

## 4 Последовательности измеримых функций

**Лемма 4.1.** Пусть  $E$  – измеримое множество и  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность измеримых на  $E$  почти всюду конечных функций. Тогда функции

$$\varphi(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$$

(миноранта и мажоранта последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ) измеримы на  $E$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что

$$E[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a], \quad E[\psi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a].$$

**Лемма 4.2.** Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  – числовая последовательность. Тогда

$$\underline{a} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} a_k, \quad (*),$$

$$\bar{a} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} a_k. \quad (**)$$

**Доказательство.** Докажем формулу (\*). Положим  $b_n = \inf_{k \geq n} a_k$ . Заметим, что последовательность  $b_n$  не убывает. Следовательно существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \geq 1} b_n.$$

По определению  $\underline{a}$  – это минимальный из частичных пределов последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Поэтому существует подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  такая, что для всякого  $\varepsilon > 0$

$$\underline{a} - \varepsilon < a_{n_k} < \underline{a} + \varepsilon \quad \forall k \geq K(\varepsilon).$$

Кроме того,

$$\underline{a} - \varepsilon \leq a_k \quad \forall k \geq M(\varepsilon).$$

Следовательно

$$\underline{a} - \varepsilon \leq b_n \leq \underline{a} + \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \Rightarrow \quad \underline{a} - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{a} + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\underline{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \geq 1} b_n.$$

Формула (\*) доказана. Формула (\*\*) доказывается аналогично.

**Лемма доказана.**

**Лемма 4.3.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность измеримых на  $E$  почти всюду конечных функций. Тогда функции

$$\underline{f}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \overline{f}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

измеримы на  $E$ .

**Доказательство.** Из леммы (4.2) следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad (*)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} f_k(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x). \quad (**)$$

Применяя лемму 4.1, завершаем доказательство теоремы.

**Теорема доказана.**

**Теорема 4.1.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность измеримых на  $E$  функций. Если  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  почти всюду на  $E$ , то функция  $f$  измерима на  $E$ .

**Доказательство.**

$$f(x) = \underline{f}(x) = \overline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{почти всюду на } E.$$

В силу леммы 4.3 функция  $f$  измерима.

**Теорема доказана.**

## Сходимость по мере

**Определение.** Пусть  $f \in \mathfrak{M}(E)$ ,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$ . Говорят, что последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $f$  по мере на  $E$ , если

$$\operatorname{meas} E [|f_n - f| > \delta] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для любого  $\delta > 0$ .

Таким образом,  $f_n \rightarrow f$  по мере на  $E$  тогда и только тогда, когда для всякого  $\delta > 0$  и всякого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что

$$\operatorname{meas} E [|f_n - f| > \delta] < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N.$$

**Пример 1.** Пусть  $E = [0, 1]$  и  $f_n(x) = x^n$ . Тогда  $f_n \rightarrow 0$  по мере, так как

$$E[|f_n - 0| > \delta] = E[|f_n| > \delta] = \begin{cases} (\delta^{1/n}, 1], & 0 < \delta < 1, \\ \emptyset, & 1 \leq \delta \end{cases}$$

и  $\operatorname{meas} E [|f_n - f| > \delta] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Пример 2.** Пусть  $E = \mathbb{R}$  и  $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , но  $f_n \not\rightarrow 0$  по мере, так как

$$\operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \delta\} = 1 \not\rightarrow 0 \quad \text{для } 0 < \delta < 1.$$

**Пример 3. ("Бегающая ступенька")** Пусть  $E = [0, 1]$  и  $f_n = \chi_{[a_n, b_n]}$ , где

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] &= \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad [a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad [a_3, b_3] = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad [a_4, b_4] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ [a_5, b_5] &= \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad [a_6, b_6] = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \quad [a_7, b_7] = \left[0, \frac{1}{8}\right], \quad [a_8, b_8] = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \dots \end{aligned}$$

Эта последовательность не сходится ни в одной точке, но сходится к нулю по мере.

## Арифметические операции над сходящимися по мере последовательностями

**Теорема 4.2.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$ .  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$ ,  $f, g \in \mathfrak{M}(E)$ , где  $E$  – множество конечной меры. Если  $f_n \rightarrow f$  и  $g_n \rightarrow g$  по мере, то

$$f_n \pm g_n \rightarrow f \pm g, \quad f_n g_n \rightarrow fg, \quad f_n/g_n \rightarrow f/g \quad \text{по мере}$$

(последнее при условии, что  $g \neq 0$ ).

