7. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа

Применение преобразования Фурье к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений существенно ограничивается тем, что это преобразование определено лишь для функций $f \in L_1(-\infty, \infty)$. В частности, преобразование Фурье не определено для функций f, растущих при $t \to +\infty$.

Предположим, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ и существуют постоянные $s \geqslant 0$, $M > 0$ такие, что $|f(t)| \in Me^{st}$ для $t > 0$. Тогда $e^{-\sigma t} f(t) \in L_1(0, \infty)$ для всех $\sigma > s$ и преобразование Лапласа функции f определяется следующим образом:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt, \quad \text{где} \;\; p = \sigma + i\tau, \;\; \sigma > s.$$

Функцию f принято называть оригиналом, а функцию F изображением функции f.

Заметим, что

$$F(p) = \Lambda[f](p) = \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) e^{-\sigma t} e^{-i\tau t}\, dt = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\tau),$$

то есть при фиксированном $\sigma > s$

$$F(\sigma + i\tau) = \Lambda[f](\sigma + i\tau) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\tau).$$

Заметим, что функция F определена и аналитична на полуплоскости

$$\{p \in \mathbb{C} \mid \sigma = \operatorname{Re} p > s\}.$$

Напомним, что
$$F(\sigma+i\tau)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\tau).$$

Если функция f в точке t удовлетворяет условию Дини, то справедлива формула обращения

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}^{-1}[F(\sigma+i\cdot)](t)=\frac{1}{2\pi}\,V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+i\tau)e^{it\tau}\,d\tau,$$

то есть формула

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\,V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+i\tau)e^{(\sigma+i\tau)t}\,d\tau,$$

приводящая к обратному преобразованию Лапласа

$$f(t)=\Lambda^{-1}[F](t)=\frac{1}{2\pi}\,V.p.\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\,dp.$$

Преобразование Лапласа обладает рядом свойств, близким к свойствам преобразования Фурье. Например,

$$\Lambda[f'](p)=p\Lambda[f](p)-f(0^+).$$

Действительно,

$$\Lambda[f'](p)=\int\limits_{0}^{\infty}f'(t)e^{-pt}\,dt=\left(f(t)e^{-pt}\right)\Big|_{0^+}^{\infty}+p\int\limits_{0}^{\infty}f(t)e^{-pt}\,dt=-f(0^+)+p\Lambda[f](p).$$

8 Преобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R}^m)$, $m \geqslant 2$

Опр. *Преобразованием Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ называется функция

$$\widetilde{f}(\xi) \equiv \mathscr{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-i(\xi,\, x)}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, $(\xi, x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j x_j$.

Оператор $\mathscr{F}$, ставящий в соответствие функции f ее преобразование Фурье (*образ Фурье*) $\widetilde{f} = \mathscr{F}[f]$, называется *оператором Фурье*.

Теорема 8.1. *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$. *Тогда* $\widetilde{f} = \mathscr{F}[f] \in C(\mathbb{R}^m)$, *причем верны неравенство*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} |\mathscr{F}[f]| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}$$

и свойство

$$|\mathscr{F}[f](\xi)| \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty.$$

Замечание. $\mathscr{F}[f]$ можно получить, применив последовательно преобразование Фурье по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\infty}^{\infty} \ldots \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi_1 x_1}\, dx_1 \right\} e^{-i\xi_2 x_2}\, dx_2 \right\} \ldots e^{-i\xi_m x_m}\, dx_m.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ – *мультииндекс*, где $0 \leqslant \alpha_i$ – целые числа. Введем длину мультииндекса $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$.

Положим

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_m^{\alpha_m}, \quad \text{где} \quad D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$$

и

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m} \quad \text{для} \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Теорема 8.2. *Пусть* $f \in C^n(\mathbb{R}^m)$ *и* $D^\alpha f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ *для всех* $\alpha : |\alpha| \leqslant n$.

