

## 2 Открытые и замкнутые множества

**Опр.** Пусть  $M$  – метрическое пространство. Открытым шаром радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x_0$  (или окрестностью точки  $x_0$  радиуса  $r$ ) называется множество

$$B_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\}.$$

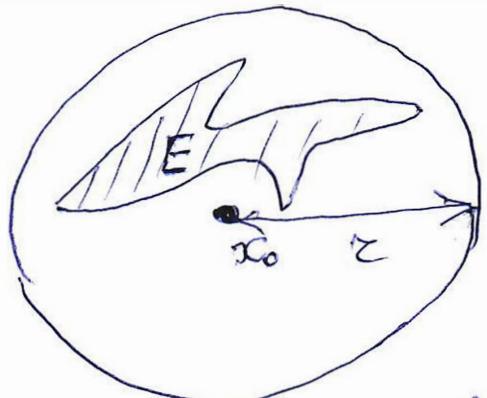
**Опр.** Замкнутым шаром радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x_0$  называется множество

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

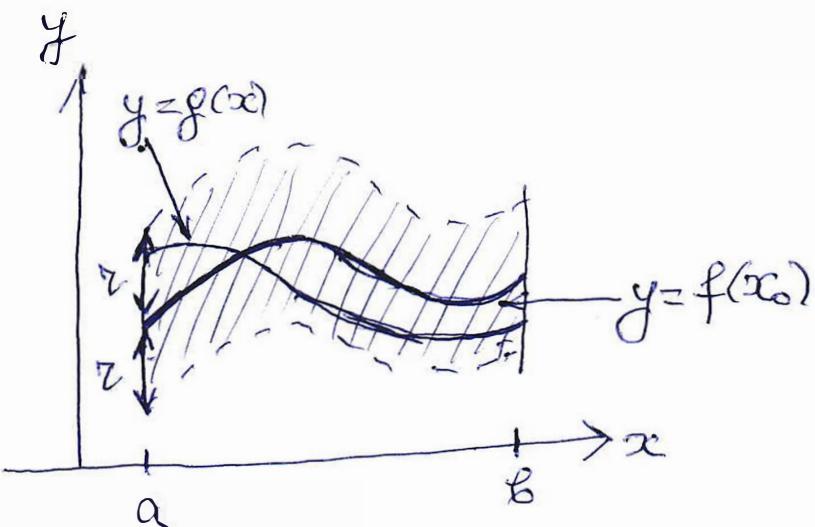
**Опр.** Множество  $E \subset M$  называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.



Шар  $B_r(x_0)$



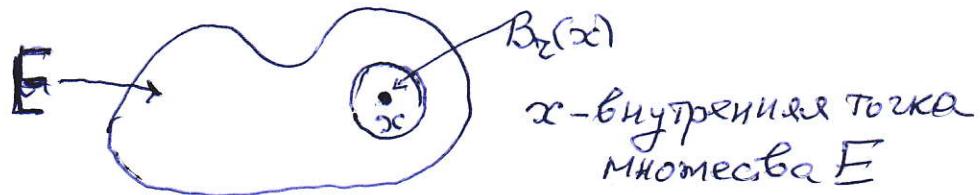
Ограничное множество  $E \subset B_r(x_0)$



Геометрическая иллюстрация шара  $B_r(f_0)$  в пространстве  $C[a, b]$ .  $g \in B_r(f_0)$

**Опр.** Пусть  $E$  - произвольное множество в метрическом пространстве  $M$ . Точка  $x \in E$  называется *внутренней точкой* множества  $E$ , если существует окрестность точки  $x$ , целиком содержащаяся в  $E$ .

Множество всех внутренних точек множества  $E$  называется *внутренней частью* множества  $E$  и обозначается через  $\text{int } E$ .



**Опр.** Множество  $G \subset M$  называется *открытым*, если все его точки являются внутренними (то есть если  $\text{int } G = G$ ). Пустое множество  $\emptyset$  является открытым по определению.

**Опр.** Пусть  $E$  - произвольное множество в метрическом пространстве  $M$ . Точка  $x \in M$  называется *предельной точкой* множества  $E$ , если в любой окрестности точки  $x$  содержатся точки множества  $E$ , отличные от  $x$ . Множество всех предельных для  $E$  точек обозначается через  $E'$ .

**Опр.** Множество  $F \subset M$  называется *замкнутым*, если все предельные для  $F$  точки содержатся в  $F$  (то есть если  $F' \subset F$ ). Заметим, что  $\emptyset$  – замкнутое множество.

