

ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

1 Суммируемые по Лебегу функции

Всюду в этой главе E – измеримое множество в \mathbb{R}^m .

В этом параграфе E – ограниченное измеримое множество и f – заданная на E ограниченная измеримая функция.

Опр. Конечная система измеримых множеств $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ называется *разбиением множества E* , если

$$\bigcup_{k=1}^n E_k = E \quad \text{и} \quad |E_i \cap E_j| = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Фиксируем некоторое разбиение T множества E и положим

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Составим *нижнюю и верхнюю интегральные суммы*

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k |E_k|, \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k |E_k|.$$

Ясно, что

$$s_T(f) \leq S_T(f).$$

Введем *нижний и верхний интегралы Лебега* функции f на множестве E следующим образом:

$$\underline{J}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f).$$

Опр. Функция f называется *интегрируемой по Лебегу на множестве E* (или *суммируемой на E*), если

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Число $J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ называется *интегралом Лебега функции f на множестве E* и обозначается так:

$$J(f) = \int_E f(x) dx$$

Опр. Разбиение $\tilde{T} = \{\tilde{E}_i\}_{i=1}^m$ называется *измельчением* разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, если для каждого i верно $\tilde{E}_i \subset E_k$ с некоторым $k = k(i)$ и $E_k = \bigcup_{\tilde{E}_i \subset E_k} \tilde{E}_i$.

В этом случае

$$|E_k| = \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} |\tilde{E}_i|.$$

Опр. Пусть $T_1 = \{E_i^{(1)}\}_{i=1}^n$, $T_2 = \{E_j^{(2)}\}_{j=1}^m$ – два разбиения множества E .

Разбиение

$$T_1 \cdot T_2 = \{E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

называется *произведением разбиений* T_1 и T_2 .

Очевидно, что $T_1 \cdot T_2$ является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2 .

Отметим следующие свойства.

Лемма 1.1. Если $\tilde{T} = \{\tilde{E}_i\}_{i=1}^m$ – узмельчение разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, то

$$s_T(f) \leq s_{\tilde{T}}(f), \quad S_{\tilde{T}}(f) \leq S_T(f).$$

Доказательство. Если $\tilde{E}_i \subset E_k$, то

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in E_k} f(x) \leq \tilde{m}_i = \inf_{x \in \tilde{E}_i} f(x), \\ \tilde{M}_i &= \sup_{x \in \tilde{E}_i} f(x) \leq M_k = \sup_{x \in E_k} f(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} s_T(f) &= \sum_{k=1}^n m_k |E_k| = \sum_{k=1}^n m_k \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} |\tilde{E}_i| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} \tilde{m}_i |\tilde{E}_i| = \sum_{i=1}^m \tilde{m}_i |\tilde{E}_i| = s_{\tilde{T}}(f), \\ S_{\tilde{T}}(f) &= \sum_{i=1}^m \tilde{M}_i |\tilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} \tilde{M}_i |\tilde{E}_i| \leq \sum_{k=1}^n M_k \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} |\tilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n M_k |E_k| = S_T(f). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2. Для любых двух разбиений T_1 и T_2

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{T} = T_1 \cdot T_2$. Тогда в силу леммы 1.1

$$s_{T_1}(f) \leq s_{\tilde{T}}(f) \leq S_{\tilde{T}}(f) \leq S_{T_2}(f).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. Справедливо неравенство

$$\underline{J}(f) \leq \overline{J}(f).$$

Доказательство. В силу леммы 1.2 имеем

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_{T_1} s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) \leq \inf_{T_2} S_{T_2}(f) = \overline{J}(f).$$

Лемма доказана.

