ГЛАВА 3. МЕРА ЛЕБЕГА

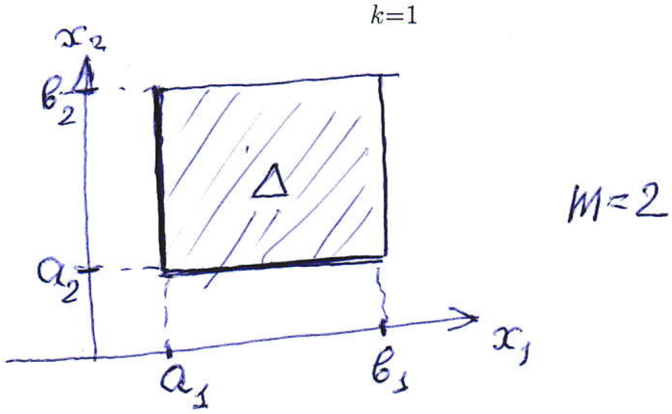
1 Мера промежутка в $\mathbb{R}^m$.

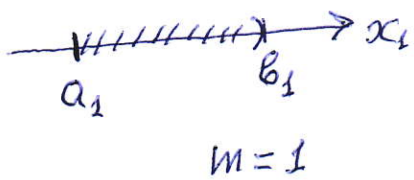
Опр. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, где $a_k < b_k$ для всех k. *Полуоткрытым промежутком* (или просто *промежутком*) в $\mathbb{R}^m$ будем называть множество

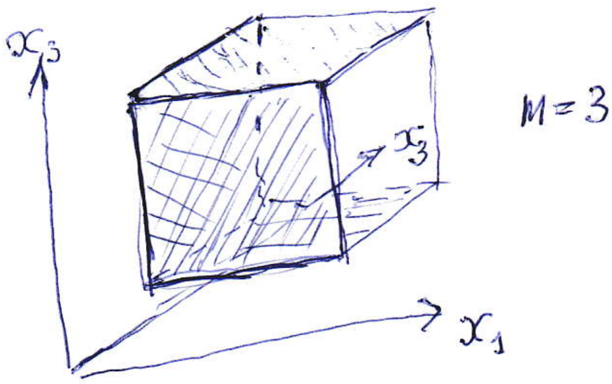
$$\Delta = [a, b) = \{x = (x_1, x_2 \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_k \leqslant x_k < b_k,\ k = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Мерой промежутка Δ называется число

$$|\Delta| = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k).$$



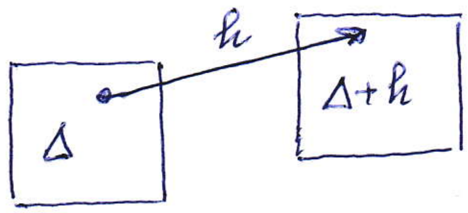




Свойства меры промежутка

Свойство 1. (Инвариантность меры относительно сдвига)

$$|\Delta + h| = |\Delta| \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^m.$$

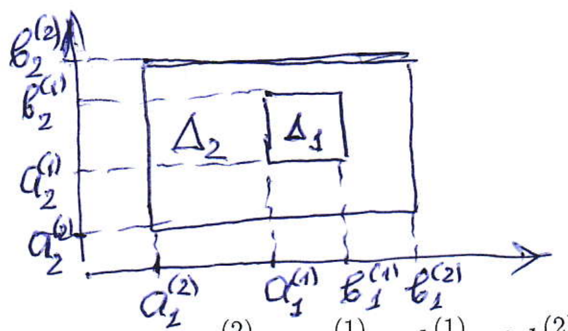


Доказательство. Здесь $\Delta + h = [a + h, b + h)$, где $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$. Поэтому

$$|\Delta + h| = \prod_{k=1}^{m}(b_k + h_h - a_k - h_k) = \prod_{k=1}^{m}(b_k - a_k).$$

