

## 12 Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Рассмотрим свойства спектра вполне непрерывного оператора  $A : H \rightarrow H$ .

Напомним, что в случае, когда  $A$  – непрерывный оператор,  $\lambda \in Sp(A)$ , если нарушено одно из двух условий:

- 1)  $\text{Im} (A - \lambda E) = H$ ,
- 2)  $\text{Ker} (A - \lambda E) = O$ .

Таким образом,  $\lambda \in Sp(A)$ , если  $\text{Im} (A - \lambda E) \neq H$  либо  $\lambda$  является собственным значением оператора  $A$ .

**Теорема 12.1.** *Каждая точка спектра вполне непрерывного оператора, отличная от нуля, является собственным значением.*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in Sp(A)$ . Если  $\lambda \neq 0$  и не является собственным значением, то

$$\text{Im} (A - \lambda I) \neq H \Rightarrow \text{Im} (I - \frac{1}{\lambda} A) \neq H.$$

В силу альтернативы Фредгольма это означает, что

$$\text{Ker} (I - \frac{1}{\lambda} A) \neq O \Rightarrow \text{Ker} (A - \lambda I) \neq O,$$

то есть  $\lambda$  является собственным значением.

Полученное противоречие доказывает теорему.

**Теорема доказана.**

**Следствие 12.1.** *Для вполне непрерывного оператора  $A : H \rightarrow H$  непрерывный спектр пуст либо содержит только одну точку  $\lambda = 0$ .*

*То есть для вполне непрерывного оператора  $A : H \rightarrow H$*

*$Sp(A) = \text{дискретный спектр}$   
либо*

$$Sp(A) = \text{дискретный спектр} \cup \{0\}.$$

**Теорема 12.2.** *Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора может иметь только одну предельную точку  $\lambda = 0$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  – предельная точка спектра. Тогда существует последовательность  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  различных собственных значений, сходящаяся к  $\lambda$ . Пусть  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  – соответствующая ортонормированная последовательность собственных векторов  $Ae_n = \lambda_n e_n$ . Тогда

$$e_n \rightarrow 0 \quad \text{слабо} \Rightarrow Ae_n \rightarrow 0 \quad \text{сильно} \Rightarrow |\lambda_n| = \|Ae_n\| \rightarrow 0.$$

**Теорема доказана.**

**Следствие 12.2.** *Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора не более чем счетен.*

**Теорема 12.3.** Пусть  $A : H \rightarrow H$  – ненулевой вполне непрерывный самосопряженный оператор. Тогда существует собственное значение  $\lambda$  такое, что

$$|\lambda| = \|A\|.$$

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

В силу этой формулы существует последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  такая, что  $\|x_n\| = 1$  и

$$(Ax_n, x_n) \rightarrow \lambda = \pm \|A\|.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \leq \|A\|\|x_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 = \\ &= 2\lambda^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$Ax_n - \lambda x_n \rightarrow 0 \quad \text{сильно.}$$

Выберем подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  такую, что  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  слабо. Так как оператор  $A$  вполне непрерывный, то  $Ax_{n_k} \rightarrow Ax_0$  сильно.

Но

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(\lambda x_{n_k} - Ax_{n_k}) + \frac{1}{\lambda}Ax_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda}Ax_0 \quad \text{сильно} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x_0 \quad \text{сильно.}$$

Следовательно

$$\|x_0\| = 1 \quad \text{и} \quad Ax_0 = \lambda x_0.$$

Значит,  $\lambda$  – собственное значение.

**Теорема доказана.**

**Теорема 12.4.** (*Теорема Гильберта-Шмидта.*) Пусть  $A : H \rightarrow H$  – вполне непрерывный самосопряженный оператор.

Тогда существует ортонормированная система  $\{e_k\}$  собственных векторов оператора  $A$ , отвечающих ненулевым собственным значениям  $\{\lambda_k\}$ , упорядоченная по невозрастанию модулей

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$$

и такая, что каждый элемент  $x \in H$  однозначным образом представляется в виде

$$x = \sum_k (x, e_k) e_k + x', \quad x' \in \text{Ker } A. \quad (12.1)$$

При этом

$$Ax = \sum_k \lambda_k (x, e_k) e_k. \quad (12.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $A \neq 0$ . Существование  $\lambda_1 \neq 0$  вытекает из теоремы 12.3. Напомним, что  $|\lambda_1| = \|A\|$ .

В силу теоремы 12.2 все ненулевые собственные значения можно занумеровать в порядке невозрастания модулей. Кратность каждого собственного значения  $\lambda_k \neq 0$  (то есть размерность пространства  $\text{Ker } (A - \lambda_k I) = \text{Ker } (I - \frac{1}{\lambda_k} A)$ ) конечна в силу второй теоремы Фредгольма. Учитывая, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, построим ортонормированную последовательность  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  собственных векторов, отвечающим последовательности собственных значений

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots, \quad \lambda_k \neq 0.$$

В эту последовательность каждое собственное значение входит с учетом его кратности.

Пусть  $x \in L = \overline{\text{span}(\{e_n\}_{n=1}^\infty)}$ . Тогда  $x = \sum_k (x, e_k) e_k$ .

Кроме того, если  $\dim L = n$ , то

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Если же  $\dim L = \infty$ , то

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left( \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k) e_k = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Заметим, что пространства  $L$  и  $\text{Ker } A$  замкнуты и взаимно ортогональны. Это следует из того, что базисные векторы из  $L$  и векторы из  $\text{Ker } A$  являются векторами, отвечающими различным собственным значениям:

$$\lambda_k(e_k, y) = (Ae_k, y) = (e_k, Ay) = 0 \quad \forall y \in \text{Ker } A.$$

Положим теперь

$$E = (L \oplus \text{Ker } A)^\perp$$

и рассмотрим оператор  $A_E$ , являющийся сужением оператора  $A$  на  $E$ .