Тогда верна формула

$$\mathscr{F}[D^\alpha f](\xi) = (i\xi)^\alpha \mathscr{F}[f](\xi) \quad \forall\, \alpha : |\alpha| \leqslant n.$$

Теорема 8.3. *Пусть* $(1 + |x|^n) f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ *для некоторого* $n \geqslant 1$.

Тогда $\mathscr{F}[f] \in C^n(\mathbb{R}^m)$ *и верна формула*

$$D^\alpha \mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[(-ix)^\alpha f] \quad \forall\, \alpha : |\alpha| \leqslant n. \tag{8.1}$$

При определенных условиях на функцию f справедлива *формула обращения*

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]](x) = f(x),$$

в которой *обратное преобразование Фурье* $\mathscr{F}^{-1}$ понимается следующим образом:

$$\mathscr{F}^{-1}[g](x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \, V.p. \int\limits_{\infty}^{\infty} \ldots \left\{ V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi_m x_m} \, d\xi_m \right\} e^{i\xi_{m-1} x_{m-1}} \, d\xi_{m-1} \right\} \ldots e^{i\xi_1 x_1} \, d\xi_1.$$

Преобразование Фурье свертки

Опр. Сверткой функций $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ называется функция

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y) g(x-y)\, dy. \tag{8.2}$$

Для свертки используется обозначение $h = f * g$.

Предложение 8.1. *Свертка (8.2) определена для почти всех $x \in \mathbb{R}^m$. Кроме того, $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и справедлива оценка*

$$\|f * g\|_{L_1(\mathbb{R})^m} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})^m} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}.$$

Замечание 8.1. *Обратим внимание на то, что*

$$f * g = g * f.$$

Теорема 8.4. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

$$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g].$$

9 Преобразование Фурье функций из $L_2(\mathbb{R}^m)$, $m \geqslant 2$

Пусть $S^\infty(\mathbb{R}^m)$ – *класс быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций*, состоящий из всех тех комплекснозначных функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, что

$$M_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad \text{для всех} \ \ \alpha, \beta.$$

Часто $S^\infty(\mathbb{R}^m)$ называют *пространством Шварца.*

Теорема 9.1. *Оператор Фурье $\mathscr{F}$ осуществляет взаимно однозначное отображение $S^\infty(\mathbb{R}^m)$ на $S^\infty(\mathbb{R}^m)$, причем для $f \in S^\infty(\mathbb{R}^m)$ верно равенство Парсеваля*

$$\|\mathscr{F}[f]\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}. \tag{9.1}$$

Теорема 9.2. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\mathscr{F}[f] \in L_2(\mathbb{R}^m)$ и верно равенство Парсеваля (9.1).*

Теорема 9.3. *(Теорема Планшереля) Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда существует предел*

$$\widetilde{f}(\xi) = \mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{N\to\infty}{}^{L_2(\mathbb{R}^m)} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{|x|<N} f(x) e^{-i(\xi,\, x)}\, dx, \tag{9.2}$$

Кроме того, верно равенство Парсеваля

$$\|\mathscr{F}[f]\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}^m).$$

Опр. Предел (9.2) называется *преобразованием Фурье* функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ (или *преобразованием Фурье-Планшереля*).

Введем *обратное преобразование Фурье-Планшереля* для $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ формулой

$$\mathscr{F}^{-1}[g](x) = \lim_{N\to\infty}{}^{L_2(\mathbb{R}^m)} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{|x|<N} g(\xi) e^{i(\xi,\, x)}\, d\xi. \tag{9.3}$$

Теорема 9.4. *Справедлива формула обращения*

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]] = f \qquad \forall\, f \in L_2(\mathbb{R}^m).$$

Следствие 9.1. *Оператор Фурье-Планшереля $\mathscr{F}$ является изометрическим изоморфизмом $L_2(\mathbb{R}^m)$ на $L_2(\mathbb{R}^m)$.*