Свойство 2. (Монотонность меры)

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \Rightarrow |\Delta_1| \leqslant |\Delta_2|.$$



Доказательство. Так как $a_k^{(2)} \leqslant a_k^{(1)}$ и $b_k^{(1)} \leqslant b_k^{(2)}$, то из определения меры промежутка имеем

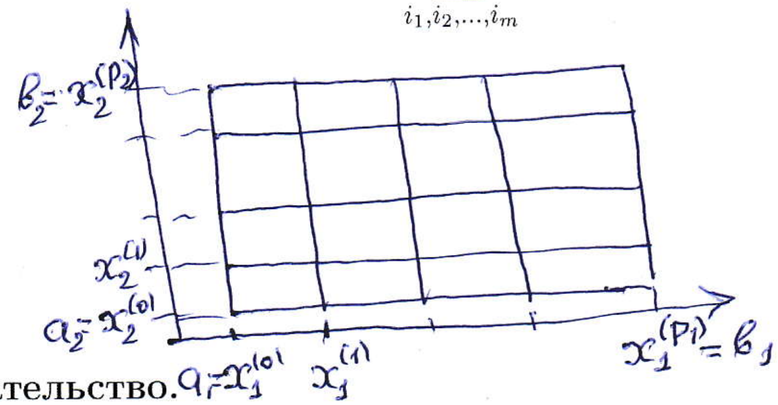
$$|\Delta_1| = \prod_{k=1}^{m}(b_k^{(1)} - a_k^{(1)}) \leqslant \prod_{k=1}^{m}(b_k^{(2)} - a_k^{(2)}) = |\Delta_2|.$$

Свойство 3. Пусть на каждом из отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leqslant k \leqslant m$ введена система точек $a_k = x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \cdots < x_k^{(p_k)} = b_k$ и промежуток $\Delta = [a, b)$ представлен в виде объединения

$$\Delta = \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_m}$$

промежутков $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_k^{(i_k - 1)} \leqslant x_k < x_k^{(i_k)},\ 1 \leqslant k \leqslant m\}$. Тогда

$$|\Delta| = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} |\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_m}|.$$



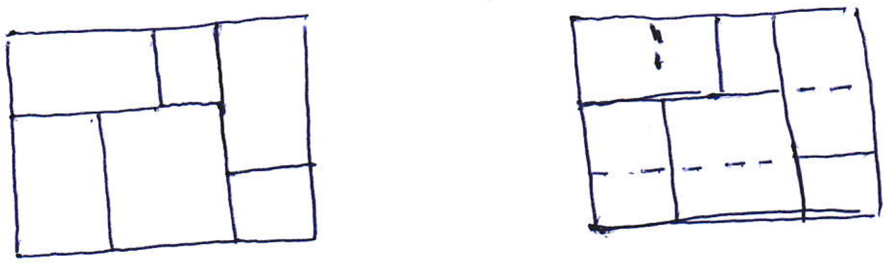
Доказательство.

$$|\Delta| = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k) = \prod_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{p_k} (x_k^{(i_k)} - x_k^{(i_k - 1)}) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{p_m} \prod_{k=1}^{m} (x_k^{(i_k)} - x_k^{(i_k - 1)}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} |\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_m}|.$$

Свойство 4. Пусть $\Delta = \bigcup\limits_{p=1}^{n} \Delta_p$, где Δ_p – попарно непересекающиеся промежутки. Тогда

$$|\Delta| = \sum_{p=1}^{n} |\Delta_p|.$$



Доказательство. Проведем всевозможные сечения $x_k = b_k^{(p)}$, $x_k = a_k^{(p)}$ через грани промежутков Δ_p. В результате промежуток Δ будет представлен в виде

$$\Delta = \bigcup_{p=1}^{n} \bigcup_{\ell=1}^{N_p} \Delta_{p,\ell}.$$

Применяя дважды свойство 3, получим

$$|\Delta| = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{N_p} |\Delta_{p,\ell}| = \sum_{p=1}^{n} |\Delta_p|.$$

