М. М. СМИРНОВ

ЗАДАЧИ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов механико-математических, физико-математических факультетов университетов и для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1975

Задачи по уравнениям математической физики, Смирнов М. М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.

Все задачи разбиты на три параграфа. Первый параграф содержит задачи вводного характера — на приведение уравнения к каноническому виду; второй параграф — задачи, в которых требуется найти общее решение уравнения, решить задачу Коши или Гурса, а также смешанную задачу с помощью метода характеристик. Третий параграф является основным; он содержит задачи, в которых требуется решить методом разделения переменных либо смешанную задачу для гиперболических и параболических уравнений, либо краевую задачу для эллиптических уравнений. Включены задачи на собственные значения.

Рис. — 12.

С $\frac{20203-140}{053(02)-75}$ 25-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит задачи по курсу «Дифференциальные уравнения математической физики».

Все задачи распределены между тремя параграфами. В первый параграф включены задачи вводного характера — на приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка. Второй параграф содержит задачи, в которых требуется найти общее решение уравнений, решить задачу Коши или Гурса, а также смешанную задачу для гиперболических уравнений, применив метод характеристик. Третий параграф является основным; он содержит задачи, в которых требуется решить методом разделения переменных либо смешанную задачу для гиперболических и параболических уравнений, либо краевую задачу для эллиптических уравнений, а также задачи на собственные значения.

Кроме ответов, большинство задач имеет подробные указания. Наиболее трудные задачи снабжены решениями. Это дает возможность пользоваться задачником лицам, занимающимся самостоятельно.

При подборе задач были использованы: А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики; Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. III; Н. С. Кошляков, Основные дифференциальные уравнения математической физики, и другие источники.

ЗАДАЧИ

§ 1. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Уравнение

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

принадлежит *гиперболическому типу*, если $b^2 - ac > 0$, *параболическому типу*, если $b^2 - ac = 0$, и *эллиптическому типу*, если $b^2 - ac < 0$. Здесь a, b и c — функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Чтобы привести уравнение (1) к каноническому виду, нужно составить уравнение характеристик

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0, \qquad (2)$$

которое распадается на два уравнения:

$$a\,dy - (b + \sqrt{b^2 - ac})\,dx = 0, \qquad (3)$$

$$a\,dy - (b - \sqrt{b^2 - ac})\,dx = 0, \qquad (4)$$

и найти их общие интегралы.

Уравнения гиперболического типа: $b^2 - ac > 0$.

Общие интегралы $\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$ уравнений (3) и (4) будут вещественными и различными; они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Вводя вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η):

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{5}$$

Это — так называемый *канонический вид* уравнения гиперболического типа.

Уравнения параболического типа: $b^2 - ac = 0$.

Уравнения (3) и (4) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (2): $\varphi(x, y) = c$.

В этом случае, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta = \eta(x, y)$ — такая функция, что $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ в рассматриваемой области, приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{6}$$

Это — *канонический вид* уравнения параболического типа.

Уравнения эллиптического типа: $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы уравнений (3) и (4) — комплексно сопряженные; они определяют два семейства *мнимых* характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — вещественные функции.

Тогда, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приводим уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{7}$$

Это — *канонический вид* уравнения эллиптического типа.

В случае эллиптического уравнения мы считаем, что коэффициенты a, b и c суть аналитические функции.

Привести к каноническому виду следующие дифференциальные уравнения:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}+cu=0.$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-(3+\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

5. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

6. $\operatorname{tg}^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\operatorname{tg} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\operatorname{tg}^3 x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos x\dfrac{\partial u}{\partial x}+$
$+\dfrac{1}{2}\sin 2x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

8. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+4y\dfrac{\partial u}{\partial y}+$
$+16x^4u=0.$

9. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

10. $\sin^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

11. $\operatorname{cth}^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\operatorname{cth} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Привести уравнения к каноническому виду в каждой из областей, где тип уравнения сохраняется.

12. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$ где $\alpha=\mathrm{const}.$

14. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

15. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

16. $(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-$

$$-2x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

17. $(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-$

$$-2x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

§ 2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Найти общее решение следующих уравнений:

18. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

19. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$

$$(x>0,\ y>0).$$

20. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

21. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

22. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

23. $(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}+xyu=0.$

25. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+$

$$+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2zx\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=0.$$

26. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$(a_{11}a_{22}=a_{12}^2),$$

где a_{11}, a_{12} и a_{22} — положительные числа.

27. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0.$

28. Найти необходимые и достаточные условия существования функционально-инвариантных решений уравнения с постоянными коэффициентами

$$L(u) = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$(\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0),$$

а также его общее решение.

Функция u называется *функционально-инвариантным* (ф.-и.) *решением* уравнения (1), если $F(u)$ есть решение при произвольной функции F.

29. Показать, что если выполнено условие

$$a_{11}b_2^2 - 2a_{12}b_1b_2 + a_{22}b_1^2 + 4\delta c = 0,$$

то уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(u) + cu = 0 \qquad (2)$$

имеет общее решение вида

$$u(x, y) = e^{\frac{kx+my}{2\delta}}[\psi_1(\alpha_1 x - y) + \psi_2(\alpha_2 x - y)],$$

где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции, $k = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, $m = a_{11}b_2 - a_{12}b_1$ и α_1, α_2 — корни уравнения $a_{11}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{22} = 0$.

Если же условие задачи не выполнено, то уравнение (2) привести к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta} = \bar{c}v,$$

где

$$\bar{c} = \frac{a_{11}^2(\alpha_1 b_1 - b_2)(\alpha_2 b_1 - b_2) + 4a_{11}c\delta}{16\delta^2},$$

$$\xi = \alpha_1 x - y, \quad \eta = \alpha_2 x - y.$$

30. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = v$$

имеет вид

$$v(x, y) = \int_0^x \psi_1(t) J_0(2i\sqrt{y(x-t)})\,dt + \\ + \int_0^y \psi_2(t) J_0(2i\sqrt{x(y-t)})\,dt + v(0, 0) J_0(2i\sqrt{xy}),$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — произвольные функции.

31. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{2}{2n+1} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{(a)}$$

имеет вид

$$u = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[\frac{F_1(\sqrt{2(2n+1)x} + y) + F_2(\sqrt{2(2n+1)x} - y)}{\sqrt{x}} \right],$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

32. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{n(n+1)}{x^2} u \qquad \text{(b)}$$

имеет вид

$$u = x^n \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left[\frac{\Phi(x-at) + \Psi(x+at)}{x} \right],$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

33. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{n}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

имеет вид

$$u(x, y) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \left[\frac{X(x) - Y(y)}{x-y} \right],$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ — произвольные функции.

34. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{3}{(x-y)^2} u = 0.$$

35. Показать, что общее решение уравнения

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$(0 < \alpha,\ \beta < 1,\ \alpha + \beta \neq 1)$$

имеет вид

$$u(x, y) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \varphi[x+(y-x)t]\, t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\, dt +$$
$$+ \int_0^1 \psi[x+(y-x)t]\, t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\, dt,$$

где φ и ψ — произвольные функции.

36. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{n}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{m}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

имеет вид

$$u(x, y) = (y-x)^{m+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{X(x) - Y(y)}{x-y} \right],$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ — произвольные функции.

37. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 y^{2b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad a = \text{const}, \qquad (*)$$

интегрируется в замкнутом виде, если $b = 2k/(2k \pm 1)$, где k — целое положительное число.

38. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{x-y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

где

а) $\quad -m < \beta < -\dfrac{2m-1}{2}, \quad -n < \alpha < -\dfrac{2n-1}{2}$

или

б) $\quad -\dfrac{2m+1}{2} < \beta < -m, \quad -\dfrac{2n+1}{2} < \alpha < -n,$

а m и n — целые положительные числа.

39. Показать, что общее решение уравнения

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2a}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - b^2 u = 0 \quad (0 < 2a < 1),$$

где b — произвольное вещественное или чисто мнимое число, имеет вид

$$u = \int_0^1 \frac{\Phi[x + y(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-a}} \bar{J}_{a-1}(2by\sqrt{t(1-t)})\,dt +$$
$$+ y^{1-2a} \int_0^1 \frac{\Psi[x + y(2t-1)]}{[t(1-t)]^{a}} \bar{J}_{-a}(2by\sqrt{t(1-t)})\,dt,$$

где

$$\bar{J}_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1-\nu)\,z^{\nu}}{2^{\nu}} J_{-\nu}(z),$$

а Φ и Ψ — произвольные функции.

40. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant p < 1.$$

41. Найти проходящие волны для уравнений:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{4} u,$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} + u = 0.$

42. Найти сингулярное решение уравнений:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu,$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + cu,$

которое обращается в бесконечность на поверхности характеристического конуса.

43. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0} = 3x^2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

44. Найти решение уравнения

$$4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} -$$
$$- \frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0}=\varphi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi_1(x).$$

45. Найти решение уравнения

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0}=\varphi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi_1(x).$$

46. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=\sin x}=\varphi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\sin x}=\varphi_1(x).$$

47. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0}=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=F(x).$$

48. Найти решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=1}=\varphi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=\varphi_1(x).$$

49. Показать, что решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0}=f(x)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x),$$

дается формулой

$$u = \frac{(h - x + at)\, f(x - at) + (h - x - at)\, f(x + at)}{2(h - x)} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \frac{h - z}{h - x} F(z)\, dz.$$

50. Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ — функции, заданные для всех $r \geqslant 0$ (случай центральной симметрии).

51. Найти решение уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (y \geqslant 0,\ m > 0),$$

удовлетворяющее данным Коши

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x)$$

52. Найти решение уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a y^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a = \text{const},\ y \geqslant 0,\ m \geqslant 2),$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x).$$

53. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (y < 0)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $u|_{y=0} = \tau(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$ — ограниченная величина.

54. Найти решение уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha y^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (\alpha = \text{const},\ 0 < m < 2),$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad y^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \nu_1(x).$$

55. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad m > 0, \ 0 \leqslant p < 1, \ y > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \lim_{y \to 0} y^p \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_1(x).$$

56. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2a}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - b^2 u = 0 \qquad (0 < 2a < 1),$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad y^{2a} \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \nu(x).$$

57. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} = v,$$

удовлетворяющее условиям

$$v|_{y=x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{y=x} = \omega_1(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=x} = \omega_2(x),$$

$$\varphi'(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x).$$

58. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (a_{11} a_{22} = a_{12}^2),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x, y).$$

Решить задачу для частного случая

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad F(x, y) = 0.$$

59. Найти решение уравнения

$$t^m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m}{2} t^{m-1} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1 \leqslant m < 2),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \lim_{t \to 0} t^{\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(x, y).$$

60. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \nu_1(x), \quad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{y=0} = \nu_2(x).$$

61. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

по его значениям на двух кусках характеристик:

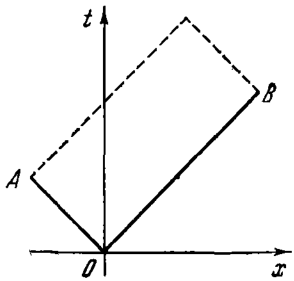

Рис. 1.

на отрезке OA (рис. 1) характеристики $t + x = 0$

$$u(x, t) = \varphi(x),$$

на отрезке OB характеристики $t - x = 0$

$$u(x, t) = \psi(x),$$

причем

$$\varphi(0) = \psi(0)$$

62. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

по его значениям на двух кусках характеристик:

$u(x, y) = \varphi(x)$ на характеристике $x - y = 0$,

$u(x, y) = \psi(x)$ на характеристике $5x - y = 0$,

причем

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

63. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (y<0),$$

если заданы его значения на отрезке OB (рис. 2) характеристики L_1: $x-2\sqrt{-y}=0$ и на отрезке AB

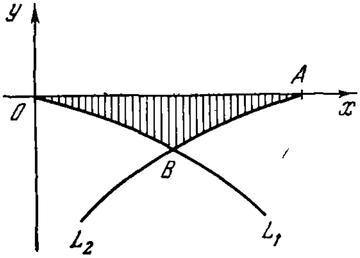

Рис. 2.

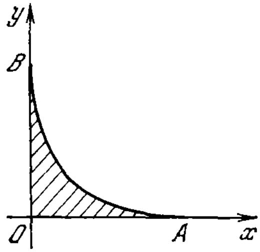

Рис. 3.

характеристики L_2: $x+2\sqrt{-y}=1$:

$$u(x,y)|_{L_1}=\varphi_1(x), \quad \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},$$

$$u(x,y)|_{L_2}=\varphi_2(x), \quad \text{если} \quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,$$

причем

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

64. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (y<0),$$

если заданы его значения на положительной части оси Ox и на характеристике L_1 (см. рис. 2):

$$u(x,y)|_{y=0}=\varphi_1(x), \quad u(x,y)|_{L_1}=\varphi_2(x),$$

причем

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0).$$

65. В области OAB, ограниченной осями координат и кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (рис. 3), найти решение уравнения

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (x>0,\ y>0)$$

по его значениям на двух кусках характеристик:

$$u(x, y) = f_1(x)$$

на характеристике $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/4,$

$$u(x, y) = f_2(x)$$

на характеристике $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$
причем

$$f_1\left(\frac{1}{4}\right) = f_2\left(\frac{1}{4}\right).$$

66. Решить предыдущую задачу, заменив первое из условий на следующее:

$$u|_{OA} = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

причем

$$f_2(1) = \tau(1).$$

67. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

если заданы его значения на отрезке OA (рис. 4) характеристики $t - x = 0$ и на кривой L, выходящей из

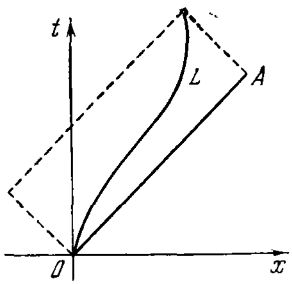

Рис. 4.

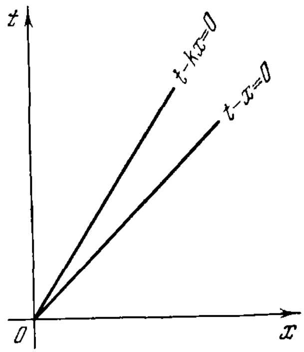

Рис. 5.

точки O и лежащей внутри угла, образованного характеристиками $t \pm x = 0$, причем кривая L обладает тем свойством, что каждая характеристика $t - x = c$ пересекает ее в одной точке. Рассмотреть также частный случай, когда L есть прямая

$$t - kx = 0 \quad (k > 1).$$

68. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

если известны значения решения и его первой производной по нормали на положительной части оси Ox (рис. 5), а также его значения на полупрямой $t - kx = 0$ $(k > 1)$:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (x \geqslant 0),$$

$$u|_{t=kx} = \psi(x) \qquad (x \geqslant 0),$$

причем

$$\varphi_0(0) = \psi(0).$$

Найти условие гладкости решения в рассматриваемой области.

69. Пусть D — область, ограниченная отрезком AB оси x и характеристиками AC: $x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0$ и BC: $x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m}{2} y^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (y > 0 \quad m > 0). \qquad (*)$$

Определить в области D решение уравнения $(*)$, непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AC} = \psi(x) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x) \quad (0 < x < 1),$$

где $\psi(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции (Задача Коши — Гурса.)

70. Показать, что однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Коши — Гурса

$$u|_{BC} = \psi(x) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x) \quad (0 < x < 1)$$

для уравнения $(*)$, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$x^{\frac{m}{m+2}} \psi'\left(\frac{x}{2}\right) = 2(m+2)^{-\frac{m}{m-2}} \nu(x)$$

71. Область начальных колебаний однородного газа представляет собой шар радиуса R. Начальные скорости частиц газа всюду равны нулю, а начальная конденсация S_0 постоянна внутри шара и равна нулю вне его. Определить конденсацию S для любого момента времени в точке M, лежащей вне области начального возмущения.

72. Полуограниченная однородная струна $0 \leqslant x < \infty$ с закрепленным концом $x = 0$ возбуждена начальным отклонением

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ -\sin \dfrac{\pi x}{l} & \text{при} \quad l \leqslant x \leqslant 2l, \\ 0 & \text{при} \quad 2l \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Определить графически форму струны в моменты времени

$$t = \frac{l}{4a}, \quad \frac{l}{a}, \quad \frac{5l}{4a}, \quad \frac{3l}{2a}, \quad \frac{7l}{4a}, \quad \frac{9l}{4a},$$

предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

73. Полуограниченная однородная струна $0 \leqslant x < \infty$ с закрепленным концом $x = 0$ находится в прямолинейном положении равновесия. В момент времени $t = 0$ она получает удар от молоточка шириною h на расстоянии c от точки закрепления. Головка молоточка сконструирована так, что начальная скорость, данная струне, будет максимальной у центра головки и равна нулю у ее края; кривая начальной скорости этой части струны имеет вид

$$v_0 \cos \frac{\pi}{h}(x - c) \quad \text{при} \quad |x - c| \leqslant \frac{h}{2}.$$

Определить форму струны в момент времени $t > 0$.

74. Струна бесконечной длины $x > 0$, линейной плотности ρ, натяжения ρa^2 находилась в состоянии равновесия. При $t > 0$ точка $x = 0$ совершает малые колебания $A \sin \omega t$. Показать, что смещение точки струны с абсциссой $x > 0$ определяется формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ A \sin \omega \left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при} \quad t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

75. Полуограниченная трубка ($x > 0$), заполненная идеальным газом, имеет на одном конце ($x = 0$) свободно перемещающийся поршень массы M. В момент времени $t = 0$ поршню посредством удара сообщают начальную скорость v_0. Найти процесс распространения волны в газе, если известно, что начальные отклонения и начальная скорость частиц газа равны нулю.

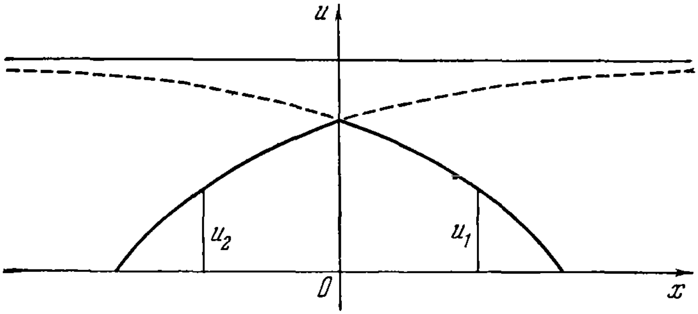

Рис. 6.

76. Бесконечная струна, имеющая в точке $x = 0$ сосредоточенную массу M, находится в положении равновесия. В начальный момент времени $t = 0$ ударом молоточка массе M сообщается начальная скорость v_0. Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, указанный на рис. 6, где $u_1(x, t)$ — прямая волна:

$$u_1(x, t) = \frac{Mav_0}{2T_0}\left[1 - e^{\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)}\right] \quad \text{при} \quad x - at < 0,$$
$$u_1(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x - at > 0,$$

а $u_2(x, t)$ — обратная волна:

$$u_2 = \frac{Mav_0}{2T_0}\left[1 - e^{\frac{-2T_0}{Ma^2}(x+at)}\right] \quad \text{при} \quad x + at > 0,$$
$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x + at < 0,$$

T_0 — натяжение струны.

77. Однородная струна длиной l закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$. В начальный момент времени она оттянута в точке $x = \frac{1}{3}l$ на малое расстояние h от оси

Ox, затем отпущена без сообщения ее точкам начальной скорости. Показать, что форма струны при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3a}$ выражается формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3hx}{l} & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{1}{3} l - at, \\ \frac{3h}{4l} x + \frac{9h}{4l}\left(\frac{1}{3} l - at\right) & \text{при } \frac{1}{3} l - at < x < \frac{1}{3} l + at, \\ \frac{3h}{2l}(l - x) & \text{при } \frac{1}{3} l + at < x \leqslant l. \end{cases}$$

78. Вывести уравнение малых продольных колебаний цилиндрического стержня и проинтегрировать его при условии, что один конец закреплен, а другой свободен

79. Дан неограниченный цилиндрический стержень, составленный их двух полуограниченных однородных стержней, соединенных в точке $x = 0$. Пусть из области $x < 0$ по стержню распространяется волна $u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right)$, $t \leqslant 0$. Найти отраженную и преломленную волны в момент времени $t > 0$

80. Цилиндр длиной l, движущийся поступательно со скоростью v_1, настигает второй цилиндр длиной l, имеющий скорость $v_2 < v_1$. Требуется определить распределение скоростей продольной волны по длине каждого из цилиндров, считая, что поперечные сечения и материалы цилиндров одинаковы

81. Один конец цилиндрического стержня ($x = 0$) закреплен, а другой ($x = l$) свободен. В начальный момент времени $t = 0$ свободный конец подвергается удару движущегося груза массы M со скоростью v, направленной по оси стержня. Найти продольные колебания стержня в момент времени $t > 0$.