Заметим, что  $A_E : E \rightarrow E$ . Действительно,

$$Ay \in L \quad \forall y \in L \oplus \text{Ker } A$$

и

$$(A_Ex, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = 0 \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in L \oplus \text{Ker } A.$$

Поэтому  $A_Ex \in E$ .

Покажем, что  $E = O$ . Пусть  $E \neq O$ . Тогда  $A_E \neq 0$  (в противном случае  $E \subset \text{Ker } A$ ). В силу теоремы 12.3 существует собственный вектор  $x \in E$  и собственное значение  $\lambda$  такое, что  $|\lambda| = \|A_E\| \neq 0$ . Получено противоречие, так как все собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям содержатся в  $L$ .

Таким образом  $E = O$ . Так как  $L \oplus \text{Ker } A$  - замкнутое подпространство, то из  $(L \oplus \text{Ker } A)^\perp = O$  следует

$$H = L \oplus \text{Ker } A.$$

Таким образом справедливы представления (12.1) и (12.2).

**Теорема доказана.**

**Следствие 12.3.** *Если  $H$  сепарабельно, то в условиях теоремы 12.4 существует базис из собственных векторов оператора  $A$ .*

**Доказательство.** Достаточно заметить, что в  $\text{Ker } A$  базис состоит из собственных векторов, отвечающих собственному значению  $\lambda = 0$ .

**Следствие 12.4.** *Пусть  $A : H \rightarrow H$  – вполне непрерывный оператор. Если он не конечномерен, то  $\lambda = 0$  является точкой спектра.*

Для доказательства заметим, что

$$Ax = \sum_k \lambda_k(x, e_k) e_k.$$

Итак, для вполне непрерывного самосопряженного оператора  $A$

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x, e_k) e_k$$

где  $\lambda_k$  вещественны, либо

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x, e_k) e_k,$$

где  $\lambda_k$  вещественны и  $\lambda_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Заметим, что обратно, всякий оператор такого вида является самосопряженным и вполне непрерывным, если  $\lambda_k$  вещественные,  $|\lambda_k| \rightarrow 0$ ,  $\{e_k\}$  – ортонормированная система.

Действительно,

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \left( \sum_k \lambda_k(x, e_k) e_k, y \right) = \sum_k \lambda_k(x, e_k) (e_k, y), \\ (x, Ay) &= \left( x, \sum_k \lambda_k(y, e_k) e_k \right) = \sum_k \lambda_k(e_k, y) (x, e_k). \end{aligned}$$

Если  $x_n \rightarrow 0$  слабо в  $H$ , то

$$\|Ax_n\|^2 = \sum_k |\lambda_k|^2 |(x_n, e_k)|^2 \leq \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2 |(x_n, e_k)|^2 + \sup_{k>N} |\lambda_k|^2 \|x_n\|^2.$$

Второе слагаемое в правой части этого неравенства можно сделать меньше  $\varepsilon/2$  выбором  $N$ , а затем первое слагаемое можно сделать меньше  $\varepsilon/2$  для  $n > n(\varepsilon)$ .

Следовательно

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{слабо} \Rightarrow Ax_n \rightarrow 0 \quad \text{сильно.}$$

Значит, оператор  $A$  – вполне непрерывный.

**Теорема 12.5.** Пусть  $A : H \rightarrow H$  – вполне непрерывный самосопряженный оператор.

Для того, чтобы оператор  $A$  был неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы все его собственные значения были неотрицательны.

**Доказательство.** Достаточно заметить, что в силу теоремы Гильберта-Шмидта

$$Ax = \sum_k \lambda_k(x, e_k) e_k \Rightarrow (Ax, x) = \sum_k \lambda_k |(x, e_k)|^2.$$

**Теорема доказана.**

**Замечание 12.1.** Для самосопряженного вполне непрерывного оператора спектр расположен на отрезке  $[\mu, M]$ , где  $\mu = \inf_k \lambda_k$  и  $M = \sup_k \lambda_k$ ,

**Теорема 12.6.** Пусть  $A : H \rightarrow H$  – вполне непрерывный оператор. Пространство  $\text{Im } A$  не является замкнутым, если оно не конечномерно.

**Доказательство.** Предположим, что пространство  $\text{Im } A$  бесконечномерно и замкнуто. Тогда  $\text{Im } A$  – гильбертово пространство.

Как нетрудно видеть,

$$\text{Im } A = \bigcup_{N=1}^{\infty} A(\overline{B}_N(0)). \quad (12.3)$$

Заметим, что множество  $A(\overline{B}_N(0))$  замкнуто, но нигде не плотно.

Докажем его замкнутость. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A(\overline{B}_N(0))$  и  $y_n \rightarrow y_0$ . Тогда существует последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{B}_N(0)$  такая, что  $y_n = Ax_n$ . Из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \overline{B}_k$ . Тогда  $y_{n_k} = Ax_{n_k} \rightarrow Ax_0 = y_0$ .

Множество  $A(\overline{B}_N(0))$  компактно. Поэтому оно нигде не плотно.

То, что пространство  $\text{Im } A$  не полно, следует из теоремы Бэра и формулы (12.3).

Полученное противоречие доказывает теорему.

**Теорема доказана.**

**Следствие 12.5.** Если оператор  $A : H \rightarrow H$  вполне непрерывен, то

$$\text{Im } A \neq H.$$

Значит, уравнение

$$Ax = y$$

разрешимо не при любых  $y \in H$ . И даже, если при некотором  $y_0 \in H$  есть решение  $x_0$ , то для сколь угодно малого  $\delta > 0$  существуют  $y \in B_{\delta}(y_0)$ , для которых решений нет.