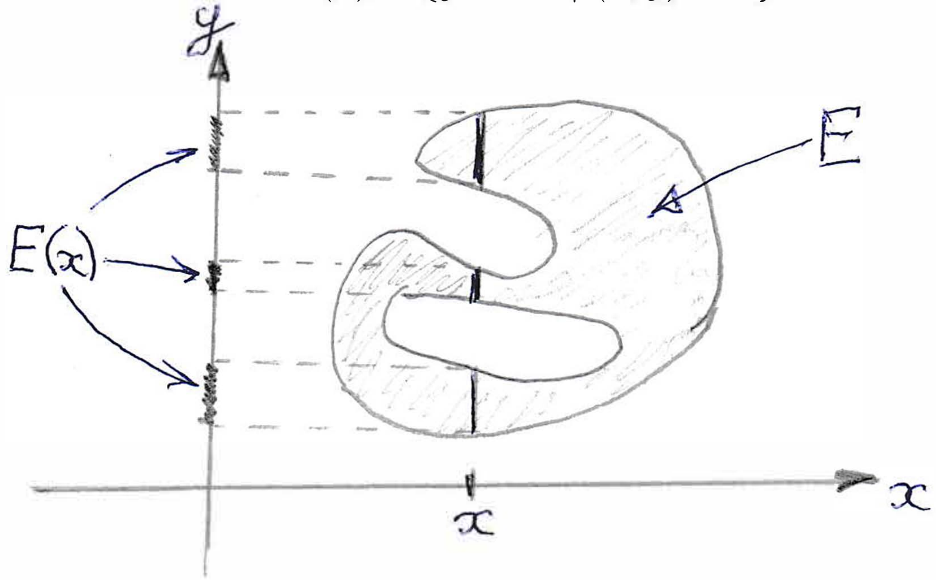
10 Теорема Фубини

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, E – измеримое множество, элементами которого являются точки (x, y), где $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}.$$

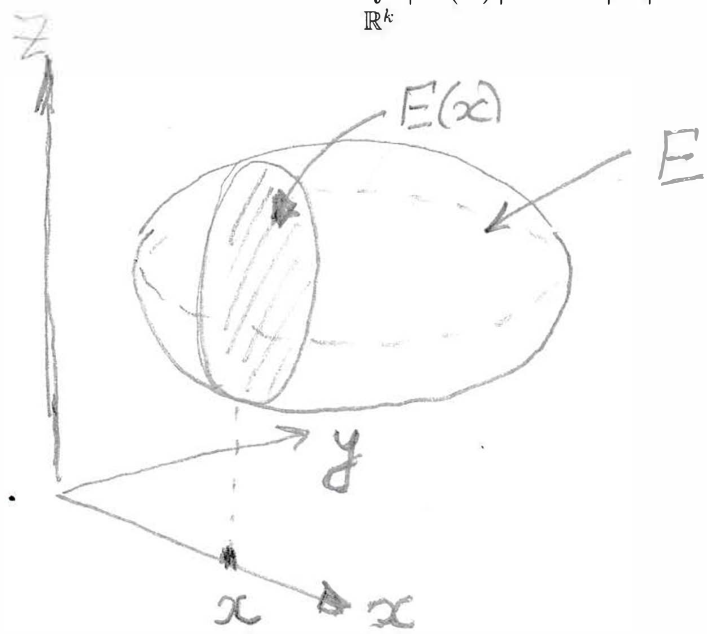


Теорема 10.1. *Пусть E – множество конечной меры. Тогда:*

1) Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k$ множество $E(x)$ измеримо и $|E(x)| < \infty$.

