ГЛАВА 2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1 Определения и примеры метрических пространств

Опр. Пусть M – некоторое непустое множество. Заданная на $M \times M$ числовая функция $\rho(x,y)$ называется *метрикой* на M, если она обладает следующими тремя свойствами:

1) $\rho(x,y) \geqslant 0 \quad \forall\, x,y \in M,$ причем $\rho(x,y)=0 \iff x=y$;
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x) \qquad \forall\, x,y \in M$;
3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y) \qquad \forall\, x,y,z \in M$.

Последнее неравенство называется *неравенством треугольника.*

Величина $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* между элементами x и y.

Множество M с введенной на нем метрикой ρ называется *метрическим пространством.*

Пример. Пусть M – некоторое непустое множество. Определим в нем метрику ρ следующим образом:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x=y,\\ 1, & \text{если} \quad x\neq y.\end{cases}$$

Эта метрика называется *дискретной*, а метрическое пространство – *дискретным метрическим пространством* или *пространством с дискретной метрикой.*

Другие примеры. Метрическими пространствами являются:

а) любое множество $M \subset \mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$;

б) любое множество $M \subset \mathbb{R}^m$ с метрикой $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$;

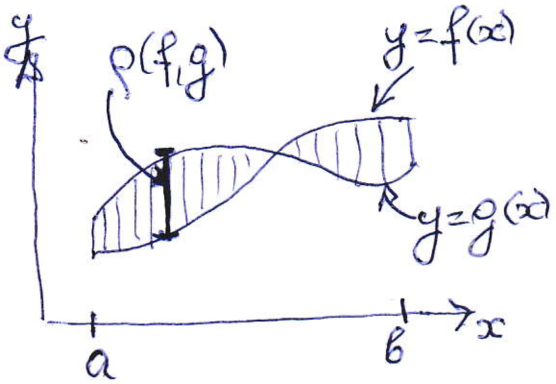
в) произвольное нормированное пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$;

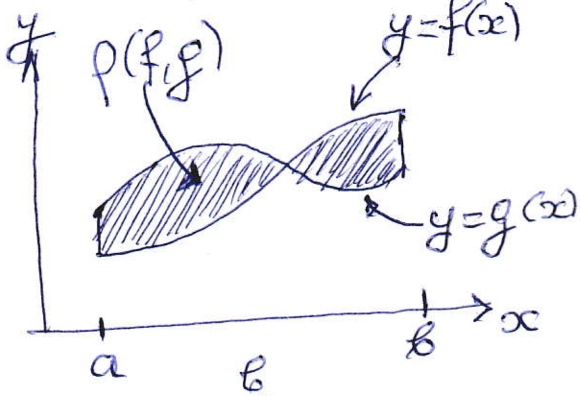
г) множество $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)|;$$

д) множество $C_1[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt \ ;$$





$$\rho(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

в $C[a,b]$.

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

в $C_1[a,b]$.

е) множество $C_p[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y) = \Big(\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|^p \, dt\Big)^{1/p}, \quad (\text{где} \quad 1 \leqslant p < \infty);$$

ж) множество l_p (где $1 \leqslant p < \infty$) всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, с метрикой

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}, \text{ где } x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

з) множество l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_{n \geqslant 1} |x_n - y_n|$.

Опр. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства M называется *сходящейся к элементу* $x \in M$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Указанное свойство записывают в виде: $x_n \to x$ (в M) при $n \to \infty$ или $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а элемент x называют *пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Опр. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon),\ m > N(\varepsilon).$$

Предложение 1.1. *В метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет два предела – x и y. В силу неравенства треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\rho(x, y) \leqslant 0$.

Следовательно $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Предложение доказано.

Предложение 1.2. *В метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся последовательность. Тогда существует элемент $x \in M$ такой, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такой, что

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Как следствие,

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon/2),\ m > N(\varepsilon/2).$$

Предложение доказано.