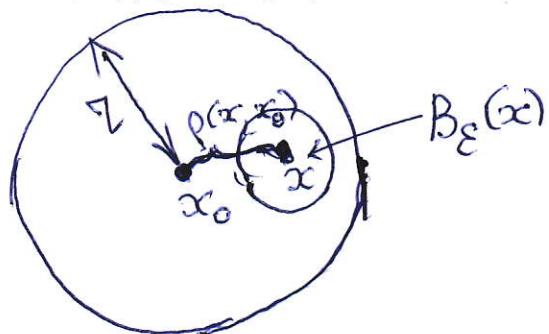
## Примеры.

1. Как нетрудно видеть, само метрическое пространство  $M$  является одновременно открытым и замкнутым множеством.
2. Интервал  $(a, b)$  является открытым множеством в  $\mathbb{R}$ . Действительно, для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  существует ее окрестность  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ .
3. Открытый шар  $B_r(x_0)$  в метрическом пространстве  $M$  является открытым множеством.

Докажем это. Пусть  $x \in B_r(x_0)$ . Рассмотрим открытый шар  $B_\varepsilon(x)$  с центром в точке  $x$  радиуса  $\varepsilon < r - \rho(x_0, x)$ . Пусть  $y \in B_\varepsilon(x)$ . Тогда

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \varepsilon + \rho(x, x_0) < r \Rightarrow y \in B_r(x_0).$$

Таким образом,  $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ . Значит, все точки шара  $B_r(x_0)$  являются внутренними.



4. Отрезок  $[a, b]$  является замкнутым множеством в  $\mathbb{R}$ .
  5. Интервал  $(a, b)$  в  $\mathbb{R}$  не является замкнутым множеством.
  6. Отрезок  $[a, b]$  в  $\mathbb{R}$  не является открытым множеством.
  7. Полуинтервал  $(a, b]$  в  $\mathbb{R}$  не является ни открытым, ни замкнутым множеством.
  8. Является ли множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  открытым или замкнутым в  $\mathbb{R}$ ?
- 
- The first number line shows the interval  $[a, b]$  as a closed segment from  $a$  to  $b$ , both endpoints included.
- The second number line shows the interval  $(a, b)$  as an open segment from  $a$  to  $b$ , neither endpoint included.
- The third number line shows the interval  $(a, b]$  as a half-open segment from  $a$  to  $b$ , the endpoint  $a$  is excluded while  $b$  is included.

**Предложение 2.1.** Точка  $x \in M$  является предельной точкой множества  $E \subset M$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$  такая, что  $x_n \neq x$  и  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $x$  – предельная точка множества  $E$ . Тогда для каждого  $n \geq 1$  найдется точка  $x_n \in B_{1/n}(x)$ ,  $x_n \neq x$ . Следовательно

$$\rho(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow x.$$

Пусть теперь существует последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$  такая, что  $x_n \neq x$  и  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$

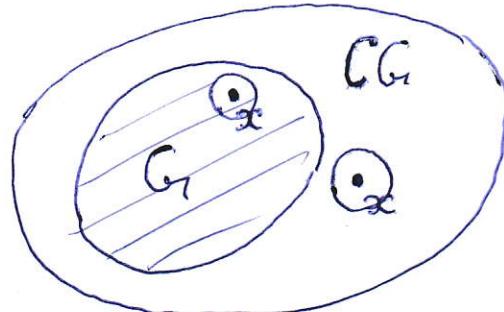
$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad x_n \in B_{\varepsilon}(x).$$

**Предложение доказано.**

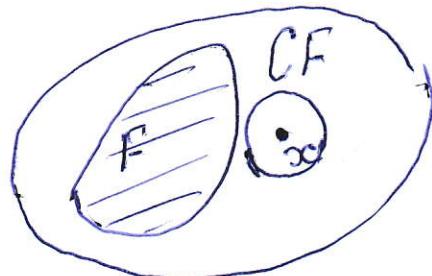
**Теорема 2.1.** 1). Пусть множество  $G$  открыто. Тогда его дополнение – множество  $\complement G = M \setminus G$  замкнуто.

2). Пусть множество  $F$  замкнуто. Тогда его дополнение – множество  $\complement F = M \setminus F$  открыто.

**Доказательство.** 1) Пусть  $G$  – открытое множество. Докажем, что все предельные точки множества  $\complement G$  принадлежат этому множеству. Пусть  $x \in (\complement G)'$ . Тогда  $x \notin G$ , так как никакая окрестность точки  $x$  целиком не содержится в  $G$ . Следовательно  $x \in \complement G$ .



2) Пусть  $F$  – замкнутое множество. Докажем, что всякая точка множества  $\complement F$  является его внутренней точкой. Пусть  $x \in \complement F$ , то есть  $x$  не является предельной точкой множества  $\complement F$ . Тогда существует окрестность точки  $x$ , целиком содержащаяся в  $\complement F$ . Следовательно  $x$  – внутренняя для  $\complement F$  точка.



