Решение. Нам нужно доказать, что множество

$$\mathscr{F} = \{f \in C[0,1] \mid f(x) \leqslant f_0(x) \ \ \forall\, x \in [0,1]\}$$

замкнуто в $C[0,1]$.

Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ такова, что $f_n \to f$ в $C[0,1]$.

Тогда $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in [0,1]$ и

$$f_n(x) \leqslant f_0(x) \quad \forall\, x \in [0,1] \tag{3}$$

Переходя в (3) к пределу, имеем

$$f(x) \leqslant f_0(x) \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Следовательно $f \in \mathscr{F}$.

Замечание. Из доказанного следует, что множество

$$\mathscr{F} = \{f \in C[0,1] \mid f(x) \geqslant f_0(x) \ \ \forall\, x \in [0,1]\}$$

замкнуто в $C[0,1]$.

2.29. Доказать, что множество функций $f \in C[a,b]$, удовлетворяющих для всех $x \in [a,b]$ неравенствам $\alpha < f(x) < \beta$ (где $\alpha < \beta$ – заданные числа), является открытым множеством в $C[a,b]$.

Решение. Пусть f принадлежит рассматриваемому множеству

$$\mathscr{F} = \{f \in C[0,1] \mid \alpha < f(x) < \beta \quad \forall\, x \in [a,b]\}.$$

Пусть $f \in \mathscr{F}$. Положим

$$r_1 = f_{\min} - \alpha, \quad r_2 = \beta - f_{\max}.$$

Пусть $g \in B_r(f)$, где $r = \min\{r_1, r_2\}$. Тогда

$$|g(x) - f(x)| < r \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Поэтому

$$\alpha \leqslant f(x) - f_{\min} + \alpha \leqslant f(x) - r < g(x) < f(x) + r \leqslant f(x) + \beta - f_{\max} \leqslant \beta$$

Следовательно $g \in B_r(x) \Rightarrow g \in \mathscr{F}$.

2.31. Доказать, что замыкание $\overline{E}$ множества E есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E.

Решение. Множество $\bigcap\limits_{E\subset F} F$ замкнуто и содержит E.

$$E \subset \bigcap_{E\subset F} F \Rightarrow [E] \subset \bigcap_{E\subset F} F.$$

С другой стороны, $F = [E]$ является одним из рассматриваемых множеств. Поэтому

$$\bigcap_{E\subset F} F \subset [E].$$

2.32. Доказать, что всякое замкнутое подмножество полного метрического пространства есть полное метрическое пространство.

Решение. Пусть M – полное метрическое пространство, а замкнутое множество $M_1 \subset M$ расматривается как метрическое пространство с той же метрикой.

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_1$ фундаментальна. Тогда она фундаментальна в M и поэтому существует $x \in M$ такой, что $x_n \to x$. В силу замкнутости M_1 имеем $x \in M_1$.

2.33. Доказать, что внутренняя часть любого множества является открытым множеством.

Решение. Пусть $x \in \operatorname{int} E$. Тогда существует $B_r(x) \subset E$.

Для всякого $y \in B_r(x)$ существует $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \subset E$.
Поэтому $B_r(x) \subset \operatorname{int} E$. Следовательно $\operatorname{int} E$ открыто.

2.34. Пусть $E \subset M$ и $\varepsilon > 0$. Доказать , что ε - *окрестность множества* E, определяемая как
$$E_\varepsilon = \{x \in M \mid \rho(x, E) < \varepsilon\},$$
где $\rho(x, E) = \inf\limits_{y \in E} \rho(x, y)$, является открытым множеством.

Решение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \complement E_\varepsilon$ и $x_n \to x$. Тогда
$$\rho(x_n, E) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \rho(x, E) \geqslant \varepsilon \Rightarrow x \in \complement E_\varepsilon.$$

Для корректного решения нужно использовать неравенство
$$|\rho(x_n, E) - \rho(x, E)| \leqslant \rho(x_n, x).$$

2.35. Построить на числовой прямой множество, обладающее следующими тремя свойствами: 1) все его точки изолированные; 2) точная нижняя грань расстояний между различными его точками равна нулю; 3) оно не имеет предельных точек.

Решение. $E = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2.36. Доказать, что отрезок $[a, b]$ нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

Решение 1. Предположим, что $[a, b] = E_1 \cup E_2$, где E_1, E_2 – непустые непрересекающиеся закнутые множества.

Положим

$$d = \rho(E_1, E_2) = \inf_{(x,y)\in E_1\times E_2} \rho(x, y).$$

Найдем $(x_n, y_n) \in E_1 \times E_2$ такие, что

$$d = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Выберем подпоследовательности $x_{n_k} \to x \in E_1$, $y_{n_k} \in E_2$. Тогда

$$d = \lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) = \rho(x, y) > 0.$$

Тогда на интервале, соединяющем точки x и y нет ни одной точки из $[0, 1]$. Противоречие.

Решение 2. Предположим, что $[a, b] = E_1 \cup E_2$, где E_1, E_2 – непустые непрересекающиеся закнутые множества.

Пусть $a \in E_1$. Тогда $a < \alpha = \inf\, E_2$.

Ясно, что $[a, , \alpha) \in E_1 \Rightarrow \alpha \in E_1$. Но $\alpha \in E_2$. Противоречие.

2.38. Построим на плоскости множество А следующим образом : разделим квадрат $[0,1] \times [0,1]$ прямыми $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ на девять одинаковых квадратов и удалим центральный открытый квадрат (то есть квадрат $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$). Затем каждый из оставшихся восьми замкнутых квадратов разделим на девять одинаковых квадратиков и удалим центральные открытые квадратики. Далее продолжим этот процесс неограниченно. Полученное в результате указанного процесса множество называется "ковром Серпинского". Доказать, что это множество является совершенным и нигде не плотным.

3.5. Используя лемму Гейне-Бореля, доказать, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является равномерно непрерывной на этом отрезке.

3.6. Доказать, что любое относительно компактное множество в метрическом пространстве M ограничено, а любое компактное – ограничено и замкнуто.

3.7. Доказать, что для компактности множества в метрическом пространстве M необходимо и достаточно, чтобы оно было относительно компактно и замкнуто в M.

3.8. Доказать, что любое замкнутое подмножество компакта есть компакт.

3.9. Пусть E – относительно компактное подмножество метрического пространства M. Доказать, что множество $\overline{E}$ компактно.

3.10. Доказать, что множество функций вида $y = kx^2$, где k пробегает отрезок $[0, 3]$, компактно в $C[0, 1]$.

3.11. Доказать, что множество всех функций вида $y = kx + b$ (где $0 \leqslant k \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$) компактно в $C[0, 1]$.

3.12. Доказать, что множество всех непрерывных на $[0, 1]$ функций таких, что $|f(x)| \leqslant a$ (где a – фиксированное положительное число), ограничено и замкнуто в $C[0, 1]$, однако не компактно (и даже не относительно компактно).
Замечание. Рассматриваемое множество представляет собой замкнутый шар в $C[0, 1]$.

3.13. Привести пример замкнутого ограниченного множества в l_2, не являющегося компактом.

3.14. Доказать, что объединение конечного числа компактов есть компакт, а объединение конечного числа относительно компактных множеств – относительно компактное множество.