8 Пространство $L_\infty(E)$.

Опр. Пусть f – заданная на множестве E измеримая функция. Говорят, что функция f имеет на E конечный существенный максимум, если существует число c такое, что $\operatorname{meas} E[f > c] = 0$, то есть $f(x) \leqslant c$ почти всюду на E.

В этом случае *существенным максимумом* функции f называется число

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{c : \operatorname{meas} E[f > c] = 0\}.$$

Заметим, что

$$c_f = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \min\{c : \operatorname{meas} E[f > c] = 0\}.$$

Действительно,

$$E[f > c_f] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f > c_f + 1/n]$$

Как следствие,

$$\operatorname{meas} E[f > c_f] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{meas} E[f > c_f + 1/n] = 0.$$

Аналогичным образом вводится *существенный минимум*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} f(x) = \sup\{c : \operatorname{meas} E[f < c] = 0\} = \max\{c : \operatorname{meas} E[f < c] = 0\}.$$

Обозначим через $L_\infty(E)$ множество всех заданных на E измеримых функций f, для которых $|f|$ имеет на E конечный существенный максимум.

Другими словами, $f \in L_\infty(E)$ тогда и только тогда, когда f измерима на E и существует постоянная $c > 0$ такая, что $|f(x)| \leqslant c$ для почти всех $x \in E$.

Функции $f, g \in L_\infty(E)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $f \sim g$ на E.

Теорема 8.1. $L_\infty(E)$ – *линейное нормированное пространство с нормой*

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \underset{x\in E}{ess \sup}\, |f(x)|.$$

Доказательство. Ясно, что $\|f\|_{L_\infty(E)} \geqslant 0$ и

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{почти всюду на } E.$$

Пусть $f \in L_\infty(E)$. Тогда

$$|f| \leqslant \|f\|_{L_\infty(E)} \quad \text{почти всюду на E} \;\Rightarrow |\alpha f| \leqslant |\alpha| \|f\|_{L_\infty(E)} \quad \text{почти всюду на E}.$$

Значит $\alpha f \in L_\infty(E)$. Кроме того, при $\alpha \neq 0$

$$\|\alpha f\|_{L_\infty(E)} = \min\{c :\ \mathrm{meas}\, E[|\alpha f| > c] = 0\} = \min\{c :\ \mathrm{meas}\, E[|f| > c/|\alpha|] = 0\} =$$
$$= |\alpha| \min\{c/|\alpha| :\ \mathrm{meas}\, E[|f| > c/|\alpha|] = 0\} = |\alpha| \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

Пусть $f, g \in L_\infty(E)$. Тогда

$$|f + g| \leqslant |f| + |g| \leqslant \|f\|_{L_\infty(E)} + \|g\|_{L_\infty(E)} \quad \text{почти всюду на } \; E.$$

Следовательно

$$f + g \in L_\infty(E) \quad \text{и} \quad \|f + g\|_{L_\infty(E)} \leqslant \|f\|_{L_\infty(E)} + \|g\|_{L_\infty(E)}.$$

Теорема доказана.

Введение метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_\infty(E)}$$

делает $L_\infty(E)$ метрическим пространством.

Теорема 8.2. *Пространство $L_\infty(E)$ – полное.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная в $L_\infty(E)$ последовательность. Для нее

$$\varepsilon_n = \sup_{m>n} \|f_m - f_n\|_{L_\infty(E)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Положим

$$A_{mk} = E\left[|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_{L_\infty(E)}\right], \quad A = \bigcup_{m,n} A_{mn}.$$

Ясно, что $|A| = 0$.

Обратим внимание на то, что

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \quad \forall m > n, \quad \forall\, x \in E \setminus A, \tag{8.1}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Поэтому для $x \in E \setminus A$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Значит, существует предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Положим $f(x) = 0$ для $x \in A$. Заметим, что функция f измерима как поточечный предел последовательности измеримых функций.

Переходя в (8.1) к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \quad \forall\, x \in E \setminus A.$$

Как следствие, $f - f_n \in L_\infty(E)$ и

$$\|f - f_n\|_{L_\infty(E)} \leqslant \varepsilon_n \to 0.$$

Теорема доказана.

Напомним теорему о неравенстве Гельдера.

Теорема. Пусть $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и справедливо неравенство Гельдера

$$\Big|\int\limits_E f(x)g(x)\,dx\Big| \leqslant \|f\|_{L_p(E)}\|g\|_{L_q(E)}.$$

Замечание. Неравенство Гельдера справедливо и при $p = 1$, $q = \infty$. Действительно, если $f \in L_1(E)$, $g \in L_\infty(E)$, то функция fg измерима на E и

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \int\limits_E |f(x)|\,dx \ \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |g(x)| = \|f\|_{L_1(E)}\|g\|_{L_\infty(E)}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.3. *Пусть $p, q \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и справедливо неравенство Гельдера*

$$\Big|\int\limits_E f(x)g(x)\,dx\Big| \leqslant \|f\|_{L_p(E)}\|g\|_{L_q(E)}.$$