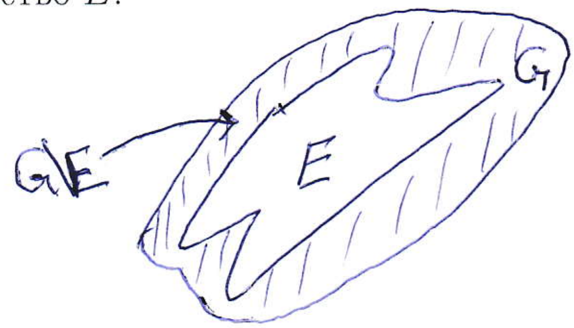
4 Измеримые множества

Опр. Множество E называется *измеримым (по Лебегу)*, если

$$\inf_{G \supset E} |G \setminus E|^* = 0;$$

здесь точная нижняя грань берется по всевозможным открытым множествам G, содержащим множество E.



Замечание. Множество E измеримо тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_\varepsilon \supset E$ такое, что $|G_\varepsilon \setminus E|^* < \varepsilon$.

Опр. Для измеримого множества E *мерой* этого множества называется его внешняя мера:

$$|E| = |E|^*.$$

Для меры множества E используются также обозначения $meas\,E$ и $\mu(E)$.

Предложение 4.1. *Всякое открытое множество измеримо.*

Доказательство. Взяв $G_\varepsilon = G$, получим $|G_\varepsilon \setminus G|^* = |\emptyset|^* = 0 < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Предложение 4.2. *Если $|E|^* = 0$, то множество E измеримо*

Доказательство. По условию $\inf\limits_{G \supset E} |G| = 0$.

Так как $|G \setminus E|^* \leqslant |G|^* = |G|$, то $\inf\limits_{G \supset E} |G \setminus E|^* \leqslant \inf\limits_{G \supset E} |G| = 0$.

Теорема 4.1. *Объединение не более чем счетной системы измеримых множеств измеримо.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k – измеримые множества.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всякого $k \geqslant 1$ существует открытое множество $G_{k,\varepsilon} \supset E_k$ такое, что $|G_{k,\varepsilon} \setminus E_k|^* < \varepsilon/2^k$.

Положим $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{k,\varepsilon}$. Как нетрудно видеть, G_ε открыто и

$$G_\varepsilon \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_{k,\varepsilon} \setminus E_k).$$

Поэтому

$$|G_\varepsilon \setminus E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |G_{k,\varepsilon} \setminus E_k|^* < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Лемма 4.1. *Пусть F_1 и F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда*

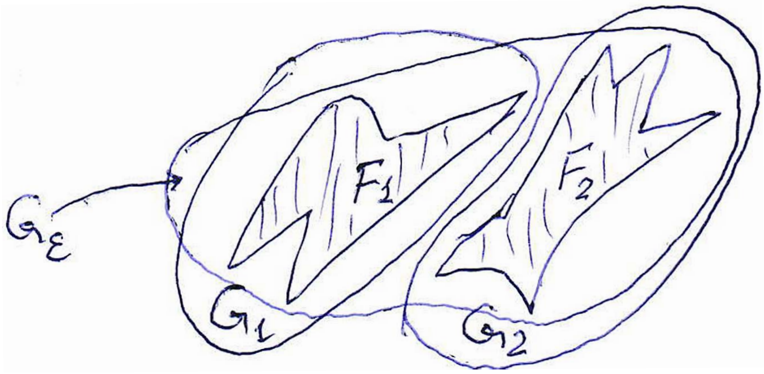
$$|F_1 \cup F_2|^* = |F_1|^* + |F_2|^*.$$

Доказательство. В силу свойств внешней меры

$$|F_1 \cup F_2|^* \leqslant |F_1|^* + |F_2|^*.$$

В силу теоремы об отделимости замкнутых непересекающихся множеств существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$.

Кроме того, в силу определения внешней меры для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_\varepsilon \supset (F_1 \cup F_2)$ такое, что $|G_\varepsilon| \leqslant |F_1 \cup F_2|^* + \varepsilon$.



