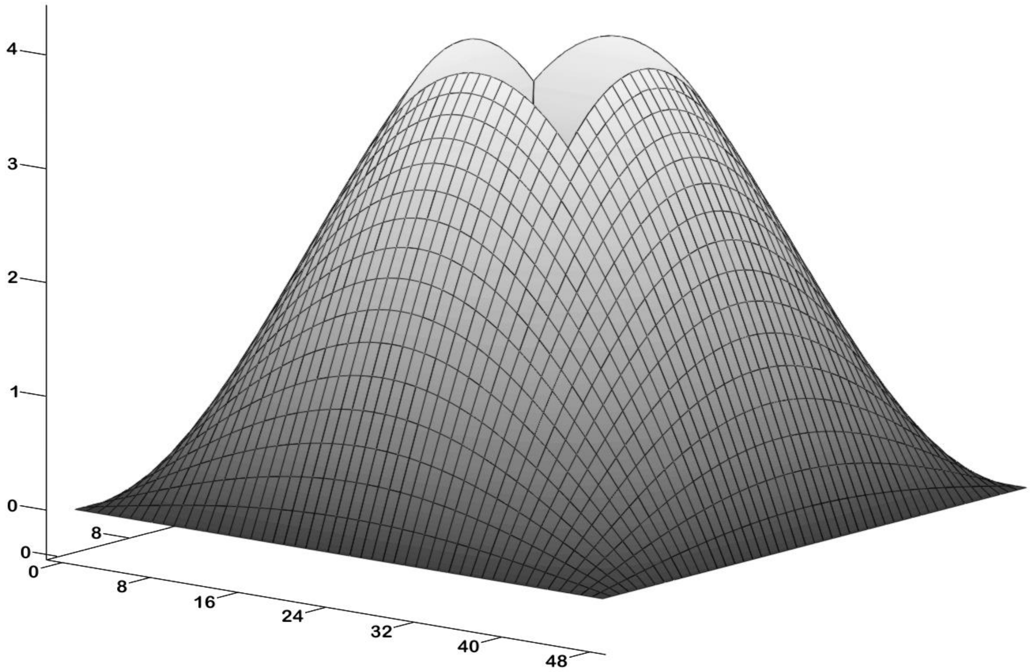

Рис. 1.5. График решения тестового примера
(по горизонтальным осям отложены номера узлов).

Замечание. В случае негладких данных, когда решение нельзя понимать в классическом смысле, использовать критерий окончания на основе обычных норм вектора наподобие (1.7) не рекомендуется. Один из наиболее употребительных критериев окончания является сеточным аналогом «среднеквадратичной» нормы в пространстве $L_2(G)$ и имеет вид

$$\sqrt{\sum_{(x_i, y_j)\in\bar{\Omega}} \left|U_{i,j}^{(k+1)} - U_{i,j}^{(k)}\right|^2 S_{i,j}} \leqslant \varepsilon,$$

где $S_{i,j} = S = h_1 h_2$ для внутренних узлов сетки и $S_{i,j} = 0,5S$ для граничных не угловых точек, а для угловых точек, соответствующих выпуклым и вогнутым углам, площади равны $S_{i,j} = 0,25S$ и $S_{i,j} = 0,75S$ соответственно. Решение краевых задач для стационарных уравнений с негладкими данными рассматривается в следующей главе.

Глава 2. Решение анизотропного стационарного уравнения

2.1. Постановка двумерной задачи

Наряду со стандартным уравнением Пуассона $\Delta u = -f$, на практике при изучении анизотропных сред (ферромагнетики, сегнетоэлектрики, жидкие кристаллы и т.д.) встречается более сложное уравнение

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{P}\operatorname{grad}u\right) = -f, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{P}(x, y)$ — в общем случае матрица, симметричная и положительно определенная в замкнутой области $\overline{G}$, что сохраняет эллиптический тип уравнения (2.1). Здесь мы будем считать эту матрицу диагональной вида

$$\mathbf{P}(x, y) = \begin{pmatrix} p(x, y) & 0 \\ 0 & q(x, y) \end{pmatrix},$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — строго положительные и ограниченные в $\overline{G}$ функции. Тогда уравнение (2.1) в области G принимает вид

$$\left[p(x, y)u_x(x, y)\right]_x + \left[q(x, y)u_y(x, y)\right]_y = -f(x, y). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) может быть дополнено как условием 1-го рода

$$u\big|_{\Gamma} = g(x, y), \tag{2.3}$$

так и условием 3-го рода, которое имеет вид

$$\left(\mathbf{P}\operatorname{grad}u, \mathbf{n}\right) + \mu u\big|_{\Gamma} = g(x, y).$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе Γ, а функция $\mu(x, y)$ такова, что $\mu \geqslant 0$ и $\mu \not\equiv 0$ на Г. Также возможна комбинация этих условий, когда допускается $\mu \equiv 0$ в области своего определения.

