7 Системы множеств

Опр. Пусть S – некоторое множество. *Системой множеств* называется всякое множество $\mathfrak{N}$, элементы которого являются подмножествами множества S.

Опр. Непустая система множеств $\mathfrak{N}$ называется *кольцом* (*кольцом множеств*), если она обладает тем свойством, что из $A \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathfrak{N}$ следует, что $A \setminus B \in \mathfrak{N}$ и $A \cup B \in \mathfrak{N}$.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathfrak{N}$ – кольцо множеств. Тогда справедливы следующие свойства.*

1. Из $A \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathfrak{N}$ следует $A \cap B \in \mathfrak{N}$.

2. Из $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{N}$ следует $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{N}$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Справедливость свойства 1 следует из формулы

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \setminus (B \setminus A).$$

Свойство 2 очевидным образом следует из определения кольца и свойства 1.

Теорема доказана.

Замечание 1. Так как $A \setminus A = \emptyset$, то всякое кольцо множеств содержит пустое множество. Поэтому система множеств $\mathfrak{N} = \{\emptyset\}$ представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Замечание 2. Ясно, что система множеств $\mathfrak{N}$, состоящая из всех подмножеств множества S, является максимальным возможным кольцом множеств.

Опр. Множество E называется *единицей* системы множеств $\mathfrak{N}$, если $E \in \mathfrak{N}$ и для всякого множества $A \in \mathfrak{N}$ верно $A \cap E = A$.

Таким образом, единица системы множеств $\mathfrak{N}$ есть максимальное множество этой системы, содержащее все другие множества, входящие в $\mathfrak{N}$.

Опр. Кольцо множеств, в котором существует единица, называется *алгеброй множеств.*

Опр. Алгебра множеств $\mathfrak{S}$ называется *σ-алгеброй* (*сигма-алгеброй*), если вместе с любой последовательностью множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ она содержит их сумму $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Другими словами, система множеств $\mathfrak{S}$ называется σ-алгеброй, если она обладает следующими свойствами.

1). Из $A, B \in \mathfrak{S}$ следует $A \setminus B \in \mathfrak{S}$.

2). Из $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \in \mathfrak{S}$ следует $\bigcup\limits_{n} A_n \in \mathfrak{S}$.

3). Существует множество $E \in \mathfrak{S}$ такое, что $A \subset E$ для всех $A \in \mathfrak{S}$.

Теорема 7.2. *Пусть $\mathfrak{S}$ – σ-алгебра. Тогда из $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{S}$ следует $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Справедливость предложения следует из следующих равенств:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = E \setminus (E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n),$$

которые вытекают из принципа двойственности и свойств 1) - 3).

Теорема доказана.

Опр. Пусть $\mathfrak{N}$ – некоторая система множеств. σ-алгебра $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$, содержащая систему $\mathfrak{N}$, называется *минимальной*, если она содержится в любой другой σ-алгебре $\mathfrak{S}$, содержащей систему $\mathfrak{N}$.

Теорема 7.3. *Для любой непустой системы множеств* $\mathfrak{N}$ *существует одна и только одна минимальная* σ*-алгебра* $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$.

Доказательство. Введем множество E, являющееся объединением всех множеств, входящих в $\mathfrak{N}$, и за $\mathfrak{S}$ возьмем систему всех подмножеств множества E. Ясно, что $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$ – это σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{N}$. Таким образом, по крайней мере одна σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{N}$ существует.

Пусть теперь $\mathfrak{S}(\mathfrak{N}) = \bigcap\limits_{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{S}} \mathfrak{S}$ – это пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathfrak{N}$, а $E = \bigcap\limits_{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{S}} E_{\mathfrak{S}}$ – это пересечение их единиц.

Покажем проверкой свойств 1) – 3), что $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$ – это σ-алгебра с единицей E.

1). $A, B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{N}) \Rightarrow\ A, B \in \mathfrak{S}\ \forall\,\mathfrak{S} \Rightarrow\ A \setminus B \in \mathfrak{S}\ \forall\,\mathfrak{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{N})$.

2). $A_n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{N})\ \Rightarrow\ A_n \in \mathfrak{S}\ \ \forall\,\mathfrak{S}\ \Rightarrow\ \bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{S}\ \ \forall\,\mathfrak{S}\ \Rightarrow\ \bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{N})$.

3). $E \cap A = (\bigcap\limits_{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{S}} E_{\mathfrak{S}}) \cap A = \bigcap\limits_{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{S}} (E_{\mathfrak{S}} \cap A) = \bigcap\limits_{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{S}} A = A$.

Построенная σ-алгебра минимальна, так как $\bigcap\limits_{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$ для всякой σ-алгебры $\mathfrak{S}$, содержащей $\mathfrak{N}$.

Пример минимальной σ **- алгебры** дает *борелевская алгебра* $\mathfrak{B}$ – минимальная σ - алгебра, содержащая все интервалы (a, b).