Замечание. Фундаментальная последовательность не обязана быть сходящейся. В качестве примера рассмотрим метрическое пространство $M = (0, 1)$ со стандартной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. В нем последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, но не является сходящейся (к элементу $x \in M$).

Опр. Метрическое пространство M называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится (к некоторому элементу этого пространства).

Примеры. Следующие метрические пространства являются полными:

а) множество $\mathbb{R}^m$ со стандартной метрикой;

б) произвольное замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^m$ со стандартной метрикой;

в) пространство $C[a, b]$;

г) пространство $l_p,\ 1 \leqslant p < \infty$;

д) пространство l_∞.

Теорема 1.1. *Пространство $C[a,b]$ – полное.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную в $C[a,b]$ последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Фундаментальность этой последовательности означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon).$$

как следствие, для всякого $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Таким образом, числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а значит, – сходится.

Определим на $[a,b]$ функцию f правилом

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (1.1), имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.2}$$

Это неравенство означает, что последовательность непрерывных функций f_n сходится к функции f равномерно на $[a,b]$. Следовательно $f \in C[a,b]$.

Из (1.2) теперь следует, что

$$\rho(f_n, f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

то есть $f_n \to f$ в $C[a,b]$.

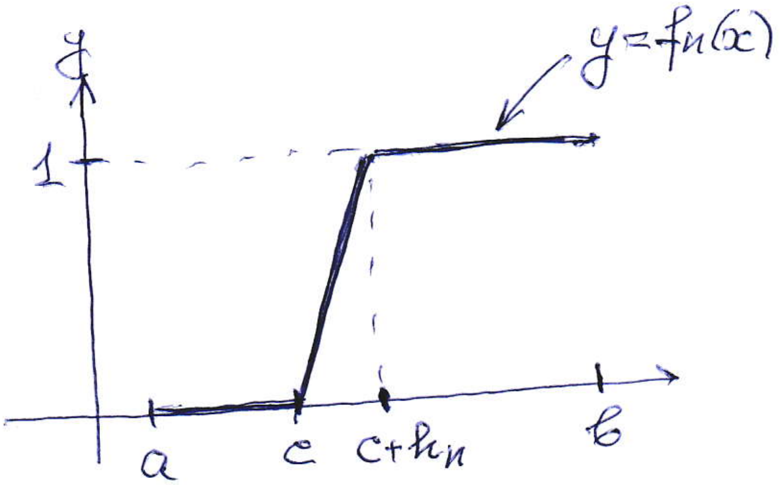
Теорема доказана.

Предложение 1.3. *Пространство* $C_1[a,b]$ *не является полным.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на отрезке $[a,b]$, заданных формулой

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad x \in [a,c], \\ (x-c)/h_n, \quad \text{если} \quad x \in (c, c+h_n), \\ 1, \quad \text{если} \quad x \in [c+h_n, b]. \end{cases}$$

Здесь $c \in (a,b)$, $h_n = (b-c)/n$.



Заметим, что

$$\rho(f_n, f_m) = \int\limits_a^b |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = \int\limits_c^{c+h_n} |f_n(x) = f_m(x)|\,dx \leqslant h_n \quad \forall\, m > n.$$

Выбрав $N(\varepsilon) = \dfrac{b-c}{\varepsilon}$, получим

$$\rho(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall\, m > n > N(\varepsilon).$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $C_1[a,b]$. Предположим, что существует непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f такая, что $f_n \to f$ в $C_1[a,b]$. Тогда

$$\rho(f_n, f) = \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_a^c |0 - f(x)|\,dx + \int\limits_c^{c+h_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int\limits_{c+h_n}^b |1 - f(x)|\,dx \to 0$$

Это возможно только, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [a,c), \\ 1, & \text{если} \quad x \in (c,b]. \end{cases}$$

Но эта функция разрывна.

Таким образом, в $C_1[a,b]$ существует фундаментальная последовательность, не имеющая предела.

Предложение доказано.