

# ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

## 1 Суммируемые по Лебегу функции

Всюду в этой главе  $E$  – измеримое множество в  $\mathbb{R}^m$ .

В этом параграфе  $E$  – ограниченное измеримое множество и  $f$  – заданная на  $E$  ограниченная измеримая функция.

**Опр.** Конечная система измеримых множеств  $T = \{E_k\}_{k=1}^n$  называется *разбиением множества  $E$* , если

$$\bigcup_{k=1}^n E_k = E \quad \text{и} \quad |E_i \cap E_j| = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Фиксируем некоторое разбиение  $T$  множества  $E$  и положим

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Составим *нижнюю и верхнюю интегральные суммы*

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k |E_k|, \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k |E_k|.$$

Ясно, что

$$s_T(f) \leq S_T(f).$$

Введем *нижний и верхний интегралы Лебега* функции  $f$  на множестве  $E$  следующим образом:

$$\underline{J}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f).$$

**Опр.** Функция  $f$  называется *интегрируемой по Лебегу на множестве  $E$*  (или *суммируемой на  $E$* ), если

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Число  $J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$  называется *интегралом Лебега функции  $f$  на множестве  $E$*  и обозначается так:

$$J(f) = \int_E f(x) dx$$

**Опр.** Разбиение  $\tilde{T} = \{\tilde{E}_i\}_{i=1}^m$  называется *измельчением* разбиения  $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ , если для каждого  $i$  верно  $\tilde{E}_i \subset E_k$  с некоторым  $k = k(i)$  и  $E_k = \bigcup_{\tilde{E}_i \subset E_k} \tilde{E}_i$ .

В этом случае

$$|E_k| = \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} |\tilde{E}_i|.$$

**Опр.** Пусть  $T_1 = \{E_i^{(1)}\}_{i=1}^n$ ,  $T_2 = \{E_j^{(1)}\}_{j=1}^m$  – два разбиения множества  $E$ .  
Разбиение

$$T_1 \cdot T_2 = \{E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

называется *произведением разбиений*  $T_1$  и  $T_2$ .

Очевидно, что  $T_1 \cdot T_2$  является измельчением каждого из разбиений  $T_1$  и  $T_2$ .

Отметим следующие свойства.

**Лемма 1.1.** Если  $\tilde{T} = \{\tilde{E}_i\}_{i=1}^m$  – измельчение разбиения  $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ , то

$$s_T(f) \leq s_{\tilde{T}}(f), \quad S_{\tilde{T}}(f) \leq S_T(f).$$

**Доказательство.** Если  $\tilde{E}_i \subset E_k$ , то

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x) \leq \tilde{m}_i = \inf_{x \in \tilde{E}_i} f(x),$$

$$\tilde{M}_i = \sup_{x \in \tilde{E}_i} f(x) \leq M_k = \sup_{x \in E_k} f(x).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} s_T(f) &= \sum_{k=1}^n m_k |E_k| = \sum_{k=1}^n m_k \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} |\tilde{E}_i| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} \tilde{m}_i |\tilde{E}_i| = \sum_{i=1}^m \tilde{m}_i |\tilde{E}_i| = s_{\tilde{T}}(f), \\ S_{\tilde{T}}(f) &= \sum_{i=1}^m \tilde{M}_i |\tilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} \tilde{M}_i |\tilde{E}_i| \leq \sum_{k=1}^n M_k \sum_{\tilde{E}_i \subset E_k} |\tilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n M_k |E_k| = S_T(f). \end{aligned}$$

**Лемма доказана.**

**Лемма 1.2.** Для любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f).$$

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{T} = T_1 \cdot T_2$ . Тогда в силу леммы 1.1

$$s_{T_1}(f) \leq s_{\tilde{T}}(f) \leq S_{\tilde{T}}(f) \leq S_{T_2}(f).$$

**Лемма доказана.**

**Лемма 1.3.** Справедливо неравенство

$$\underline{J}(f) \leq \overline{J}(f).$$

**Доказательство.** В силу леммы 1.2 имеем

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_{T_1} s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) \leq \inf_{T_2} S_{T_2}(f) = \overline{J}(f).$$