Заметим, что

$$F_1 \subset G_{1,\varepsilon} = G_1 \cap G_\varepsilon, \quad F_2 \subset G_{2,\varepsilon} = G_2 \cap G_\varepsilon$$

и

$$|F_1|^* + |F_2|^* \leqslant |G_{1,\varepsilon}| + |G_{2,\varepsilon}| = |G_{1,\varepsilon} \cup G_{2,\varepsilon}| \leqslant |G_\varepsilon| \leqslant |F_1 \cup F_2|^* + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|F_1|^* + |F_2|^* \leqslant |F_1 \cup F_2|^*.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Всякое замкнутое множество измеримо.*

Доказательство. 1. Пусть F – замкнутое ограниченное множество. По определению внешней меры для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_\varepsilon \supset F_\varepsilon$ такое, что $|G_\varepsilon| < |F|^* + \varepsilon$.

Множество $G_\varepsilon \setminus F$ открытое и имеет конечную меру. В силу предложения 2.2 существует ограниченное открытое множество G такое, что

$$\overline{G} \subset G_\varepsilon \setminus F \quad \text{и} \quad |G_\varepsilon \setminus F|^* \leqslant |G| + \varepsilon.$$

Заметим, что $\overline{G} \cap F = \emptyset$. Поэтому в силу леммы 4.1

$$|F|^* + |G_\varepsilon \setminus F|^* \leqslant |F|^* + |\overline{G}|^* + \varepsilon = |F \cup \overline{G}|^* + \varepsilon \leqslant |G_\varepsilon| + \varepsilon \leqslant |F|^* + 2\varepsilon.$$

Таким образом, $|G_\varepsilon \setminus F|^* \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно F – измеримо.

2. Пусть F – замкнутое неограниченное множество. Заметим, что множества $F_N = F \cap \{|x| \leqslant N\}$ замкнуты и ограничены. Как следствие F_N измеримы. Поскольку $F = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} F_N$, то множество F также измеримо.

Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Дополнение* $\complement E = \mathbb{R}^m \setminus E$ *измеримого множества* E *измеримо.*

Доказательство. Для всякого $n \geqslant 1$ существует открытое множество $G_n \supset E$ такое, что $|G_n \setminus E|^* < 1/n$.

Введем замкнутые множества $F_n = \complement G_n \subset \complement E$ и множество $E_0 = \complement E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_n$. Так как $\complement E = E_0 + \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то в силу теорем 4.1 и 4.2 достаточно доказать измеримость множества E_0.

Заметим, что

$$E_0 \subset \complement E \setminus F_n = G_n \setminus E \Rightarrow |E_0|^* \leqslant |G_n \setminus E|^* < 1/n.$$

Таким образом, $|E_0|^* = 0 \Rightarrow$ множество E_0 измеримо.

Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Пересечение не более чем счетной системы измеримых множеств измеримо. Разность двух измеримых множеств измерима.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ – система измеримых множеств. В силу формул

$$\bigcap_n E_n = \complement(\bigcup_n \complement E_n), \quad E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap \complement E_2$$

множества $\bigcap\limits_n E_n$ и $E_1 \setminus E_2$ измеримы.

Теорема доказана.

Замечание. Из теорем 4.1, 4.3 и 4.4 следует, что система $\mathscr{L}$ всех измеримых множеств является σ- алгеброй. Она называется *лебеговой* σ*- алгеброй.*

Как нетрудно видеть, при $m = 1$ борелевская σ - алгебра $\mathfrak{B}$ содержится в $\mathscr{L}$.

Теорема 4.5. *Множество E измеримо тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F_\varepsilon \subset E$ такое, что $|E \setminus F_\varepsilon|^* < \varepsilon$.*

Доказательство. Если множество E измеримо, то множество $\complement E$ также измеримо. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_\varepsilon \supset \complement E$ такое, что $|G_\varepsilon \setminus \complement E|^* < \varepsilon$.