2) Функция $|E(x)|$ измерима и суммируема на $\mathbb{R}^k$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx = |E| \tag{10.1}$$



Теорема 10.1 Пусть E – множество конечной меры. Тогда:
1) Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k$ множество $E(x)$ измеримо и $|E(x)| < \infty$.
2) Функция $|E(x)|$ измерима и суммируема на $\mathbb{R}^k$, причем

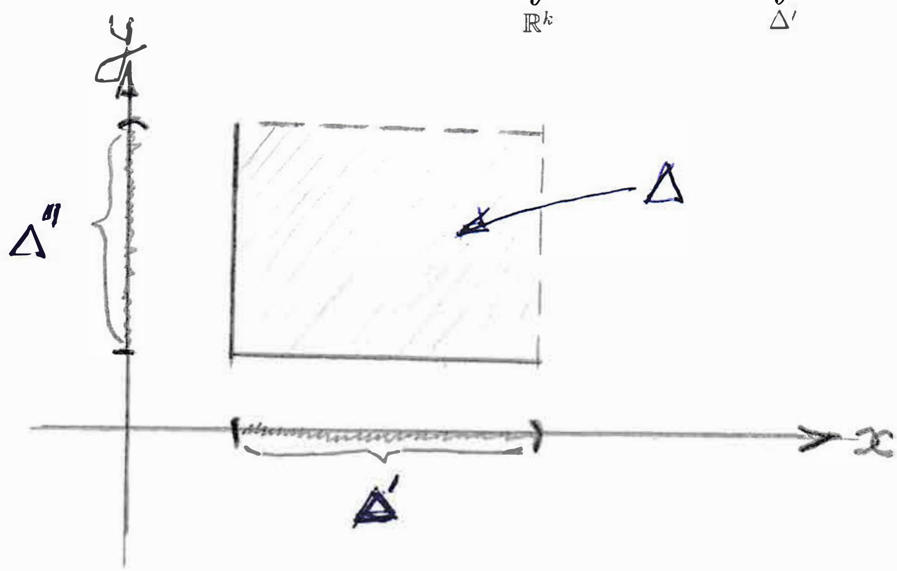
$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx = |E| \tag{10.1}$$

Доказательство. 1) Пусть $E = \Delta = [a, b)$. В этом случае утверждение теоремы не вызывает сомнений, так как

$$E = \Delta = \Delta' \times \Delta'', \quad E(x) = \begin{cases} \Delta'', \ x \in \Delta', \\ \emptyset, \ x \notin \Delta' \end{cases}$$

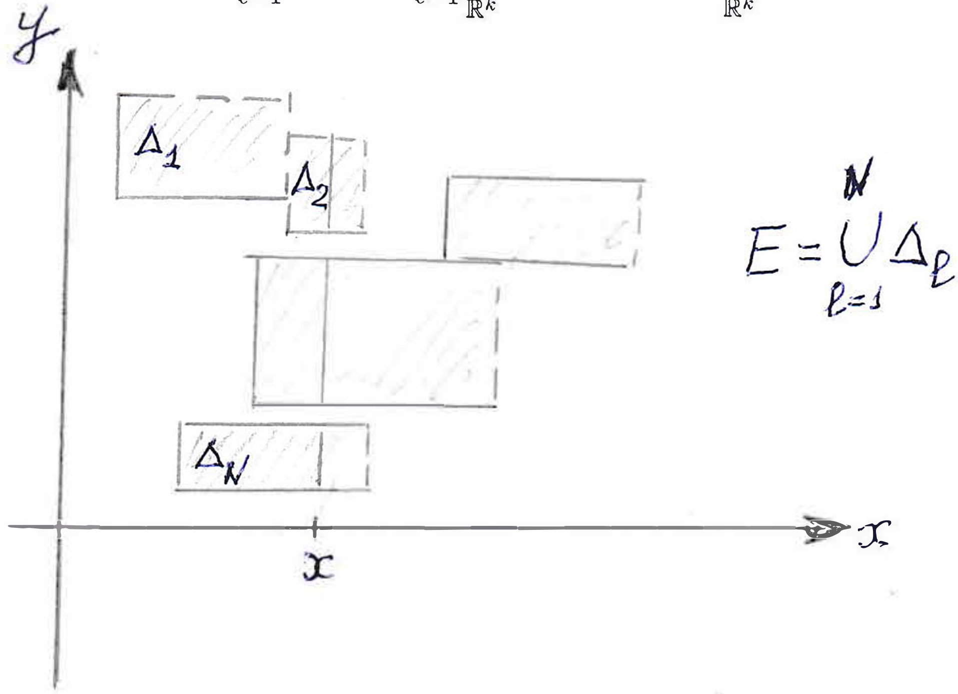
причем

$$|E| = |\Delta| = |\Delta'| \times |\Delta''| = \int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx = \int\limits_{\Delta'} |\Delta''|\, dx.$$