Свойство 5. Пусть даны: система попарно непересекающихся промежутков $\{\Delta_k\} = \{[a_k, b_k)\}$ и система промежутков $\{\delta_\ell\} = \{[\alpha_\ell, \beta_\ell)\}$ (которые могут и попарно пересекаться). Тогда

$$\bigcup_k \Delta_k \subset \bigcup_\ell \delta_\ell \Rightarrow \sum_k |\Delta_k| \leqslant \sum_\ell |\delta_\ell|.$$

Доказательство. Возьмем конечное число N промежутков Δ_k. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и введем промежутки

$$\delta_\ell^\varepsilon = [\alpha_\ell - \varepsilon_\ell, \beta_\ell + \varepsilon_\ell), \quad \widetilde{\delta}_\ell^\varepsilon = (\alpha_\ell - \varepsilon_\ell, \beta_\ell + \varepsilon_\ell),$$

где $\varepsilon_\ell = (b_\ell - a_\ell)\varepsilon$.

Система $\{\widetilde{\delta}_\ell^\varepsilon\}$ дает открытое покрытие ограниченного замкнутого множества $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k$, из которого в силу леммы Гейне-Бореля можно выделить конечное подпокрытие $\{\widetilde{\delta}_\ell^\varepsilon\}_{\ell=1}^L$.

$$\bigcup_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{L} \widetilde{\delta}_\ell^\varepsilon \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{L} \delta_\ell^\varepsilon.$$

Проведем сечения через грани всех промежутков Δ_k, $1 \leqslant k \leqslant N$ и δ_ℓ^ε, $1 \leqslant \ell \leqslant L$. В результате получим систему промежутков d_j, являющихся подразбиениями системы промежутков $\{\delta_\ell^\varepsilon\}$:

$$\bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k \subset \bigcup_j d_j = \bigcup_{\ell=1}^{L} \delta_\ell^\varepsilon.$$

Каждый из промежутков Δ_k и δ_ℓ^ε является объединением некоторого числа промежутков d_j. Пользуясь свойством 4, получим

$$\sum_{k=1}^{N} |\Delta_k| = {\sum_j}' |d_j| \leqslant \sum_j |d_j| \leqslant \sum_{\ell=1}^{L} |\delta_\ell^\varepsilon| \leqslant \sum_\ell |\delta_\ell| (1 + 2\varepsilon)^m.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и затем (при необходимости) при $N \to \infty$ получим

$$\sum_k |\Delta_k| \leqslant \sum_\ell |\delta_\ell|.$$

Свойство 6. Пусть даны две системы попарно непересекающихся промежутков $\{\Delta_k\}$ и $\{\delta_\ell\}$, причем $\bigcup\limits_k \Delta_k = \bigcup\limits_\ell \delta_\ell$. Тогда

$$\sum_k |\Delta_k| = \sum_\ell |\delta_\ell|.$$

Доказательство. В силу свойства 5

$$\bigcup_k \Delta_k \subset \bigcup_\ell \delta_\ell \Rightarrow \sum_k |\Delta_k| \leqslant \sum_\ell |\delta_\ell|.$$