Теорема доказана.

**Следствие 2.1.** Множество  $G$  открыто тогда и только тогда, когда его дополнение  $\complement G = M \setminus G$  замкнуто.

**Теорема 2.2.** Объединение любой совокупности открытых множеств в  $M$  есть открытое множество. Пересечение конечного числа открытых множеств в  $M$  есть открытое множество.

**Доказательство.** Пусть  $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ , где  $G_\alpha$  – открытые множества. Пусть  $x \in G$ . Тогда  $x \in G_\alpha$  для некоторого  $\alpha$ . Поэтому существует  $B_r(x) \subset G_\alpha \subset G$ .

Пусть теперь  $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$ , где  $G_k$  – открытые множества. Если  $x \in G$ , то  $x \in G_k$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно для каждого  $k$  существует открытый шар  $B_{r_k}(x) \subset G_k$ . Выбрав  $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$ , получим  $B_r(x) \subset G_k$  для всех  $k$ . Тогда  $B_r(x) \subset G = \bigcap_{k=1}^n G_k$ . Следовательно  $x$  – внутренняя для  $G$  точка.

Теорема доказана.

**Следствие 2.2.** Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств в  $M$  являются замкнутыми множествами.

**Доказательство.** Пусть  $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ , где  $F_\alpha$  – замкнутые множества. Тогда  $\complement F = \bigcup_{\alpha \in I} \complement F_\alpha$  – открытое множество. Следовательно  $F = M \setminus \complement F$  – замкнуто.

Пусть  $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ , где  $F_k$  – замкнутые множества. Тогда  $\complement F = \bigcap_{k=1}^n \complement F_k$  – открытое множество. Следовательно  $F$  замкнуто.

Следствие доказано.

**Замечание 2.1.** Пересечение бесконечной совокупности открытых множеств в  $M$  не обязано быть открытым множеством. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b + 1/n) = [a, b].$$

**Вопрос.** Обязано ли объединение произвольной совокупности замкнутых множеств в  $M$  быть замкнутым множеством?

**Предложение 2.2.** Пусть  $G$  – открытое множество, а  $F$  – замкнутое множество. Тогда множество  $G \setminus F$  открыто, а множество  $F \setminus G$  замкнуто.

**Доказательство.** Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}G \setminus F &= G \cap (M \setminus F), \\F \setminus G &= F \cap (M \setminus G).\end{aligned}$$

Предложение доказано.

**Предложение 2.3.** Множество  $F$  замкнуто тогда и только тогда, когда для всякой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$  из  $x_n \rightarrow x$  следует, что  $x \in F$ .

**Доказательство.** Пусть  $F$  замкнуто,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$  и  $x_n \rightarrow x$ . Если  $x \notin F$ , то существует окрестность, не содержащая ни одной точки из  $F$ . Это противоречит тому, что  $x_n \rightarrow x$ .

Пусть теперь для всякой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$  из  $x_n \rightarrow x$  следует, что  $x \in F$ . Тогда всякая предельная для  $F$  точка принадлежит  $F$ . Следовательно  $F$  замкнуто.

Предложение доказано.

**Предложение 2.4.** Справедливы неравенства

$$|\rho(x, y_1) - \rho(x, y_2)| \leq \rho(y_1, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in M, \quad (2.1)$$

$$|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2) \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** В силу неравенства треугольника

$$\rho(x, y_1) \leq \rho(x, y_2) + \rho(y_1, y_2) \Rightarrow \rho(x, y_1) - \rho(x, y_2) \leq \rho(y_1, y_2),$$

$$\rho(x, y_2) \leq \rho(x, y_1) + \rho(y_1, y_2) \Rightarrow \rho(x, y_2) - \rho(x, y_1) \leq \rho(y_1, y_2).$$

Следовательно

$$-\rho(y_1, y_2) \leq \rho(x, y_1) - \rho(x, y_2) \leq \rho(y_1, y_2) \Rightarrow |\rho(x, y_1) - \rho(x, y_2)| \leq \rho(y_1, y_2).$$

**Задание:** Неравенство (2.2) доказать самостоятельно.

**Следствие 2.3.** Пусть  $x_n \rightarrow x$  и  $y_n \rightarrow y$ . Тогда

$$\rho(x, y_n) \rightarrow \rho(x, y) \quad \text{и} \quad \rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y).$$

**Доказательство.**

$$|\rho(x, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(y_n, y) \rightarrow 0,$$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \rightarrow 0.$$

**Опр.** Точка  $x \in M$  называется *точкой прикосновения* множества  $E$ , если каждая окрестность точки  $x$  содержит хотя бы одну точку из  $E$ .