2). Пусть $E = \bigcup\limits_{\ell=1}^{N} \Delta_\ell$, где Δ_ℓ – попарно непересекающиеся промежутки. Тогда в силу пункта 1) множество $E(x) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{N} \Delta_\ell(x)$ имеет конечную меру, функция $|E(x)| = \sum\limits_{\ell=1}^{N} |\Delta_\ell(x)|$ измерима и справедлива формула (10.1):

$$|E| = \sum_{\ell=1}^{N} |\Delta_\ell| = \sum_{\ell=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\Delta_\ell(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx$$



3). Пусть E – произвольное открытое множество конечной меры. Представим это множество в виде объединения счетного набора непересекающихся промежутков $E = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} \Delta_\ell$.

Положим $E_N = \bigcup\limits_{\ell=1}^{N} \Delta_\ell$. В силу пункта 2) множество $E_N(x) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{N} \Delta_\ell(x)$ имеет конечную меру, функция $|E_N(x)| = \sum\limits_{\ell=1}^{N} |E_\ell(x)|$ измерима и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E_N(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \sum_{\ell=1}^{N} |E_\ell(x)|\, dx = \sum_{\ell=1}^{N} |E_\ell| = |E_N| \tag{10.2}$$

В то же время $E(x) = \lim\limits_{N\to\infty} E_N(x)$, $\{E_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность множеств конечной меры. Поэтому $|E(x)| = \lim\limits_{N\to\infty} |E_N(x)|$. Кроме того, последовательность $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$, не убывая, сходится к E.

Поэтому, переходя в равенстве (10.2) к пределу при $N \to \infty$ и используя теорему Б. Леви, приходим к (10.1).

4). Пусть теперь E является множеством типа G_δ, т.е. $E = \bigcap\limits_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$, где G_ℓ – открытые множества. Тогда $E_N = \bigcap\limits_{\ell=1}^{N} G_\ell$ – открытое множество, последовательность $\{E_N\}_{n=1}^{\infty}$, монотонно не возрастая, сходится к E, последовательность $\{E_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$, монотонно не возрастая, сходится к $E(x)$. В силу пункта 3 множества $E_N(x)$ и функции $|E_N(x)|$ измеримы и верно равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E_N(x)|\, dx = |E_N|.$$

Переходя в нем к пределу при $N \to \infty$, снова приходим к (10.1).

5). Пусть E – множество нулевой меры. Тогда для всякого $N \geqslant 1$ существует открытое множество $G_N \supset E$ такое, что $|G_N| < 1/N$. Поэтому

$$E \subset E_0 = \bigcap_{N=1}^{\infty} G_N \quad \text{и} \quad |E_0| = 0.$$

В силу пункта 4) множества $E_0(x)$ измеримы, измеримы функции $|E_0(x)|$ и

$$\int_{\mathbb{R}^k} |E_0(x)|\, dx = |E_0| = 0.$$

Следовательно $|E_0(x)| = 0$ для почти всех x. Но $E(x) \subset E_0(x)$. Следовательно $|E(x)| = 0$ для почти всех x. Очевидно теперь, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx = |E| = 0.$$

6). Пусть теперь E – произвольное измеримое множество конечной меры. Тогда существуют множество E_1 типа G_δ и множество E_2 нулевой меры, что

$$E_1 = E \cup E_2, \quad E \cap E_2 = \emptyset.$$

Так как утверждение теоремы верно для E_1 и E_2, то оно верно и для E:

$$E(x) = E_1(x) - E_2(x) \Rightarrow E(x) \quad \text{измеримо и} \quad |E(x)| = |E_1(x)| - |E_2(x)|,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} |E_1(x)|\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^k} |E_2(x)|\,dx = |E_1| = |E|.$$

Теорема доказана.

