

4 Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега

Теорема 4.1. (Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.)

Пусть $f \in L(E)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \int_e f(x) dx \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого множества $e \subset E$ такого, что $|e| < \delta(\varepsilon)$.

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $M = M(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_{E \setminus E_M} |f| dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_{E_M} (|f| - [f]_N) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3N(\varepsilon)}$. Пусть $e \subset E$ – произвольное измеримое множество такое, что $|e| < \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_e f dx \right| &\leq \int_e |f| dx \leq \int_{e \setminus E_M} |f| dx + \int_{e \cap E_M} |f| dx \leq \\ &\leq \int_{E \setminus E_M} |f| dx + \int_{E_M} (|f| - [f]_N) dx + \int_{e \cap E_M} [f]_N dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + N(\varepsilon)|e| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4.2. (Теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега.)

Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство попарно непересекающихся измеримых множеств.

а) Если $f \in L(E)$, то $f \in L(E_k)$ для всех $k \geq 1$, причем

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx. \quad (4.1)$$

б) Если $f \in L(E_k)$ для всех $k \geq 1$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx$, то $f \in L(E)$

и справедливо равенство (4.1).

Доказательство. а). Так как $E = E_k \cup (E \setminus E_k)$, то из $f \in L(E)$ следует, что $f \in L(E_k)$ для всех $k \geq 1$.

Положим $R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$.

В силу аддитивности интеграла Лебега

$$\int_E f dx = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f dx + \int_{R_n} f dx.$$

Равенство (4.1) будет установлено, если мы покажем, что $\int_{R_n} f dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $M = M(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\int_{E \setminus B_M} |f| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $R_{n,M} = R_n \cap B_M(0)$. При фиксированном M последовательность $\{R_{n,M}\}_{n=1}^{\infty}$ представляет собой невозрастающую последовательность множеств конечной меры, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,M} = \emptyset$. Следовательно $|R_{n,M}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \int_{R_{n,M}} f dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Из равенства

$$\int_{R_n} f dx = \int_{R_{n,M}} f dx + \int_{R_n \setminus B_M} f dx$$

следует, что

$$\left| \int_{R_n} f dx \right| \leq \left| \int_{R_{n,M}} f dx \right| + \int_{E \setminus B_M} |f| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

б). Пусть $f \in L(E_k)$ для всех $k \geq 1$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx$. Тогда для всех $M > 0$ и $N > 0$

$$\int_{E \cap B_M} [|f|]_N dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k \cap B_M} [|f|]_N dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f| dx.$$

Поэтому

$$\int_E |f| dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f| dx < \infty.$$

Следовательно $f \in L(E)$.

Теорема доказана.