Замечание. Как нетрудно видеть,

$$\int_E 1 dx = |E|.$$

Действительно, для $f(x) = 1$ имеем

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_T s_T(f) = |E|,$$

$$S_T(f) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f) = |E|.$$

Ясно также, что

$$\int_E 0 dx = 0.$$

Свойства интеграла Лебега
ограниченной измеримой функции

Свойство 1. Пусть функция f суммируема на E и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функция λf суммируема на E и справедливо равенство

$$\int_E \lambda f(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda s_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \sup_T s_T(f) = \lambda \underline{J}(f) = \lambda J(f),$$

$$S_T(\lambda f) = \lambda S_T(f) \Rightarrow \overline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \inf_T S_T(f) = \lambda \overline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно

$$\underline{J}(\lambda f) = \overline{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Пусть $\lambda < 0$. Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda S_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \inf_T S_T(f) = \lambda \overline{J}(f) = \lambda J(f),$$

$$S_T(\lambda f) = \lambda s_T(f) \Rightarrow \overline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \sup_T s_T(f) = \lambda \underline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно

$$\underline{J}(\lambda f) = \overline{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Пусть функции f и g суммируемы на E . Тогда функция $f + g$ суммируема на E и справедливо равенство

$$\int_E (f + g)(x) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множества E . Возьмем $T = T_1 \cdot T_2$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{T_1}(f) + s_{T_2}(g) &\leq s_T(f) + s_T(g) \leq s_T(f + g) \leq \underline{J}(f + g) \leq \\ &\leq \overline{J}(f + g) \leq S_T(f + g) \leq S_T(f) + S_T(g) \leq S_{T_1}(f) + S_{T_2}(g). \end{aligned}$$

Как следствие,

$$J(f) + J(g) \leq \underline{J}(f + g) \leq \overline{J}(f + g) \leq J(f) + J(g).$$

Таким образом,

$$\underline{J}(f + g) = \overline{J}(f + g) = J(f) + J(g).$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 – измеримые непересекающиеся множества.

а) Если функция f суммируема на E , то f суммируема на E_1 и на E_2 , причем

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx. \quad (1.1)$$

б) Если функция f суммируема на E_1 и на E_2 , то f суммируема и на E и справедливо равенство (1.1).

Доказательство. а) Пусть $T = \{\tilde{E}_k\}_{k=1}^n$ – произвольное разбиение множества E . Оно индуцирует разбиения

$$T_1 = \{\tilde{E}_k \cap E_1\}_{k=1}^n \quad \text{и} \quad T_2 = \{\tilde{E}_k \cap E_2\}_{k=1}^n$$

множеств E_1 и E_2 . Заметим, что

$$s_T(f) \leq s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \leq \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leq \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leq S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f) \leq S_T(f).$$

Отсюда следует, что

$$J(f) \leq \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leq \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leq J(f).$$

Поэтому

$$\underline{J}_1(f) = \overline{J}_1(f), \quad \underline{J}_2(f) = \overline{J}_2(f) \quad \text{и} \quad J_1(f) + J_2(f) = J(f).$$

б) Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множеств E_1 и E_2 .

Возьмем $T = T_1 \cup T_2$. Тогда

$$s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) = s_T(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq S_T(f) \leq S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f).$$

Как следствие,

$$J_1(f) + J_2(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq J_1(f) + J_2(f).$$

Поэтому

$$J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f) = J_1(f) + J_2(f).$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Пусть функция $f(x)$ суммируема на E .

Тогда для всякого $h \in \mathbb{R}^m$ функция $f(x - h)$ суммируема на $E + h$ и

$$\int_{E+h} f(x - h) dx = \int_E f(x) dx.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться инвариантностью меры относительно сдвига.

Свойство 5. Пусть $|E| = 0$. Тогда

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $s_T(f) = 0$, $S_T(f) = 0$.

Свойство 6. Пусть функции f и g суммируемы на E , причем $f(x) \leq g(x)$ почти всюду на E . Тогда

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_E f dx - \int_E g dx = \int_E (f - g) dx = \int_{E[f \leq g]} (f - g) dx + \int_{E[f > g]} (f - g) dx.$$

Для первого интеграла $s_T(f - g) \leq 0$ и поэтому значение этого интеграла неотрицательно. Второй интеграл равен нулю, так как $|E[f > g]| = 0$.

