7 Пространства Лебега $L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$.

В этом параграфе E – фиксированное измеримое множество в $\mathbb{R}^m$ и p – фиксированное число (показатель суммируемости), $1 \leqslant p < \infty$.

Опр. Обозначим через $L_p(E)$ множество всех заданных на E измеримых функций f, для которых

$$\int\limits_E |f(x)|^p\,dx < \infty,$$

то есть $|f|^p \in L(E)$.

Ясно, что $L_1(E) = L(E)$.

Функции $f, g \in L_p(E)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $f \sim g$.

Теорема 7.1. *$L_p(E)$ является линейным пространством.*

Доказательство. Пусть $f, g \in L_p(E)$. Тогда функция $\lambda f + \mu g$ измерима на E и из неравенства

$$|a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

следует, что

$$|\lambda f + \mu g|^p \leqslant 2^{p-1}(|\lambda|^p|f|^p + |\mu|^p|g|^p) \in L(E).$$

Теорема доказана.

Пусть $f \in L_p(E)$, где $1 \leqslant p < \infty$. Положим

$$\|f\|_{L_p(E)} = \Big(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}. \tag{7.1}$$

Эту величину будем называть нормой функции f в пространстве $L_p(E)$.

Теорема 7.2. *Пусть $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и справедливо неравенство Гельдера для интегралов*

$$\Big|\int\limits_E f(x)g(x)\,dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_E |g(x)|^q\,dx\Big)^{1/q}, \tag{7.2}$$

то есть неравенство

$$\Big|\int\limits_E f(x)g(x)\,dx\Big| \leqslant \|f\|_{L_p(E)}\|g\|_{L_q(E)}.$$

Доказательство. В случае $\|f\|_{L_p(E)} = 0$ или $\|g\|_{L_q(E)} = 0$ неравенство (7.2) очевидно.

Пусть $\|f\|_{L_p(E)} > 0$ и $\|g\|_{L_q(E)} > 0$. Положим

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_{L_p(E)}}, \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_{L_q(E)}}$$

и перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\Big|\int\limits_E F(x)G(x)\,dx\Big| \leqslant 1. \tag{7.3}$$

В силу неравенства Юнга имеем

$$|FG| \leqslant \frac{1}{p}|F|^p + \frac{1}{q}|G|^q \in L_1(E).$$

Следовательно $FG \in L_1(E)$ и поэтому $fg \in L_1(E)$. Кроме того,

$$\Big|\int\limits_E FG\,dx\Big| \leqslant \int\limits_E |FG|\,dx \leqslant \frac{1}{p}\|F\|^p_{L_p(E)} + \frac{1}{q}\|G\|^q_{L_q(E)} = 1.$$

Отсюда следует неравенство (7.3), эквивалентное (7.2).

Теорема доказана.