**Доказательство.** 1. Из неравенства

$$|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g|$$

следует, что

$$E[|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| > \delta] \subset E[|f_n - f| > \delta/2] \cup E[|g_n - g| > \delta/2].$$

Отсюда

$$|E[|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| > \delta]| \leq |E[|f_n - f| > \delta/2]| + |E[|g_n - g| > \delta/2]| \rightarrow 0.$$

2. Как нетрудно видеть,

$$f_n g_n - f g = (f_n - f)(g_n - g) + (f_n - f)g + (g_n - g)f.$$

В силу первого пункта достаточно доказать, что каждое из слагаемых сходится к нулю по мере.

Заметим, что

$$E[|(f_n - f)(g_n - g)| > \delta] \subset E[|f_n - f| > \sqrt{\delta}] \cup E[|g_n - g| > \sqrt{\delta}].$$

Отсюда

$$|E[|(f_n - f)(g_n - g)| > \delta]| \leq |E[|f_n - f| > \sqrt{\delta}]| + |E[|g_n - g| > \sqrt{\delta}]| \rightarrow 0.$$

Заметим теперь, что

$$E = E[|g| = 0] \cup E[0 < |g| \leq N] \cup E[|g| > N],$$

причем мера множества  $E[|g| > N]$  может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого  $N$ .

Пусть  $E_N = E[0 < |g| \leq N]$ . Тогда

$$E_N[|(f_n - f)g| > \delta] = E_N\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{|g|}\right] \subset E_N\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right] \subset E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right].$$

Следовательно

$$E[|(f_n - f)g| > \delta] \subset E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right] \cup E[|g| > N].$$

Поэтому

$$|E[|(f_n - f)g| > \delta]| \leq \left|E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right]\right| + |E[|g| > N]|.$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $N$  так, чтобы  $|E[|g| > N]| < \varepsilon/2$ . Затем, при фиксированном  $N$  выберем  $n_0(\varepsilon)$  так, чтобы

$$\left|E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right]\right| < \varepsilon/2 \quad \text{при } n > n_0(\varepsilon).$$

В итоге

$$|E[|(f_n - f)g| > \delta]| \leq \left|E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right]\right| + |E[|g| > N]| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Таким образом,  $(f_n - f)g \rightarrow 0$  по мере. Точно так же  $(g_n - g)f \rightarrow 0$  по мере.

3. Докажем теперь, что  $\frac{f_n}{g_n} \rightarrow \frac{f}{g}$  по мере. Поскольку

$$\frac{f_n}{g_n} = f_n \cdot \frac{1}{g_n},$$

то в силу предыдущего пункта достаточно показать, что  $\frac{1}{g_n} \rightarrow \frac{1}{g}$  по мере.

Ясно, что

$$\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g} = \frac{g - g_n}{gg_n}.$$

При фиксированном  $\varepsilon > 0$  выберем  $\alpha > 0$  таким малым, чтобы

$$|E[|g| \leq \alpha]| < \varepsilon/2.$$

Пусть  $x \in E[|g| > \alpha] \cap E[|g_n - g| \leq \alpha/2]$ . Тогда

$$\delta < \left| \frac{1}{g_n} - \frac{1}{g} \right| \leq \frac{|g - g_n|}{|g|(|g| - |g - g_n|)} \leq \frac{|g - g_n|}{\alpha^2/2}$$

Таким образом,

$$E\left[\left|\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g}\right| > \delta\right] \subset E[|g| \leq \alpha] \cup E[|g_n - g| > \alpha/2] \cup E[|g_n - g| > \delta\alpha^2/2].$$

Отсюда

$$\left|E\left[\left|\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g}\right| > \delta\right]\right| < \varepsilon/2 + |E[|g_n - g| > \alpha/2]| + |E[|g_n - g| > \delta\alpha^2/2]| < \varepsilon$$

для всех  $n > n_0(\varepsilon)$ .

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Обратим внимание на то, что предположение о конечности меры множества  $E$  при доказательстве того, что  $f_n \pm g_n \rightarrow f \pm g$ , не использовалось.

