

4 Последовательности измеримых функций

Лемма 4.1. Пусть E – измеримое множество и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность измеримых на E почти всюду конечных функций. Тогда функции

$$\varphi(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$$

(миноранта и мажоранта последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$) измеримы на E .

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$E[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a], \quad E[\psi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a].$$

Лемма 4.2. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность. Тогда

$$\underline{a} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} a_k, \quad (*)$$

$$\overline{a} = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} a_k. \quad (**)$$

Доказательство. Докажем формулу (*). Положим $b_n = \inf_{k \geq n} a_k$. Заметим, что последовательность b_n не убывает. Следовательно существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \geq 1} b_n.$$

По определению \underline{a} – это минимальный из частичных пределов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\underline{a} - \varepsilon < a_{n_k} < \underline{a} + \varepsilon \quad \forall k \geq K(\varepsilon).$$

Кроме того,

$$\underline{a} - \varepsilon \leq a_k \quad \forall k \geq M(\varepsilon).$$

Следовательно

$$\underline{a} - \varepsilon \leq b_n \leq \underline{a} + \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \Rightarrow \quad \underline{a} - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{a} + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\underline{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \geq 1} b_n.$$

Формула (*) доказана. Формула (**) доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 4.3. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на E почти всюду конечных функций. Тогда функции

$$\underline{f}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \overline{f}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

измеримы на E .

Доказательство. Из леммы (4.2) следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad (*)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} f_k(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x). \quad (**)$$

Применяя лемму 4.1, завершаем доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 4.1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на E функций. Если $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду на E , то функция f измерима на E .

Доказательство.

$$f(x) = \underline{f}(x) = \overline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{почти всюду на } E.$$

В силу леммы 4.3 функция f измерима.

Теорема доказана.

Сходимость по мере

Определение. Пусть $f \in \mathfrak{M}(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к f по мере на E* , если

$$\text{meas } E [|f_n - f| > \delta] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для любого $\delta > 0$.

Таким образом, $f_n \rightarrow f$ по мере на E тогда и только тогда, когда для всякого $\delta > 0$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\text{meas } E [|f_n - f| > \delta] < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N.$$

Пример 1. Пусть $E = [0, 1]$ и $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \rightarrow 0$ по мере, так как

$$E[|f_n - 0| > \delta] = E[|f_n| > \delta] = \begin{cases} (\delta^{1/n}, 1], & 0 < \delta < 1, \\ \emptyset, & 1 \leq \delta \end{cases}$$

и $\text{meas } E [|f_n - f| > \delta] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 2. Пусть $E = \mathbb{R}$ и $f_n = \chi_{[n, n+1]}$. Тогда $f_n(x) \rightarrow 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, но $f_n \not\rightarrow 0$ по мере, так как

$$\text{meas}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \delta\} = 1 \not\rightarrow 0 \quad \text{для } 0 < \delta < 1.$$

Пример 3. ("Бегающая ступенька") Пусть $E = [0, 1]$ и $f_n = \chi_{[a_n, b_n]}$, где

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] &= \left[0, \frac{1}{2}\right], & [a_2, b_2] &= \left[\frac{1}{2}, 1\right], & [a_3, b_3] &= \left[0, \frac{1}{4}\right], & [a_4, b_4] &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ [a_5, b_5] &= \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], & [a_6, b_6] &= \left[\frac{3}{4}, 1\right], & [a_7, b_7] &= \left[0, \frac{1}{8}\right], & [a_8, b_8] &= \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \dots \end{aligned}$$

Эта последовательность не сходится ни в одной точке, но сходится к нулю по мере.

**Арифметические операции над сходящимися по мере
последовательностями**

Теорема 4.2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$, $f, g \in \mathfrak{M}(E)$, где E – множество конечной меры. Если $f_n \rightarrow f$ и $g_n \rightarrow g$ по мере, то

$$f_n \pm g_n \rightarrow f \pm g, \quad f_n g_n \rightarrow f g, \quad f_n / g_n \rightarrow f / g \quad \text{по мере}$$

(последнее при условии, что $g \neq 0$).