82. Решить задачу 81, когда конец $x = 0$ свободен.

83. Тяжелое тело массы M, не имеющее скорости, мгновенно нагружает нижний конец вертикального стержня, закрепленного на верхнем конце Найти продольные колебания стержня

84. Найти решение системы уравнений

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -b(\theta - T), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = a(\theta - T),$$

удовлетворяющее условиям

$$\theta\,|_{x=0} = 0,\ T\,|_{y=0} = 1.$$

85. Найти решение системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\rho a\,\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{a}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0} = 0,\ v\,|_{t=0} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

и краевым условиям

$$u\,|_{x=0} = 0,\ v\,|_{x=l} = \alpha(t)(1+\beta u) - 1 \quad (t \geqslant 0),$$

где a, β, ρ — постоянные, $\alpha(t)$ — заданная функция.

§ 3. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)\,u \tag{1}$$

(где $\rho(x)$, $p(x)$ и $q(x)$ — достаточно гладкие функции, причем $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$), удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} \alpha u(0,t) + \beta\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0,\\ \gamma u(l,t) + \delta\,\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{3}$$

Находим сначала нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), в виде произведения

$$u(x,t) = T(t)\,X(x). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$\rho(x)\,T''(t)\,X(x) = T(t)\,\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dX}{dx}\right] - q(x)\,T(t)\,X(x)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda,$$

где λ — некоторая постоянная.

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]X=0, \tag{5}$$

$$T''(t)+\lambda T(t)=0. \tag{6}$$

Так как $T(t)\not\equiv 0$, то, для того чтобы функция (4) удовлетворяла краевым условиям (2), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\left.\begin{aligned}\alpha X(0)+\beta X'(0)=0,\\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы пришли к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

Найти такие значения λ, называемые собственными значениями, при которых существует нетривиальное решение уравнения (5), *удовлетворяющее краевым условиям* (7); *а также найти эти нетривиальные решения, называемые собственными функциями.*

Доказывается, что:

1. *Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$, которым соответствуют собственные функции*

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots$$

2. *При* $q(x)\geqslant 0$ *и* $[p(x)X_n(x)X_n'(x)]_{x=0}^{x=l}\leqslant 0$ *все собственные значения λ_n положительны.*

3. *Собственные функции на отрезке* $[0,\ l]$ *образуют ортогональную и нормированную систему с весом* $\rho(x)$:

$$\int_0^l\rho(x)X_n(x)X_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ 1 & \text{при } m=n.\end{cases} \tag{8}$$

4. (Теорема Стеклова.) *Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям* (7) *и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерыв-*

ную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad c_n=\int_0^l \rho(x) X_n(x) f(x)\,dx.$$

Далее, для каждого собственного значения λ_n решаем уравнение (6). Общее решение уравнения (6) при $\lambda = \lambda_n$ (обозначим его $T_n(t)$) имеет вид

$$T_n(t)=A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, мы получили бесчисленное множество решений уравнения (1) вида

$$u_n(x, t)=T_n(t)\,X_n(x)= \\ =(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t)\,X_n(x).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t)X_n(x). \quad (9)$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, то сумма его будет удовлетворять уравнению (1) и краевым условиям (2).

Тогда для выполнения начальных условий (3) надо, чтобы

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)=\varphi_0(x), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\,B_n X_n(x)=\varphi_1(x). \quad (11)$$

Предполагая, что ряды (10) и (11) сходятся равномерно, можно определить коэффициенты A_n и B_n, умножив обе части равенств (10) и (11) на $\rho(x)\,X_n(x)$ и проинтегрировав по x в интервале от 0 до l.

В силу (8) получим

$$A_n = \int_0^l \rho(x)\,\varphi_0(x)\,X_n(x)\,dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \rho(x)\,\varphi_1(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (9), получим решение нашей задачи *).

1. Уравнения гиперболического типа

86. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = l$, имеющая в начальный момент времени форму

$$u(x, 0) = \frac{16}{5} h \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right],$$

где $h > 0$ — достаточно малое число, начала колебаться без начальной скорости. Найти свободные колебания струны.

87. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = l/2$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

88. Однородная струна длиной l натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. В точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Определить отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени.

89. Однородная струна длиной l, закрепленная на обоих концах, находится в прямолинейном положении равновесия. В некоторый момент времени, принимаемый за начальный, она получает в точке $x = c$ удар от молоточка, который сообщает этой точке постоянную

---

*) Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

скорость v_0. Найти отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени.

Рассмотреть два случая.

а) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\begin{cases} v_0, & \text{если } |x-c|<\dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, & \text{если } |x-c|>\dfrac{\pi}{2h} \end{cases}$$

Этот случай соответствует плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину π/h и ударяющему в точке $x = c$.

б) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\begin{cases} v_0\cos h(x-c), & \text{если } |x-c|<\dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, & \text{если } |x-c|>\dfrac{\pi}{2h}. \end{cases}$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку шириной π/h. Такой молоточек в центре интервала возбуждает наибольшую скорость.

90. Однородная струна длиной l закреплена на конце $x = 0$, а к другому ее концу прикреплено кольцо, массой которого можно пренебречь. Кольцо может скользить по гладкому стержню; оно отклонено на малое расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпущено. Найти отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени.

91. Найти колебания однородной струны $0\leqslant x\leqslant l$ с закрепленными концами и сосредоточенной массой M, прикрепленной в точке $x = c$ струны; колебания вызваны начальным смещением

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} h\dfrac{x}{c} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant c, \\ h\dfrac{l-x}{l-c} & \text{при } c\leqslant x\leqslant l, \end{cases}$$

где h — малое число. Начальные скорости точек струны равны нулю.

92. Труба, открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью v. В момент времени $t = 0$ труба мгновенно останавливается. Определить смещение воздуха внутри трубы на расстоянии x от закрытого конца трубы.

93. Проинтегрировать уравнение малых продольных колебаний цилиндрического стержня при условии, что один конец закреплен, а другой свободен.

94. Один конец стержня закреплен упруго, а другой свободен. Найти продольные колебания стержня при произвольных начальных данных.

95. Один конец стержня закреплен, а на второй действует сила Q. Найти продольные колебания стержня, если в начальный момент сила перестает действовать.

96. Изучить свободные продольные колебания однородного цилиндрического стержня длиной l, у которого оба конца свободны.

97. Однородный стержень длиной $2l$ сжат силами, приложенными к его концам, так, что он укоротился до длины $2l\,(1-\varepsilon)$. При $t=0$ нагрузка снимается. Показать, что смещение u сечения с абсциссой x стержня определяется формулой

$$u(x,t)=\frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l},$$

если точка $x=0$ находится посредине стержня и a — скорость продольных волн в стержне.

98. *Крутильными колебаниями стержня* называются такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Вывести уравнение малых крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня и проинтегрировать его при условии, что один из концов стержня заделан, а на другой прикреплен диск.

99. Однородный стержень имеет длину l и площадь поперечного сечения σ. Конец его $x=0$ закреплен неподвижно, а на конце $x=l$ сосредоточена масса m. Стержень предварительно растянут силой Q. Изучить продольные колебания стержня, которые возникают при внезапном прекращении действия растягивающей силы.

100. Концы однородной струны длиной l удерживаются с помощью упругих сил на прямых, параллельных оси Ou. Изучить свободные поперечные колебания струны, если известны в начальный момент времени смещение и скорость ее точек.

101. Исследовать свободные колебания закрепленной струны, колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

102. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$.

103. Стержень длиной l, конец которого $x = 0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ к свободному концу приложена сила Q (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти смещение $u(x, t)$ стержня в любой момент времени $t > 0$.

104. Изучить продольные колебания однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $F = A \sin \omega t$, направление которой совпадает с осью стержня.

105. Стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю.

В момент времени $t = 0$ стержень освобождается, оставаясь закрепленным в верхней точке. Изучить вынужденные колебания стержня.

106. Однородная струна длиной l, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, колеблется под действием внешней гармонической силы $F(x, t) = \rho f(x) \sin \omega t$, рассчитанной на единицу длины. Найти отклонение $u(x, t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

107. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \operatorname{sh} x$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

108. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x - l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

109. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-l)t^2$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

110. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (\alpha > -1),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

и однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0.$$

111. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial u}{\partial t} - b^2 u = 0$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(0, t) = A, \quad u(l, t) = 0$$

112. Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом ($x = l$) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнение малых колебаний нити и доказать, что ее отклонение от положения равновесия выражается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos a\lambda_k t + B_k \sin a\lambda_k t) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

где

$$A_k = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k lJ_1^2(\mu_k)} \int_0^l F(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2},$$

а $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — положительные корни функции Бесселя $J_0(x)$.

113. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

114. Изучить свободные радиальные колебания круглой мембраны, закрепленной по контуру, колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

115. Тяжелая однородная нить длиной l, подвешенная за один из своих концов $x = l$, выводится из положения равновесия и опускается без начальной скорости. Доказать, что уравнение малых колебаний нити, которые она совершает под действием силы тяжести, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где $a = \sqrt{g}$. Проинтегрировать это уравнение при условиях данной задачи.

116. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (\alpha > 0),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

и одному из краевых условий

$$u\,|_{x=0} = 0, \quad u\,|_{x=a} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha < 1,$$

$$u\,|_{x=0} \ \text{ограничено}, \quad u\,|_{x=a} = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \alpha < 2.$$

117. Решить задачу **116** с теми же начальными данными при следующих краевых условиях:

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u\,|_{x=a} = 0 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

118. Дана цилиндрическая трубка радиуса R настолько длинная, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Исследовать малые радиальные колебания однородного газа, заключенного в трубке.

119. Гибкая однородная нить вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. В момент времени, принимаемый за начальный, нить выводится из своего относительного положения равновесия, и ее точкам сообщаются начальные скорости. Определить отклонения $u(x, t)$ нити по истечении времени t от начального момента.

120. Круглая однородная мембрана радиуса R, закрепленная на краю, находится в состоянии равновесия при натяжении T. В момент времени $t = 0$ к мембране приложено нормальное давление P на единицу площади. Показать, что колебание точек мембраны определяется выражением

$$u(r, t) = \frac{P}{T}\left[\frac{1}{4}(R^2 - r^2) - 2R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos\frac{a\mu_k t}{R}\right],$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

121. Круглая однородная мембрана радиуса R, закрепленная по контуру, находится в состоянии равновесия при натяжении T. В момент времени $t = 0$ к поверхности мембраны приложена равномерно распределенная нагрузка $f = P_0 \sin \omega t$. Найти радиальные колебания мембраны.

122. Однородная квадратная мембрана, имеющая в начальный момент времени $t = 0$ форму $Axy(b-x) \times \times (b-y)$, где A — постоянная, начала колебаться без начальной скорости. Исследовать свободные колебания мембраны, закрепленной по контуру.

123. Однородная прямоугольная мембрана, закрепленная по краям, в начальный момент времени $t = 0$ получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\sigma_\varepsilon} v_0 \, dx \, dy = A,$$

где v_0 — начальная скорость, A — постоянная.

Определить свободные колебания мембраны.

124. Найти решение волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

в области D: $t \geqslant 0$, $0 < a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha < \pi$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{r=a} = u|_{r=b} = u|_{\theta=\alpha} = 0$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(r,\ \theta)\, e^{im\varphi}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta)\, e^{im\varphi},$$

где m — целое положительное число.

125. Найти решение волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

внутри шара радиуса R с центром в начале координат, удовлетворяющее краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x, y, z).$$

(К этой задаче мы приходим при рассмотрении малых колебаний газа в сферическом сосуде.)

126. Найти решение волнового уравнения

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

в области $r < t$, обращающееся на характеристическом конусе $r = t$ в заданную функцию, сохраняющую постоянные значения вдоль образующих характеристического конуса

$$u|_{r=t} = \Phi(\theta, \varphi),$$

где $\Phi(\theta, \varphi)$ — заданная непрерывная функция θ и φ в области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

127. Изучить с помощью метода разделения переменных поперечные колебания двухопорной балки длиной l.

128. Линия, свободная от искажения $\left(\frac{R}{L} = \frac{G}{C}\right)$, длиной l, заряжена до потенциала E. Конец $x = l$ изолирован, и в момент времени $t = 0$ конец $x = 0$

заземляется Показать, что потенциал в точке x равен

$$V=\frac{4E}{\pi}e^{-bt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\cdot\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at,$$

где $b=\frac{R}{L}$, $a^2=\frac{1}{LC}$.

129. У линии передачи длиной l утечка $G=0$. Начальный ток и потенциал равны нулю. Конец $x=l$ изолирован. При $t=0$ в точке $x=0$ приложена э.д.с. E. Найти силу тока и потенциал в любой момент времени.

130. Найти решение системы уравнений

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\omega}{g}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{\omega}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\quad \sigma=k\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right),$$

удовлетворяющее условиям

$$\sigma|_{y=0}=0,\quad \eta|_{y=h}=0,$$

$$\xi=-\frac{\alpha gT^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}\quad \text{при}\quad x=0,$$

$$\sigma\to 0 \text{ при } x\to\infty,$$

где ω, g, k, α и T — постоянные.

2. Уравнения параболического типа

131. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad (0<x<l,\quad t>0),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0,\; t>0,$$

и

$$u(x,\,0)=\begin{cases} x & \text{при}\quad 0<x\leqslant l/2,\\ l-x & \text{при}\quad l/2\leqslant x<l.\end{cases}$$

132. Дан тонкий однородный стержень длиной l, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна

$$f(x)=\frac{cx\,(l-x)}{l^2}.$$

Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

133. Доказать, что концентрация $C(x, y, z, t)$ вещества, диффундирующего в неподвижной среде, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial C}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t),$$

где D — коэффициенты диффузии, а F — плотность источников диффундирующего вещества.

В случае $D = \text{const}$ и $F = 0$ уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right).$$

134. Растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 = \text{const}$ диффундирует из раствора. заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h$ и $x = l$. Определить процесс выравнивания концентрации, предполагая, что границы $x = 0$, $x = l$ непроницаемы для вещества.

135. Дан однородный шар радиуса R, центр которого расположен в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t > 0$.

136. Найти распределение температуры в однородном шаре радиуса R. Внутри шара, начиная с момента времени $t = 0$, действует источник тепла с постоянной плотностью Q, а поверхность поддерживается при температуре, равной нулю. Начальная температура шара равна нулю.

137. Сфера радиуса R содержит растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 = \text{const}$. Концентрация на поверхности сферы поддерживается постоянной, равной $C_1 > C_0$. Найти количество абсорбированного вещества в момент времени $t > 0$.

138. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Начальная температура стержня известна. Конец стержня $x = 0$ поддерживается при температуре, равной нулю, а на конце $x = l$ происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой считается равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$

139. Решить задачу 138, предполагая, что теплообмен с окружающей средой происходит на обоих концах стержня.

140. Решить задачу 135, предполагая, что поверхность шара все время свободно охлаждается в среде, имеющей температуру, равную нулю.

141. Решить задачу 136 при условии, что на поверхности шара по закону Ньютона происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой считается равной нулю.

142. Однородный шар радиуса R находится при постоянной температуре u_0 и окружен сферической оболочкой из того же материала толщиной R, находящейся при температуре, равной нулю. Все это охлаждается в среде с температурой, равной нулю. Найти температуру в точках внутри шара на расстоянии r от центра в момент времени $t > 0$.

143. Однородное твердое тело ограничено двумя концентрическими сферами с радиусами R и $2R$. Внутренняя поверхность тела непроницаема для тепла. Шаровой слой нагрет до температуры u_0 и затем охлаждается в среде с нулевой температурой. Найти температуру в точках внутри шарового слоя в момент времени $t > 0$.

144. Решить задачу об остывании однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$, один конец теплоизолирован, а другой поддерживается при постоянной температуре u_0.

145. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна нулю. На конце $x = l$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = 0$ она растет линейно со временем, так что $u(0, t) = At$, где A — постоянная. Найти распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$.

146. Решить задачу **145**, считая, что температура конца $x = 0$ меняется по закону $u(0, t) = A\sin\omega t$.

147. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна $A\frac{x}{l}$. На конце $x = 0$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = l$ температура изменяется по закону $u(l, t) = Ae^{-t}$ Найти распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$.

148. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l,\ t > 0),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = 0$$

и краевым условиям

$$u\Big|_{x=0} = A(1 - e^{-\alpha t}), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu\Big|_{x=l} = 0,$$

где A, $H > 0$ и $\alpha > 0$ — постоянные.

149. Дан однородный шар радиуса R при температуре, равной нулю. Начиная с момента времени $t = 0$, температура окружающей среды растет линейно со временем, так что $u_c = bt$, где b — постоянная. Теплообмен между поверхностью шара и окружающей средой происходит по закону Ньютона. Нагревание происходит равномерно (симметричная задача). Найти распределение температуры по радиусу шара в момент времени $t > 0$.

150. Дана неограниченная пластина толщиной $2R$ при температуре, равной нулю. Пластина нагревается с обеих сторон одинаково постоянным тепловым потоком q. Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени $t > 0$.

151. Дан однородный шар радиуса R при температуре, равной нулю. Шар нагревается равномерно по всей поверхности (симметричная задача) постоянным тепловым потоком q. Найти радиальное распределение температуры внутри шара в любой момент времени $t > 0$.

152. Дана неограниченная пластина толщиной $2R$ при температуре, равной нулю. В пластине, начиная с момента времени $t = 0$, действует источник тепла с постоянной плотностью Q. Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени $t > 0$ при условии, что ее грани поддерживаются при температуре, равной нулю.

153. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна $f(x)$. Конец $x = 0$ стержня поддерживается при постоянной температуре u_0, а конец $x = l$ — при постоянной температуре u_1. С боковой поверхности стержня происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, температура которой принимается равной нулю. Определить температуру стержня в любой момент времени t.

154. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна нулю. Конец $x = 0$ стержня поддерживается при постоянной температуре u_0, а на конце $x = l$ и с боковой поверхности стержня происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, температура которой принимается равной нулю. Определить температуру стержня в любой момент времени t.

155. Вывести уравнение распространения тепла в однородном кольце с очень малым поперечным сечением, принимая во внимание, что с боковой поверхности его происходит теплообмен с окружающей средой. Решить полученное уравнение, если известно начальное распределение температуры в кольце.

156. Найти распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса R при условии, что начальная температура равна

$$u|_{t=0} = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

а на боковой поверхности поддерживается температура, равная нулю.

157. Исследовать радиальное распространение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса R, боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре u_0. Начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

158. Диффузионной средой является цилиндр радиуса R, на поверхности которого поддерживается постоянная концентрация C_1. Вначале среда свободна от растворенного вещества. Определить количество вещества Q, продиффундировавшего внутрь цилиндра в момент времени t, на единицу длины.

159. Дан неограниченный цилиндр радиуса R, начальная температура которого равна $f(r)$. С боковой поверхности цилиндра происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, температура которой считается равной нулю. Найти распределение темі ературы внутри цилиндра в любой момент времени t.

160. Дана неограниченная цилиндрическая труба $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, начальная температура которой равна $f(r)$. Наружная и внутренняя поверхности трубы поддерживаются при температуре, равной нулю. Найти распределение температуры по сечению трубы в любой момент времени $t > 0$.

161. Дан тонкий стержень длиной l, состоящий из двух разнородных частей (рис. 7). Конец $x = 0$ стержня поддерживается при постоянной температуре u_0,

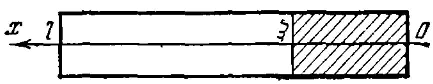

Рис. 7.

а конец $x = l$ — при нулевой температуре Начальная температура обеих частей стержня одинакова и равна нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

162. Дана тонкая прямоугольная пластинка со сторонами l и m (совпадающими с осями координат), для которой известно начальное распределение температуры. Боковые стороны $x = 0$, $x = l$ во все время наблюдения удерживаются при температуре, равной нулю, а оба основания имеют заданное распределение температуры:

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=m} = \varphi_1(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Найти температуру любой точки пластинки в момент времени $t > 0$.

163. Дан однородный цилиндр радиуса R и длиной l, температура которого равна $f(r, x)$. В начальный момент времени $t = 0$ он помещается в среду, имеющую температуру, равную нулю. Теплообмен боковой поверхности и оснований цилиндра с окружающей средой происходит по закону Ньютона. Найти распределение температуры внутри цилиндра в любой момент времени.

