4 Последовательности измеримых функций

Лемма 4.1. *Пусть E – измеримое множество и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на E почти всюду конечных функций. Тогда функции*

$$\varphi(x) = \inf_{n\geqslant 1} f_n(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sup_{n\geqslant 1} f_n(x)$$

(миноранта и мажоранта последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$) измеримы на E.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$E[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a], \quad E[\psi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a].$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– числовая последовательность. Тогда*

$$\underline{a} = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant n} a_k, \qquad (*),$$
$$\overline{a} = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} a_k. \qquad (**)$$

Доказательство. Докажем формулу $(*)$. Положим $b_n = \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$. Заметим, что последовательность b_n не убывает. Следовательно существует предел

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\geqslant 1} b_n.$$

По определению $\underline{a}$ – это минимальный из частичных пределов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\underline{a} - \varepsilon < a_{n_k} < \underline{a} + \varepsilon \quad \forall\, k \geqslant K(\varepsilon).$$

Кроме того,

$$\underline{a} - \varepsilon \leqslant a_k \quad \forall\, k \geqslant M(\varepsilon).$$

Следовательно

$$\underline{a} - \varepsilon \leqslant b_n \leqslant \underline{a} + \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \underline{a} - \varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \underline{a} + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\underline{a} = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\geqslant 1} b_n.$$

Формула $(*)$ доказана. Формула $(**)$ доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность измеримых на* E *почти всюду конечных функций. Тогда функции*

$$\underline{f}(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad \overline{f}(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

измеримы на E.

Доказательство. Из леммы (4.2) следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k(x) = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant n} f_k(x), \qquad (*)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} f_k(x) = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} f_k(x). \qquad (**)$$

Применяя лемму 4.1, завершаем доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 4.1. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность измеримых на* E *функций. Если* $f_n(x) \to f(x)$ *при* $n \to \infty$ *почти всюду на* E, *то функция* f *измерима на* E.

Доказательство.

$$f(x) = \underline{f}(x) = \overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{почти всюду на } E.$$

В силу леммы 4.3 функция f измерима.

Теорема доказана.

Сходимость по мере

Определение. Пусть $f \in \mathfrak{M}(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* f *по мере на* E, если

$$\operatorname{meas} E\,[|f_n - f| > \delta] \to 0 \quad \text{при} \;\; n \to \infty$$

для любого $\delta > 0$.

Таким образом, $f_n \to f$ по мере на E тогда и только тогда, когда для всякого $\delta > 0$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\operatorname{meas} E\,[|f_n - f| > \delta] < \varepsilon \quad \text{при} \;\; n \geqslant N.$$

Пример 1. Пусть $E = [0, 1]$ и $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to 0$ по мере, так как

$$E[|f_n - 0| > \delta] = E[|f_n| > \delta] = \begin{cases} (\delta^{1/n}, 1], & 0 < \delta < 1, \\ \emptyset, & 1 \leqslant \delta \end{cases}$$

и $\operatorname{meas} E\,[|f_n - f| > \delta] \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Пусть $E = \mathbb{R}$ и $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Тогда $f_n(x) \to 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, но $f_n \not\to 0$ по мере, так как

$$\operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \delta\} = 1 \not\to 0 \quad \text{для} \;\; 0 < \delta < 1.$$

Пример 3. ("Бегающая ступенька") Пусть $E = [0, 1]$ и $f_n = \chi_{[a_n.b_n]}$, где

$$[a_1, b_1] = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad [a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad [a_3, b_3] = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad [a_4, b_4] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],$$
$$[a_5, b_5] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad [a_6, b_6] = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \quad [a_7, b_7] = \left[0, \frac{1}{8}\right], \quad [a_8, b_8] = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \ldots$$

Эта последовательность не сходится ни в одной точке, но сходится к нулю по мере.