Доказательство. 1. Из неравенства

$$|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g|$$

следует, что

$$E[|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| > \delta] \subset E[|f_n - f| > \delta/2] \cup E[|g_n - g| > \delta/2].$$

Отсюда

$$|E[|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| > \delta]| \leq |E[|f_n - f| > \delta/2]| + |E[|g_n - g| > \delta/2]| \rightarrow 0.$$

2. Как нетрудно видеть,

$$f_n g_n - f g = (f_n - f)(g_n - g) + (f_n - f)g + (g_n - g)f.$$

В силу первого пункта достаточно доказать, что каждое из слагаемых сходится к нулю по мере.

Заметим, что

$$E[|(f_n - f)(g_n - g)| > \delta] \subset E[|f_n - f| > \sqrt{\delta}] \cup E[|g_n - g| > \sqrt{\delta}].$$

Отсюда

$$|E[|(f_n - f)(g_n - g)| > \delta]| \leq |E[|f_n - f| > \sqrt{\delta}]| + |E[|g_n - g| > \sqrt{\delta}]| \rightarrow 0.$$

Заметим теперь, что

$$E = E[|g| = 0] \cup E[0 < |g| \leq N] \cup E[|g| > N],$$

причем мера множества $E[|g| > N]$ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого N .

Пусть $E_N = E[0 < |g| \leq N]$. Тогда

$$E_N[|(f_n - f)g| > \delta] = E_N\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{|g|}\right] \subset E_N\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right] \subset E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right].$$

Следовательно

$$E[|(f_n - f)g| > \delta] \subset E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right] \cup E[|g| > N].$$

Поэтому

$$|E[|(f_n - f)g| > \delta]| \leq \left|E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right]\right| + |E[|g| > N]|.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N так, чтобы $|E[|g| > N]| < \varepsilon/2$. Затем, при фиксированном N выберем $n_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\left|E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right]\right| < \varepsilon/2 \quad \text{при } n > n_0(\varepsilon).$$

В итоге

$$|E[|(f_n - f)g| > \delta]| \leq \left|E\left[|f_n - f| > \frac{\delta}{N}\right]\right| + |E[|g| > N]| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Таким образом, $(f_n - f)g \rightarrow 0$ по мере. Точно так же $(g_n - g)f \rightarrow 0$ по мере.

3. Докажем теперь, что $\frac{f_n}{g_n} \rightarrow \frac{f}{g}$ по мере. Поскольку

$$\frac{f_n}{g_n} = f_n \cdot \frac{1}{g_n},$$

то в силу предыдущего пункта достаточно показать, что $\frac{1}{g_n} \rightarrow \frac{1}{g}$ по мере.

Ясно, что

$$\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g} = \frac{g - g_n}{gg_n}.$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ выберем $\alpha > 0$ таким малым, чтобы

$$|E[|g| \leq \alpha]| < \varepsilon/2.$$

Пусть $x \in E[|g| > \alpha] \cap E[|g_n - g| \leq \alpha/2]$. Тогда

$$\delta < \left| \frac{1}{g_n} - \frac{1}{g} \right| \leq \frac{|g - g_n|}{|g|(|g| - |g - g_n|)} \leq \frac{|g - g_n|}{\alpha^2/2}$$

Таким образом,

$$E\left[\left|\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g}\right| > \delta\right] \subset E[|g| \leq \alpha] \cup E[|g_n - g| > \alpha/2] \cup E[|g_n - g| > \delta\alpha^2/2].$$

Отсюда

$$\left| E\left[\left|\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g}\right| > \delta\right] \right| < \varepsilon/2 + |E[|g_n - g| > \alpha/2]| + |E[|g_n - g| > \delta\alpha^2/2]| < \varepsilon$$

для всех $n > n_0(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

Замечание. Обратим внимание на то, что предположение о конечности меры множества E при доказательстве того, что $f_n \pm g_n \rightarrow f \pm g$, не использовалось.