Аналогично

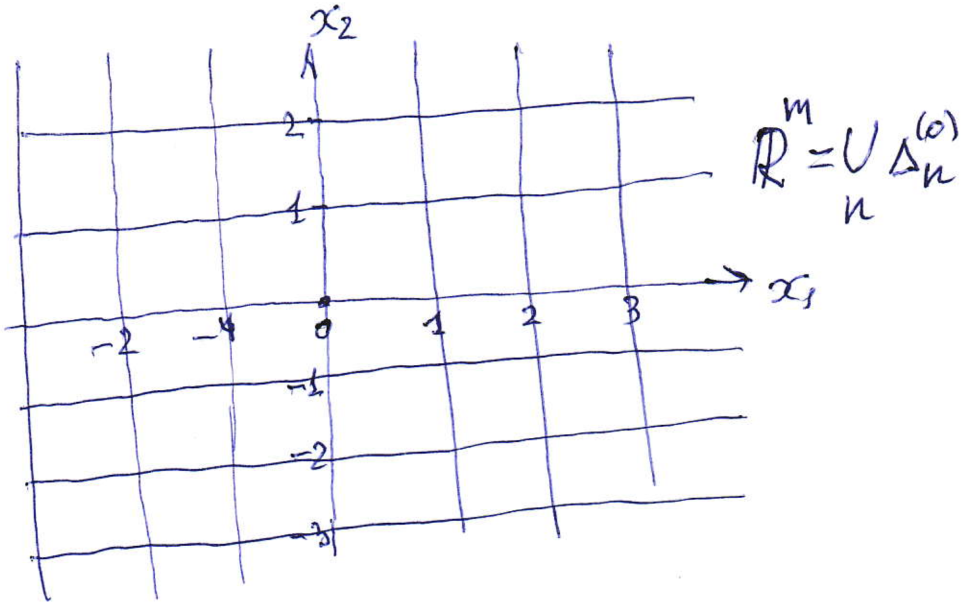
$$\bigcup_\ell \delta_\ell \subset \bigcup_k \Delta_k \Rightarrow \sum_\ell |\delta_\ell| \leqslant \sum_k |\Delta_k|.$$

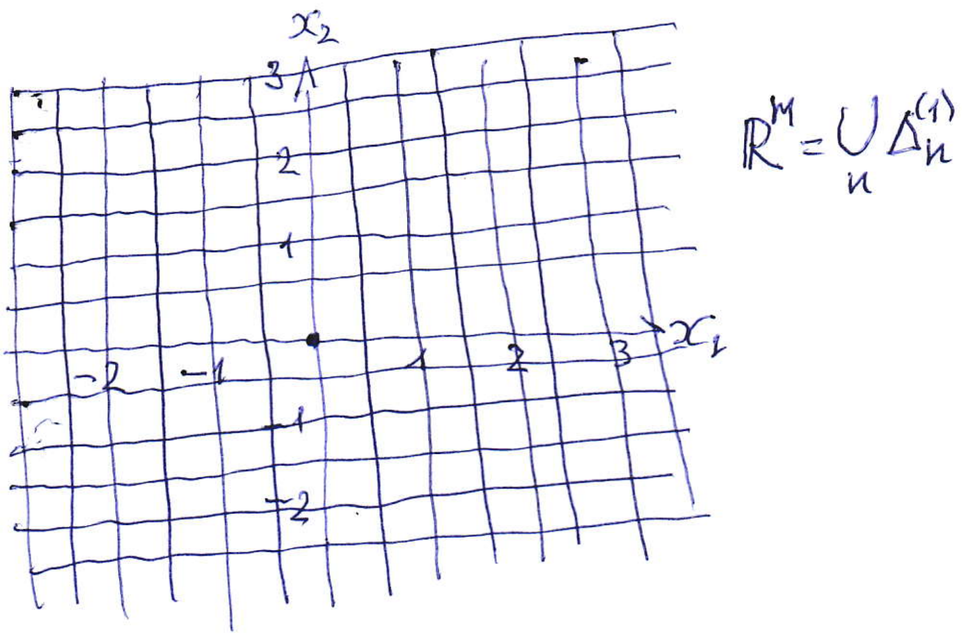
2 Мера открытого множества в $\mathbb{R}^m$

Пусть $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ – вектор с целыми координатами и $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Пространство $\mathbb{R}^m$ можно представить в виде