**Лемма доказана.**

**Замечание.** Как нетрудно видеть,

$$\int_E 1 \, dx = |E|.$$

Действительно, для  $f(x) = 1$  имеем

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_T s_T(f) = |E|,$$

$$S_T(f) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f) = |E|.$$

Ясно также, что

$$\int_E 0 \, dx = 0.$$

Свойства интеграла Лебега  
ограниченной измеримой функции

**Свойство 1.** Пусть функция  $f$  суммируема на  $E$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда функция  $\lambda f$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство

$$\int_E \lambda f(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda s_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \sup_T s_T(f) = \lambda \underline{J}(f) = \lambda J(f),$$

$$S_T(\lambda f) = \lambda S_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \inf_T S_T(f) = \lambda \underline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно

$$\underline{J}(\lambda f) = \bar{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Пусть  $\lambda < 0$ . Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda S_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \inf_T S_T(f) = \lambda \bar{J}(f) = \lambda J(f),$$

$$S_T(\lambda f) = \lambda s_T(f) \Rightarrow \bar{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \sup_T s_T(f) = \lambda \underline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно

$$\underline{J}(\lambda f) = \bar{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 2.** Пусть функции  $f$  и  $g$  суммируемы на  $E$ . Тогда функция  $f + g$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство

$$\int_E (f + g)(x) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  – произвольные разбиения множества  $E$ . Возьмем  $T = T_1 \cdot T_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} s_{T_1}(f) + s_{T_2}(g) &\leq s_T(f) + s_T(g) \leq s_T(f + g) \leq \underline{J}(f + g) \leq \\ &\leq \overline{J}(f + g) \leq S_T(f + g) \leq S_T(f) + S_T(g) \leq S_{T_1}(f) + S_{T_2}(g). \end{aligned}$$

Как следствие,

$$J(f) + J(g) \leq \underline{J}(f + g) \leq \overline{J}(f + g) \leq J(f) + J(g).$$

Таким образом,

$$\underline{J}(f + g) = \overline{J}(f + g) = J(f) + J(g).$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 3.** Пусть  $E = E_1 \cup E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  – измеримые непересекающиеся множества.

а) Если функция  $f$  суммируема на  $E$ , то  $f$  суммируема на  $E_1$  и на  $E_2$ , причем

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx. \quad (1.1)$$

б) Если функция  $f$  суммируема на  $E_1$  и на  $E_2$ , то  $f$  суммируема и на  $E$  и справедливо равенство (1.1).

**Доказательство.** а) Пусть  $T = \{\tilde{E}_k\}_{k=1}^n$  – произвольное разбиение множества  $E$ . Оно индуцирует разбиения

$$T_1 = \{\tilde{E}_k \cap E_1\}_{k=1}^n \quad \text{и} \quad T_2 = \{\tilde{E}_k \cap E_2\}_{k=1}^n$$

множеств  $E_1$  и  $E_2$ . Заметим, что

$$s_T(f) \leq s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \leq \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leq \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leq S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f) \leq S_T(f).$$

Отсюда следует, что

$$J(f) \leq \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leq \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leq J(f).$$

Поэтому

$$\underline{J}_1(f) = \overline{J}_1(f), \quad \underline{J}_2(f) = \overline{J}_2(f) \quad \text{и} \quad J_1(f) + J_2(f) = J(f).$$

б) Пусть  $T_1$  и  $T_2$  – произвольные разбиения множеств  $E_1$  и  $E_2$ . Возьмем  $T = T_1 \cup T_2$ . Тогда

$$s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) = s_T(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq S_T(f) \leq S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f).$$

Как следствие,

$$J_1(f) + J_2(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq J_1(f) + J_2(f).$$

Поэтому

$$J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f) = J_1(f) + J_2(f).$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 4.** Пусть функция  $f(x)$  суммируема на  $E$ .

Тогда для всякого  $h \in \mathbb{R}^m$  функция  $f(x - h)$  суммируема на  $E + h$  и

$$\int_{E+h} f(x - h) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться инвариатностью меры относительно сдвига.