164. Дан однородный шар радиуса R с начальной температурой $f(r, \theta, \varphi)$. На поверхности шара температура поддерживается равной нулю. Найти распределение температуры внутри шара в любой момент времени $t > 0$.

165. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3}{2}(1 - x^2)\frac{\partial u}{\partial t},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad u(x, 0) = 1.$$

166. Показать, что решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = P = \text{const}, \ u(l, t) = 0 \quad (t > 0)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 < x < l),$$

можно представить в замкнутом виде

$$u(x, t) = \frac{P(l - x)}{2l} +$$

$$+ \frac{P}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(x - l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}e^{-it\tau} - \frac{\sin(x - l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}e^{it\tau}\right]d\tau.$$

167. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \ u(l, t) = 0 \quad (t > 0)$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

168. Дан однородный стержень, у которого один конец простирается до бесконечности в положительном направлении оси Ox, а другой конец поддерживается при постоянной температуре, равной нулю. Начальное распределение температуры стержня задано. Определить температуру стержня в любой момент времени $t > 0$.

169. Дан полуограниченный стержень с теплоизоляцией боковой поверхности, начальная температура которого известна. На конце происходит лучеиспускание в окружающую среду с температурой, равной нулю. Найти распределение температуры по длине стержня в любой момент времени $t > 0$.

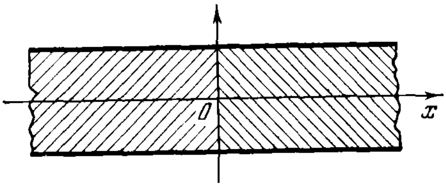

Рис. 8.

170. Даны два полуограниченных стержня (рис. 8), начальная температура первого постоянна и равна нулю, второго — $u_0 = \text{const}$. В начальный момент времени они приведены в соприкосновение своими концами. Определить распределения температуры по длине обоих стержней в любой момент времени t.

3. Уравнения эллиптического типа

Найти сингулярные решения следующих дифференциальных уравнений:

171. $\Delta u + k^2 u = 0$.

172. $y^m \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; y \geqslant 0, \quad m > -2$.

173. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \; y \geqslant 0, \; \alpha = \text{const}$.

174. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$.

175. Найти собственные числа и собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа, когда область D:

а) прямоугольник $0 < x < a, \; 0 < y < b$;

б) равнобедренный прямоугольник с катетом a;

в) круг радиуса R с центром в начале координат;
г) круговое кольцо $R_1 < \rho < R_2$;
д) шар радиуса R с центром в начале координат;
е) круговой цилиндр конечной длины.

176. Пусть $\overline{\Pi}$ — параллелепипед, определенный неравенствами $p_i \leqslant x_i \leqslant q_i$ $(i < n)$, $0 \leqslant x_n \leqslant a$. Найти собственные числа и собственные функции задачи Дирихле для оператора B:

$$Bu = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_n^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

177. Дан оператор B:

$$Bu = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_n^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \qquad (1 \leqslant \alpha < 2),$$

определенный на множестве $M(\Pi)$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых в Π, обращающихся в нуль на верхнем основании и боковых гранях параллелепипеда и ограниченных при $x_n = 0$. Найти собственные числа и собственные функции оператора B.

178. Найти собственные числа и собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа, когда область D:
а) круг $0 < \rho < R$;
б) круговое кольцо $R_1 < \rho < R_2$;
в) прямоугольный параллелепипед;
г) шар радиуса R с центром в начале координат;
д) круговой цилиндр конечной длины.

179. Найти собственные числа и собственные функции краевой задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0,$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0,$$

$$v\Big|_{y=h} = 0, \quad -\alpha \frac{\partial v}{\partial y} + v\Big|_{y=0} = 0, \quad \alpha = \mathrm{const}.$$

180. Найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в прямоугольнике D: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, если оно на контуре принимает заданные значения

$$u|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_1(y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant b),$$
$$u|_{y=0} = \psi_0(x), \quad u|_{y=b} = \psi_1(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a),$$

причем

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(b) = \psi_1(0),$$
$$\varphi_1(0) = \psi_0(a), \quad \varphi_1(b) = \psi_1(a).$$

Решить задачу для частного случая

$$\varphi_0(y) = Ay(b-y), \quad \psi_0(x) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad \varphi_1(y) = \psi_1(x) = 0.$$

181. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $OACB$, у которого вдоль стороны OB потенциал равен U, а три другие стороны заземлены. Электрические заряды внутри прямоугольника отсутствуют.

182. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике D: $0 < x < a$, $0 < y < b$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \; u(a, y) = \varphi_1(y) \; (0 \leqslant y \leqslant b),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_2(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_3(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Решить задачу для частного случая

$$\varphi_0(y) = A, \quad \varphi_1(y) = Ay, \quad \psi_2(x) = \psi_3(x) \equiv 0,$$
$$A = \text{const}.$$

183. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_2(y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant b),$$
$$u(x, 0) = \psi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_3(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a),$$

причем

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0).$$

184. Найти решение уравнения Лапласа в полуполосе $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y < \infty$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y)=0, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

$$u(x, \infty) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

185. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 с центром в начале координат. Рассмотреть также предельный случай, когда кольцо обращается в круг.

186. Найти решение уравнения Лапласа в круге $x^2 + y^2 < R^2$ при краевом условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \psi(\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

187. Найти решение уравнения Лапласа в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 с центром в начале координат, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1} = f_1(\theta), \quad u|_{r=R_2} = f_2(\theta).$$

188. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике D: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = A, \quad u(a, y) = Ay,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0.$$

189. Найти гармоническую функцию внутри кругового сектора $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, удовлетворяющую краевым условиям

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0,$$

$$u(R, \varphi) = A\varphi.$$

190. Найти гармоническую функцию внутри шара единичного радиуса с центром в начале координат, принимающую заданные значения $\varphi(\theta) = \cos^2\theta$ на поверхности этого шара.

191. Дана тонкая прямоугольная пластинка $OACB$ (рис 9). Через сторону OA тепло равномерно подводится, а через OB — равномерно отводится, а две другие стороны AC и BC покрыты тепловой изоляцией. Найти стационарную температуру внутренних точек пластинки.

192. Найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

в прямоугольнике D: $0\leqslant x\leqslant a$, $-\frac{b}{2}\leqslant y\leqslant +\frac{b}{2}$, если оно на контуре этой области обращается в нуль.

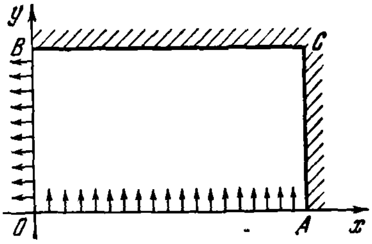

Рис. 9.

193. Найти форму равновесия однородной прямоугольной мембраны $OACB$, закрепленной по краям, если к мембране приложено нормальное давление P на единицу площади.

194. Две стороны AC и BC прямоугольной однородной пластинки $OACB$ покрыты тепловой изоляцией, а две другие поддерживаются при температуре, равной нулю. Найти стационарное распределение температуры при условии, что в пластинке выделяется тепло с плотностью $Q = \mathrm{const}$.

195. Найти стационарное распределение температуры в проводнике прямоугольного сечения, нагреваемом постоянным током, выделяющим в единице объема тепло Q (считать, что теплоотдача в среду нулевой температуры через поверхность проводника происходит по закону Ньютона).

196. Решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4$$

для круга радиуса a с центром в начале координат при краевом условии $u\,|_{r=a}=0$.

197. Найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-xy$$

в круге радиуса R с центром в точке (0, 0) при краевом условии

$$u|_{r=R} = 0.$$

198. Решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2)$$

в кольце $a \leqslant r \leqslant b$, если

$$u|_{r=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0.$$

Начало координат находится в центре кольца.

199. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y, z)$ внутри прямоугольного параллелепипеда с проводящими стенками, если его боковые грани и верхнее основание заземлены, а нижнее основание заряжено до потенциала V.

200. Цилиндр, радиус основания которого R и высота h, имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю, а температура верхнего основания есть определенная функция от r. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

201. Боковая поверхность цилиндра, радиус основания которого R и высота h, покрыта непроницаемым для тепла чехлом. Температура нижнего основания поддерживается постоянной и равной нулю, а температура верхнего основания есть определенная функция от r. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

202. Решить задачу 200, предполагая, что боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе, имеющем температуру, равную нулю.

203. Цилиндр, радиус основания которого R и высота h, имеет температуру обоих оснований равную нулю, а температура боковой поверхности представляет заданную функцию от z. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

204. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри полого цилиндра, радиус основания которого R, высота h, оба основания цилиндра заземлены, а боковая поверхность находится при потенциале V.

205. Решить задачу 203 в предположении, что основания цилиндра теплоизолированы.

206. Нижнее основание цилиндра радиуса R и высоты H поддерживается при постоянной температуре u_0. Боковая поверхность и верхнее основание цилиндра свободно охлаждаются воздухом, имеющим температуру, равную нулю. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

207. Верхнее основание цилиндра, установленного на теплоизолирующем основании, нагревается равномерно распределенным потоком тепла плотности q в направлении, параллельном оси цилиндра. Боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе, имеющем температуру, равную нулю. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре.

208. Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы, если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре u_0, а основание полусферы — при температуре, равной нулю.

209. Шар радиуса R нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q, падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Найти стационарное распределение температуры в шаре.

210. Найти решение уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

внутри сферы радиуса R, удовлетворяющее краевому условию

$$v\big|_{r=R} = f(\theta, \varphi).$$

211. Найти решение уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

в области D: $0 < a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha < \pi$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v\big|_{r=a} = v\big|_{r=b} = 0, \quad v\big|_{\theta=\alpha} = f(r)\, e^{im\varphi},$$

где m — целое положительное число.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

§ 1

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\quad \xi=x+y,\quad \eta=3x-y.$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,\quad \xi=2x-y,\quad \eta=x.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+(\alpha+\beta)\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+cu=0,\quad \xi=x+y,\ \eta=y.$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\dfrac{\eta-\xi}{32}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$

$$\xi=2x+\sin x+y,\quad \eta=2x-\sin x-y.$$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{\xi-\eta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{1}{2\eta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,\quad \xi=x^2-y^2,\ \eta=x^2.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\dfrac{2\xi}{\eta^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\quad \xi=y\sin x,\quad \eta=y.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\xi+\eta}{2}\,\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,$

$$\xi=x+y+\cos x,\quad \eta=x-y-\cos x.$$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\dfrac{1}{4\eta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+u=0,\quad \xi=xy,\quad \eta=\dfrac{x^3}{y}.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,\ \xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ \eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\dfrac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\quad \xi=y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2},\quad \eta=y.$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{1+\eta^2}\left(\xi\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\eta\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,\quad \xi=y\,\mathrm{ch}\,x,\quad \eta=\mathrm{sh}\,x.$

12. Уравнение $yu_{xx}+u_{yy}=0$ при $y>0$ принадлежит эллиптическому типу, а при $y<0$ — гиперболическому типу; $y=0$ — линия параболичности.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0, \quad \xi=x, \quad \eta=\frac{2}{3}y^{3/2} \qquad (y>0),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{1}{6(\eta-\xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2} \qquad (y<0).$$

Характеристиками уравнения являются полукубические параболы (рис. 10)

$$x-c=\pm\frac{2}{3}(-y)^{3/2};$$

ветви, направленные вправо, дают кривые $\xi=\mathrm{const}$, ветви, направленные влево, дают кривые $\eta=\mathrm{const}$ (на рис. 10 характеристики одного семейства изображены сплошными линиями, а характеристики второго — пунктиром).

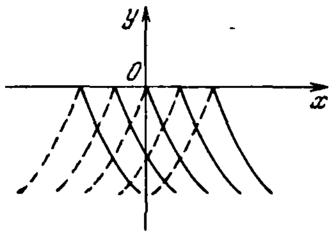

Рис. 10.

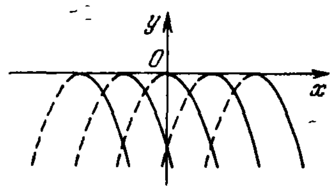

Рис. 11.

13. Уравнение $u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0$ при $y>0$ принадлежит эллиптическому типу, а при $y<0$ — гиперболическому типу; $y=0$ — линия параболичности.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2\alpha-1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0, \quad \xi=x, \quad \eta=2\sqrt{y} \quad (y>0),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}-\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{\xi-\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

$$\xi=x-2\sqrt{-y}, \quad \eta=x+2\sqrt{-y} \quad (y<0).$$

Характеристиками уравнения являются параболы (рис. 11)

$$y=-\frac{1}{4}(x-c)^2.$$

Кривые $\xi=\mathrm{const}$ — это ветви парабол, имеющие отрицательный наклон, кривые $\eta=\mathrm{const}$ — ветви, имеющие положительный наклон.

14. Уравнение $yu_{xx}+xu_{yy}=0$ в первом и третьем квадранте принадлежит эллиптическому типу, а во втором и четвертом квадранте — гиперболическому типу; оси координат — линии параболичности.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

$$\xi=x^{3/2},\quad \eta=y^{3/2}\quad (x>0,\ y>0);$$

$$\xi=(-x)^{3/2},\quad \eta=(-y)^{3/2}\quad (x<0,\quad y<0),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{\eta^2-\xi^2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$$

$$\xi=(-x)^{3/2}-y^{3/2},\quad \eta=(-x)^{3/2}+y^{3/2}\qquad (x<0,\quad y>0),$$

$$\xi=x^{3/2}-(-y)^{3/2},\quad \eta=x^{3/2}+(-y)^{3/2}\qquad (x>0,\quad y<0).$$

15.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

$$\xi=\sqrt{x},\qquad \eta=\sqrt{y}\qquad (x>0,\quad y>0),$$

$$\xi=\sqrt{-x},\ \eta=\sqrt{-y}\quad (x<0,\quad y<0).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

$$\xi=\sqrt{-x},\quad \eta=\sqrt{y}\qquad (x<0,\quad y>0),$$

$$\xi=\sqrt{x},\qquad \eta=\sqrt{-y}\quad (x>0,\quad y<0).$$

16. $b^2-ac=x^2+y^2-1$. Вне окружности $x^2+y^2=1$ уравнение принадлежит гиперболическому типу, внутри этой окружности — эллиптическому типу. Сама окружность является линией параболичности.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,\quad \xi=\frac{y}{x-1},\quad \eta=\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x-1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,\quad \xi=\frac{y}{x-1},\quad \eta=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-1}.$$

Указание. При интегрировании уравнения характеристик $(xy\pm\sqrt{x^2+y^2-1})\,dx+(1-x^2)dy=0$ ввести новые переменные $(z,\ t)$ по формулам $t^2=1-x^2$, $y=zt$.

17. $b^2-ac=1-x^2+y^2$. В области $1-x^2+y^2>0$ уравнение принадлежит гиперболическому типу, в области $1-x^2+y^2<0$ — эллиптическому типу. Кривая $x^2-y^2=1$ является линией параболичности.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,\quad \xi=\frac{y}{1+x},\quad \eta=\frac{\sqrt{1-x^2+y^2}}{1+x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,\quad \xi=\frac{y}{1+x},\quad \eta=\frac{\sqrt{x^2-y^2-1}}{1+x}$$

Указание. См. задачу 16.

18. $u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x)$.

19. $u(x, y) = \varphi(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

20. $u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\,\varphi(x, y) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

21. $u(x, y) = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

22. $u(x, y) = \frac{\varphi(x - y) + \psi(x + y)}{x}$.

Указание. Ввести новую функцию v, положив $v = xu$.

23. $u(x, y) = \frac{X(x) - Y(y)}{x - y}$, где $X(x)$ и $Y(y)$ — произвольные функции.

Указание. Ввести новую функцию v, положив $v = (x - y)u$.

24. $u(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}[\Psi_1(x) + \Psi_2(y)]$.

25. $u(x, y, z) = (z - y)\,\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$,

где φ и ψ — произвольные функции.

Указание. Ввести новые независимые переменные ξ, η и ζ по формулам

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = z - y.$$

26. $u(x, y, t) = \varphi(x + \sqrt{a_{11}}t, y + \sqrt{a_{22}}t) + \psi(x - \sqrt{a_{11}}t, y - \sqrt{a_{22}}t)$, где φ и ψ — произвольные функции.

27. $u(x, y) = (x - y)f_1(x + y) + (x + y)f_2(x - y) + f_3(x - y) + f_4(x + y)$,

где f_1, f_2, f_3 и f_4 — произвольные функции.

28. Если $b_1 = b_2 = 0$, то уравнение $L(u) = 0$ имеет два ф.-и. решения и его общее решение

$$u(x, y) = \psi_1(\alpha_1 x - y) + \psi_2(\alpha_2 x - y),$$

где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции, а α_1 и α_2 — корни уравнения

$$a_{11}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{22} = 0.$$

Если $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и, например, $\alpha_1 = b_2/b_1$, то уравнение $L(u) = 0$ имеет одно ф.-и. решение и его общее решение

$$u(x, y) = e^{\frac{a_{11}(\alpha_2 b_1 - b_2)(\alpha_1 x - y)}{4\delta}}\varphi(\alpha_2 x - y) + \varphi_2(\alpha_1 x - y),$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные функции.

В случае переменных коэффициентов уравнения $L(u) = 0$ см. статью Н. П. Еругина *).

29. Указание. Уравнение $L(u) + cu = 0$ привести к каноническому виду, а затем искать решение в виде $u = vw$. См. также *).

30. Указание. Применить метод последовательных приближений. См. также *).

31. В уравнении (а) вместо x вводим новую переменную

$$t = 2(2n+1)x,$$

тогда получим

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(2n+1)}{2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

Обозначим функцию, удовлетворяющую уравнению (1), через u_n. Для функции u_0 имеем

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = t\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$u_0 = F_1(\sqrt{t} - y) + F_2(\sqrt{t} + y), \tag{3}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

Если функция u_n известна, то функцию u_{n+1} можно получить простым дифференцированием. Действительно, дифференцируя уравнение (1) по t, получим для $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ уравнение

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) = t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) + \frac{2(n+1)+1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right),$$

совпадающее с уравнением (1) для функции u_{n+1}.

Таким образом,

$$u_{n+1}(t, y) = \frac{\partial u_n}{\partial t}.$$

Применяя эту формулу n раз к функции u_0 и возвращаясь к старой переменной x, получим искомое общее решение уравнения (а).

32. Обозначим через u_n решение уравнения (b). При $n = 0$ имеем

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

*) Еругин Н. П., Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, Ученые записки ЛГУ, сер. матем., в. 16, 1949.

Его общее решение

$$u_0(x,t)=\frac{\Phi(x-at)+\Psi(x+at)}{x},$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

Если решение u_n известно, то нетрудно проверить, что u_{n+1} определяется по формуле

$$u_{n+1}=x^n\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_n}{x^n}\right).$$

Применяя последнюю формулу n раз к функции $u_0(x, t)$, получим общее решение уравнения (b).

33. Указание. Продифференцировать уравнение

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$(m-1)$ раз по x и $(n-1)$ раз по y.

34.

$$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}\right],$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ — произвольные функции.

Указание. Ввести новую функцию v, положив

$$u=(x-y)^{-1}v.$$

35. Уравнение $E(\alpha, \beta)=0$ имеет частное решение вида $(a-x)^{-\alpha}(y-a)^{-\beta}$, где $a=\text{const}$.

$$u(x, y)=\int_x^y\varphi(z)(z-x)^{-\alpha}(y-z)^{-\beta}dz,$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция, будет также решением уравнения $E(\alpha, \beta)=0$.

Обозначим через $Z(\alpha, \beta)$ решение уравнения $E(\alpha, \beta)=0$. Тогда имеем

$$Z(\alpha, \beta)=(y-x)^{1-\alpha-\beta}Z(1-\beta,\ 1-\alpha). \qquad (4)$$

Функция

$$\int_x^y\psi(z)(z-x)^{\beta-1}(y-z)^{\alpha-1}dz,$$

где $\psi(z)$ — произвольная функция, является решением уравнения $E(1-\beta, 1-\alpha)=0$, и для уравнения $E(\alpha, \beta)=0$ в силу (4) получаем новое решение

$$(y-x)^{1-\alpha-\beta}\int_x^y\psi(z)(z-x)^{\beta-1}(y-z)^{\alpha-1}dz.$$

Общее решение уравнения $E(\alpha, \beta) = 0$:

$$u(x, y) = \int\limits_x^y \varphi(z)(z - x)^{-\alpha}(y - z)^{-\beta} dz +$$

$$+ (y - x)^{1-\alpha-\beta} \int\limits_x^y \psi(z)(z - x)^{\beta-1}(y - z)^{\alpha-1} dz.$$

Полагая $z = x(1 - t) + yt$, получим искомое решение уравнения $E(\alpha, \beta) = 0$.