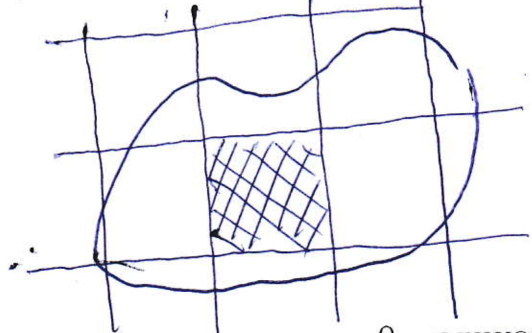
$$\mathbb{R}^m = \bigcup_n \Delta_n^{(p)},$$

где $0 \leqslant p$ – целое, $\Delta_n^{(p)} = \left[\dfrac{n}{2^p}, \dfrac{n+e}{2^p}\right)$ – *промежуток ранга p.*

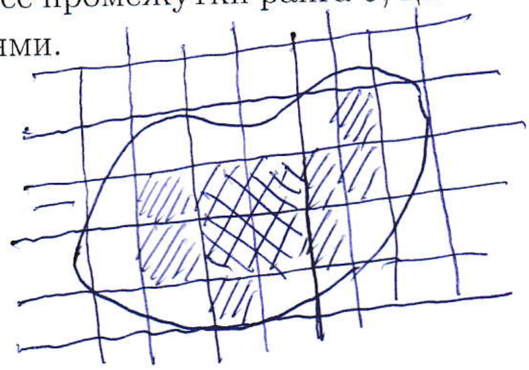




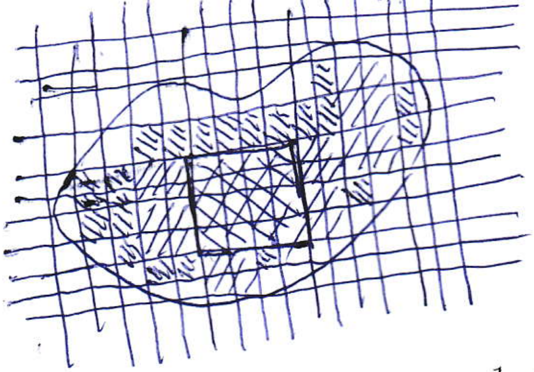
Пусть G – произвольное непустое открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Построим *каноническое разбиение* множества G на попарно непересекающиеся промежутки при помощи следующей последовательности шагов.



Шаг 1. Выберем все промежутки ранга 0, целиком содержащиеся в G вместе со своими замыканиями.



Шаг 2. Выберем все промежутки ранга 1, целиком содержащиеся в G вместе со своими замыканиями и не содержащиеся в уже выбранных промежутках.



. . . .

Шаг p. Выберем все промежутки ранга $p-1$, целиком содержащиеся в G вместе со своими замыканиями и не содержащиеся в уже выбранных промежутках.

. . . .

В результате этого построения получается последовательность измельчающихся промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ такая, что

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k.$$

Действительно, для всякой точки $x_0 \in G$ существует окрестность $B_r(x_0) \subset G$ и при достаточно большом p найдется промежуток ранга p, покрывающий точку x_0 и содержащийся в $B_r(x_0)$.

Опр. *Мерой непустого открытого множества* G называется число

$$|G| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| \leqslant +\infty.$$

Для пустого мнжества, по определению, $|\emptyset| = 0$.

Свойства меры открытых множеств

Свойство 1. (Инвариантность относительно сдвига)

$$|G+h| = |G|.$$

Доказательство. Пусть $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ и $G+h = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} \delta_\ell$ – канонические разбиения множеств G и $G+h$. Тогда

$$G+h = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \delta_\ell = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Delta_k + h).$$

Поэтому в силу свойств меры промежутков

$$|G+h| = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\delta_\ell| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k + h| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| = |G|.$$

Свойство 2. (Монотонность меры)

$$G_1 \subset G_2 \Rightarrow |G_1| \leqslant |G_2|.$$

Доказательство.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \delta_\ell \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} |\delta_\ell| \Rightarrow |G_1| \leqslant |G_2|$$