Возьмем $F_\varepsilon = \complement G_\varepsilon$. Тогда $F_\varepsilon \subset E$, $E \setminus F_\varepsilon = G_\varepsilon \setminus \complement E$ и

$$|E \setminus F_\varepsilon|^* = |G_\varepsilon \setminus \complement E|^* < \varepsilon.$$

Предположим теперь, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F_\varepsilon \subset E$ такое, что $|E \setminus F_\varepsilon|^* < \varepsilon$. Тогда множество $G_\varepsilon = \complement F_\varepsilon$ содержит $\complement E$ таково, что $G_\varepsilon \setminus \complement E = E \setminus F_\varepsilon$ и поэтому

$$|G_\varepsilon \setminus \complement E|^* = |E \setminus F_\varepsilon|^* < \varepsilon.$$

Следовательно $\complement E$ измеримо $\Rightarrow$ E измеримо.

Теорема доказана.

Опр. Множество E называется *множеством типа* F_σ, если существует последовательность замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Множество E называется *множеством типа* G_δ, если существует последовательность открытых множеств $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Предложение 4.3. *Всякое открытое и всякое замкнутое множество являются множествами типа F_σ и G_δ одновременно.*

Доказательство. Пусть F - замкнутое множество. Тогда $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F$. Кроме того, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, где $G_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x, F) < 1/n\}$.

Если G – открытое множество, то $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G$. Так как замкнутое множество $\complement G$ является множеством типа G_δ, то

$$\complement G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \Rightarrow G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement G_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Множество E измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда существуют множество E_1 типа F_σ и множество E_2 типа G_δ такие, что*

$$E_1 \subset E \subset E_2 \quad \text{и} \quad |E \setminus E_1| = |E_2 \setminus E| = 0.$$

Доказательство. Если множество E измеримо, то для всякого $n \geqslant 1$ существуют открытое множество G_n и замкнутое множество F_n такие, что

$$F_n \subset E \subset G_n \quad \text{и} \quad |E \setminus F_n| < 1/n, \quad |G_n \setminus E| < 1/n.$$

Положим $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $E_2 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Ясно, что $E_1 \subset E \subset E_2$. Кроме того,

$$E \setminus E_1 \subset E \setminus F_n \Rightarrow |E \setminus E_1| \leqslant |E \setminus F_n| < 1/n \Rightarrow |E \setminus E_1| = 0,$$
$$E_2 \setminus E \subset G_2 \setminus E \Rightarrow |E_2 \setminus E| \leqslant |G_n \setminus E| < 1/n \Rightarrow |E_2 \setminus E| = 0.$$

Пусть теперь существуют множество E_1 типа F_σ и множество E_2 типа G_δ такие, что

$$E_1 \subset E \subset E_2 \quad \text{и} \quad |E \setminus E_1| = |E_2 \setminus E| = 0.$$

Тогда $E = E_1 + (E \setminus E_1)$ – измеримое множество.

Теорема доказана.

Теорема 4.7. *(О счетной аддитивности меры Лебега.)*

Пусть $E = \bigcup\limits_k E_k$, *где* $\{E_k\}_{k\geqslant 1}$ *– последовательность попарно непересекающихся измеримых по Лебегу множеств. Тогда*

$$|E| = \sum_k |E_k|.$$

Доказательство. В силу теоремы 4.5 для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $k \geqslant 1$ существует замкнутое множество $F_{k,\varepsilon} \subset E_k$ такое, что $|E_k \setminus F_{k,\varepsilon}| < \varepsilon/2^k$. Как следствие,

$$|E_k| \leqslant |F_{k,\varepsilon}| + \varepsilon/2^k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{N} |E_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |F_{k,\varepsilon}| + \varepsilon = \Big|\bigcup_{k=1}^{N} F_{k,\varepsilon}\Big| + \varepsilon \leqslant |E| + \varepsilon.$$

Как следствие,

$$\sum_k |E_k| \leqslant |E|.$$

Осталось, заметить, что неравенство

$$|E| \leqslant \sum_k |E_k|$$

справедливо в силу свойств внешней меры.