Свойство доказано.

Теорема 1.1. (*Теорема Лебега.*) Любая ограниченная измеримая на множестве E конечной меры функция f интегрируема по Лебегу на этом множестве.

Доказательство. По условию $m \leq f < M$. Разобьем отрезок $[m, M]$ точками

$$m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M.$$

с постоянным шагом $\delta_n = \frac{M - m}{n}$.

Положим $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, где $E_k = E[y_{k-1} \leq f < y_k]$ для $1 \leq k \leq n$.

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n y_{k-1}|E_k| \leq s_T(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq S_T(f) \leq \sum_{k=1}^n y_k|E_k|.$$

Следовательно

$$0 \leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})|E_k| = \sum_{k=1}^n \delta_n|E_k| = \delta_n|E|.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем:

$$0 \leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \Rightarrow \underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Именно для измеримости множеств E_k Лебегу и потребовалось свойство измеримости функции f .

Замечание 2. Можно доказать, что **всякая интегрируемая по Лебегу функция f является измеримой**.

Теорема 1.2. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега совпадают:

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (L) \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

Доказательство. Пусть $\underline{I}(f)$ и $\overline{I}(f)$ – нижний и верхний интегралы Дарбу.

$$\underline{I}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \overline{I}(f) = \inf_T S_T(f),$$

где $T = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_x - x_{k-1}), \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_x - x_{k-1}).$$

Очевидно, что

$$\underline{I}(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{I}(f),$$

так как множество разбиений в определении $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$ шире.

Так как $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = (R) \int_a^b f(x) dx$, то

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f) = (L) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из интегрируемости по Лебегу не следует интегрируемость по Риману! (Функция Дирихле.)

Теорема 1.3. Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена и непрерывна почти всюду на $[a, b]$.

2 Интеграл Лебега от неограниченной функции

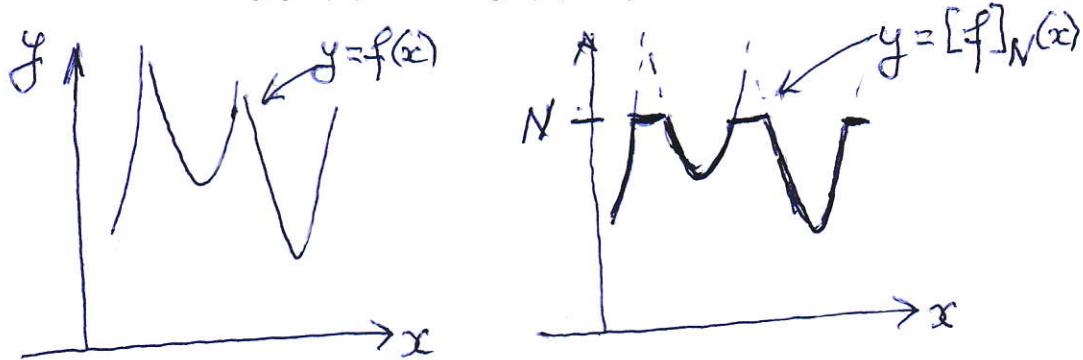
Как и в предыдущем параграфе, f – измеримая функция, заданная на ограниченном измеримом множестве E .

Интеграл Лебега от неотрицательной функции

Пусть f – измеримая неотрицательная функция.

Введем срезку функции f формулой

$$[f]_N(x) = \min\{f(x), N\}, \quad \text{где } N > 0.$$



Из измеримости функции f в силу формулы

$$E[[f]_N > a] = \begin{cases} \emptyset & \text{при } a \geq N, \\ E[f > a] & \text{при } a < N. \end{cases}$$

следует измеримость срезки $[f]_N$.