Теорема 4.3. Пусть $f \in \mathfrak{M}(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$, где E – множество конечной меры. Если $f_n \rightarrow f$ почти всюду на E , то $f_n \rightarrow f$ по мере на E .

Доказательство. Заметим, что множество

$$E_0 = E[|f| = +\infty] \cup E[f_n \not\rightarrow f] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E[|f_n| = +\infty]$$

имеет нулевую меру. Поэтому достаточно доказать сходимость по мере на множестве $\tilde{E} = E \setminus E_0$.

Фиксируем произвольное $\delta > 0$. Пусть $\tilde{E}_n = \tilde{E}[|f_n - f| > \delta]$. Введем

$$R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \tilde{E}_k, \quad S = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n.$$

Пусть $x \in \tilde{E}$. Так как $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для $x \in \tilde{E}$, то

$$x \notin \tilde{E}_n \quad \text{для } n \geq N(\delta, x) \Rightarrow x \notin R_n \Rightarrow x \notin S.$$

Таким образом, $S = \emptyset$.

Следовательно $|R_n| \rightarrow |S| = 0$. Но $\tilde{E}_n \subset R_n$ и поэтому $|\tilde{E}_n| \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Если $|E| = \infty$, то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере.

Достаточно рассмотреть последовательность $f_n = \chi_{[n, n+1]}$, которая сходится к 0 всюду, но не сходится по мере.

Теорема 4.4. (Теорема Рисса.) Пусть $f \in \mathfrak{M}(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}(E)$, где E – множество конечной меры.

Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к f по мере на E , то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся к f почти всюду на E .

Доказательство. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots < \dots$ следующим образом:

$$\text{meas } E[|f_{n_k} - f| > 1/k] < \frac{1}{2^k}.$$

Покажем, что построенная последовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится почти всюду. Положим

$$R_m = \bigcup_{k=m}^\infty E[|f_{n_k} - f| > 1/k], \quad Q = \bigcap_{m=1}^\infty R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m.$$

Так как последовательность $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ – убывающая, то $\text{meas } R_m \rightarrow \text{meas } Q$ при $m \rightarrow \infty$. С другой стороны,

$$\text{meas } R_m \leq \sum_{k=m}^\infty \text{meas } E[|f_{n_k} - f| \geq 1/k] \leq \sum_{k=m}^\infty \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Значит, $\text{meas } Q = 0$.

Осталось убедиться в том, что $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ для $x \in E \setminus Q$.

Пусть $x \in E \setminus Q$. Тогда $x \notin Q = \bigcap_{m=1}^\infty R_m$. Следовательно существует номер m такой, что $x \notin R_m = \bigcup_{k=m}^\infty E[|f_{n_k} - f| > 1/k]$.

Это означает, что

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 1/k \quad \text{для всех } k \geq m.$$

Следовательно $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Обратим внимание еще раз на то, что из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. "Бегающая ступенька" дает пример последовательности функций, сходящейся к нулю по мере на $[0, 1]$, но не сходящейся ни в одной точке $x \in [0, 1]$.

Теорема 4.5. (Теорема Егорова.) Пусть E – измеримое множество конечной меры, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}(E)$ и $f_n \rightarrow f$ почти всюду на E .

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, что:

- 1) $\text{meas}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$;
- 2) f_n сходится к f равномерно на E_ε .

Замечание. В случае $|E| = \infty$ теорема Егорова не верна.

Пример дает последовательность $f_n = \chi_{[n, n+1]}$, которая сходится к нулю для всех $x \in E = [0, +\infty)$. В то же время на дополнении к любому множеству \tilde{E} конечной меры f_n не сходится к нулю равномерно.

Действительно, если $|\tilde{E}| < \infty$ и $\tilde{E}_n = \tilde{E} \cap [n, n+1]$, то $|\tilde{E}_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно $|[n, n+1] \setminus \tilde{E}_n| \rightarrow 1$.