№3.5

$f(x) \in L_\infty(E) \Rightarrow f$ измерима и $\exists C_1$ и $E_1 \subset E$: $|f(x)| \le C_1 \ \forall x \in E_1$
$|E_1| = |E|$

$g(x) \in L_\infty(E) \Rightarrow g$ измерима и $\exists C_2$ и $E_2 \in E$: $|g(x)| \le C_2 \ \forall x \in E_2$
$|E_2| = |E|$

$E_1 \cap E_2 \supset E \setminus ((E \setminus E_1) \cup (E \setminus E_2))$

Т.к. $|E \setminus E_1| = |E \setminus E_2| = 0 \Rightarrow |E \setminus ((E \setminus E_1) \cup (E \setminus E_2))| = E \Rightarrow$

$\Rightarrow E \le |E \cap E_2| \le |E_1| = E \Rightarrow$

$\Rightarrow |f \cdot g| \le C_1 \cdot C_2 \ \forall x \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow |f \cdot g| \le C_1 \cdot C_2$ почти всюду на E

В тоже время $f \cdot g$ измерима $\Rightarrow f \cdot g \in L_\infty(E)$

№3.11

$f_n g_n - fg = f_n g_n - f_n g + f_n g - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n g_n - fg\|_{L_1(E)} \le \|f_n(g_n - g)\|_{L_1(E)} + \|g(f_n - f)\|_{L_1(E)} \le$

$\le$ (по нер-ву Гёльдера) $\le \underset{\substack{\wedge| \\ C_1}}{\|f_n\|_{L_2(E)}} \cdot \underset{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}}{\|g_n - g\|_{L_2(E)}} + \underset{\substack{\wedge| \\ C_2}}{\|g\|_{L_2(E)}} \cdot \underset{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}}{\|f_n - f\|_{L_2(E)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_{L_1(E)} = 0$. В тоже время для $\forall \delta > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |E\{|f_n g_n - fg| > \delta\}| \le \frac{1}{\delta} \int\limits_E |f_n g_n - fg| \, dx \ \forall n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} \int |f_n g_n$~~ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |E\{|f_n g_n - fg| > \delta\}| \overset{\forall \delta > 0}{=} 0 \Rightarrow f_n g_n \to fg$ по мере на мн. E

№3.12

Возьмём $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [-n, n] \\ 0, & x \in R \setminus [-n, n] \end{cases}$, а саму $f \equiv 0$

Тогда $\int\limits_R |f_n - f|^2 dx = \int\limits_{-n}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 dx + \int\limits_{R\setminus[-n,n]} 0 \cdot dx = \frac{2}{n^2} \cdot n \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \to f$ в $L_2(R)$, но:

$\int\limits_R |f_n - f| dx = \int\limits_{-n}^{n} \frac{1}{n} dx + \int\limits_{R\setminus[-n,n]} 0 dx = 2 \; \forall n \Rightarrow f_n$ не сх. к f в $L_1(R)$

№3.13

а) Нет, не следует. Возьмём послед. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из №3.12, $E = R$, тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in E} f_n - f = 0 \Leftrightarrow f_n \to f$ в $L_\infty(E)$, но $\|f_n - f\|_{L_1(E)} = 2 \; \forall n \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \not\to f$ в $L_1(E)$

б) Да, следует. $f_n \to f$ в $L_\infty(E) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in E} |f_n - f| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |f_n - f| < \varepsilon$ почти всюду на $E \Rightarrow f_n \to f$ почти всюду на E

в) Да, следует. Зафикс. $\varepsilon > 0$. Для него $\exists N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in E} |f_n - f| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \; |E\{|f_n - f| > \varepsilon\}| = 0 < \delta \; \forall n > N \Rightarrow f_n \to f$ по мере