36. Указание. Полагая в формуле (4) [см. выше, 35] $\alpha = \alpha' + m$, $\beta = \beta' + n$ и принимая во внимание равенство

$$Z(\alpha' + m, \beta' + n) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} Z(\alpha', \beta'),$$

получим

$$(y - x)^{1-m-n-\alpha'-\beta'} Z(1 - \beta' - n, 1 - \alpha' - m) = \frac{\partial^{m+n} Z(\alpha', \beta')}{\partial x^m \partial y^n}. \quad (5)$$

Применяя снова формулу (4), будем иметь

$$(y - x)^{1-m-n-\alpha'-\beta'} Z(1 - \beta' - n, 1 - \alpha' - m) =$$

$$= \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[\frac{Z(1 - \beta', 1 - \alpha')}{(y - x)^{\alpha'+\beta'-1}} \right].$$

Заменяя α', β', m, n соответственно на $1 - \beta'$, $1 - \alpha'$, n, m, получим

$$Z(\alpha' - m, \beta' - n) =$$

$$= (y - x)^{m+n+1-\alpha'-\beta'} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{Z(\alpha', \beta')}{(y - x)^{1-\alpha'-\beta'}} \right]. \quad (6)$$

Полагая $\alpha' = \beta' = 0$, получим

$$Z(-m, -n) = (y - x)^{m+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{X(x) - Y(y)}{x - y} \right].$$

37. Уравнение (*) в характеристических координатах

$$\xi = ax - \frac{y^{1-b}}{1 - b}, \quad \eta = ax + \frac{y^{1-b}}{1 - b}$$

можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} \pm \frac{k}{\eta - \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0,$$

затем воспользоваться общим решением, полученным соответственно в задачах 36 и 33.

38.

$$\text{а) } u(x, y) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[\frac{Z(\alpha+n, \beta+m)}{(y-x)^{1-\alpha-\beta-m-n}} \right],$$

где

$$Z(\alpha+n, \beta+m) =$$

$$= (y-x)^{1-\alpha-\beta-m-n} \int_0^1 \varphi[x+(y-x)t]\, t^{-\alpha-n} (1-t)^{-\beta-m}\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \psi[x+(y-x)t]\, t^{\beta+m-1} (1-t)^{\alpha+n-1}\, dt;$$

$$\text{б) } u(x, y) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{m+n+2} Z(-\beta-m, -\alpha-n)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}},$$

где

$$Z(-\beta-m, -\alpha-n) =$$

$$= (y-x)^{1+\alpha+\beta+m+n} \int_0^1 \varphi[x+(y-x)t]\, t^{\beta+m} (1-t)^{\alpha+n}\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \psi[x+(y-x)t]\, t^{-\alpha-n-1} (1-t)^{-\beta-m-1}\, dt.$$

Указание. а) В формуле (6) [см выше, 36] заменить α', β', m, n соответственно на $\alpha+n$, $\beta+m$, n, m.

б) В формуле (5) из 36 заменить α', β', m, n соответственно на $-(\beta+m)$, $-(\alpha+n)$, $m+1$, $n+1$.

39. Ищем решение уравнения $F(u) = 0$ в виде $u = \Phi(r)$, где

$$r = \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}.$$

Тогда для $\Phi(r)$ получим уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1+2a}{r} \frac{d\Phi}{dr} + b^2\Phi = 0,$$

одним из решений которого будет

$$u_1 = \Phi(r) = r^{-a} J_{-a}(br).$$

Воспользуемся теперь следующим свойством уравнения $F(u) = 0$: *если* $u(2a, x, y)$ — *решение этого уравнения, то решением его будет также функция* $y^{1-2a} u[2(1-a), x, y]$, и в качестве второго решения этого уравнения возьмем

$$u_2 = y^{1-2a} r^{a-1} J_{a-1}(br).$$

Непосредственной проверкой легко убеждаемся, что уравнению $F(u) = 0$ удовлетворяют также выражения

$$u_1(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \frac{\Psi(\xi)}{r^a} J_{-a}(br)\, d\xi,$$

$$u_2(x, y) = y^{1-2a} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\Phi(\xi)}{r^{1-a}} J_{a-1}(br)\, d\xi,$$

где Ψ и Φ — произвольные функции.

Составив сумму последних решений и вводя подстановку $\xi = x + y(2t - 1)$, а также используя обозначение

$$\bar{J}_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1-\nu) z^{\nu}}{2^{\nu}} J_{-\nu}(z),$$

получим общее решение уравнения $F(u) = 0$.

40.

$$u(x, y) = \int_0^1 \Psi\left[x + \frac{2}{2+m} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] t^{q-1}(1-t)^{q-1}\, dt +$$

$$+\left(\frac{4}{m+2}\right)^{1-2q} y^{1-p} \int_0^1 \Phi\left[x + \frac{2}{2+m} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] t^{-q}(1-t)^{-q}\, dt,$$

где $q = (m + 2p)/2\,(m + 2)$, Ψ и Φ — произвольные функции.

Указание. Привести уравнение к каноническому виду и воспользоваться общим решением задачи 35.

41. а) $u(x, t) = \sqrt{x} F_1(\ln x - t)$,

б) $u(x, t) = e^{-x} F_2(x^2 - t)$,

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(x, t) = \Phi(x) F[\omega(x) - t].$$

42. а) $u(x, y, t) = \dfrac{\operatorname{ch} \sqrt{c}\rho}{\rho}$,

где $\rho = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$,

б) $u(x, y, z, t) = \dfrac{J_0(\sqrt{-c}\rho)}{\rho^2} + \dfrac{\sqrt{-c} J_0'(\sqrt{-c}\rho)}{\rho} \ln \rho + R$,

где $\rho = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}$, R — регулярная функция.

Указание. Следует искать решение, зависящее только от ρ.

43. $u(x, y) = 3x^2 + y^2$.

Указание. Следует воспользоваться общим решением

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(3x - y)$$

данного уравнения.

44. $u(x, y) = \varphi_0\left(x - \frac{2}{3}y^3\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \varphi_1(x)\,dx.$

45. $u(x, y) =$

$$= \frac{\varphi_0\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}\right) + \varphi_0\left(\frac{\beta^2 - 1}{2\beta}\right)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{z}\varphi_1\left(\frac{z^2 - 1}{2z}\right)dz,$$

где $\alpha = (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2})$, $\beta = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{y + \sqrt{1 + y^2}}$.

46. $u(x, y) = \frac{\varphi_0(x - \sin x + y) + \varphi_0(x + \sin x - y)}{2} +$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y} \varphi_1(z)\,dz.$$

47. $u(x, y) = f(x + y) +$

$$+ \frac{5}{6}e^{-\frac{x+y}{6}}\left[\int\limits_{x+y}^{x-\frac{y}{5}} e^{\frac{z}{6}} f'(z)\,dz - \int\limits_{x+y}^{x-\frac{y}{5}} e^{\frac{z}{6}} F(z)\,dz\right].$$

48. $u(x, y) = \frac{3}{4}\varphi_0(x\sqrt[3]{y}) + \frac{1}{4}y\varphi_0\left(\frac{x}{y}\right) +$

$$+ \frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}} \varphi_0(x)\,x^{-\frac{7}{4}}\,dx - \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}} \varphi_1(x)\,x^{-\frac{7}{4}}\,dx.$$

49. Указание. Следует воспользоваться общим решением

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \psi(x + at)}{h - x}$$

данного уравнения.

50. $u(r, t) =$

$$= \frac{(r - at)\varphi(r - at) + (r + at)\varphi(r + at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} \rho\psi(\rho)\,d\rho.$$

Указание. Ввести сферические координаты.

Решение u, очевидно, не зависит от угловых координат, и потому волновое уравнение приводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Общее решение этого уравнения будет

$$u(r, t) = \frac{\Theta_1(r - at) + \Theta_2(r + at)}{r},$$

где Θ_1 и Θ_2 — произвольные функции.

51. $u(x, y) =$

$$= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\,y\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt,$$

где $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, $\quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt$ для $s > 0$.

Указание. Привести уравнение к каноническому виду и воспользоваться общим решением задачи 35.

52. $u(x, y) = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\,y\,\times$

$$\times\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\,dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt,$$

где

$$\alpha = \frac{m-2a}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)}, \quad |a| < \frac{m}{2}.$$

В случае $a = m/2$

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{2y}{m+2}\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\,dt.$$

В случае же $a = -m/2$

$$u(x, y) = \tau\left(x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] (1-t)^{-\frac{m}{m+2}} dt.$$

Указание. Привести уравнение к каноническому виду и воспользоваться общим решением, полученным в задаче 35.

53. $$u(x, y) = \frac{\tau(x - 2\sqrt{-y}) + \tau(x + 2\sqrt{-y})}{2} \quad (y < 0).$$

Указание. Следует воспользоваться общим решением

$$u(x, y) = \Theta_1(x - 2\sqrt{-y}) + \Theta_2(x + 2\sqrt{-y})$$

исходного уравнения.

54. При $m/2 < \alpha < 1$

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2-2\beta)\, y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\,\Gamma^2(1-\beta)} \times$$

$$\times \int_0^1 \nu_1\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta}\, dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt;$$

При $m - 1 < \alpha < m/2$

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(-2\beta)\, y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\,\Gamma^2(-\beta)} \times$$

$$\times \int_0^1 \nu_1\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] t^{-\beta-1} (1-t)^{-\beta-1}\, dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] t^{\beta} (1-t)^{\beta}\, dt -$$

$$- \frac{2\Gamma(1+2\beta)}{(2-m)\,\Gamma^2(1+\beta)} y^{\frac{2-m}{2}} \int_0^1 \tau'\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] \times$$

$$\times t^{\beta} (1-t)^{\beta} (1-2t)\, dt,$$

где $\beta = \dfrac{2\alpha - m}{2(2-m)}$.

При $\alpha = m/2$

$$u(x, y) = \frac{\tau(\xi) + \tau(\eta)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} \nu_1(t)\,dt,$$

где

$$\xi = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}},$$

$$\eta = x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}.$$

Указание. Привести уравнение к каноническому виду и воспользоваться общим решением, полученным в задачах 35 и 52.

55. $u(x, y) =$

$$= \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma^2(q)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{2+m}{2}} (2t-1)\right] t^{q-1}(1-t)^{q-1} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2q)\, y^{1-p}}{(1-p)\,\Gamma^2(1-q)} \int_0^1 \nu_1\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{2+m}{2}} (2t-1)\right] \times$$

$$\times t^{-q}(1-t)^{-q}\,dt.$$

Указание. См. задачу 40.

56. $u(x, y) =$

$$= \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau[x + y(2t+1)]}{[t(1-t)]^{1-a}} \bar{J}_{a-1}(2by\sqrt{t(1-t)})\,dt +$$

$$+ \gamma_2 y^{1-2a} \int_0^1 \frac{\nu[x + y(2t-1)]}{[t(1-t)]^{a}} \bar{J}_{-a}(2by\sqrt{t(1-t)})\,dt,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)},$$

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2a)}{(1-2a)\,\Gamma^2(1-a)}.$$

Указание. См. задачу 39.

57. $$v(x, y) = \int_0^x \psi_1(t) F(y(x - t))\,dt +$$

$$+ \int_0^y \psi_2(t) F(x(y-t))\,dt + \varphi(0) F(xy),$$

где

$$\psi_1(x)-\psi_2(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]\,F(\tau(\tau-x))\,d\tau,$$

$$F(z)=J_0(2i\sqrt{z}),$$

$$\psi_1(x)+\psi_2(x)=\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)-x\int_0^x\varphi(\tau)F'(\tau(\tau-x))\,d\tau\right].$$

Указание. Следует воспользоваться общим решением задачи 30. (См. также статью Н П. Еругина*).)

58. $u(x, y, t)=f(x-\sqrt{a_{11}}t,\ y-\sqrt{a_{22}}t)+$

$$+\frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\int_{x-\sqrt{a_{11}}t}^{x+\sqrt{a_{11}}t}[\sqrt{a_{11}}f_x'(x, y)+\sqrt{a_{22}}f_y'(x, y)+F(x, y)]\,dx.$$

При интегрировании нужно считать

$$y=\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,x-\frac{c_1}{\sqrt{a_{11}}}.$$

Указание. См. задачу 26.

$$u(x, y, t)=x^2+y^2+(a_{11}+a_{22})t^2.$$

59. $$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi}\iint_{C_t}\frac{\varphi_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{\frac{4}{(2-m)^2}t^{2-m}-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+t^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\iint_{C_t}\frac{\varphi_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{\frac{4}{(2-m)^2}t^{2-m}-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right],$$

где C_t — круг с центром (x, y) и радиусом $\frac{2}{2-m}\,t^{\frac{2-m}{2}}$

60. $8u(x, y)=4[\tau(x+y)+\tau(x-y)]-$
$-2y[\tau'(x+y)-\tau'(x-y)]-2y[\nu(x+y)+\nu(x-y)]+$

$$+6\int_{x-y}^{x+y}\nu(t)\,dt+2y\int_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)\,dt-\int_{x-y}^{x+y}[(x-t)^2-y^2]\,\nu_2(t)\,dt.$$

Указание. См. задачу 27.

61. $u(x, t)=\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)-\varphi(0).$

---

*) См. примечание на стр. 52.

Указание. Следует воспользоваться общим решением

$$u(x, t) = \Theta_1(x-t) + \Theta_2(x+t).$$

62. $$u(x, t) = \varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0).$$

63. $$u(x, y) = \varphi_1\left(\frac{x+2\sqrt{-y}}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{x-2\sqrt{-y}+1}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right).$$

Указание. Следует воспользоваться общим решением $u(x, y) = \Theta_1(x - 2\sqrt{-y}) + \Theta_2(x + 2\sqrt{-y}) \quad (y < 0)$.

64. $$u(x, y) = \varphi_1(x - 2\sqrt{-y}) - \varphi_2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{-y}\right) + \varphi_2\left(\frac{x}{2} + \sqrt{-y}\right).$$

Указание. См. указание к задаче 63.

65. $$u(x, y) = f_1\left[\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2\right] + f_2\left[\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+1}{2}\right)^2\right] - f_1\left(\frac{1}{4}\right).$$

Указание. Следует воспользоваться общим решением $u(x, y) = \varphi(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ исходного уравнения.

66. $$u(x, y) = \tau[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2] + f_2\left[\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+1}{2}\right)^2\right] - f_2\left[\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+1}{2}\right)^2\right].$$

67. $$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi\left[\frac{f_1(x-t) + f(f_1(x-t))}{2}\right] + \psi(f_1(x-t)),$$

где $z = x - f(x)$, откуда $x = f_1(z)$.

Частный случай:

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi\left[\frac{(1+k)(x-t)}{2(1-k)}\right] + \psi\left(\frac{x-t}{1-k}\right).$$

Указание. Проинтегрировать данное уравнение при условиях

$$u(x, t) = \varphi(x) \quad \text{на характеристике } x - t = 0,$$

$$u(x, t) = \psi(x) \quad \text{на кривой } L\text{: } t = f(x),$$

причем

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

68. Решение

$$u_1(x, t) = \frac{\varphi_0(x-t)+\varphi_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \varphi_1(z)\,dz$$

удовлетворяет начальным условиям.

На характеристике $x - t = 0$ оно принимает значение

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(0)+\varphi_0(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x} \varphi_1(z)\,dz.$$

Решение

$$u_2(x,t) = \psi\left(\frac{x-t}{1-k}\right) +$$
$$+ \frac{\varphi_0(x+t) - \varphi_0\left(\frac{1+k}{1-k}(x-t)\right)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1+k}{1-k}(x-t)}^{x+t} \varphi_1(z)\,dz$$

на прямой $t = kx$ обращается в $\psi(x)$, на характеристике $x - t = 0$ равняется $\varphi(x)$.

Для того чтобы на характеристике $x - t = 0$ совпадали не только сами решения u_1 и u_2, но и их частные производные первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n},$$

где n — нормаль к характеристике $x - t = 0$.

Это будет иметь место, если данные задачи удовлетворяют дополнительному условию

$$(k+3)\varphi_0'(0) + 2k\varphi_1(0) = 2\psi'(0).$$

69. $$u(x, y) = \psi\left(\frac{x}{2} + \frac{y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) +$$
$$+ \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\,dt -$$
$$- \frac{2}{m+2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\left(x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{2}{m+2}} \times$$
$$\times \int\limits_0^1 \nu\left(tx + \frac{2t}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)(1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\,dt.$$

Указание. См. задачу 52.

70. Функция

$$u(x, y) = \varphi\left(x + \frac{2}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}\right) - \varphi(1)$$

является решением однородной задачи Коши — Гурса.

71. При t, лежащем внутри интервалов $\left(0, \frac{r-R}{a}\right)$ и $\left(\frac{r+R}{a}, \infty\right)$ конденсация равна нулю.

При $\frac{r-R}{a} < t < \frac{r+R}{a}$ конденсация

$$S = \frac{S_0(r - at)}{2r}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)$$

при начальных условиях

$$S\,\Big|_{t=0} = \begin{cases} S_0 & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R, \end{cases} \qquad \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Воспользоваться также указанием к задаче 50.

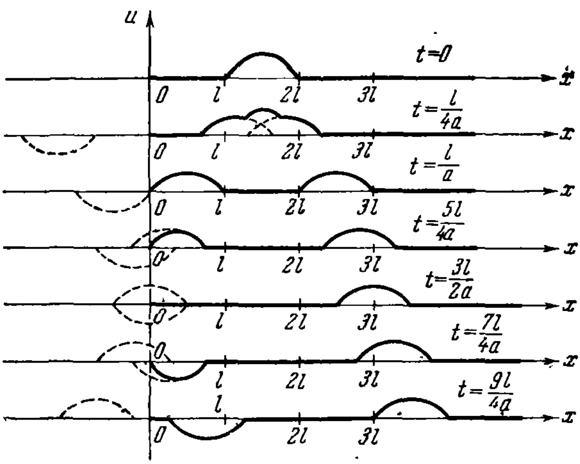

Рис. 12.

72. Форма струны в моменты времени

$$t = \frac{l}{4a},\ \frac{l}{a},\ \frac{5l}{4a},\ \frac{3l}{2a},\ \frac{7l}{4a},\ \frac{9l}{4a}$$

изображена на рис. 12.

73. $u(x, t) = \psi(x + at) - \psi(x - at)$,
где

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } -\infty < z < -c - \dfrac{h}{2}, \\ -\dfrac{hv_0}{2a\pi}\left(\sin\dfrac{\pi(z-c)}{h} + \cos\dfrac{2\pi c}{h}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } -c - \dfrac{h}{2} < z < -c + \dfrac{h}{2}, \\ -\dfrac{hv_0}{a\pi}\cos\dfrac{2\pi c}{h} \quad \text{при } -c + \dfrac{h}{2} < z < c - \dfrac{h}{2}, \\ -\dfrac{hv_0}{a\pi}\cos\dfrac{2\pi c}{h} + \dfrac{v_0 h}{2a\pi}\left(1 + \sin\dfrac{\pi(z-c)}{h}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } c - \dfrac{h}{2} < z < c + \dfrac{h}{2}, \\ \dfrac{2hv_0}{a\pi}\sin^2\dfrac{\pi c}{h} \quad \text{при } c + \dfrac{h}{2} < z < \infty. \end{cases}$$

74. Указание. Применить метод характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при краевом условии $u|_{x=0} = A \sin \omega t$ и при нулевых начальных условиях для положительных x.

75.

