ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

1 Суммируемые по Лебегу функции

Всюду в этой главе E – измеримое множество в $\mathbb{R}^m$.

В этом параграфе E – ограниченное измеримое множество и f – заданная на E ограниченная измеримая функция.

Опр. Конечная система измеримых множеств $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ называется *разбиением множества* E, если

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E \quad \text{и} \quad |E_i \cap E_j| = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Фиксируем некоторое разбиение T множества E и положим

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Составим *нижнюю* и *верхнюю интегральные суммы*

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|, \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k|.$$

Ясно, что

$$s_T(f) \leqslant S_T(f).$$

Введем *нижний* и *верхний интегралы Лебега* функции f на множестве E следующим образом:

$$\underline{J}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f).$$

Опр. Функция f называется *интегрируемой по Лебегу на множестве* E (или *суммируемой на* E), если

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Число $J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ называется *интегралом Лебега функции* f *на множестве* E и обозначается так:

$$J(f) = \int\limits_E f(x)\,dx$$

Опр. Разбиение $\widetilde{T} = \{\widetilde{E}_i\}_{i=1}^m$ называется *измельчением* разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, если для каждого i верно $\widetilde{E}_i \subset E_k$ с некоторым $k = k(i)$ и $E_k = \bigcup\limits_{\widetilde{E}_i \subset E_k} \widetilde{E}_i$.

В этом случае
$$|E_k| = \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} |\widetilde{E}_i|.$$

Опр. Пусть $T_1 = \{E_i^{(1)}\}_{i=1}^n$, $T_2 = \{E_j^{(1)}\}_{j=1}^m$ – два разбиения множества E. Разбиение
$$T_1 \cdot T_2 = \{E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)},\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$
называется *произведением разбиений* T_1 и T_2.

Очевидно, что $T_1 \cdot T_2$ является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2.

Отметим следующие свойства.

Лемма 1.1. *Если* $\widetilde{T} = \{\widetilde{E}_i\}_{i=1}^m$ *– измельчение разбиения* $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, *то*

$$s_T(f) \leqslant s_{\widetilde{T}}(f), \quad S_{\widetilde{T}}(f) \leqslant S_T(f).$$

Доказательство. Если $\widetilde{E}_i \subset E_k$, то

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x) \leqslant \widetilde{m}_i = \inf_{x \in \widetilde{E}_i} f(x),$$
$$\widetilde{M}_i = \sup_{x \in \widetilde{E}_i} f(x) \leqslant M_k = \sup_{x \in E_k} f(x).$$

Поэтому

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k |E_k| = \sum_{k=1}^n m_k \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} |\widetilde{E}_i| \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} \widetilde{m}_i |\widetilde{E}_i| = \sum_{i=1}^m \widetilde{m}_i |\widetilde{E}_i| = s_{\widetilde{T}}(f),$$
$$S_{\widetilde{T}}(f) = \sum_{i=1}^m \widetilde{M}_i |\widetilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} \widetilde{M}_i |\widetilde{E}_i| \leqslant \sum_{k=1}^n M_k \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} |\widetilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n M_k |E_k| = S_T(f).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Для любых двух разбиений T_1 и T_2*

$$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f).$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{T} = T_1 \cdot T_2$. Тогда в силу леммы 1.1

$$s_{T_1}(f) \leqslant s_{\widetilde{T}}(f) \leqslant S_{\widetilde{T}}(f) \leqslant S_{T_2}(f).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Справедливо неравенство*

$$\underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f).$$

Доказательство. В силу леммы 1.2 имеем

$$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_{T_1} s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) \leqslant \inf_{T_2} S_{T_2}(f) = \overline{J}(f).$$

Лемма доказана.