**Свойство 5.** Пусть  $|E| = 0$ . Тогда

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

**Доказательство.** Достаточно заметить, что  $s_T(f) = 0$ ,  $S_T(f) = 0$ .

**Свойство 6.** Пусть функции  $f$  и  $g$  суммируемы на  $E$ , причем  $f(x) \leq g(x)$  почти всюду на  $E$ . Тогда

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\int_E f dx - \int_E g dx = \int_E (f - g) dx = \int_{E[f \leq g]} (f - g) dx + \int_{E[f > g]} (f - g) dx.$$

Для первого интеграла  $s_T(f - g) \leq 0$  и поэтому значение этого интеграла неотрицательно. Второй интеграл равен нулю, так как  $|E[f > g]| = 0$ .

**Свойство доказано.**

**Теорема 1.1.** (Теорема Лебега.) Любая ограниченная измеримая на множестве  $E$  конечной меры функция  $f$  интегрируема по Лебегу на этом множестве.

**Доказательство.** По условию  $m \leq f < M$ . Разобьем отрезок  $[m, M]$  точками

$$m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M.$$

с постоянным шагом  $\delta_n = \frac{M - m}{n}$ .

Положим  $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ , где  $E_k = E[y_{k-1} \leq y < y_k]$  для  $1 \leq k \leq n$ .

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n y_{k-1} |E_k| \leq s_T(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq S_T(f) \leq \sum_{k=1}^n y_k |E_k|.$$

Следовательно

$$0 \leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) |E_k| = \sum_{k=1}^n \delta_n |E_k| = \delta_n |E|.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , имеем:

$$0 \leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \Rightarrow \underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Именно для измеримости множеств  $E_k$  Лебегу и потребовалось свойство измеримости функции  $f$ .

**Замечание 2.** Можно доказать, что **всякая интегрируемая по Лебегу функция  $f$  является измеримой.**

**Теорема 1.2.** Если функция  $f$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на  $[a, b]$  по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега совпадают:

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (L) \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

**Доказательство.** Пусть  $\underline{I}(f)$  и  $\bar{I}$  – нижний и верхний интегралы Дарбу.

$$\underline{I}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \bar{I}(f) = \inf_T S_T(f),$$

где  $T = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Очевидно, что

$$\underline{I}(f) \leq \underline{J}(f) \leq \bar{J}(f) \leq \bar{I}(f),$$

так как множество разбиений в определении  $\underline{J}(f)$  и  $\bar{J}(f)$  шире.

Так как  $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = (R) \int_a^b f(x) dx$ , то  $\underline{J} = \bar{J} = (R) \int_a^b f(x) dx$ .

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Из интегрируемости по Лебегу не следует интегрируемость по Риману! (Функция Дирихле.)

**Теорема 1.3.** Функция  $f$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда  $f$  ограничена и непрерывна почти всюду на  $[a, b]$ .

## 2 Интеграл Лебега от неограниченной функции

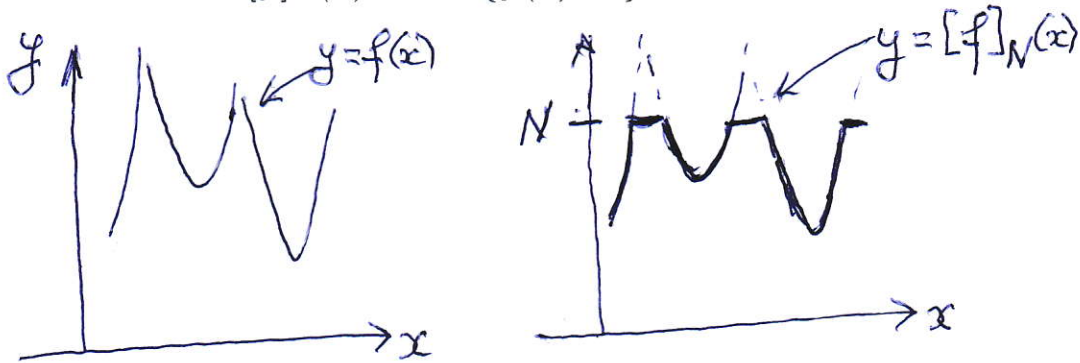
Как и в предыдущем параграфе,  $f$  – измеримая функция, заданная на ограниченном измеримом множестве  $E$ .