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{aMv_0}{\gamma p_0 S}\left[1 - e^{\frac{\gamma p_0 S}{Ma^2}(x-at)}\right] & \text{при } x - at < 0, \\ 0 & \text{при } x - at > 0, \end{cases}$$

где p_0 — начальное давление газа, S — площадь поперечного сечения трубки, $\gamma = c_p/c_v$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x > 0)$$

при условиях

$$M\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} = S\gamma p_0 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x},$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (x \geqslant 0), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (x > 0), \qquad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} = v_0.$$

76. Вследствие симметрии можно ограничиться рассмотрением струны при $x \geqslant 0$ и применить метод характеристик

к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad (x \geqslant 0)$$

при краевом условии

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} = 2T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

и начальных условиях

$$u_1(x, 0) = 0\ (x \geqslant 0), \qquad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = 0 \qquad (x > 0),$$

$$\frac{\partial u_1(0, 0)}{\partial t} = v_0.$$

78. Указание. Применить метод характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{E}{\rho}$$

(E — модуль Юнга, ρ — объемная плотность стержня), при краевых условиях

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0 \qquad (t > 0)$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (0 < x < l).$$

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ продолжаются из промежутка $(0, l)$ в промежуток $(l, 2l)$ по формулам

$$\varphi_0(x + l) = \varphi_0(l - x), \quad \varphi_1(x + l) = \varphi_1(l - x).$$

Далее они продолжаются из промежутка $(0, 2l)$ в промежуток $(-2l, 0)$ по закону нечетности, а затем — с периодом $4l$.

79. $$u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$$

$$(-\infty < x < 0,\ t > 0),$$

$$u_2(x, t) = \frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right) \quad (0 < x < \infty,\ t > 0),$$

где $f(x) = 0$ при $x < 0$.

При $E_1\rho_1 = E_2\rho_2$ отраженная волна отсутствует.

Указание. Задача приводится к решению уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < 0,\ t > 0),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \infty,\ t > 0)$$

при условиях

$$u_1(0,t)=u_2(0,t); \qquad E_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=E_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} \qquad (t\geqslant 0);$$

$$u_1(x,0)=f\left(-\frac{x}{a_1}\right); \qquad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=f'\left(-\frac{x}{a_1}\right) \qquad (-\infty<x<0);$$

$$u_2(x,0)=0; \qquad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=0 \qquad (0<x<\infty).$$

80. Для первого цилиндра $\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}$ периодическая функция периода $T=4l/a$:

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=\begin{cases} v_1 & \text{при} \quad 0<t<\dfrac{l-x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}(v_1+v_2) & \text{при} \quad \dfrac{l-x}{a}<t<\dfrac{l+x}{a}, \\ v_2 & \text{при} \quad \dfrac{l+x}{a}<t<\dfrac{3l-x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}(v_1+v_2) & \text{при} \quad \dfrac{3l-x}{a}<t<\dfrac{3l+x}{a}. \end{cases}$$

Для второго цилиндра

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=\begin{cases} v_2 & \text{при} \quad 0<t<\dfrac{2l-x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}(v_1+v_2) & \text{при} \quad \dfrac{x-l}{a}<t<\dfrac{3l-x}{a}, \\ v_1 & \text{при} \quad \dfrac{3l-x}{a}<t<\dfrac{l+x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}(v_1+v_2) & \text{при} \quad \dfrac{l+x}{a}<t<\dfrac{5l-x}{a}, \end{cases}$$

где $u_1(x,t)$ — продольное смещение сечения первого цилиндра, $u_2(x,t)$ — второго цилиндра.

При $t>2l/a$ становится положительным $\partial u(l,t)/\partial x$ и процесс удара оканчивается. В этот момент цилиндры, как видно из приведенных формул, обменялись скоростями.

У к а з а н и е. Проинтегрировать уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (0<x<l), \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (l<x<2l)$$

при краевых условиях

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u_2(2l,t)}{\partial x}=0,$$

$$u_1(l,t)=u_2(l,t), \qquad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}=\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}$$

и начальных условиях

$$u_1(x,\ 0)=0,\quad \frac{\partial u_1(x,\ 0)}{\partial t}=v_1\qquad (0\leqslant x\leqslant l),$$

$$u_2(x,\ 0)=0,\quad \frac{\partial u_2(x,\ 0)}{\partial t}=v_2\qquad (l\leqslant x\leqslant 2l).$$

81. Решением задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad u(0,\ t)=0\qquad (t\geqslant 0),$$

$$ml\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-a^2\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l},\tag{7}$$

где $m=\dfrac{M}{\sigma l\rho}$, σ — площадь поперечного сечения стержня,

$$u(x,\ 0)=0\quad (0\leqslant x\leqslant l),$$

$\dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0\quad (0\leqslant x<l),\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}=-v$ при $t=0$ и $x=l$ является

$$u(x,\ t)=\varphi(at-x)-\varphi(at+x),$$

где

$$\varphi(z)=0\quad (-l<z<l),$$

$$\varphi(z)=\frac{mlv}{a}\left(1-e^{-\frac{z-l}{ml}}\right)\qquad (l<z<3l),$$

$$\varphi(z)=-\frac{mlv}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}}+\frac{mlv}{a}\left[1+\frac{2}{ml}(z-3l)\right]e^{-\frac{z-3l}{ml}}\qquad (3l<z<5l)$$

и т. д.

Уравнение для продолжения функции $\varphi(z)$ вне интервала $(-l,\ l)$ имеет вид

$$\varphi''(z)+\frac{1}{ml}\varphi'(z)=\varphi''(z-2l)-\frac{1}{ml}\varphi'(z-2l)\qquad (l<z<\infty).$$

При определении функции $\varphi(z)$ в интервалах $(3l,\ 5l)$, $(5l,\ 7l)$, ... нужно принимать во внимание непрерывность $u(x,\ t)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ при $x=l$ в моменты времени $t=2l/a$, $4l/a$ и т. д.

При решении задачи мы считали, что стержень как будто соединяется с ударяющим телом, так что условие (7) выполняется для любого момента времени $t>0$. Но если тело отделяется от стержня, то полученное решение пригодно только на тот промежуток времени, пока $u_x(l,\ t)<0$. Когда же в этом решении $u_x(x,\ t)$ в точке $x=l$ становится положительным, соударение оканчивается.

При $0 < t < \frac{2l}{a}$ $u_x(l, t) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0$ и соударение не может закончиться.

При $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$

$$u_x(l, t) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left(1 - \frac{at - 2l}{ml}\right)\right]$$

и $u_x(l, t)$ становится положительным, когда

$$\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{-m/2}.$$

Последнее уравнение может иметь в интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ корень при условии, что $2 + e^{-\frac{m}{2}} < 4/m$. Уравнение

$$2 + e^{-\frac{m}{2}} = 4/m$$

имеет корень $m = 1{,}73\ldots$

Если $m < 1{,}73\ldots$, соударение прекращается в момент времени t, который лежит в интервале $(2l/a,\ 4l/a)$ и определяется по формуле

$$t = \frac{l}{a}\left(2 + m + \frac{1}{2} m e^{-2/m}\right).$$

Если $m > 1{,}73\ldots$, то можно таким же способом проверить, заканчивается ли соударение в момент времени t в интервале $(4l/a,\ 6l/a)$.

82. $u(x, t) = \varphi(at - x) + \varphi(at + x)$, где

$\varphi(z) = 0 \quad (-l < z < l)$,

$\varphi(z) = -\frac{mlv}{a}\left(1 - e^{-\frac{z-l}{ml}}\right) \quad (l < z < 3l)$,

$$\varphi(z) = -\frac{mlv}{a}\left(2 - e^{-\frac{z-l}{ml}}\right) + \frac{mlv}{a}\left[1 + \frac{2}{ml}(z - 3l)\right] e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (3l < z < 5l)$$

и т. д.

Уравнение для продолжения функции $\varphi(z)$ вне интервала $(-l, l)$ имеет вид

$$\varphi''(z) + \frac{1}{ml}\varphi'(z) = -\varphi''(z - 2l) + \frac{1}{ml}\varphi'(z - 2l) \quad (l < z < \infty).$$

При $0 < t < \frac{2l}{a}$ $u_x(l, t) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0$ и соударение не может закончиться.

Непосредственно после момента времени $t = 2l/a$

$$u_x\left(l, \frac{2l}{a} + 0\right) = \frac{v}{a}(2 - e^{-2/m}) > 0.$$

Таким образом, соударение прекращается в момент времени $t = 2l/a$.

Указание. Первое из краевых условий в задаче 81 надо заменить на следующее:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \qquad (0 < t < \infty).$$

83. $u(x, t) = \frac{gx(2l - x)}{2a^2} + \varphi(at - x) - \varphi(at + x)$,

где

$$\varphi(z) = 0 \quad (-l < z < l),$$

$$\varphi(z) = -\frac{gm^2l^2}{a^2}\left(\frac{z - l}{ml} - 1 + e^{-\frac{z-l}{ml}}\right) \qquad (l < z < 3l).$$

Уравнение для продолжения функции $\varphi(z)$ вне интервала $(-l, l)$ имеет вид

$$\varphi''(z) + \frac{1}{ml}\varphi'(z) = \varphi''(z - 2l) - \frac{1}{ml}\varphi'(z - 2l) - \frac{g}{a^2}$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l} = g - \frac{a^2}{ml} \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} \qquad (t \geqslant 0),$$

$$u(x, 0) = \frac{gx(2l - x)}{2a^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

g — ускорение силы тяжести, $m = M/\rho\sigma l$.

84. $T(x, y) = e^{-ay-bx} \times$

$$\times \left[b \int_0^x e^{bt} J_0(2i\sqrt{aby(x - t)})\,dt + J_0(2i\sqrt{abxy})\right],$$

$$\theta(x, y) = -ie^{-ay-bx}\left[b^2 \int_0^x e^{bt} J_1(2i\sqrt{aby(x - t)}) \times\right.$$

$$\left.\times \frac{x - t}{\sqrt{aby(x - t)}}\,dt + \frac{bxJ_0(2i\sqrt{abxy})}{\sqrt{abxy}}\right].$$

Указание. Исключая $\theta(x, y)$ из системы уравнений, получим для $T(x, y)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial T}{\partial x} + b\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

при условиях

$$T\big|_{x=0} = e^{-ay}, \quad T\big|_{y=0} = 1.$$

Полагая

$$T(x, y) = e^{-ay-bx}u, \qquad \xi = ax, \quad \eta = by,$$

будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = u, \quad u\big|_{\xi=0} = 1, \quad u\big|_{\eta=0} = e^{\frac{b}{a}\xi}.$$

Далее следует воспользоваться общим решением задачи 30.

85. $u(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) - \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right)$,

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho}\left[\varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right)\right],$$

где $\varphi(x) \equiv 0$ в $(-l/a,\ l/a)$,

$$\varphi\left(t + \frac{l}{a}\right) = \frac{\rho[\alpha(t) - 1]}{1 + \beta\rho\alpha(t)} + \frac{\beta\rho\alpha(t) - 1}{\beta\rho\alpha(t) + 1}\varphi\left(t - \frac{l}{a}\right).$$

Указание. Систему уравнений свести к одному уравнению второго порядка.

§ 3

86. $$u(x, t) = \frac{1536}{5\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

87. $$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^3},$$

где $h = u(l/2,\ 0)$.

Указание. Применить метод Фурье к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

88. $$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}.$$

Указание. Первое из начальных условий в задаче 87 следует заменить условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \dfrac{h(x-l)}{c-l}, & \text{если } c \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

89. а) $u(x, t) =$

$$= \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\frac{n\pi^2}{2hl} \sin\frac{n\pi at}{l} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

б) $$u(x,t) = \frac{4hv_0}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi^2}{2hl}}{n\left(h^2 - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)} \sin\frac{n\pi at}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

90 $u(x, t) =$

$$= \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{hx}{l}, \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

91. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \cos a\lambda_n t,$$

$$X_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n c} & (0 \leqslant x < c), \\ \dfrac{\sin\lambda_n (l-x)}{\sin\lambda_n (l-c)} & (c < x \leqslant l), \end{cases}$$

где λ_n — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda c + \operatorname{ctg}\lambda(l-c) = M\lambda/\rho.$$

Собственные функции $X_n(x)$ ортогональны в интервале $(0, l)$ с нагрузкой

$$\rho\int_0^l X_m(x) X_n(x)\,dx + M X_m(c) X_n(c) = 0 \qquad (m \neq n),$$

квадрат нормы собственной функции равен

$$\| X_n \|^2 = \rho \int_0^l X_n^2(x)\,dx + M X_n^2(c) =$$

$$= \frac{\rho c}{2\sin^2 \lambda c} + \frac{\rho(l-c)}{2\sin^2 \lambda(l-c)} + \frac{M}{2},$$

$$a_n = \frac{\rho \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx + M\varphi(c) X_n(c)}{\| X_n \|^2} = \frac{\rho h l}{\lambda_n^2 c(l-c)\| X_n \|^2}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < c), \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (c < x < l)$$

при условиях $u_1(0, t) = 0$, $u_2(l, t) = 0$, $u_1(c, t) = u_2(c, t)$,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=c} = \frac{M}{T}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=c} = \frac{M}{T}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=c},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} h\dfrac{x}{c} & (0 \leqslant x \leqslant c), \\ h\dfrac{l-x}{l-c} & (c \leqslant x \leqslant l). \end{cases} \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

92. $u(x, t) =$

$$= \frac{8vl}{a\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

Указание. Начальные условия в задаче 90 следует заменить условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v.$$

93. $$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + b_n \sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)a\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}\, dx.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \qquad (t > 0);$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

где u — смещение сечения с абсциссой x, l — длина стержня, ρ — объемная плотность, а E — модуль Юнга.

94. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n a t}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n a t}{l} \right) \cos \frac{\mu_n x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \frac{\mu_n^2 + \beta^2}{\mu_n^2 + \beta^2 + \beta} \int_0^l \varphi_0(x) \cos \frac{\mu_n x}{l}\, dx,$$

$$b_n = \frac{2(\mu_n^2 + \beta^2)}{a\mu_n(\mu_n^2 + \beta^2 + \beta)} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{\mu_n x}{l}\, dx,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \beta \qquad (\beta = hl).$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right|_{x=l} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad h = \frac{k}{E\sigma},$$

где k — коэффициент, характеризующий жесткость закрепления.

95. $u(x, t) =$

$$= \frac{8Ql}{E\sigma\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2},$$

σ — площадь поперечного сечения стержня.

Указание. В задаче 93 положить $f(x) = Qx/E\sigma$, $F(x) = 0$.

96. $$u(x, t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l [\varphi_0(x) + t\varphi_1(x)]\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l \varphi_1(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \qquad (0 < x < l).$$

97. Указание. Проинтегрировать уравнение задачи 96 при условиях

$$\frac{\partial u(-l, t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0;$$

$$u(x, 0) = -\varepsilon x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

98. $$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\mu_n at}{l} + b_n\sin\frac{\mu_n at}{l}\right)\sin\frac{\mu_n x}{l},$$

$$a_n = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n}\int\limits_0^l \varphi_0'(x)\cos\frac{\mu_n x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{4l}{a\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)}\int\limits_0^l \varphi'(x)\cos\frac{\mu_n x}{l}\,dx,$$

где μ_1 μ_2, μ_3, ... — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu\,\mathrm{tg}\,\mu = \gamma \qquad \left(\gamma = I\,\frac{k}{k_1}\right).$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad a=\sqrt{\frac{GI}{k}},$$

при условиях

$$\theta(0, t)=0, \quad \frac{\partial^2\theta(l, t)}{\partial t^2}=-c^2\frac{\partial\theta(l, t)}{\partial x}, \quad c=\sqrt{\frac{GI}{k_1}};$$

$$\theta(x, 0)=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t}=\varphi_1(x) \quad (0<x<l),$$

где θ — угол поворота сечения с абсциссой x, G — модуль сдвига, I — полярный момент инерции поперечного сечения, k — момент инерции части стержня, имеющей единицу длины и k_1 — момент инерции диска относительно оси вала.

99. $$u(x, t)=\frac{Ql}{E\sigma}\left[\frac{x}{l}-2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{\beta_n at}{l}\right)\sin\frac{\beta_n x}{l}}{\beta_n^2\sin\beta_n(\alpha+\alpha^2+\beta_n^2)}\right],$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\beta \operatorname{tg}\beta=\alpha \qquad (\alpha=\sigma\rho l/m).$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t)=0, \quad m\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}=-E\sigma\frac{\partial u(l, t)}{\partial x};$$

$$u(x, 0)=\frac{Qx}{E\sigma}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=0$$

100. $$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\mu_n at}{l}+b_n\sin\frac{\mu_n at}{l}\right)X_n(x),$$

где

$$a_n=\frac{\int_0^l \varphi_0(x)X_n(x)\,dx}{\int_0^l X_n^2(x)\,dx},$$

$$b_n=\frac{l}{\mu_n a}\cdot\frac{\int_0^l \varphi_1(x)X_n(x)\,dx}{\int_0^l X_n^2(x)\,dx},$$

$$X_n(x)=\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{2h_1 l}{T_0\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l},$$

а $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \alpha\left(\frac{\mu}{l} - \frac{4h_1h_2l}{T_0^2\mu}\right),$$

где

$$\alpha = \frac{T_0}{2(h_1+h_2)}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2h_1}{T_0}u\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2h_2}{T_0}u\right|_{x=l} = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x),$$

где h_1 и h_2 — постоянные положительные величины.

101. $$u(x, t) = e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos q_nt + b_n\sin q_nt)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$q_n = \sqrt{\frac{n^2a^2\pi^2}{l^2} - h^2},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{h}{q_n}a_n + \frac{2}{lq_n}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Указание. Применить метод разделения переменных к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где h — малое положительное число, при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x).$$

102. $$u(x,t)=\frac{A\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\sin\frac{\omega}{a}l}+$$

$$+\frac{2A\omega a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при условиях

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=A\sin\omega t;$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Решение задачи следует искать в виде суммы $u=v+w$, где w — решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$w(0,t)=0,\quad w(l,t)=A\sin\omega t,$$

а v — решение уравнения (1) при условиях

$$v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0;$$

$$v(x,0)=-w(x,0),\quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=-\frac{\partial w(x,0)}{\partial t}.$$

103. $u(x,t)=$

$$=\frac{Q}{E}x-\frac{8Ql}{\pi^2E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{Q}{E};$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

См. также указание к задаче 102.

104. $$u(x, t) = \frac{aA}{E\sigma\omega} \frac{\sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t}{\cos \frac{\omega l}{a}} +$$
$$+ \frac{2a\omega A}{E\sigma l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{k_n} \cdot \frac{\sin k_n x}{\omega^2 - k_n^2 a^2} \sin ak_n t,$$

где $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$, причем $\omega \neq ak_n$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{A}{E\sigma} \sin \omega t;$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

См также указание к задаче 102.

105. $$u(x, t) = \frac{gx(2l - x)}{2a^2} -$$
$$- \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \qquad \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \tag{2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0;$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Решение задачи следует искать в виде суммы $u = v + w$, где v есть решение неоднородного уравнения (2) удовлетворяющее краевым условиям

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = 0$$

(причем v следует искать в виде $Ax^2 + Bx + C$), а w есть решение однородного уравнения при условиях

$$w(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0;$$

$$w(x, 0) = -v(x, 0), \qquad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t}.$$

106. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad \omega_n = \frac{an\pi}{l}.$$

Резонанс возникает в том случае, когда частота ω внешней возмущающей силы совпадает с одной из частот

$$\omega_{n_1} = \frac{an_1\pi}{l}$$

собственных гармонических колебаний закрепленной струны.