Замечание. Как нетрудно видеть,

$$\int\limits_E 1\,dx = |E|.$$

Действительно, для $f(x) = 1$ имеем

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_T s_T(f) = |E|,$$
$$S_T(f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f) = |E|.$$

Ясно также, что

$$\int\limits_E 0\,dx = 0.$$

Свойства интеграла Лебега ограниченной измеримой функции

Свойство 1. Пусть функция f суммируема на E и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функция λf суммируема на E и справедливо равенство

$$\int\limits_E \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda\, s_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \sup_T\, s_T(f) = \lambda\, \underline{J}(f) = \lambda J(f),$$
$$S_T(\lambda f) = \lambda\, S_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \inf_T\, S_T(f) = \lambda\, \underline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно
$$\underline{J}(\lambda f) = \overline{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Пусть $\lambda < 0$. Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda\, S_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \inf_T S_T(f) = \lambda\, \overline{J}(f) = \lambda J(f),$$
$$S_T(\lambda f) = \lambda\, s_T(f) \Rightarrow \overline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \sup_T\, s_T(f) = \lambda\, \underline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно
$$\underline{J}(\lambda f) = \overline{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Пусть функции f и g суммируемы на E. Тогда функция $f+g$ суммируема на E и справедливо равенство

$$\int\limits_E (f+g)(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx + \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множества E. Возьмем $T = T_1 \cdot T_2$. Тогда

$$\begin{gathered} s_{T_1}(f) + s_{T_2}(g) \leqslant s_T(f) + s_T(g) \leqslant s_T(f+g) \leqslant \underline{J}(f+g) \leqslant \\ \leqslant \overline{J}(f+g) \leqslant S_T(f+g) \leqslant S_T(f) + S_T(g) \leqslant S_{T_1}(f) + S_{T_2}(g). \end{gathered}$$

Как следствие,

$$J(f) + J(g) \leqslant \underline{J}(f+g) \leqslant \overline{J}(f+g) \leqslant J(f) + J(g).$$

Таким образом,

$$\underline{J}(f+g) = \overline{J}(f+g) = J(f) + J(g).$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 – измеримые непересекающиеся множества.

а) Если функция f суммируема на E, то f суммируема на E_1 и на E_2, причем

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx. \tag{1.1}$$

б) Если функция f суммируема на E_1 и на E_2, то f суммируема и на E и справедливо равенство (1.1).

Доказательство. а) Пусть $T = \{\widetilde{E}_k\}_{k=1}^n$ – произвольное разбиение множества E. Оно индуцирует разбиения

$$T_1 = \{\widetilde{E}_k \cap E_1\}_{k=1}^n \quad \text{и} \quad T_2 = \{\widetilde{E}_k \cap E_2\}_{k=1}^n$$

множеств E_1 и E_2. Заметим, что

$$s_T(f) \leqslant s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \leqslant \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leqslant \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leqslant S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f) \leqslant S_T(f).$$

Отсюда следует, что

$$J(f) \leqslant \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leqslant \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leqslant J(f).$$

Поэтому

$$\underline{J}_1(f) = \overline{J}_1(f), \quad \underline{J}_2(f) = \overline{J}_2(f) \quad \text{и} \quad J_1(f) + J_2(f) = J(f).$$

б) Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множеств E_1 и E_2. Возьмем $T = T_1 \cup T_2$. Тогда

$$s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) = s_T(f) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant S_T(f) \leqslant S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f).$$

Как следствие,

$$J_1(f) + J_2(f) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant J_1(f) + J_2(f).$$

Поэтому

$$J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f) = J_1(f) + J_2(f).$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Пусть функция $f(x)$ суммируема на E.
Тогда для всякого $h \in \mathbb{R}^m$ функция $f(x-h)$ суммируема на $E+h$ и

$$\int\limits_{E+h} f(x-h)\,dx = \int\limits_{E} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться инвариатностью меры относительно сдвига.

Свойство 5. Пусть $|E| = 0$. Тогда

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $s_T(f) = 0$, $S_T(f) = 0$.

Свойство 6. Пусть функции f и g суммируемы на E, причем $f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду на E. Тогда

$$\int\limits_E f(x)\,dx \leqslant \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_E f\,dx - \int\limits_E g\,dx = \int\limits_E (f-g)\,dx = \int\limits_{E[f\leqslant g]} (f-g)\,dx + \int\limits_{E[f>g]} (f-g)\,dx.$$

Для первого интеграла $s_T(f-g) \leqslant 0$ и поэтому значение этого интеграла неотрицательно. Второй интеграл равен нулю, так как $|E[f>g]| = 0$.

Свойство доказано.