Из ограниченности и измеримости срезки $[f]_N$ в силу теоремы Лебега существование интеграла

$$J_N(f) = \int_E [f]_N(x) dx.$$

Заметим, что $[f]_N$ не убывает по N . Поэтому $J_N(f)$ является неубывающей функцией параметра $N > 0$.

Опр. Будем говорить, что функция f интегрируема по Лебегу на множестве E (или суммируема на E), если предел

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx$$

конечен.

Этот предел называется интегралом Лебега функции f на множестве E .

Замечание. Если функция f ограничена, то $[f]_N = f$ при достаточно больших значениях N и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Пример 1. Докажем, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ интегрируема по Лебегу на интервале $(0, 1)$.

Заметим, что

$$[f]_N(x) = \begin{cases} N, & x \in \left(0, \frac{1}{N^2}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \left[\frac{1}{N^2}, 1\right). \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 [f]_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{1/N^2} N dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_{1/N^2}^1 = 2. \end{aligned}$$

Пример 2. Докажем, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не интегрируема по Лебегу на интервале $(0, 1)$.

Заметим, что

$$[f]_N(x) = \begin{cases} N, & x \in \left(0, \frac{1}{N}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \left[\frac{1}{N}, 1\right). \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 [f]_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{1/N} N dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^1 \frac{1}{x} dx = \\ &= 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \ln x \Big|_{1/N}^1 = +\infty. \end{aligned}$$

Свойства интегрируемых по Лебегу
неотрицательных измеримых функций

Свойство 1. Если функция $f \geq 0$ суммируема на E то для всех $\lambda > 0$ функция λf суммируема на E и справедливо равенство

$$\int_E \lambda f(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

Доказательство. Заметим, что

$$[\lambda f]_N = \max\{\lambda f, N\} = \lambda \max\{f, N/\lambda\} = \lambda [f]_{N/\lambda}.$$

Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [\lambda f]_N(x) dx = \lambda \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_{N/\lambda}(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Пусть функции $f \geq 0$ и $g \geq 0$ суммируемы на E . Тогда функция $f + g$ суммируема на E и справедливо равенство

$$\int_E (f + g)(x) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Доказательство. Заметим, что

$$[f]_{N/2} + [g]_{N/2} \leq [f + g]_N \leq [f]_N + [g]_N.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_{N/2}(x) dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [g]_{N/2}(x) dx \leq \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f + g]_N(x) dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [g]_N(x) dx, \end{aligned}$$

то есть

$$\int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx \leq \int_E (f(x) + g(x)) dx \leq \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 – измеримые непересекающиеся множества.

а) Если функция $f \geq 0$ суммируема на E , то f суммируема на E_1 и на E_2 , причем

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx. \quad (2.1)$$

б) Если функция $f \geq 0$ суммируема на E_1 и на E_2 , то f суммируема на E и справедливо равенство (2.1).

Доказательство. Заметим, что

$$\int_E [f]_N(x) dx = \int_{E_1} [f]_N(x) dx + \int_{E_2} [f]_N(x) dx.$$

Поэтому

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

Следствие доказано.

Свойство 4. Пусть функция $f \geq 0$ суммируема на E . Тогда для всякого $h \in \mathbb{R}^m$ функция $f(x - h)$ суммируема на $E + h$ и

$$\int_{E+h} f(x - h) dx = \int_E f(x) dx. \quad (2.2)$$

Доказательство. Предельный переход в равенстве

$$\int_{E+h} [f]_N(x - h) dx = \int_E [f]_N(x) dx.$$

дает равенство (2.2).

Свойство доказано.

Свойство 5. Пусть $|E| = 0$. Тогда всякая заданная на E неотрицательная функция f суммируема на E и

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

Доказательство.

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx = 0.$$

Свойство доказано.

Свойство 6. Пусть $0 \leq f \leq g$ и функция g суммируема на E . Тогда f суммируема на E и

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

Доказательство. Достаточно перейти к пределу в неравенстве

$$\int_E [f]_N(x) dx \leq \int_E [g]_N(x) dx.$$

Свойство доказано.