В случае резонанса решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{f_{n_1}}{2\omega_{n_1}^2} (\sin \omega_{n_1} t - t\omega_{n_1} \cos \omega_{n_1} t) \sin \frac{n_1 \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} + {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где знак штриха указывает, что при суммировании нужно пропустить член с $n = n_1$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \sin \omega t$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

107. $$u(x, t) = \frac{b}{a^2}\left(\frac{x}{l}\operatorname{sh} l - \operatorname{sh} x\right) + \frac{2b}{a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} - \frac{2b\pi\operatorname{sh} l}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2\pi^2 + l^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Указание. Решение следует искать в виде суммы $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$, где $v(x)$ есть решение уравнения $a^2v''(x) + b\operatorname{sh} x = 0$, удовлетворяющее краевым условиям $v(0) = v(l) = 0$, а w — решение уравнения $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ при условиях

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0;$$

$$w(x, 0) = -v(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0$$

108. $$u(x, t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}$$

109. $$u(x, t) = -\frac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5} + \frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7} - \frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}}{(2n+1)^7}.$$

110. $$u(x, t) = \sqrt{t}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k J_{-p}(2p\lambda_k t^{1/2p}) + B_k J_p(2p\lambda_k t^{1/2p})\right]\sin\frac{k\pi x}{a},$$

где

$$p = \frac{1}{2+\alpha}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{a},$$

$$A_k = \frac{2}{a}\,\Gamma(1-p)\left(\frac{k\pi p}{a}\right)^p \int_0^l \varphi_0(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\,dx,$$

$$B_k = \frac{2}{a}\,\Gamma(1+p)\left(\frac{k\pi p}{a}\right)^{-p} \int_0^a \varphi_1(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\,dx$$

111. $u(x, t) = A\,\dfrac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} -$

$$-2Ae^{-\mu t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi}{b^2l^2+k^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$\mu = \frac{h}{a^2}, \quad n_k = \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2l^2 - a^2(b^2l^2+k^2\pi^2)}$$

112. Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u, \quad \text{где } a = \sqrt{g},$$

при условиях

$$u(0, t) \text{ равно величине } \quad u(l, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

113. $u(r, t) = 8A\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{R}$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Применить метод разделения переменных к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при условиях $u(0, t)$ равно конечной величине, $u(R, t) = 0$;

$$u(r, 0) = A\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \quad \text{где } A = \text{const}.$$

При нахождении коэффициентов разложения использовать следующие формулы:

$$\int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x),$$

$$\int_0^x x^3J_0(x)\,dx = 2x^2J_0(x) + (x^3 - 4x)\,J_1(x).$$

114. $$u(r,\,t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ht}\left(\cos q_n t + \frac{h}{q_n}\sin q_n t\right)\times$$
$$\times\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)}\int_0^R \rho\varphi(\rho)\,J_0\left(\frac{\mu_n\rho}{R}\right)d\rho,$$

где $q_n = \sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{R^2} - h^2}$, а $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\ (h > 0 \text{ — малое число})$$

при условиях $u(0,\,t)$ равно конечной величине, $u(R,\,t) = 0$;

$$u(r,\,0) = \varphi(r),$$
$$\frac{\partial u(r,\,0)}{\partial t} = 0.$$

115. $$u(x,\,t) = \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_1^2(\mu_n)}\times$$
$$\times\cos\frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}}\int_0^l f(x)\,J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Проинтегрировать уравнение малых колебаний нити при условиях

$u(0,\,t)$ равно конечной величине, $u(l,\,t) = 0$;

$$u(x,\,0) = f(x),$$
$$\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t} = 0.$$

116. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\,X_n(x)$,

где

$$a_n=\frac{\int_0^a \varphi_0(x)\,X_n(x)\,dx}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx},\qquad b_n=\frac{1}{\lambda_n}\frac{\int_0^a \varphi_1(x)\,X_n(x)\,dx}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx};$$

$$X_n(x)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_p\left(\mu_n\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right),\quad p=\left|\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\right|,\quad \lambda_n=\frac{2-\alpha}{2a^{\frac{2-\alpha}{2}}}\mu_n,$$

а μ_n — n-й положительный корень уравнения $J_p(\mu)=0$, $X_n(x)$, λ_n^2 $(n=1,2,3,\ldots)$ — собственные функции и собственные значения краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dX}{dx}\right)+\lambda^2X(x)=0,$$

$$X(0)=0,\quad X(a)=0\quad \text{при } 0<\alpha<1,$$

$X(0)$ ограничено, $X(a)=0$ при $1\leqslant\alpha<2$.

117. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\,X_n(x)$,

где

$$X_n(x)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{-p}\left(\mu_n\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right),$$

$$p=\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\quad \lambda_n=\frac{2-\alpha}{2a^{\frac{2-\alpha}{2}}}\mu_n,$$

а μ_n — n-й корень уравнения $J_{-p}(\mu)=0$,

$$a_n=\frac{\int_0^a \varphi_0(x)\,X_n(x)\,dx}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx},\qquad b_n=\frac{1}{\lambda_n}\frac{\int_0^a \varphi_1(x)\,X_n(x)\,dx}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx}.$$

118. $$u(r,t)=\frac{2}{R^2}\int_0^R[f(\rho)+tF(\rho)]\,\rho\,d\rho+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\mu_n at}{R}+b_n\sin\frac{\mu_n at}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

$$b_n = \frac{2}{aR\mu_n J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho F(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

а $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Указание. Уравнение колебаний газа следует преобразовать к цилиндрическим координатам r, φ, z, направив ось z по оси трубки, затем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0, t) \text{ равно конечной величине}, \quad \frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = 0;$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = F(r) \quad (0 < r < R).$$

119. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \sqrt{2n(2n-1)}\, at + b_n \sin \sqrt{2n(2n-1)}\, at]\, P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{4n-1}{l} \int_0^l f(x) P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)}\, al} \int_0^l F(x) P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx,$$

$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2-1)^k]$ — полиномы Лежандра.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$(l^2 - x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \frac{\omega}{\sqrt{2}},$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) \text{ равно конечной величине};$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x).$$

120. Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{P}{T}$$

при условиях

$$u(0,\ t) \text{ равно конечной величине, } u(R,\ t)=0;$$

$$u(r,\ 0)=0, \quad \frac{\partial u(r,\ 0)}{\partial t}=0.$$

При нахождении коэффициентов разложения использовать указание к задаче **113**.

121. $$u(r,\ t)=\frac{a^2P_0}{T\omega^2}\left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}-1\right]\sin\omega t-$$

$$-\frac{2aP_0\omega R^3}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_n at}{R}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^2(\omega^2R^2-a^2\mu_n^2)J_0'(\mu_n)},$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{P_0\sin\omega t}{T} \tag{3}$$

при условиях

$$u(0,\ t) \text{ равно конечной величине, } u(R,\ t)=0;$$

$$u(r,\ 0)=0, \quad \frac{\partial u(r,\ 0)}{\partial t}=0.$$

Решение задачи следует искать в виде суммы $u=v+w$, где v есть решение неоднородного уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям:

$$v(0,\ t) \text{ равно конечной величине, } v(R,\ t)=0,$$

причем v следует искать в виде $B(r)\sin\omega t$, а w есть решение соответствующего однородного уравнения при условиях

$$w(0,\ t) \text{ равно конечной величине, } w(R,\ t)=0;$$

$$w(r,0)=-v(r,0), \quad \frac{\partial w(r,0)}{\partial t}=-\frac{\partial v(r,0)}{\partial t}.$$

При вычислении коэффициентов разложения воспользоваться указанием к задаче 113.

122. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{64Ab^4}{\pi^6} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)}{b} \pi x \sin \frac{(2m+1)}{b} \pi y}{(2n+1)^3 (2m+1)^3} \times$$

$$\times \cos \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} \frac{a\pi t}{b}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

при условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=b} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0;$$

$$u|_{t=0} = Axy(b-x)(b-y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

123. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{4A}{a\pi ml} \sum_{k,\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_{k\nu}\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}\right)}{\mu_{k\nu}} \psi_{k\nu}(x, y) \sin \mu_{k\nu} \pi a t,$$

где

$$\psi_{k\nu}(x, y) = \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{\nu\pi y}{m}, \quad \mu_{k\nu} = \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{m}\right)^2}$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

при условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=m} = 0$$

$$u(x, y, 0) = 0,$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$ равна нулю везде, за исключением достаточно малой окрестности точки $x = l/2$, $y = m/2$.

124. $u(r, \theta, \varphi, t) = e^{im\varphi} \sum\limits_{j,\nu=1}^{\infty} (a_{\nu j} \cos k_j t + b_{\nu j} \sin k_j t) v_{\nu j}(r, \theta),$

где

$$v_{\nu j}(r,\theta)=$$

$$=\frac{Y_{l_\nu+\frac{1}{2}}(k_j b)\,J_{l_\nu+\frac{1}{2}}(k_j r)-J_{l_\nu+\frac{1}{2}}(k_j a)\,Y_{l_\nu+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{r}}\times$$

$$\times P_{l_\nu,m}(\cos\theta),$$

$$P_{l_\nu,m}(x)=(1-x)^{m/2}\frac{d^m P_{l_\nu}(x)}{dx^m},$$

$P_{l_\nu}(x)$ — функции Лежандра, $l_1, l_2, l_3, \ldots$ — вещественные корни уравнения

$$P_{l,m}(\cos\alpha)=0,$$

а $k_1, k_2, k_3, \ldots$ — вещественные корни уравнения

$$Y_{l+\frac{1}{2}}(kb)\,J_{l+\frac{1}{2}}(ka)-J_{l+\frac{1}{2}}(kb)\,Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)=0,$$

$$a_{\nu j}=\frac{1}{A_{\nu j}^2}\int_a^b\int_0^\alpha \varphi(r,\theta)\,v_{\nu j}(r,\theta)\,r^2\sin\theta\,dr d\theta,$$

$$b_{\nu j}=\frac{1}{k_j A_{\nu j}^2}\int_a^b\int_0^\alpha \varphi_1(r,\theta)\,v_{\nu j}(r,\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta,$$

$$A_{\nu j}^2=\int_a^b\int_0^\alpha v_{\nu j}^2(r,\theta)\,r^2\sin\theta dr d\theta$$

Указание. Ввести сферические координаты r. θ, φ Решение следует искать в виде

$$u=T(t)v(r,\theta,\varphi).$$

Подставляя в волновое уравнение и разделяя переменные, получим

$$T''(t)+a^2k^2T(t)=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+k^2v=0. \quad (4)$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$v(r,\theta,\varphi)=e^{im\varphi}R(r)\,P(\theta)$$

125. $u(r, \theta, \varphi, t) = A + Bt +$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) \cos \frac{\mu_{jn} a t}{R} + Y_n^{(2)}(\theta, \varphi) \sin \frac{\mu_{jn} a t}{R} \right] \times$$

$$\times \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{jn} \frac{r}{R}\right)}{\sqrt{r}},$$

где

$$A = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 f(r, \theta', \varphi')\, dr d\sigma,$$

$$B = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 F(r, \theta', \varphi')\, dr\, d\sigma,$$

$$Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{jn})} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{n(n+1)}{\mu_{jn}^2}\right]} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r, \theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{jn} r}{R}\right) dr d\sigma,$$

$$Y_n^{(2)}(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{a\mu_{jn} J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{jn})} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{n(n+1)}{\mu_{jn}^2}\right]} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{3/2} F(r, \theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{jn} r}{R}\right) dr d\sigma,$$

$\cos\gamma = \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi')$, $\quad d\sigma = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$,

$\mu_{1n}, \mu_{2n}, \mu_{3n}, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) - 2\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0.$$

Указание. См. указание к задаче 124. Решение уравнения (4) ищем в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = f(r) Y(\theta, \varphi).$$

Подставляя его в уравнение (4) и разделяя переменные, получим

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) f(r) = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0.$$

126. $u(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \varphi') \frac{t^2 - r^2}{(t - r\cos\gamma)^2} d\sigma,$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$.

Указание. Ввести однородные координаты $r_1 = r/t$, θ, φ. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$(1 - r_1^2)\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2 \frac{\partial v}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (5)$$

при условии

$$v(r_1, \theta, \varphi)\big|_{r_1=1} = \Phi(\theta, \varphi), \qquad (6)$$

так как решение $u(r, \theta, \varphi, t)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно r и t:

$$u(r_1 t, \theta, \varphi, t) = u(r_1, \theta, \varphi, 1) = v(r_1, \theta, \varphi).$$

Применяя метод разделения переменных к решению задачи (5)—(6) и суммируя полученный ряд, будем иметь

$$v(r_1, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \varphi') \frac{1 - r_1^2}{(1 - r_1\cos\gamma)^2} d\sigma.$$

Возвращаясь к переменным r, θ, φ, t, получим решение искомой задачи.

127. $u(x, t) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n^2\pi^2 b}{l^2} t + B_n \sin\frac{n^2\pi^2 b}{l^2} t\right)\sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$B_n = \frac{2l}{n^2\pi^2 b}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

при условиях $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ при $x = 0$, $x = l$ и любом $t > 0$; $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x)$.

128. Указание. Задача приводится к интегрированию телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=RI+L\frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x}=GV+C\frac{\partial V}{\partial t}$$

при начальных условиях

$$V(x,0)=E, \quad I(x,0)=0$$

и краевых условиях

$$V(0,t)=0, \quad I(l,t)=0.$$

129. $I=\frac{2E}{lL}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\nu_n t}{\nu_n}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$,

$$V=E-\frac{4E}{\pi}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\nu_n t}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}-$$

$$-\frac{2ER}{\pi L}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\nu_n t}{\nu_n(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

где

$$\nu_n=\sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2CL}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию системы уравнений

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=RI+L\frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t}$$

при краевых условиях

$$I(l,t)=0, \quad V(0,t)=E$$

и начальных условиях

$$I(x,0)=0, \quad V(x,0)=0.$$

Решение следует искать в виде

$$I(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$V(x,t)=E+\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

130. $\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^3} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q_n x}}{n} \sin\frac{n\pi y}{2h}$,

$$\eta = \frac{\alpha g T^2}{\pi^3} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q_n x}}{nC_n} \cos\frac{n\pi y}{2h},$$

$$\sigma = -\frac{8\alpha\omega h}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q_n x}}{n^2 C_n} \sin\frac{n\pi y}{2h},$$

где

$$C_n = \sqrt{1 - \frac{16\omega h^2}{n^2 g k T^2}}, \quad q_n = \frac{n\pi C_n}{2h}.$$

Указание. Исключая неизвестную функцию σ, получим систему двух уравнений:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x \partial y} = \frac{\omega}{kg} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{\omega}{kg} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}.$$

Решение этой системы следует искать в виде

$$\xi = \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \sin\frac{n\pi y}{2h}, \quad \eta = \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \cos\frac{n\pi y}{2h}.$$

131. $u(x, t) =$

$$= \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

132. $u(x, t) =$

$$= \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

133. Указание. Воспользоваться основным законом диффузии в неподвижной среде, согласно которому

$$q = -D\frac{\partial C}{\partial n},$$

где q — диффузионный поток, т. е. количество вещества, переносимое через единицу площади поверхности за единицу времени, а n — нормаль к поверхности в направлении уменьшения концентрации.

134. $C(x, t) =$

$$= C_0\left[\frac{h}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi h}{l}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt} \cos\frac{n\pi x}{l}\right].$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad C(x, 0) = \begin{cases} C_0 & \text{при} \quad 0 < x < h, \\ 0 & \text{при} \quad h < x < l. \end{cases}$$

135. $u(r, t) =$

$$= \frac{2}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}\sin\frac{n\pi r}{R}\cdot\int_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{n\pi\rho}{R}\,d\rho$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad \text{где} \quad v = ru, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

при условиях

$$v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, \quad v(R, 0) = rf(r).$$

136. $u(r, t) = \frac{Q}{6k}(R^2 - r^2) +$

$$+ \frac{2QR^3}{\pi^3 kr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}\sin\frac{n\pi r}{R}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{Q}{c\rho}$$

при условиях

$u(0, t)$ равно конечной величине,

$$u(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = 0.$$

137. $Q(t) = 4\pi\int_0^R Cr^2dr - \frac{4\pi}{3}R^3C_0 =$

$$= \frac{4\pi}{3}R^3(C_1 - C_0)\left[1 - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 Dt}\right].$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

при условиях

$$C(R, t) = C_1, \quad C(x, 0) = C_0.$$

Ввести новую функцию v, положив $v = rC$.

138. $u(x, t) =$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\mu_n x}{l}\, dx,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{p}, \quad p = Hl > 0.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu \Big|_{x=l} = 0,$$

$$H = \frac{h}{k} > 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

139. $$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}} \frac{\mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + p \sin \frac{\mu_n x}{l}}{p(p+2) + \mu_n^2},$$

где

$$A_n = \int_0^l f(z) \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n z}{l} + p \sin \frac{\mu_n z}{l} \right) dz,$$

а $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}, \quad \text{где} \quad p = \frac{h}{k} l.$$

Указание. Краевые условия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Hu \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu \Big|_{x=l} = 0.$$

140. $u(r, t) =$

$$= \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2}} \sin \frac{\mu_n r}{R} \times$$

$$\times \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R}\, d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{p}, \quad p = HR - 1 > -1.$$

Указание. Второе из краевых условий в задаче 135 надо заменить на следующее:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{R}\right) v \bigg|_{r=R} = 0, \quad H = \frac{h}{k}$$

141. $u(r, t) =$

$$= \frac{4QHR^4}{kpr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\mu_n}{\mu_n^2 (\sin 2\mu_n - 2\mu_n)} \left(1 - e^{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R^2}}\right) \sin\frac{\mu_n r}{R},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{p}, \quad p = HR - 1 > -1.$$

Указание. Второе из краевых условий в задаче 136 заменить на следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Hu \bigg|_{r=R} = 0, \quad H = \frac{h}{k}.$$

142. $u(r, t) =$

$$= 4u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\mu_n R - \mu_n R \cos\mu_n R}{\mu_n (4\mu_n R - \sin 4\mu_n R)} \cdot \frac{\sin\mu_n r}{r} e^{-\mu_n^2 a^2 t},$$

где

$$\operatorname{tg} 2\mu_n R = \frac{2\mu_n R}{1 - 2hR}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при условиях

$u(0, t)$ равно конечной величине, $\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu \bigg|_{r=2R} = 0,$

$$u(r, 0) = \begin{cases} u_0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant R, \\ 0, & \text{если } R < r \leqslant 2R, \end{cases}$$

143. $u(r, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1_k \dfrac{R\lambda_k \cos\lambda_k (r - R) + \sin\lambda_k (r - R)}{r} e^{-\lambda_k^2 a^2 t},$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$(1 - 2Rh + 2\lambda^2 R^2) \sin \lambda R = (1 + 2Rh) R\lambda \cos \lambda R,$$

$$A_k = \frac{3R^3\lambda_k^2 (1 + 2Rh) u_0}{(1 + \lambda_k^2 R^2) [(1 + 2Rh) \lambda_k^2 R^2 + (2hR + 2\lambda_k^2 R^2 - 1) \sin^2 \lambda_k R]}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

при условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r} + hu \right|_{r=2R} = 0, \quad u(r, 0) = u_0.$$

144. $u(x, t) = u_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x,$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx - \frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)},$$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

Решение следует искать в виде

$$u(x, t) = u_0 + v(x, t),$$

где $v(x, t)$ — неизвестная функция.

145. $u(x, t) = At\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{l^2 A}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right] + \frac{2l^2 A}{\pi^3 a^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}.$

Указание. Решение следует искать в виде суммы

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где u_1 есть решение уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$u_1(0,\ t)=At,\quad u_1(l,\ t)=0,$$

а u_2 есть решение того же уравнения при условиях

$$u_2(0,\ t)=0,\quad u_2(l,\ t)=0,\quad u_2(x,\ 0)=-u_1(x,\ 0).$$

146. $u(x,\ t)=A\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\omega t-$

$$-\frac{2\omega A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}\cos\omega\tau\,d\tau.$$

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(x,\ t)=A\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\omega t+v(x,\ t),$$

где v есть решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A\omega\left(\frac{x}{l}-1\right)\cos\omega t,$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)=0;\quad v(x,\ 0)=0.$$

147. $u(x,\ t)=\frac{Ax}{l}e^{-t}+$

$$+\frac{2Al^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}-e^{-t}\right]}{n(n^2\pi^2-l^2)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(x,\ t)=\frac{Ax}{l}e^{-t}+v(x,\ t).$$

148. $u(x,\ t)=A(1-e^{-\alpha t})\left(1-\frac{Hx}{1+p}\right)+$

$$+2A\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\cdot\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}\cdot\frac{l^2}{a^2\mu_n^2-\alpha l^2}\times$$

$$\times\left[e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2 t}-e^{-\alpha t}\right]\sin\frac{\mu_n x}{l},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{p} \qquad (p = Hl > 0).$$

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(x, t) = A(1 - e^{-\alpha t})\left(1 - \frac{Hx}{1+p}\right) + w,$$

где w — решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A\alpha e^{-\alpha t}\left(1 - \frac{Hx}{1+p}\right),$$

удовлетворяющее условиям

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + Hw\Big|_{x=l} = 0, \quad w\Big|_{t=0} = 0.$$

149. $$u(r, t) = bt - \frac{b}{6a^2}\left[R^2\left(1 + \frac{2}{HR}\right) - r^2\right] +$$

$$+ \frac{2bR^3}{a^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n}{\mu_n^3(\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2}} \sin\frac{\mu_n r}{R},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{p}, \quad p = HR - 1 > 0.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \qquad (v = ru) \tag{7}$$

при условиях

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{R}\right)v\Big|_{r=R} = RHbt, \tag{8}$$

$$v(r, 0) = 0.$$

Решение следует искать в виде суммы $v = v_1 + v_2$, где v_1 — решение уравнения (7), удовлетворяющее краевым условиям (8), а v_2 — решение того же уравнения при условиях

$$v_2(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{R}\right)v_2\Big|_{r=R} = 0,$$

$$v_2(r, 0) = -v_1(r, 0).$$

150. $u(x, t) = \frac{a^2 q}{kR}\left(t - \frac{R^2 - 3x^2}{6a^2}\right) -$

$$- \frac{2qR}{k\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{R}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{R^2} t},$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$k\frac{\partial u}{\partial x} + q\Big|_{x=-R} = 0, \quad -k\frac{\partial u}{\partial x} + q\Big|_{x=R} = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

151. $u(r, t) = \frac{qR}{k}\left(\frac{3a^2}{R^2} t - \frac{3R^2 - 5r^2}{10R^2} -\right.$

$$\left. - \frac{2R}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2} t}}{\mu_n^3 \cos\mu_n} \sin\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при условиях

$$u(0, t) \text{ ограничено}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{q}{k}, \quad u\big|_{t=0} = 0.$$

152. $u(x, t) = \frac{QR^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) -$

$$- \frac{16QR^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2R}\right]^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2R}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q}{c\rho} \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right)$$

при условиях

$$u(\pm R, t) = 0 \quad (t > 0); \qquad u(x, 0) = 0 \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

153. $u(x, t) = \dfrac{u_1 \operatorname{sh} \dfrac{b}{a} x - u_0 \operatorname{sh} \dfrac{b}{a}(x-l)}{\operatorname{sh} \dfrac{b}{a} l} +$

$$+ \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(-1)^n u_1 - u_0}{\lambda_n^2} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\, dx,$$

где $\lambda_n^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} + \dfrac{b^2}{a^2}$.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho},\ b^2 = \frac{h p}{c\rho\sigma}\right) \tag{9}$$

при условиях

$$u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = u_1; \quad u(x, 0) = f(x),$$

где k, h — коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности, c, ρ — теплоемкость и плотность стержня, σ, p — площадь и периметр поперечного сечения стержня.