Свойство 3.

$$G \subset \bigcup_p G_p \Rightarrow |G| \leqslant \sum_p |G_p|.$$

Доказательство.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \bigcup_p \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \Delta_\ell^{(p)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| \leqslant \sum_p \sum_{\ell=1}^{\infty} |\Delta_\ell^{(p)}| \Rightarrow |G| \leqslant \sum_p |G_p|.$$

Свойство 4. (Счетная аддитивность меры)

$$\text{Если}\quad G = \bigcup_p G_p, \quad \text{где}\quad G_i \cap G_j \ \text{ при }\ i \neq j, \ \text{ то}$$

$$|G| = \sum_p |G_p|.$$

Доказательство.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \bigcup_p \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \Delta_\ell^{(p)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| = \sum_p \sum_{\ell=1}^{\infty} |\Delta_\ell^{(p)}| \Rightarrow |G| = \sum_p |G_p|$$

Предложение 2.1. *Пусть* $\Delta = [a, b)$ *и* $\widetilde{\Delta} = (a, b)$. *Тогда*

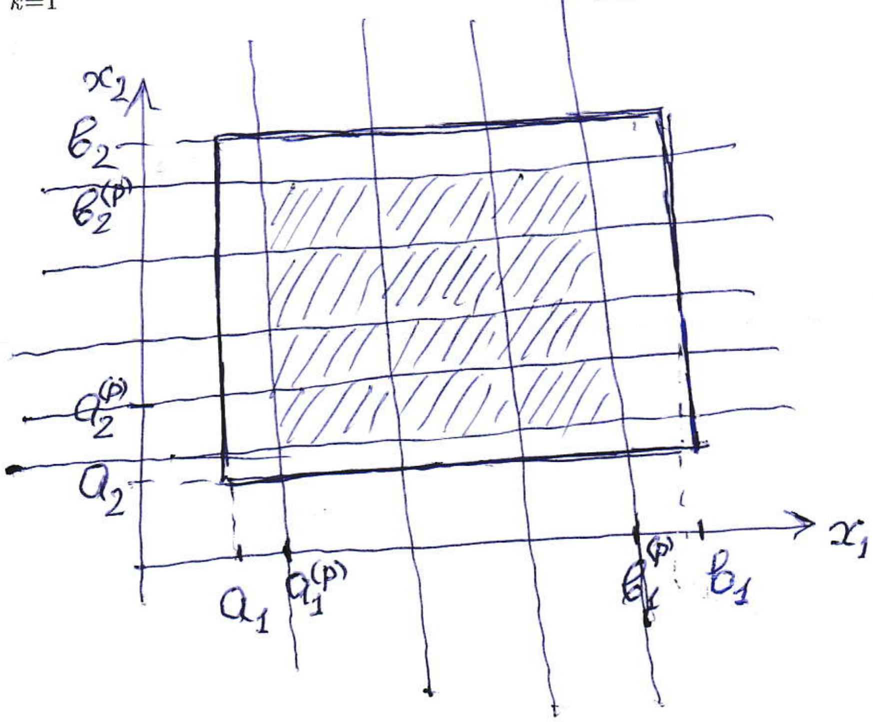
$$|\widetilde{\Delta}| = |\Delta|.$$

Доказательство. Пусть $\{\Delta_k^{(p)}\}_{k=1}^{N_p}$ – совокупность промежутков ранга p, содержащихся в Δ вместе со своими замыканиями. Тогда

$$\bigcup_{p=1}^{N_p} \Delta_k^{(p)} = [a^{(p)}, b^{(p)}),$$

где $a^{(p)}, b^{(p)}$ – двоичные приближения к векторам a и b. Ясно, что

$$|\widetilde{\Delta}| = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{N_p} |\Delta_k^{(p)}| = \lim_{p\to\infty} |[a^{(k)}, b^{(k)})| = \lim_{p\to\infty} \prod_{i=1}^{m} (b_i^{(p)} - a_i^{(p)}) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) = |\Delta|.$$



Предложение 2.2. *Пусть G – произвольное открытое множество конечной меры. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется* **ограниченное** *открытое множество G_ε такое, что*

$$\overline{G}_\varepsilon \subset G \quad \text{и} \quad |G_\varepsilon| > |G| - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, где $\Delta_k = [a_k, b_k)$.

