4 Компактные множества. Лемма Гейне-Бореля

Опр. Множество K, принадлежащее метрическому пространству M, называется *предкомпактным* или *относительно компактным*, если из всякой последовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Опр. Множество $K \subset M$ называется *компактным* (или *компактом*), если из всякой последовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $x \in K$.

Очевидно, что всякое компактное множество является предкомпактным.

Предложение 4.1. *Всякое предкомпактное множество ограничено.*

Доказательство. Предположим, что множество K предкомпактно, но не ограничено. Возьмем точку $x_0 \in K$. Построим последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\rho(x_0, x_n) \geqslant n$. Так как K предкомпактно, то из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$. Но тогда $\rho(x_0, x_n) \to \rho(x_0, x)$, что противоречит неограниченности последовательности $\{\rho(x_0, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Предложение доказано.

Следствие 4.1. *Всякое компактное множество ограничено и замкнуто.*

Опр. Система множеств $\{G_\alpha\} \subset M$ называется *покрытием* множества $K \subset M$, если $K \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$.

Покрытие, состоящее из открытых множеств, называется *открытым покрытием.*

Конечная система множеств $\{G_{\alpha_n}\}_{n=1}^N$, содержащаяся в покрытии $\{G_\alpha\}$ и сама являющаяся покрытием, называется *конечным подпокрытием.*

Теорема 4.1. *(Лемма Гейне-Бореля) Из всякого открытого покрытия компактного множества можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть K – компактное множество и $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$, где G_α – открытые множества.

Введем функцию

$$r(x) = \sup\{r > 0 \mid B_r(x) \subset G_\alpha \quad \text{для некоторого} \;\; \alpha\}.$$

и положим $r_0 = \inf\limits_{x \in K} r(x)$.

Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ такую, что $r_0 = \lim\limits_{n\to\infty} r(x_n)$. В силу компактности множества K из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$.

Точка $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ находится в одном из G_α вместе с некоторой своей окрестностью $B_\varepsilon(x_0)$. Поскольку $\rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon/2$ для всех достаточно больших k, то $B_{\varepsilon/2}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(x_0) \subset G_\alpha$. Следовательно $r(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon/2$ и $r_0 \geqslant \varepsilon/2 > 0$.

Итак, для каждой точки $x \in K$ существует ее окрестность радиуса r_0, целиком содержащаяся в одном из множеств $G(x) \in \{G_\alpha\}$. Проделаем теперь следующую последовательность шагов.

Шаг 1. Положим $K_1 = K$. Выберем $x_1 \in K_1$.

Шаг 2. Положим $K_2 = K_1 \setminus G(x_1)$. Если $K_2 \neq \emptyset$, то выберем $x_2 \in K_2$.

. . . .

Шаг n. Положим $K_n = K_{n-1} \setminus G(x_{n-1})$. Если $K_n \neq \emptyset$, то выберем $x_n \in K_n$.

. . . .

Этот процесс на некотором шаге оборвется. Действительно, в противном случае можно построить бесконечную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $\rho(x_n, x_m) \geqslant r_0 > 0$ и поэтому из нее нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Таким образом, при некотором N получим $K_{N+1} = \emptyset$ и поэтому $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^N G(x_n)$.

Теорема доказана.

Пример. Покажем, как можно применить лемму Гейне-Бореля для доказательства того, что всякая непрерывная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, является ограниченной.

Доказательство. В силу непрерывности f для всякой $x_0 \in [a, b]$ существует интервал $(x_0 - \varepsilon(x_0), x_0 + \varepsilon(x_0))$ такой, что

$$|f(x)| \leqslant C(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b] \cap (x_0 - \varepsilon(x_0), x_0 + \varepsilon(x_0)).$$

В силу леммы Гейне-Бореля Из открытого покрытия $\{(x_0-\varepsilon(x_0), x_0+\varepsilon(x_0))\}_{x_0 \in [a,b]}$ отрезка $[a, b]$ можно выделить конечное подпокрытие $\{(x_k-\varepsilon(x_k), x_k+\varepsilon(x_k))\}_{k=1}^{N}$. Поэтому

$$|f(x)| \leqslant C = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} C(x_k) \quad \text{для всех} \;\; x \in [a, b].$$

Замечание. Обратим еще раз внимание на то, что всякое предкомпактное множество является ограниченным. Однако не всякое ограниченное множество является предкомпактным.

Рассмотрим замкнутый шар $\overline{B}_1(0)$ в пространстве ℓ_2, элементами которого являются числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ такие, что

$$\rho(x, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \leqslant 1.$$

Возьмем последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots), \ldots e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots), \ldots.$$

и заметим, что $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ для всех $n \neq m$. Поэтому из этой последовательности нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности.

Значит, замкнутый шар $\overline{B}_1(0)$ в ℓ_2 не является предкомпактным множеством.