Решение следует искать в виде суммы $u = v + w$, где v есть решение уравнения

$$a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - b^2 v = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v(0) = u_0, \quad v(l) = u_1,$$

а w есть решение уравнения (9) при условиях

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0; \quad w(x, 0) = f(x) - v(x).$$

154. $u(x, t) = u_0 \dfrac{b \operatorname{sh} \dfrac{b}{a}(l-x) + Ha \operatorname{sh} \dfrac{b}{a}(l-x)}{b \operatorname{ch} \dfrac{bl}{a} + Ha \operatorname{sh} \dfrac{bl}{a}} -$

$$- 2u_0 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n (\mu_n^2 + H^2)}{(a^2\mu_n^2 + b^2)[l(\mu_n^2 + H^2) + H]} e^{-(a^2\mu_n^2 + b^2)t} \sin \mu_n x,$$

где μ_n определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} l\mu = -\frac{\mu}{H}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u \qquad (10)$$

при условиях

$$u(0, t) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu\,|_{x=l} = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Решение следует искать в виде суммы $u = v + w$, где v есть решение уравнения

$$a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - b^2 v = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v(0) = u_0, \quad \frac{dv(l)}{dx} + Hv(l) = 0,$$

а w есть решение уравнения (10) при условиях

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + Hw\,|_{x=l} = 0, \quad w(x, 0) = -v(x).$$

155. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - b(u - u_0) \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho},\ b = \frac{hp}{\sigma k}\right),$

где θ — длина дуги кольца, k, h — коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности, c, ρ — теплоемкость и плотность вещества кольца, σ, p — площадь и периметр поперечного сечения, u_0 — температура внешней среды.

$$u(\theta, t) = e^{-bt}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, e^{-n^2 a^2 t}\right],$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta.$$

156. $u(r, t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t},$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. При нахождении коэффициентов разложения воспользоваться указанием к задаче 113.

157. $u(r, t) = u_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{\mu_n J_0'(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t}\right]$,

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при условиях

$u(0, t)$ равно конечной величине, $u(R, t) = u_0$, $u(r, 0) = 0$.

158. $Q(t) = 2\pi\int_0^R Cr\,dr = \pi R^2 C_1\left(1 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2}{R^2}Dt}\right)$,

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

Указание. См. задачи 157 и 113.

159. $u(r, t) =$

$$= \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + H^2R^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2}} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + HRJ_0(\mu) = 0.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при условиях

$u(0, t)$ равно конечной величине,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Hu\,\Big|_{r=R} = 0, \quad u(r, 0) = f(r).$$

160. $u(r, t) =$

$$= \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n R_1)\, u_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_2) - J_0^2(\lambda_n R_1)} \int_{R_1}^{R_2} r f(r)\, u_0(\lambda_n r)\, dr,$$

где

$$u_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) H_0^{(1)}(\lambda_n R_2) - J_0(\lambda_n R_2) H_0^{(1)}(\lambda_n r),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ — вещественные положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda R_1) H_0^{(1)}(\lambda R_2) - J_0(\lambda R_2) H_0^{(1)}(\lambda R_1) = 0.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при условиях

$$u|_{r=R_1} = 0, \quad u|_{r=R_2} = 0; \quad u(r, 0) = f(r).$$

161.

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{k_1 a_1 u_0 A_j^2}{\mu_j}\left(1 - e^{-\mu_j^2 t}\right) \sin a_1 \mu_j x & (0 < x < \xi), \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{k_1 a_1 u_0 A_j^2}{\mu_j}\left(1 - e^{-\mu_j^2 t}\right) \dfrac{\sin a_1 \mu_j \xi}{\sin a_2 \mu_j (l - \xi)} \sin a_2 \mu_j (l - x) & (\xi < x < l), \end{cases}$$

где μ_j — корни уравнения

$$a_1 k_1 \operatorname{ctg} \mu a_1 \xi + a_2 k_2 \operatorname{ctg} a_2 (l - \xi) \mu = 0,$$

а A_j определяются из условия нормировки:

$$c_1 \rho_1 \int_0^{\xi} X_{1j}^2\, dx + c_2 \rho_2 \int_{\xi}^{l} X_{2j}^2\, dx = 1,$$

$$X_{1j} = A_j \sin a_1 \mu_j x, \quad X_{2j} = A_j \frac{\sin a_1 \mu_j \xi}{\sin a_2 \mu_j (l - \xi)} \sin a_2 \mu_j (l - x).$$

Условие ортогональности:

$$c_1 \rho_1 \int_0^{\xi} X_{1j} X_{1k}\, dx + c_2 \rho_2 \int_{\xi}^{l} X_{2j} X_{2k}\, dx = 0 \qquad (j \neq k).$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнений

$$a_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \xi), \qquad a_2^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\xi < x < l),$$

$$a_i^2 = \frac{c_i \rho_i}{k_i} \qquad (i = 1, 2)$$

при условиях

$$u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(\xi - 0, t) = u(\xi + 0, t),$$

$$k_1 \frac{\partial u(\xi - 0, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u(\xi + 0, t)}{\partial x}; \quad u(x, 0) = 0.$$

162. $$u = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{n\pi(m-y)}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi m}{l}} +$$

$$+ \frac{4}{lm} \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{\mu^2}{l^2} + \frac{\nu^2}{m^2}\right) t} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\nu\pi y}{m} \times$$

$$\times \int_0^l \int_0^m \left\{ f(x, y) - \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{n\pi(m-y)}{l} \int_0^l \varphi_0(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \int_0^l \varphi_1(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right] \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi m}{l}} \right\} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\nu\pi y}{m} dx\, dy.$$

Указание. Решение следует искать в виде $u = v + w$, где w есть решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

при условиях

$$w(0, y) = 0, \qquad w(l, y) = 0;$$
$$w(x, 0) = \varphi_0(x), \quad w(x, m) = \varphi_1(x),$$

а v есть решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

при условиях

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = v|_{y=0} = v|_{y=m} = 0,$$
$$v(x, y, 0) = f(x, y) - w(x, y).$$

163. $u(r, x, t) =$

$$= \sum_{k, n=1}^{\infty} A_{kn} J_0 \left(\mu_k \frac{r}{R} \right) \left(\cos \frac{\nu_n x}{l} + \frac{p}{\nu_n} \sin \frac{\nu_n x}{l} \right) e^{-a^2\left(\frac{\nu_n^2}{l^2} + \frac{\mu_k^2}{R^2} \right) t},$$

где

$$A_{kn} = \frac{4\mu_k^2\nu_n^2}{lR^2(\mu_k^2 + HR)[p(p+2)+\nu_n^2]} \times$$

$$\times \int_0^l \int_0^R r f(r, x) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\left(\cos\frac{\nu_n x}{l} + \frac{p}{\nu_n}\sin\frac{\nu_n x}{l}\right) dx\, dr,$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0,$$

а $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$2\operatorname{ctg}\nu = \frac{\nu}{p} - \frac{p}{\nu} \qquad (p = Hl > 0).$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

при условиях

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Hu\,|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu\,|_{x=l} = 0,$$

$u(0, x, t)$ равно конечной величине, $\frac{\partial u}{\partial r} + Hu\,|_{r=R} = 0,$

$$u(r, x, 0) = f(r, x).$$

164. $u(r, \theta, \varphi, t) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{jn}\frac{r}{R}\right)}{\sqrt{r}} Y_n(\theta, \varphi)\, e^{-\frac{\mu_{jn}^2 a^2 t}{R^2}},$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2}\frac{1}{J_{n+3/2}(\mu_{jn})} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r, \theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_j \frac{r}{R}\right) dr\, d\sigma,$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

$$d\sigma = \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi',$$

$\mu_{1n}, \mu_{2n}, \mu_{3n}, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$$

при условиях

$$u|_{r=R}=0,\quad u|_{t=0}=f(r,\theta,\varphi).$$

165. $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{2}{3}\lambda_n t}\varphi_n(x),$$

где

$$A_n=\frac{\int\limits_0^1(1-x^2)\varphi_n(x)\,dx}{\int\limits_0^1(1-x^2)\varphi_n^2(x)\,dx},$$

$$\varphi_n(x)=x-\lambda_n\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{6x^5}{5!}\right)+\lambda_n^2\left(\frac{x^5}{5!}-\frac{26x^7}{7!}+\frac{252x^9}{9!}\right)+\ldots,$$

λ_n — корни уравнения

$$1-\frac{1}{4}\lambda-\frac{17}{1440}\lambda^2-\ldots=0.$$

166. Указание. См. статью Н. П. Еругина *).

167. $$u(x,t)=\frac{2a^2\pi}{l}\cdot\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}nA_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}}{A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}t}},$$

где

$$A_0=\frac{1}{l}\int\limits_0^1\Theta_0(x)\,dx,\qquad A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\Theta_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Указание. Пусть $\Theta(x,t)$ есть решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Тогда

$$u(x,t)=-2a^2\frac{\Theta_x}{\Theta} \tag{12}$$

*) Еругин Н. П., Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи, ПММ, т. XIV, в. 2, 1950.

есть решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Из (12) имеем

$$\Theta(x, t)=c(t)\,e^{-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x u(x, t)\,dx}$$

при $t=0$

$$\Theta(x, 0)=c_0 e^{-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x u(x, 0)\,dx}=\Theta_0(x). \qquad (13)$$

В силу краевых условий задачи и из (12) имеем

$$\Theta_x(0, t)=\Theta_x(l, t)=0. \qquad (14)$$

Таким образом, мы пришли к решению уравнения (11) при условиях (13) и (14).

Решив эту задачу по формуле (12) найдем решение искомой задачи.

168. $u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$

169. $u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\times$

$$\times\int\limits_0^\infty\left\{f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]-2he^{-h\xi}\int\limits_0^\xi e^{h\mu}f(\mu)\,d\mu\right\}d\xi.$$

Указание. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\frac{\partial u}{\partial x}-hu\Big|_{x=0}=0,\quad u(x, 0)=f(x).$$

170. $u_1(x, t)=\frac{u_0\sigma}{1+\sigma}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\mu^2}d\mu \qquad (x<0),$

$$u_2(x, t)=\frac{u_0\sigma}{1+\sigma}\left[1+\frac{1}{\sigma}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}e^{-\mu^2}d\mu\right] \qquad (x>0),$$

где $\sigma=\frac{k_2a_1}{k_1a_2}$.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\quad (x<0),\qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\qquad (x>0),$$

$$a_i^2=\frac{c_i\rho_i}{k_i}\qquad (i=1,\ 2)$$

при условиях

$$u_1(0,\ t)=u_2(0,\ t),\quad k_1\frac{\partial u_1(0,\ t)}{\partial x}=k_2\frac{\partial u_2(0,\ t)}{\partial x},$$

$$u_1(x,\ 0)=0,\quad u_2(x,\ 0)=u_0,$$

где c_i — теплоемкость, k_i — коэффициент внутренней теплопроводности, а ρ_i — плотность вещества стержня.

171.

$$u=r^{-\frac{n-2}{2}}J_{-\frac{n-2}{2}}(kr)\quad \text{для нечетных } n,$$

$$u=r^{-\frac{n-2}{2}}N_{\frac{n-2}{2}}(kr)\quad \text{для четных } n,$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя ν-го порядка, а $N_\nu(x)$ — функция Неймана ν-го порядка; $r=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\xi_k)^2$.

Указание. Ввести сферические координаты и искать решение, зависящее только от r.

172. $q_1(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=k_1(r_1^2)^{-\beta}F(\beta,\ \beta,\ 2\beta;\ 1-\sigma),$

$$q_2(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}(1-\sigma)^{1-2\beta}\times$$
$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta,\quad 2-2\beta;\ 1-\sigma),$$

где

$$r^2=(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}-y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$r_1^2=(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}+y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\sigma=\frac{r^2}{r_1^2},\quad \beta=\frac{m}{2(m+2)},$$

k_1 и k_2 — некоторые постоянные, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)$ — гипергеометрическая функция.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u = (r_1^2)^{-\beta}\, w(\sigma).$$

173. Решение. $S_\alpha^* v = v_{xx} + y v_{yy} + (2-\alpha)v$ — сопряженный оператор с $S_\alpha u = u_{xx} + y u_y + \alpha u_y$. Уравнение $S_\alpha^* v = 0$ в полуплоскости $z > 0$ координат x, $z = 2\sqrt{y}$ имеет вид

$$S_\alpha^* v = v_{xx} + v_{zz} + \frac{2\beta'}{z} v_z = 0, \tag{15}$$

где $\beta' = 1 - \beta = 1,5 - \alpha$.

Нетрудно проверить, что

$$S_\alpha [y^{1-\alpha} u(x, y)] = y^{1-\alpha} S_\alpha^* [u(x, y)]. \tag{16}$$

Решение уравнения (15) ищем в виде

$$v(x, z; x', z') = r_1^{-2\beta'} w(\sigma), \tag{17}$$

где

$$r^2 = (x-x')^2 + (z-z')^2 = (x-x')^2 + 4(\sqrt{y} - \sqrt{y'})^2,$$

$$r_1^2 = (x-x')^2 + (z+z')^2 = (x-x')^2 + 4(\sqrt{y} + \sqrt{y'})^2,$$

$$\sigma = r^2/r_1^2.$$

Подставляя (17) в уравнение (15), получим

$$\sigma(1-\sigma)w'' + [1 - (2\beta' + 1)\sigma]w' - \beta'^2 w = 0.$$

Это гипергеометрическое уравнение, которое в окрестности точки $\sigma = 1$ имеет два линейно независимых решения:

$$w_1(\sigma) = F(\beta', \beta', 2\beta'; 1-\sigma),$$

$$w_2(\sigma) = (1-\sigma)^{1-2\beta'} F(1-\beta', 1-\beta', 2-2\beta'; 1-\sigma).$$

Подставляя их в (17), возвращаясь к переменным x, y и умножая v_1 и v_2 на $y^{1-\alpha}$, получим, учитывая, что $1 - \sigma = 16\sqrt{yy'}\, r_1^{-2}$:

$$q_1(x, y, x', y') = k_1 y^{1-\alpha} r_1^{-2\beta'} F(\beta', \beta', 2\beta', 16\sqrt{yy'}\, r_1^{-2}),$$

$$q_2(x, y; x', y') = k_2 y'^{\alpha-1} r_1^{-2\beta} F(\beta, \beta, 2\beta; 16\sqrt{yy'}\, r_1^{-2}),$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные. Эти функции по переменным x', y' удовлетворяют уравнению $S_\alpha^* u = 0$, по переменным x, y, в силу (16), — уравнению $S_\alpha u = 0$

174. $u(x, y; x_0, y_0) = kr^2 \ln \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$,

k — некоторая постоянная.

175. а) $\lambda_{m,n}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$,

$$u_{m,n}=\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}\qquad (m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

б) $\lambda_{k,n}=\frac{\pi^2}{a^2}(k^2+n^2)\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots;\ n=k+1,\ k+2,\ldots)$,

$$u_{k,n}=\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}-\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{a}\qquad (k\neq n).$$

в) $\lambda_{n,k}=\left(\frac{\mu_{n,k}}{R}\right)^2\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ k=1,\ 2,\ 3,\ldots)$, где

$\mu_{n,k}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu)=0$, суть собственные числа; каждому собственному числу соответствуют две линейно независимые собственные функции

$$J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{R}r\right)\cos n\theta,\quad J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{R}r\right)\sin n\theta.$$

Указание. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\lambda u=0$$

при краевом условии

$$u|_{r=R}=0.$$

г) Функции

$$F_{n,k}(r)\cos n\theta,\quad F_{n,k}(r)\sin n\theta$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где

$$F_{n,k}(r)=J_n(\mu_{n,k}r)\,N_n(\mu_{n,k}R_1)-J_n(\mu_{n,k}R_1)\,N_n(\mu_{n,k}r)$$

— собственные функции, соответствующие собственному числу $\lambda_{n,k}=\mu_{n,k}^2$. Здесь $\mu_{n,k}$ — положительные корни уравнения

$$J_n(R_1\mu)\,N_n(R_2\mu)-J_n(R_2\mu)\,N_n(R_1\mu)=0.$$

д) Каждому собственному числу

$$\lambda_{n,j}=\left(\frac{\mu_{n,j}}{R}\right)^2\qquad (n=0,\ 1,\ 2\ldots;\quad j=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

где $\mu_{n,j}$ — положительные корни уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0$, соответствует $(2n+1)$ собственных функций:

$$u_{njm}(r,\ \theta,\ \varphi)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n,j}}{R}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\ \varphi)$$
$$(m=0,\ \pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\ \pm n).$$

Здесь положено

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad Y_n^{(-m)}(\theta, \varphi) = P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

где $P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2}\dfrac{d^m P_n(x)}{dx^n}$ — присоединительные функции Лежандра, $P_{n0}(x) = P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

Указание. Ввести сферические координаты (r, θ, φ). Тогда исходная задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \lambda u = 0 \qquad (18)$$

при условии

$$u|_{r=R} = 0. \qquad (19)$$

Решение уравнения (18) ищем в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = f(r)Y(\theta, \varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение (18) и разделяя переменные, получим

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + \left(\lambda - \frac{k}{r^2}\right)f(r) = 0, \qquad (20)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + kY(\theta, \varphi) = 0. \qquad (21)$$

Уравнение (21) при $k = n(n+1)$ имеет $2n + 1$ линейно независимых решений:

$$P_n(\cos\theta), \quad P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n).$$

Для уравнения (20) получаем следующую краевую задачу:

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)f(r) = 0, \qquad (22)$$

$$f(0) < \infty, \quad f(R) = 0. \qquad (23)$$

С помощью подстановки $f(r) = y(r)/\sqrt{r}$ уравнение (22) приводится к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{r}y' + \left(\lambda - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r) + BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r).$$

Из условия ограниченности решения необходимо положить $B = 0$. Положив $A = 1$, будем иметь $y(r) = J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)$. Из условия (23) следует теперь, что $\lambda_{n,j} = (\mu_{n,j}/R)^2$, где $\mu_{n,j}$ — положительные корни функции Бесселя и, следовательно,

$$y_{nj}(r) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nj} r}{R}\right).$$

Таким образом,

$$\lambda_{n,j} = \left(\frac{\mu_{n,j}}{R}\right)^2, \quad f_{n,j}(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n,j} r}{R}\right)}{\sqrt{r}}$$

суть собственные числа и собственные функции краевой задачи (22), (23).

е) $\lambda_{m,n,k} = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{n,k}}{R}\right)^2$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

— собственные значения. Здесь R — радиус цилиндра, l — высота цилиндра, а $\mu_{n,k}$ — положительные корни уравнения $J_m(\mu) = 0$,

$$u_{mnk} = J_n\left(\frac{\mu_{n,k} r}{R}\right) \sin\frac{m\pi z}{l} \begin{cases} \cos n\theta, \\ \sin n\theta \end{cases}$$

— собственные функции.