### Интеграл Лебега от неотрицательной функции

Пусть  $f$  – измеримая неотрицательная функция.

Введем *срезку* функции  $f$  формулой

$$[f]_N(x) = \min\{f(x), N\}, \quad \text{где } N > 0.$$



Из измеримости функции  $f$  в силу формулы

$$E[[f]_N > a] = \begin{cases} \emptyset & \text{при } a \geq N, \\ E[f > a] & \text{при } a < N. \end{cases}$$

следует измеримость срезки  $[f]_N$ .

Из ограниченности и измеримости срезки  $[f]_N$  в силу теоремы Лебега существование интеграла

$$J_N(f) = \int_E [f]_N(x) dx.$$

Заметим, что  $[f]_N$  не убывает по  $N$ . Поэтому  $J_N(f)$  является неубывающей функцией параметра  $N > 0$ .

**Опр.** Будем говорить, что функция  $f$  *интегрируема по Лебегу на множестве  $E$*  (или *суммируема на  $E$* ), если предел

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx$$

конечен.

Этот предел называется *интегралом Лебега функции  $f$  на множестве  $E$* .

**Замечание.** Если функция  $f$  ограничена, то  $[f]_N = f$  при достаточно больших значениях  $N$  и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Пример 1.** Докажем, что функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  интегрируема по Лебегу на интервале  $(0, 1)$ .

Заметим, что

$$[f]_N(x) = \begin{cases} N, & x \in \left(0, \frac{1}{N^2}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \left[\frac{1}{N^2}, 1\right). \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 [f]_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{1/N^2} N dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_{1/N^2}^1 = 2. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Докажем, что функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  не интегрируема по Лебегу на интервале  $(0, 1)$ .

Заметим, что

$$[f]_N(x) = \begin{cases} N, & x \in \left(0, \frac{1}{N}\right), \\ \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{N}, 1\right). \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 [f]_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{1/N} N dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^1 \frac{1}{x} dx = \\ &= 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \ln x \Big|_{1/N}^1 = +\infty. \end{aligned}$$

Свойства интегрируемых по Лебегу  
неотрицательных измеримых функций

**Свойство 1.** Если функция  $f \geq 0$  суммируема на  $E$  то для всех  $\lambda > 0$  функция  $\lambda f$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство

$$\int_E \lambda f(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$[\lambda f]_N = \max\{\lambda f, N\} = \lambda \max\{f, N/\lambda\} = \lambda [f]_{N/\lambda}.$$

Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [\lambda f]_N(x) dx = \lambda \int_E [f]_{N/\lambda}(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 2.** Пусть функции  $f \geq 0$  и  $g \geq 0$  суммируемы на  $E$ . Тогда функция  $f + g$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство

$$\int_E (f + g)(x) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$[f]_{N/2} + [g]_{N/2} \leq [f + g]_N \leq [f]_N + [g]_N.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_{N/2}(x) dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [g]_{N/2}(x) dx &\leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f + g]_N(x) dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [g]_N(x) dx, \end{aligned}$$

то есть

$$\int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx \leq \int_E (f(x) + g(x)) dx \leq \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 3.** Пусть  $E = E_1 \cup E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  – измеримые непересекающиеся множества.

а) Если функция  $f \geq 0$  суммируема на  $E$ , то  $f$  суммируема на  $E_1$  и на  $E_2$ , причем

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx. \quad (2.1)$$

б) Если функция  $f \geq 0$  суммируема на  $E_1$  и на  $E_2$ , то  $f$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство (2.1).