## Связь между поточечной сходимостью и сходимостью по мере

**Теорема 4.3.** Пусть  $f \in \mathfrak{M}(E)$ ,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$ , где  $E$  – множество конечной меры. Если  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E$ , то  $f_n \rightarrow f$  по мере на  $E$ .

**Доказательство.** Заметим, что множество

$$E_0 = E[|f| = +\infty] \cup E[f_n \not\rightarrow f] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E[|f_n| = +\infty]$$

имеет нулевую меру. Поэтому достаточно доказать сходимость по мере на множестве  $\tilde{E} = E \setminus E_0$ .

Фиксируем произвольное  $\delta > 0$ . Пусть  $\tilde{E}_n = \tilde{E}[|f_n - f| > \delta]$ . Введем

$$R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \tilde{E}_k, \quad S = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n.$$

Пусть  $x \in \tilde{E}$ . Так как  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  для  $x \in \tilde{E}$ , то

$$x \notin \tilde{E}_n \quad \text{для } n \geq N(\delta, x) \Rightarrow x \notin R_n \Rightarrow x \notin S.$$

Таким образом,  $S = \emptyset$ .

Следовательно  $|R_n| \rightarrow |S| = 0$ . Но  $\tilde{E}_n \subset R_n$  и поэтому  $|\tilde{E}_n| \rightarrow 0$ .

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Если  $|E| = \infty$ , то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере.

Достаточно рассмотреть последовательность  $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ , которая сходится к 0几乎处处, но не сходится по мере.

**Теорема 4.4.** (*Теорема Рисса.*) Пусть  $f \in \mathfrak{M}(E)$ ,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$ , где  $E$  – множество конечной меры.

Если последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $f$  по мере на  $E$ , то существует подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящаяся к  $f$  почти всюду на  $E$ .

**Доказательство.** Выберем последовательность индексов  $n_1 < n_2 < \dots < \dots$  следующим образом:

$$\text{meas } E[|f_{n_k} - f| > 1/k] < \frac{1}{2^k}.$$

Покажем, что построенная последовательность  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  сходится почти всюду. Положим

$$R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E[|f_{n_k} - f| > 1/k], \quad Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m.$$

Так как последовательность  $\{R_m\}_{m=1}^{\infty}$  – убывающая, то  $\text{meas } R_m \rightarrow \text{meas } Q$  при  $m \rightarrow \infty$ . С другой стороны,

$$\text{meas } R_m \leq \sum_{k=m}^{\infty} \text{meas } E[|f_{n_k} - f| \geq 1/k] \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Значит,  $\text{meas } Q = 0$ .

Осталось убедиться в том, что  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  для  $x \in E \setminus Q$ .

Пусть  $x \in E \setminus Q$ . Тогда  $x \notin Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m$ . Следовательно существует номер  $m$  такой, что  $x \notin R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E[|f_{n_k} - f| > 1/k]$ .

Это означает, что

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 1/k \quad \text{для всех } k \geq m.$$

Следовательно  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Обратим внимание еще раз на то, что из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. "Бегающая ступенька" дает пример последовательности функций, сходящейся к нулю по мере на  $[0, 1]$ , но не сходящейся ни в одной точке  $x \in [0, 1]$ .

**Теорема 4.5.** (*Теорема Егорова.*) Пусть  $E$  – измеримое множество конечной меры,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$  и  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E$ .

Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такое измеримое множество  $E_{\varepsilon} \subset E$ , что:

- 1)  $\text{meas}(E \setminus E_{\varepsilon}) < \varepsilon$ ;
- 2)  $f_n$  сходится к  $f$  равномерно на  $E_{\varepsilon}$ .

**Замечание.** В случае  $|E| = \infty$  теорема Егорова не верна.

Пример дает последовательность  $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ , которая сходится к нулю для всех  $x \in E = [0, +\infty)$ . В то же время на дополнении к любому множеству  $\tilde{E}$  конечной меры  $f_n$  не сходится к нулю равномерно.

Действительно, если  $|\tilde{E}| < \infty$  и  $\tilde{E}_n = \tilde{E} \cap [n, n+1]$ , то  $|\tilde{E}_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно  $|[n, n+1] \setminus \tilde{E}_n| \rightarrow 1$ .