Замечание 10.1. *Если $|E| = \infty$, то справедлив следующий вариант теоремы 10.1.*

Теорема 10.2. *Пусть $|E| = \infty$. Тогда:*

1) Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k$ множество $E(x)$ измеримо.

2) Функция $|E(x)|$ измерима и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\,dx = |E| = \infty \tag{10.3}$$

Теорема 10.3. *Пусть функция $f(x,y)$ задана и измерима на E.*

Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^k$ функция $f(x,y)$, рассматриваемая как функция аргумента y, измерима на $E(x)$.

Доказательство. Построим последовательность простых функций вида

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^{N_n} y_k^{(n)} \chi_{E_k^{(n)}}(x,y), \tag{10.4}$$

сходящихся к $f(x,y)$ для $(x,y) \in E$.

В силу теоремы 10.1 множества $E_k^{(n)}(x)$ измеримы для почти всех x и имеют конечную меру. Поскольку таких множеств счетный набор, то для почти всех x все множества $E_k^{(n)}(x)$ измеримы и имеют конечную меру одновременно,

Тогда для этих значений x последовательность (10.4) представляет собой последовательность измеримых функций аргумента y, сходящихся к $f(x,y)$.

В силу этого функция $f(x,y)$, рассматриваемая как функция аргумента y, измерима на $E(x)$.

Теорема доказана.

Теорема 10.4. *(Теорема Фубини) Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}^m$. *Тогда:*

1) Функция

$$F(x) = \int\limits_{E(x)} f(x, y)\, dy \tag{10.5}$$

измерима и суммируема на $\mathbb{R}^k$, *причем*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} f(x, y)\, dy \Big] dx = \int\limits_{E} f(x, y)\, dx dy. \tag{10.6}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $f \geqslant 0$. Рассмотрим неубывающую последовательность простых функций вида

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{N_n} y_k^{(n)} \chi_{E_k^{(n)}}(x, y),$$

сходящихся к $f(x, y)$ для $(x, y) \in E$. Напомним, что $|E_k^{(n)}| < \infty$.

Из теорем 10.1 и 10.3 следует, что для почти всех x множества $E_k^{(n)}(x)$ измеримы и функция $f(x, y)$ измерима как функция аргумента $y \in E(x)$. Кроме того, функция

$$F_n(x) = \int\limits_{E(x)} f_n(x, y)\, dy = \sum_{k=1}^{N_n} y_k^{(n)} |E_k^{(n)}(x)| \tag{10.7}$$

измерима и суммируема на $\mathbb{R}^k$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F_n(x)\, dx = \int\limits_{E} f_n(x, y)\, dx dy \tag{10.8}$$

В силу теоремы Б. Леви в равенствах (10.7), (10.8) можно перейти к пределу и получить (10.5) и (10.6).

В случае, когда функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ произвольного знака, представим ее в виде $f = f^+ - f^-$ и используем доказанное утверждение для f^+ и f^- отдельно.

Теорема доказана.

Пусть $f \in L_1(E)$, где $E \subset \mathbb{R}^m$. Положим $E' = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \operatorname{meas} E(x) > 0\}$ и доопределим f нулем вне E.

Тогда формулу (10.6) можно переписать в следующем виде

$$\int\limits_{E'} \Big[\int\limits_{E(x)} f(x,y)\,dy \Big] dx = \int\limits_{E} f(x,y)\,dxdy. \tag{10.9}$$

Следствие из теоремы Фубини. Пусть функция f измерима на $E \subset \mathbb{R}^m$. Если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} |f(x,y)|\,dy \Big] dx < \infty,$$

то $f \in L_1(E)$.

Доказательство. Положим

$$g_N(x,y) = \chi_{B_N}(x,y)[|f|]_N(x,y).$$

Применяя к g_N теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_{E} g_N(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} g_N(x,y)\,dy \Big] dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} |f(x,y)|\,dy \Big] dx$$

Так как $g_N(x,y)$, монотонно неубывая, сходится к $|f(x,y)|$, то в силу теоремы Б. Леви $f \in L_1(E)$.

Следствие доказано.