Указание. Ввести цилиндрические координаты (r, θ, z). Тогда исходная задача приводится к решению уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0$$

при условиях

$$u|_{r=R} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=l} = 0.$$

Решение ищем в виде

$$u(r, \theta, z) = V(r, \theta) Z(z).$$

После разделения переменных для $V(r, \theta)$ получаем задачу 175в), а для $Z(z)$ — краевую задачу:

$$Z''(z) + \mu Z(z) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(l) = 0.$$

176. $\lambda_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i^2\pi^2}{(q_i - p_i)^2} + \frac{(2-\alpha)^2 \gamma_{\nu n}}{4a^{2-\alpha}}$,

$$u_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, n} = x_n^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu \left(\gamma_{\nu n} \left(\frac{x_n}{a}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \sin \frac{k_i\pi (x_i - p_i)}{q_i - p_i},$$

где $\gamma_{\nu n}$ — n-й положительный корень уравнения $J_\nu(\gamma) = 0$,

$$\nu = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \quad k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} = 1, 2, 3, \ldots; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Указание. Решение уравнения $Bu - \lambda u = 0$ следует искать в виде

$$u(x) = v(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} \sin \frac{k_i\pi (x_i - p_i)}{q_i - p_i}.$$

177. См. ответ к задаче 176, где нужно положить $\nu = \frac{\alpha - 1}{2-\alpha}$.

178. а) $\lambda_{n,k} = (\mu_{n,k}/R)^2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; k = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$J_n\left(\frac{\mu_{n,k} r}{R}\right) \cos n\theta, \quad J_n\left(\frac{\mu_{n,k} r}{R}\right) \sin n\theta,$$

где $\mu_{n,k}$ — положительные корни уравнения $J'_n(\mu) = 0$.

Указание. Требуется решить задачу на нахождение собственных значений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0,$$

$u(0, \theta)$ ограничено, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$.

б) Функции

$$\Phi_{n,k}(r) \cos n\theta, \quad \Phi_{n,k}(r) \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\Phi_{n,k}(r) = J_n(\mu_{n,k} r) N'_n(\mu_{n,k} R_1) - J'_n(\mu_{n,k} R_1) N_n(\mu_{n,k} r)$$

— собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_{n,k} = \mu_{n,k}^2$. Здесь $\mu_{n,k}$ — положительные корни уравнения

$$J'_n(\mu_{n,k} R_1) N'_n(\mu_{n,k} R_2) - J'_n(\mu_{n,k} R_2) N'_n(\mu_{n,k} R_1) = 0.$$

Указание. См. указание к задаче 178а), где второе краевое условие нужно заменить следующими:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2}=0.$$

в) $\lambda_{m,n,k}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right) \quad (m, n, k=0, 1, 2, \ldots),$

$$u_{mnk}=\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{k\pi z}{c}.$$

г) Каждому собственному значению

$$\lambda_{n,j}=\left(\frac{\mu_{n,j}}{R}\right)^2 \quad (n=0, 1, 2, \ldots; \quad j=1, 2, 3, \ldots),$$

где $\mu_{n,j}$ — положительные корни уравнения

$$2\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0,$$

соответствует $(2n+1)$ собственных функций

$$u_{njm}(r, \theta, \varphi)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n,j}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$(m=0, \pm 1, \quad \pm 2, \ldots, \pm n).$$

Здесь положено

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)=P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad Y_n^{(-m)}(\theta, \varphi)=P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$$(m=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Указание. Уравнение (1) (см. указание к задаче 175 д)) следует решать при краевом условии $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0$,

д) $\lambda_{m,n,k}=\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{\mu_{n,k}}{R}\right)^2$

$$(n=0, 1, 2, \ldots; \quad m, k=1, 2, 3, \ldots),$$

$$u_{mnk}=J_n\left(\frac{\mu_{n,k}r}{R}\right)\sin\frac{m\pi z}{l}\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

где $\mu_{n,k}$ — положительные корни уравнения $J'_n(\mu)=0$.

Указание. См. указание к задаче 175 е), где краевые условия следует заменить следующими:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=l}=0.$$

179. $k_{m,n}^2 = \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\omega_m}{h}\right)^2 \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots),$

$$v_{m,n}(x, y) = \sin\frac{n\pi(x+l)}{2l}\left(\cos\frac{\omega_m y}{h} + \frac{h}{\alpha\omega_m}\sin\frac{\omega_m y}{h}\right),$$

где ω_m — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{\alpha}{h}\omega.$$

180. $$u = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-x)}{b}\int_0^b \varphi_0(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy + \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy\right]\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} +$$

$$+ \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sh}\frac{n\pi(b-y)}{a}\int_0^a \psi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx + \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\int_0^a \psi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\right]\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}.$$

Указание. Разбить решение задачи на две части, именно:

1) нахождение гармонической функции $u_1(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$u_1(0, y) = \varphi_0(y), \quad u_1(a, y) = \varphi_1(y),$$
$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, b) = 0;$$

2) нахождение гармонической функции $u_2(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$u_2(0, y) = 0, \quad u_2(a, y) = 0,$$
$$u_2(x, 0) = \psi_0(x), \quad u_2(x, b) = \psi_1(x).$$

Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ будет решением данной задачи Дирихле

$$u(x, y) = B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

181. $u(x, y) =$

$$= \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1) \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

внутри прямоугольника при краевых условиях

$$u|_{x=0} = U; \quad u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0.$$

182. $$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \int_0^a \psi_3(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} \frac{n\pi(y-b)}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \right] \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} +$$

$$+ \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \cos \frac{n\pi y}{b}\, dy + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh} \frac{n\pi(a-x)}{b} \int_0^b \varphi_0(y) \cos \frac{n\pi y}{b}\, dy \right] \frac{\cos \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} +$$

$$+ \frac{a-x}{ab} \int_0^b \varphi_0(y)\, dy + \frac{x}{ab} \int_0^b \varphi_1(y)\, dy.$$

Частный случай:

$$u(x, y) = A + \frac{A(b-2)x}{2a} -$$

$$- \frac{4bA}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{b} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2k+1)^2 \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{b}}.$$

183. $u(x, y) =$

$$= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(y-b)}{2a} \int_0^a \psi_0(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{2a}{(2n+1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \int_0^a \psi_3(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}\, dx \right] \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} + \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi (x-a)}{2b} \times \right.$$

$$\times \int_0^0 \varphi_0(y) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}\, dy + \frac{2b}{(2n+1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \times$$

$$\left. \times \int_0^b \varphi_2(y) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}\, dy \right] \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}}.$$

184. $u(x, y) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{\pi n}{a} y} \sin \frac{n\pi x}{a}.$

185. $u(r, \theta) =$

$$= \frac{\alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln r + \frac{\alpha_0^{(1)} \ln R_2 - \alpha_0^{(2)} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n^{(1)} R_2^{-n} - \alpha_n^{(2)} R_1^{-n})\, r^n - (\alpha_n^{(1)} R_2^n - \alpha_n^{(2)} R_1^n)\, r^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} \cos n\theta +$$

$$+ \frac{(\beta_n^{(1)} R_2^{-n} - \beta_n^{(2)} R_1^{-n})\, r^n - (\beta_n^{(1)} R_2^n - \beta_n^{(2)} R_1^n)\, r^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} \sin n\theta,$$

где

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta)\, d\theta, \quad \alpha_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) \cos n\theta d\theta;$$

$$\beta_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) \sin n\theta d\theta;$$

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta)\, d\theta, \quad \alpha_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta) \cos n\theta d\theta;$$

$$\beta_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Указание. Ввести полярные координаты. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

при условиях

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta);$$

$$u(R_1, \theta) = f_1(\theta), \quad u(R_2, \theta) = f_2(\theta),$$

где $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ — заданные функции, разлагающиеся в ряд Фурье.

Для круга

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \theta) + r^2} dt.$$

186. $$u(x, y) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nR^{n-1}} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \tag{24}$$

где C — произвольная постоянная,

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \cos n\omega \, d\omega, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sin n\omega d\omega. \tag{25}$$

Для разрешимости задачи Неймана для круга $x^2 + y^2 < R^2$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \, d\omega = 0.$$

Ряд (24) можно просуммировать. Подставив (25) в (24) и изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(r, \theta) = C + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nR^{n-1}} \cos n(\omega - \theta) \, d\omega =$$

$$= C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{r}{n} \right)^n e^{in(\omega - \theta)} \right\} d\omega =$$

$$= C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\zeta^n} d\omega,$$

$$z = re^{i\theta}, \quad \zeta = Re^{i\omega}.$$

Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1 - t}, \quad |t| < 1,$$

и что $\operatorname{Re}\ln\tau = \ln|\tau|$; находим

$$u(r, \theta) = C + \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega)\ln|\xi - z|\,d\omega.$$

187. $u(r, \theta) = \alpha_0^{(2)} + \alpha_0^{(1)} R_1 \ln\frac{r}{R_2} +$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_k^{(1)} R_2^{-k} + kR_1^{-k-1}\alpha_k^{(2)})\, r^k + (kR_1^{k-1}\alpha_k^{(2)} - R_2^k\alpha_k^{(1)})\, r^{-k}}{k\,(R_1^{k-1}R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k-1})}\cos k\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_k^{(1)} R_2^{-k} + kR_1^{-k-1}\beta_k^{(2)})\, r^k + (kR_2^{k-1}\beta_k^{(2)} - R_2^k\beta_k^{(1)})\, r^{-k}}{k\,(R_1^{k-1}R_1^{-k} + R_2^k R_1^{-k-1})}\sin k\theta,$$

где $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_0^{(2)}$, $\alpha_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(2)}$, $\beta_k^{(1)}$ и $\beta_k^{(2)}$ имеют те же значения, что и в задаче 185. (См. указание к задаче 185.)

188. $u(x, y) = A + \frac{A(b-2)}{2a}x -$

$$-\frac{4Ab}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}\cos\frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

189. $u(\rho, \varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\frac{\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n}$,

Указание. Ввести полярные координаты.

190. $u(\rho, \theta) = \frac{1}{3}(1 - \rho^2) + \rho^2\cos^2\theta$.

Указание. Ввести сферические координаты (ρ, θ, φ). Решение u, очевидно, не зависит от φ, и поэтому уравнение Лапласа сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0.$$

191. $u(x, y) = \frac{Q}{2kab}[(y-b)^2 - (x-a)^2] + C$, где C — постоянная.

Указание. Задача приводится к решению задачи Неймана

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{Q}{kb}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{Q}{ka}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

где Q обозначает количество тепла, втекающее через OA и вытекающее через OB, а k — коэффициент внутренней теплопроводности.

192. $u(x, y) = x(a - x) -$

$$- \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi y}{a} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3 \operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.$$

Указание. Решение задачи следует искать в виде суммы $u = v + w$, где v есть решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее условиям

$$v(0, y) = 0, \quad v(a, y) = 0,$$

причем v следует искать в виде $Ax^2 + Bx + C$, а w есть решение уравнения Лапласа, принимающее на контуре прямоугольника значения

$$w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0,$$

$$w\left(x, -\frac{b}{2}\right) = -v(x), \quad w\left(x, \frac{b}{2}\right) = -v(x).$$

193. $u(x, y) = \frac{P}{2T} \times$

$$\times \left[x(a - x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(b-2y)}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right].$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{P}{T}$$

при нулевых граничных условиях на контуре прямоугольника.

194. $u(x, y) = \frac{16Qa^2}{k\pi^3} \times$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(b-y)}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a},$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{Q}{k}$$

при краевых условиях

$$u\big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0,\quad u\big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0.$$

Решение следует искать в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a},$$

где $X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$ — собственные функции краевой задачи

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,$$
$$X(0)=0,\ X'(a)=0.$$

195. $u(x,y)=\frac{4Qa^2}{k}\times$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n^2(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\left(1-\frac{h\operatorname{ch}\frac{\mu_n y}{a}}{\frac{\mu_n}{a}\operatorname{sh}\frac{\mu_n b}{a}+h\operatorname{ch}\frac{\mu_n b}{a}}\right)\cos\frac{\mu_n x}{a},$$

где μ_n — положительные корни уравнения $tg\mu = ah/\mu$, h — коэффициент теплообмена.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{Q}{k}$$

при краевых условиях

$$\frac{\partial u}{\partial x}-hu\big|_{x=-a}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+hu\big|_{x=a}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}-hu\big|_{y=-b}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+hu\big|_{y=b}=0.$$

196. $u(x,y)=a^2-(x^2+y^2)$.

Указание. Ввести полярные координаты.

197. $u(r,\theta)=-\frac{1}{24}r^4\sin 2\theta+$

$$+\frac{R^4}{48\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\theta)+r^2}\,dt.$$

Указание. Решение следует искать в виде суммы $u(x, y) = v + w$, где

$$v(x, y) = -\frac{1}{12} xy(x^2 + y^2)$$

— частное решение уравнения Пуассона, а $w(x, y)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$w\big|_{r=R} = -v\big|_{r=R}.$$

198. $u(r, \varphi) =$

$$= \left[(a^4 + b^4) r^4 - (a^6 + 2b^6) r^2 - (a^2 - 2b^2)\frac{a^4 b^4}{r^2}\right]\frac{\cos 2\varphi}{a^4 + b^4}.$$

Указание. Ввести полярные координаты.

199. $u(x, y, z) =$

$$= \frac{16V}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}\operatorname{sh}\pi T(c-z)}{(2m+1)(2n+1)\operatorname{sh}\pi Tc},$$

где $T = \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}}$.

Указание. Задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

внутри прямоугольного параллелепипеда при краевых условиях

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=b} = 0,$$

$$u\big|_{z=0} = V, \quad u\big|_{z=c} = 0.$$

200. $u(r, z) =$

$$= \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}}\,\frac{J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)}\int_0^R \rho f(\rho)\, J_0\left(\mu_n\frac{\rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

при условиях

$u(0, z)$ равно конечной величине,

$$u(R, z)=0, \quad u(r, 0)=0, \quad u(r, h)=f(r).$$

201. $u(r, z)=$

$$=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}}\cdot\frac{J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)}\int_0^R \rho f(\rho)\,J_0\left(\mu_n\frac{\rho}{R}\right)d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_1(\mu)=0$.

Указание. Второе из краевых условий в задаче 200 надо заменить следующим:

$$\frac{\partial u(R, z)}{\partial r}=0.$$

202. $u(r, z)=$

$$=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}}\cdot\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\left(1+\frac{\alpha^2R^2}{\mu_n^2}\right)J_0^2(\mu_n)}\int_0^R \rho f(\rho)\,J_0\left(\frac{\mu_n\rho}{R}\right)d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\mu J_1(\mu)-\alpha RJ_0(\mu)=0.$$

Указание. Второе из краевых условий в задаче 200 следует заменить на

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\alpha u\Big|_{r=R}=0.$$

203. $u(r, z)=$

$$=\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{h}\cdot\frac{J_0\left(\frac{n\pi ir}{h}\right)}{J_0\left(\frac{n\pi iR}{h}\right)}\int_0^h f(x)\sin\frac{n\pi x}{h}\,dx.$$

204. $u(r, z)=$

$$=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi z}{h}}{2n+1}\,\frac{J_0\left(\frac{(2n+1)\pi ir}{h}\right)}{J_0\left(\frac{(2n+1)\pi iR}{h}\right)}.$$

205. $u(r, z) =$

$$= \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{h} \cdot \frac{J_0\left(\frac{n\pi i r}{h}\right)}{J_0\left(\frac{n\pi i R}{h}\right)} \int_0^h f(x) \cos \frac{n\pi x}{h}\, dx.$$

Указание. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

при условиях

$$u(0, z) \text{ — конечная величина,}$$

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial z} = \frac{\partial u(r, h)}{\partial z} = 0, \quad u(R, z) = f(z).$$

206. $u = 2u_0 R\gamma \times$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + R^2\gamma^2)} \frac{\mu_n \operatorname{ch} \frac{\mu_n (H - z)}{R} + \beta R \operatorname{sh} \frac{\mu_n (H - z)}{R}}{\mu_n \operatorname{ch} \frac{\mu_n H}{R} + \beta R \operatorname{sh} \frac{\mu_n H}{R}},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + \gamma R J_0(\mu) = 0.$$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

при условиях

$$u(0, z) \text{ равно конечной величине,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u \Big|_{r=R} = 0,$$

$$u(r, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \beta u \Big|_{z=H} = 0,$$

где $\gamma = \frac{h_1}{k}$, $\beta = \frac{h_2}{k}$, h_1 и h_2 — коэффициенты внешней теплопроводности на боковой поверхности цилиндра и на его верхнем основании, k — коэффициент внутренней теплопроводности.

207. $u(r, z) =$

$$= \frac{2qR^2\gamma}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + R^2\gamma^2)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n H}{R}},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + \gamma R J_0(\mu) = 0.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

при условиях

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad -k\frac{\partial u}{\partial z} + q\Big|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u\Big|_{r=R} = 0.$$

208. $u(r, \theta) =$

$$= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(4n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2),$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

при условии

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad 0 < \theta < \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad \theta = \pi/2. \end{cases}$$

209. $$u(r, \theta) = \frac{qR}{2k}\left[\frac{1}{2R\gamma} + \frac{r}{R}\frac{\cos\theta}{1+R\gamma} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \frac{4n+1}{(2n+R\gamma)(2n-1)(n+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\right].$$

Указание. Краевое условие в задаче 208 следует заменить на

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u\Big|_{r=R} = \begin{cases} \frac{q}{k}\cos\theta & (0 < \theta < \pi/2), \\ 0 & (\pi/2 < \theta < \pi). \end{cases}$$

210. $$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n(kr)}{\Psi_n(kR)} Y_n(\theta, \varphi),$$

где

$$\Psi_n(x) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}},$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_{n0} P_n(\cos\theta) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_{n,m}(\cos\theta);$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\delta_m \pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{(S)} f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \cos m\varphi d\sigma,$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\delta_m \pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{(S)} f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \sin m\varphi d\sigma,$$

$\delta_n = 2$ при $m = 0$ и $\delta_m = 1$ при $m > 0$, $P_{n,0}(x) = P_n(x)$.

Предполагается, что k не является собственным значением краевой задачи: $\Delta v + k^2 v = 0$, $v|_{r=R} = 0$.

Указание. Ввести сферические координаты r, θ, φ. Решение следует искать в виде

$$r(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi).$$

211. $$v(r, \theta, \varphi) = e^{im\varphi} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_{l_j}(kr) \frac{P_{l_j, m}(\cos\theta)}{P_{l_j, m}(\cos\alpha)},$$

где

$$P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m},$$

$P_l(x)$ — функции Лежандра,

$$\varphi_{l_j}(kr) = \frac{Y_{l_j+\frac{1}{2}}(kb) J_{l_j+\frac{1}{2}}(kr) - J_{l_j+\frac{1}{2}}(kb) Y_{l_j+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}},$$

$l_1, l_2, l_3, \ldots$ — вещественные корни уравнения

$$Y_{l+\frac{1}{2}}(kb) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - J_{l+\frac{1}{2}}(kb) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) = 0, \qquad (26)$$

$$a_j = \frac{\int\limits_a^b f(r) \varphi_{l_j}(kr)\, dr}{\int\limits_a^b \varphi_{l_j}^2(kr)\, dr}.$$

Предполагается, что при данном k уравнение (26) имеет такие корни l_j, что $P_{l_j, m}(\cos\alpha) \neq 0$ при всех j.

Если при некотором корне l_j имеет место

$$P_{l_{j_0}, m}(\cos\alpha) = 0,$$

то для разрешимости задачи необходимо, чтобы

$$a_{j_0} = 0, \text{ т. е. } \int_a^b f(r)\,\varphi_{l_{j_0}}(kr)\,dr = 0.$$

Если это условие выполнено, то решение дается тем же рядом, в котором слагаемое, соответствующее $j = j_0$, отсутствует. В этом случае решение определено не однозначно, так как к нему можно добавить слагаемое

$$A_{j_0}\varphi_{l_{j_0}}(kr)\,P_{l_{j_0}, m}(\cos\theta)\,e^{im\varphi},$$

где A_{j_0} — произвольное постоянное число.

Указание. Ввести сферические координаты r, θ, φ. Решение следует искать в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)e^{im\varphi}.$$

Модест Михайлович Смирнов

ЗАДАЧИ ПО УРАВНЕНИЯМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М., 1975 г., 128 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*
Корректор *М. Л. Медведская*

Сдано в набор 1/IV-1975 г.
Подписано к печати 8/X-1975 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ.-печ. л. 4. Условн. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,21.
Тираж 40000 экз. Цена книги 22 коп.
Заказ № 2647

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.