3 Разбиение на классы. Отношения эквивалентности

Если множество M представлено в виде суммы $M = \bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha$ своих попарно непересекающихся подмножеств M_α, то говорят, что *множество* M *разбито на классы* M_α.

Примеры разбиения на классы.

1. Множество точек (x, y) плоскости $\mathbb{R}^2$ можно, например, разбить на классы прямых $M_\alpha = \{(x, y) \mid x = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, параллельных оси ординат или на классы концентрических окружностей $M_r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r\}$, $r \geqslant 0$.

2. Множество всех интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций можно, например, разбить на классы $M_\alpha = \left\{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \alpha\right\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть заданы непустое множество M и множество $\Phi \in M \times M$. Говорят, что элементы $a, b \in M$ связаны *отношением* φ и пишут $a \underset{\varphi}{\sim} b$, если $(a, b) \in \Phi$. Отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

1) рефлексивность: $a \underset{\varphi}{\sim} a$ для любого элемента $a \in M$;

2) симметричность: $a \underset{\varphi}{\sim} b \Leftrightarrow b \underset{\varphi}{\sim} a$;

3) транзитивность: $a \underset{\varphi}{\sim} b,\ b \underset{\varphi}{\sim} c \Rightarrow a \underset{\varphi}{\sim} c$.

Заметим, что каждое разбиение множества M на классы порождает некоторое отношение эквивалентности. Обратно, каждое отношение эквивалентности порождает некоторое разбиение множества M на классы эквивалентных между собой элементов.

Действительно, пусть M разбито на классы M_α. Тогда отношение эквивалентности φ можно ввести так: $a \underset{\varphi}{\sim} b$ тогда и только тогда, когда a и b входят в один класс.

Пусть теперь в M введено отношение эквивалентности. Тогда объединим в один класс M_a все элементы, эквивалентные a. Очевидно $a \in M_a$. Заметим, что два класса M_a и M_b либо совпадают либо не пересекаются. Кроме того объединение всех классов дает все множество M.

Понятие разбиения множества на классы тесно связано с рассмотренным в параграфе 2 понятием отображения. Например, всякое отображение $f : M \to N$, порождает следующее разбиение множества M на классы:

$$M = \bigcup_{y \in N} f^{-1}(y).$$

Если же задано разбиение множества M на классы M_α, то, сопоставив элементу $x \in M$ отвечающий ему класс, мы получаем отображение $f : M \to N$, где $N = \{M_\alpha\}$.

4 Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества

Опр. Говорят, что множество A *эквивалентно* множеству B, если существует взаимно однозначное отображение A на B. Это свойство записывают так:
$A \sim B$.

Очевидно, что:
1) $A \sim A$;
2) $A \sim B \ \Rightarrow \ B \sim A$;
3) $A \sim B, \ B \sim C \ \Rightarrow \ A \sim C$.

Ясно, что конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов,

Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Опр. Множество A называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Множество A называется *не более чем счетным*, если оно конечно либо счетно. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называют *несчетным*.

Пример 1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.

Действительно, целые числа можно перенумеровать, например, следуюшим образом:

$$0, \quad -1, \quad 1, \quad -2, \quad 2, \quad -3, \quad 3, \ldots$$

Соответствующее отображение можно задать формулой

$$f(n) = \begin{cases} (n-1)/2, & \text{если} \quad n \quad \text{нечетно}, \\ -n/2, & \text{если} \quad n \quad \text{четно}. \end{cases}$$

Пример 2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

Докажем это. Каждое рациональное число однозначно представляется в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$, где p - целое, q - натуральное. Назовем число $h = |p| + q$ *высотой рационального числа.*

Ясно, что число различных рациональных чисел одной высоты конечно. Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию высоты.

Высота 1. 0/1.
Высота 2. -1/1, 1/1.
Высота 3. -1/2, 1/2, -2/1. 2/1.
....

В этом процессе каждое рациональное число получит некоторый номер. Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и множеством натуральных чисел.

Пример 3. Множество алгебраических чисел счетно.

Число x называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ с целыми коэффициентами.

Например число $x = \sqrt{2}$ алгебраическое, так как оно является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$.

Теорема 4.1. *Всякое подмножество счетного множества не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ – счетное множество и $B \subset A$. Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ – те элементы множества A, которые входят в B. Если B бесконечно, то B – счетное множество.

Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Объединение не более чем счетной совокупности счетных множеств также является счетным множеством.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ либо $A = \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$, где множества $A_n = \{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ - счетные. Запишем элементы A в виде следующей таблицы

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

и перенумеруем элементы "по диагоналям" следующим образом:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{13},\ a_{22},\ a_{31},\ a_{14},\ a_{23},\ a_{32}\ , a_{41},\ \dots$$

При этом повторяющиеся элементы (то есть элементы, уже получившие номер) нумеровать не будем. В этом процессе будут занумерованы все элементы множества A, причем только один раз.

Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть M – бесконечное множество. Выберем в нем элемент $a_1 \in M$. Поскольку множество M бесконечно, то существует элемент $a_2 \in M$, $a_2 \neq a_1$. Точно так же существует элемент $a_3 \in M$, отличный от a_1 и a_2, и т.д. Таким образом, существует счетное подмножество

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset M.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 4.3 показывает, что среди бесконечных множеств счетные множества являются "самыми маленькими".

Теорема 4.4. *Множество действительных чисел из отрезка* $[0, 1]$ *несчетно.*

Доказательство. Предположим, что множество $[0, 1]$ счетно, то есть $[0, 1] = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выпишем последовательность соответствующих десятичных дробей:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 0.\,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots,\\
&a_2 = 0.\,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots,\\
&a_3 = 0.\,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n = 0.\,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

где α_{nk} – десятичные цифры.

Построим вещественное число $b = 0.\,\beta_1\beta_3\ldots\beta_n\ldots$, используя *диагональный процесс Кантора*. Для каждого $n \geqslant 1$ за β_n примем любую цифру, отличную от α_{nn}, 0 и 9. Ясно, что $b \in [0, 1]$, но в то же время b не совпадает ни с одним из чисел a_n. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Замечание. Обратим внимание, что некоторые числа допускают две формы записи в виде бесконечной десятичной дроби. Например,

$$0.10000\cdots = 0.09999\ldots \qquad 0.030000\cdots = 0.029999\ldots$$

Ясно, что таких "плохих" чисел счетное множество. Для однозначности записи обычно договариваются, какая из форм записи будет использоваться.