Теорема доказана.

Теорема 4.8. *Пусть A – множество конечной меры, а B – его измеримое подмножество. Тогда $|A \setminus B| = |A| - |B|$.*

Доказательство.

$$A = B + (A \setminus B) \Rightarrow |A| = |A \setminus B| + |B| \Rightarrow |A \setminus B| = |A| - |B|.$$

Теорема 4.9. *Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонная (возрастающая или убывающая) последовательность множеств конечной меры и $E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$. Тогда*

$$|E| = \lim_{n\to\infty} |E_n|.$$

Доказательство. 1. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность. Тогда

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{и} \quad E_1 = E + \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E_{k+1}).$$

Поэтому в силу счетной аддитивности меры Лебега

$$|E_1| = |E| + \sum_{k=1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}|.$$

Следовательно ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}|$ сходится.

Заметим теперь, что

$$E_n = E + \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_k \setminus E_{k+1}).$$

Поэтому

$$|E_n| = |E| + \sum_{k=n}^{\infty} |E_k \setminus E_{k+1}| \to |E| \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2. Пусть теперь $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность. Тогда

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{и} \quad E = E_1 + \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_{k+1} \setminus E_k).$$

Поэтому

$$|E| = |E_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k|.$$

Возможны 2 случая: а) $|E| < \infty$, б) $|E| = \infty$.

Если $|E| < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k|$ сходится и

$$E = E_n + \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_{k+1} \setminus E_k) \Rightarrow |E| = |E_n| + \sum_{k=n}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k|.$$

Отсюда $|E| = \lim\limits_{n\to\infty} |E_n|$.

Пусть теперь $|E| = \infty$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_{k+1} \setminus E_k| = \infty$ и

$$E_n = E_1 + \bigcup_{k=1}^{n-1} (E_{k+1} \setminus E_k) \Rightarrow |E_n| = |E_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |E_{k+1} \setminus E_k| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

5 Существование неизмеримого множества.

Теорема 5.1. *Существует неизмеримое множество $E \subset [0,1)$.*

Доказательство. Введем на $[0,1)$ отношение эквивалентности, положив $x \sim y$, если $x - y$ рационально. В результате мы получим разбиение множества $[0,1)$ на классы эквивалентности.

Выберем в каждом классе эквивалентности по одному элементу x и объединим все такие элементы в множество E. (Заметим, что расстояние между двумя различными элементами множества E иррационально.)

Покажем, что множество E неизмеримо. Для этого допустим, что оно измеримо.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел из полусегмента $[0,1)$. Построим множества

$$E_n^- = E \cap \{x < 1 - \alpha_n\}, \quad E_n^+ = E \cap \{x \geqslant 1 - \alpha_n\},$$
$$E_n = [E_n^- + \alpha_n] \cup [E_n^+ + \alpha_n - 1\}.$$

Ясно, что множества $E_n^- + \alpha_n$ и $E_n^+ + \alpha_n - 1$ не пересекаются и

$$|E_n| = |E_n^- + \alpha_n| + |E_n^+ + \alpha_n - 1| = |E_n^+| + |E_n^-| = |E|.$$

Заметим также, что множества E_n не пересекаются и

$$[0,1) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{5.1}$$

В самом деле, для всякой точки $y \in [0,1)$ существует точка $x \in E$ такая, что $y - x$ рационально. Если $y - x = \alpha_n > 0$, то $y \in E_n^- + \alpha_n \subset E_n$. Если же $y - x = -\beta_n < 0$, то $y \in E_n^+ + \alpha_n - 1 \subset E_n$, где $\alpha_n = 1 - \beta_n$.

Но из (5.1) следует тогда

$$|[0,1)| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |E|.$$

Если $|E| > 0$, то $|[0,1)| = \infty$. Если же $|E| = 0$, то $|[0,1)| = 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.