**Доказательство.** Заметим, что

$$\int_E [f]_N(x) dx = \int_{E_1} [f]_N(x) dx + \int_{E_2} [f]_N(x) dx.$$

Поэтому

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

**Следствие доказано.**

**Свойство 4.** Пусть функция  $f \geq 0$  суммируема на  $E$ . Тогда для всякого  $h \in \mathbb{R}^m$  функция  $f(x - h)$  суммируема на  $E + h$  и

$$\int_{E+h} f(x - h) dx = \int_E f(x) dx. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Предельный переход в равенстве

$$\int_{E+h} [f]_N(x - h) dx = \int_E [f]_N(x) dx.$$

дает равенство (2.2).

**Свойство доказано.**

**Свойство 5.** Пусть  $|E| = 0$ . Тогда всякая заданная на  $E$  неотрицательная функция  $f$  суммируема на  $E$  и

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

**Доказательство.**

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E [f]_N(x) dx = 0.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 6.** Пусть  $0 \leq f \leq g$  и функция  $g$  суммируема на  $E$ . Тогда  $f$  суммируема на  $E$  и

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

**Доказательство.** Достаточно перейти к пределу в неравенстве

$$\int_E [f]_N(x) dx \leq \int_E [g]_N(x) dx.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 7.** Если  $f \geq 0$  суммируема на  $E$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E (f - [f]_N) dx = 0.$$

**Доказательство.** Заметим, что  $0 \leq f - [f]_N \leq f$ . Поэтому в силу свойства 6 функция  $f - [f]_N$  суммируема на  $E$ . Используя свойство 2, имеем

$$\int_E f dx = \int_E [f]_N dx + \int_E (f - [f]_N) dx.$$

Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E (f - [f]_N) dx = \int_E f dx - \int_E [f]_N dx = 0.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 8.** Если  $f \geq 0$  и  $\int_E f dx = 0$ , то  $f = 0$  почти всюду на  $E$ .

**Доказательство.** Заметим, что

$$\int_E f dx = \int_{E[f \geq 1/n]} f dx + \int_{E[f < 1/n]} f dx \geq \int_{E[f \geq 1/n]} f dx \geq \frac{1}{n} |E[f \geq 1/n]|$$

Следовательно  $|E[f \geq 1/n]| = 0$ . Поскольку

$$E[f > 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geq 1/n],$$

то  $|E[f > 0]| = 0$ .

**Свойство доказано.**

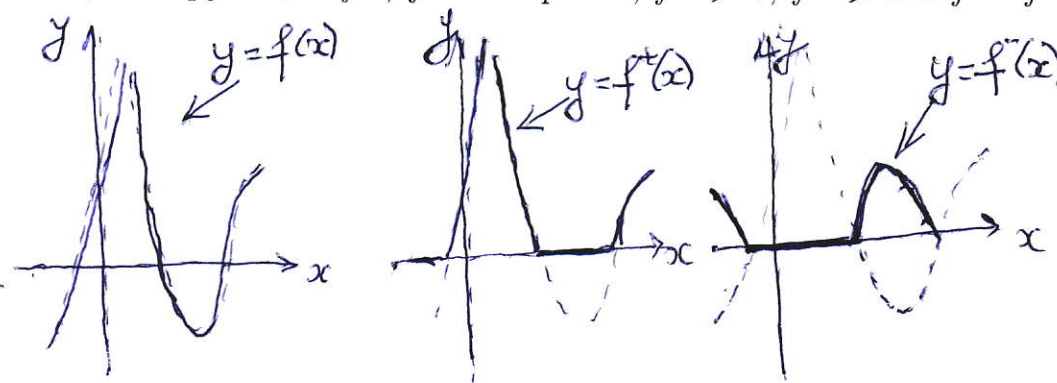
## Интеграл Лебега от функции произвольного знака

Пусть  $f$  – неограниченная измеримая функция произвольного знака, заданная на ограниченном измеримом множестве  $E$ .

Введем функции

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$
$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Заметим, что функции  $f^+$ ,  $f^-$  измеримы,  $f^+ \geq 0$ ,  $f^- \geq 0$  и  $f = f^+ - f^-$ .



**Опр.** Будем говорить, что функция  $f$  *интегрируема по Лебегу на множестве  $E$*  (или *суммируема на  $E$* ), если интегрируемы по Лебегу функции  $f^+$  и  $f^-$ .