Выберем номер N_ε так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} |\Delta_k| > |G| - \varepsilon$.

Положим $\widetilde{\Delta}_k = (a_k, b_k)$ и заметим, что

$$G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} \widetilde{\Delta}_k \subset \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} \overline{\Delta}_k \subset G.$$

Множество G_ε открыто и

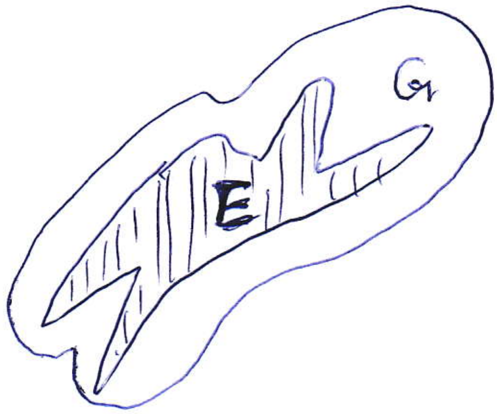
$$|G_\varepsilon| = \sum_{k=1}^{N} |\widetilde{\Delta}_k| = \sum_{k=1}^{N} |\Delta_k| > |G| - \varepsilon.$$

Предложение доказано.

3 Внешняя мера

Опр. Пусть E –произвольное множество в $\mathbb{R}^m$. *Внешней мерой* множества E называется точная нижняя грань мер всевозможных открытых множеств G, содержащих множество E:

$$|E|^* = \inf_{G \supset E} |G| \leqslant +\infty.$$



Свойства внешней меры.

Свойство 1. (Инвариантность относительно сдвига.)

$$|E+h|^* = |E|^*.$$

Доказательство.

$$|E+h|^* = \inf_{G \supset E+h} |G| = \inf_{G-h \supset E} |G| = \inf_{G-h \supset E} |G-h| = |E|^*.$$

Свойство 2. (Монотонность внешней меры.)

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow |E_1|^* \leqslant |E_2|^*.$$

Доказательство.

$$|E_1|^* = \inf_{G \supset E_1} |G| \leqslant \inf_{G \supset E_2} |G| = |E_2|^*.$$

Свойство 3. Справедливо неравенство

$$\Big|\bigcup_k E_k\Big|^* \leqslant \sum_k |E_k|^*.$$

Доказательство. Для каждого $k \geqslant 1$ и всех $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_{k,\varepsilon}$ такое, что

$$E_k \subset G_{k,\varepsilon} \quad \text{и} \quad |G_{k,\varepsilon}| < |E_k|^* + 2^{-k}\varepsilon.$$

Поэтому

$$\Big|\bigcup_k E_k\Big|^* \leqslant \Big|\bigcup_k G_{k,\varepsilon}\Big| \leqslant \sum_k |G_{k,\varepsilon}| \leqslant \sum_k |E_k|^* + \varepsilon.$$

Следовательно

$$\Big|\bigcup_k E_k\Big|^* \leqslant \sum_k |E_k|^*.$$

Замечание 3.1. Утверждать, что

$$\Big|\bigcup_k E_k\Big|^* = \sum_k |E_k|^*$$

нельзя даже, если система $\{E_k\}$ состоит из попарно непересекающихся множеств.

Замечание 3.2. $|G|^* = |G|$ для любого открытого множества G.

Замечание 3.3. $|\emptyset|^* = 0$.

Замечание 3.3. Если множество E ограничено, то $|E|^* < \infty$.