**Опр.** Замыканием множества  $E$  называется множество  $\bar{E} = E \cup E'$ . Для замыкания множества  $E$  используется также обозначение  $[E]$ .

**Замечание.** Замыкание множества  $E$  является множеством, элементами которого являются все точки прикосновения множества  $E$ .

**Предложение 2.5.** Замыкание множества  $E$  является замкнутым множеством.

**Доказательство.** Пусть  $x \in \complement \bar{E}$ . Тогда существует окрестность точки  $x$ , не содержащая ни одной точки из  $\bar{E}$ . Следовательно  $\complement \bar{E}$  открыто и  $\bar{E}$  замкнуто.

**Предложение доказано.**

**Опр.** Точка  $x_0 \in E$  называется *изолированной точкой* множества  $E$ , если существует окрестность этой точки, не содержащая ни одной точки из  $E$  кроме  $x_0$ .



$$B_r(x_0) \cap E = \{x_0\}$$

**Опр.** Множество  $E$  называется *совершенным*, если оно замкнуто и не содержит ни одной изолированной точки.

**Пример.** Простейший пример совершенного множества – отрезок  $[a, b]$ .

**Опр.** Множество  $E$  называется *нигде не плотным*, если его замыкание  $\overline{E}$  не содержит целиком ни одного открытого шара.

**Опр.** Точка  $x \in M$  называется *граничной точкой* множества  $E$ , если любая ее окрестность содержит как точки множества  $E$ , так и точки множества  $M \setminus E$ .

Множество всех граничных точек множества  $E$  называется *границей* множества  $E$  и обозначается через  $\partial E$ .

**Примеры.** 1. Для интервала  $E = (a, b)$  границей является  $\partial E = \{a, b\}$ .

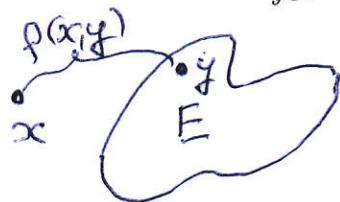
2. Для отрезка  $E = [a, b]$  границей является  $\partial E = \{a, b\}$ .

3. Что является границей множества  $E = \mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ ?



**Опр.** Определим расстояние от точки  $x \in M$  до множества  $E \subset M$  формулой

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y).$$



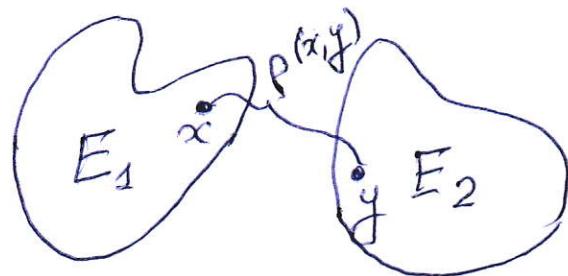
Заметим, что  $\rho(x, E) \geq 0$ . Однако из  $\rho(x, E) = 0$  не следует, что  $x \in E$ .

В то же время из  $x \in E$  следует, что  $\rho(x, E) = 0$ .

Кроме того, если множество  $E$  замкнуто и  $x \notin E$ , то  $\rho(x, E) > 0$ .

**Опр.** Расстояние между множествами  $E_1$  и  $E_2$  метрического пространства определяется формулой

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} \rho(x, y).$$



**Теорема 2.3.** (Теорема об отдельности замкнутых множеств.)

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – непересекающиеся замкнутые множества метрического пространства  $M$ . Тогда существуют непересекающиеся открытые множества  $G_1$  и  $G_2$  такие, что  $F_1 \subset G_1$ ,  $F_2 \subset G_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in F_1$ . Ясно, что  $\rho(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} \rho(x, y) > 0$ . В противном случае точка  $x$  была бы предельной для множества  $F_2$  и принадлежала бы  $F_1$  и  $F_2$  одновременно.

Положим

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} B_{\frac{1}{2}\rho(x, F_2)}(x), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} B_{\frac{1}{2}\rho(y, F_1)}(y).$$

Ясно, что  $G_1$  и  $G_2$  открыты и  $F_1 \subset G_1$ ,  $F_2 \subset G_2$ .

Предположим, что существует  $z \in G_1 \cap G_2$ . Тогда существуют  $x \in F_1$  и  $y \in F_2$  такие, что  $\rho(x, z) < \frac{1}{2}\rho(x, F_2)$  и  $\rho(y, z) < \frac{1}{2}\rho(y, F_1)$ . Таким образом,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{1}{2}\rho(x, F_2) + \frac{1}{2}\rho(y, F_1) \leq \frac{1}{2}\rho(x, y) + \frac{1}{2}\rho(y, x) = \rho(x, y).$$

Полученное противоречие доказывает, что  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

Теорема доказана.