*Интегралом Лебега функции  $f$  на множестве  $E$*  в этом случае называется число

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx.$$

Множество всех суммируемых на  $E$  функций будем обозначать через  $L(E)$ .

**Утверждение.** Измеримая функция  $f$  интегрируема на множестве  $E$  конечной меры тогда и только тогда, когда интегрируем ее модуль  $f$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in L(E)$ . Тогда  $f^+, f^- \in L(E)$ . Следовательно  $|f| = f^+ + f^- \in L(E)$ .

Если же  $|f| \in L(E)$ , то  $0 \leq f^+ \leq |f|$ ,  $0 \leq f^- \leq |f|$  и поэтому  $f^+, f^- \in L(E)$ . Следовательно  $f \in L(E)$ .

**Утверждение доказано.**

**Замечание.** Для неизмеримой функции это утверждение неверно.

### Свойства интеграла Лебега

**Свойство 1.** Если  $f \in L(E)$ , то  $\lambda f \in L(E)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  и справедливо равенство

$$\int_E \lambda f(x) dx = \lambda \int_E f(x) dx.$$

**Доказательство.** При  $\lambda \geq 0$  имеем

$$(\lambda f)^+ = \lambda f^+, \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-$$

и

$$\int_E \lambda f dx = \lambda \int_E f^+ dx - \lambda \int_E f^- dx = \lambda \int_E f dx.$$

При  $\lambda < 0$  имеем

$$(\lambda f)^+ = -\lambda f^-, \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+$$

и

$$\int_E \lambda f dx = -\lambda \int_E f^- dx + \lambda \int_E f^+ dx = \lambda \int_E f dx.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 2.** Пусть  $f, g \in L(E)$ . Тогда  $f + g \in L(E)$  и справедливо равенство

$$\int_E (f + g)(x) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

**Доказательство.** Из неравенства  $|f + g| \leq |f| + |g|$  следует, что  $f + g \in L(E)$ . Поскольку

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

то

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$$

и

$$\int_E (f + g)^+ dx + \int_E f^- dx + \int_E g^- dx = \int_E (f + g)^- dx + \int_E f^+ dx + \int_E g^+ dx.$$

Значит,

$$\int_E (f + g)^+ dx - \int_E (f + g)^- dx = \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx + \int_E g^+ dx - \int_E g^- dx.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 3.** Пусть  $E = E_1 \cup E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  – измеримые непересекающиеся множества.

$f \in L(E)$  тогда и только тогда, когда  $f \in L(E_1)$  и  $f \in L(E_2)$ , причем

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

**Доказательство.**

$$\int_E f^+ dx - \int_E f^- dx = \int_{E_1} f^+ dx - \int_{E_1} f^- dx + \int_{E_2} f^+ dx - \int_{E_2} f^- dx.$$

**Свойство 4.** Пусть  $f \in L(E)$ . Тогда  $f(\cdot - h) \in L(E + h)$  для всякого  $h \in \mathbb{R}^m$   
и

$$\int_{E+h} f(x - h) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Доказательство.**

$$\int_{E+h} f^+(x - h) dx - \int_{E+h} f^-(x - h) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx.$$

**Свойство 5.** Пусть  $|E| = 0$ . Тогда всякая заданная на  $E$  функция  $f$  суммируема на  $E$  и

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

**Доказательство.**

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx = 0.$$

**Свойство доказано.**

**Свойство 6.** Пусть  $f$  – измеримая на  $E$  функция,  $g \in L(E)$ ,  $g \geq 0$  и  $|f| \leq g$  почти всюду на  $E$ . Тогда  $f \in L(E)$  и

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E g(x) dx.$$

**Доказательство.** Из неравенства  $|f| \leq g$  следует, что  $f \in L(E)$  и

$$\int_E |f|(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

Из неравенств  $-|f| \leq f \leq |f|$  следует, что

$$-\int_E |f|(x) dx \leq \int_E f(x) dx \leq \int_E |f|(x) dx.$$

Поэтому

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx \leq \int_E g(x) dx.$$

**Свойство доказано.**