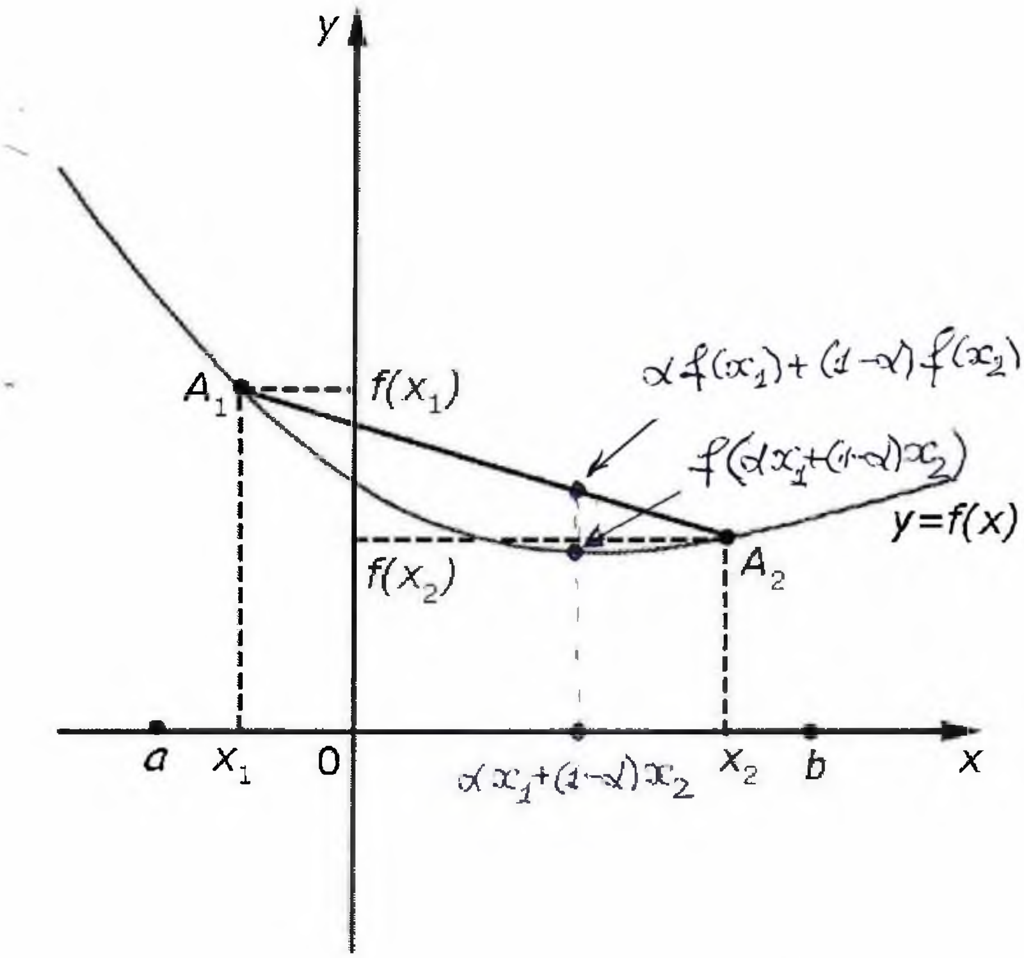
6 Некоторые важные числовые неравенства

Напомним, что функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется выпуклой, если для всех $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ и $\alpha \in [0, 1]$ она удовлетворяет неравенству

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \tag{6.1}$$



Лемма 6.1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$|a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Функция $f(x) = |x|^p$ выпукла при $p \geqslant 1$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p \Rightarrow |a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Лемма доказана.

Опр. Будем говорить, что показатели $1 < p < \infty$ и $1 < q < \infty$ сопряжены по Гельдеру, если $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Показатель q, сопряженный по Гельдеру к p принято обозначать через p'.

Заметим, что $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Лемма 6.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ - сопряженые по Гельдеру показатели. Тогда справедливо неравенство Юнга*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall\, a > 0,\ \forall\, b > 0, \tag{6.3}$$

причем знак равенства имеет место лишь при $a = b^{q-1}$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что функция $\varphi(x) = -\ln x$ выпукла:

$$-\ln\Big(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\Big) \leqslant -\frac{1}{p}\ln a^p - \frac{1}{q}\ln b^q = -\ln(ab) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(ab) \leqslant \ln\Big(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\Big) \Leftrightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Лемма доказана.

Замечание. В случае $p = q = 2$ неравенство Юнга принимает наиболее простой вид

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \forall\, a > 0,\ \forall\, b > 0. \tag{6.4}$$

Это неравенство принято называть неравенством Коши.