В этой главе мы ограничимся случаем задачи Дирихле (2.2), (2.3), а $\bar{G}$ будем считать прямоугольником $[0,a]\times[0,b]$. Тогда граничное условие (2.3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\varphi_0(x), \quad u(x,b)=\varphi_b(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant a;\\ &u(0,y)=\chi_0(y), \quad u(a,y)=\chi_a(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant b. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2. Сетки и сеточные функции

Обозначим через $\bar{\Omega}$ двумерную пространственную сетку, состоящую из точек $(x_i,y_j)=(ih_1, jh_2)$ $(i=0,\ldots,N_1;\ j=0,\ldots,N_2)$, где $h_1=a/N_1$ и $h_2=b/N_2$, а через Ω — множество её внутренних точек. Введем также точки вида $x_{i-1/2}=x_i-0{,}5h_1$, $y_{j-1/2}=y_j-0{,}5h_2$ $(i=1,\ldots,N_1;\ j=1,\ldots,N_2)$. Через $\Omega_{1/2}^{(1)}$ и $\Omega_{1/2}^{(2)}$ обозначим множество лежащих в области G точек вида $(x_{i-1/2},y_j)$ и $(x_i,y_{j-1/2})$ соответственно (эти точки обозначены крестиками на рис. 2.1).

Для произвольных сеточных функций со значениями $U_{i,j}$ на сетке $\bar{\Omega}$ будем пользоваться безындексным обозначением U. Сеточным функциям со значениями $V_{i-1/2,j}$ и $W_{i,j-1/2}$ соответственно на сетках $\Omega_{1/2}^{(1)}$ и $\Omega_{1/2}^{(2)}$ сопоставим безындексные обозначения $\tilde{V}$, $\tilde{W}$. Если эти сеточные функции соответствуют функциям непрерывного аргумента u, v, w, то значения последних на этих сетках будем обозначать u, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$.

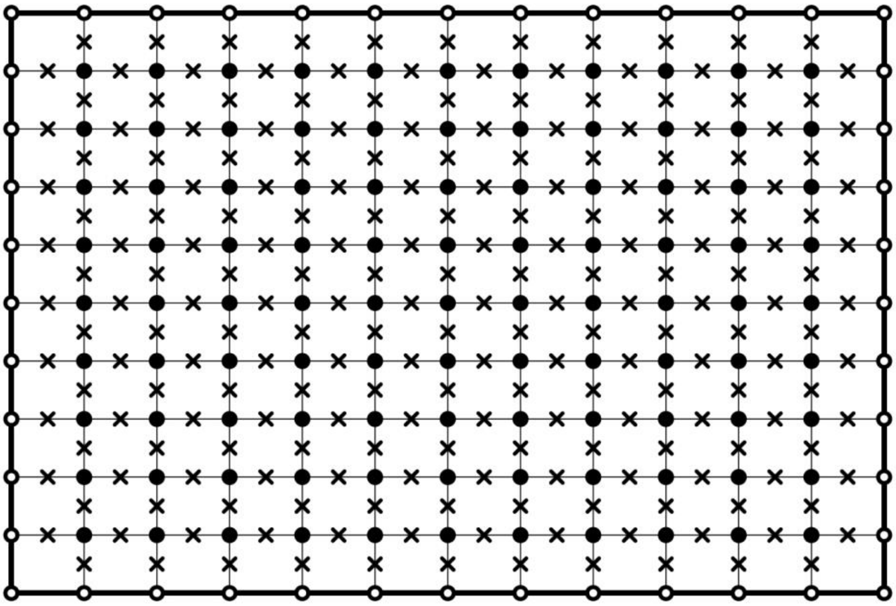

Рис. 2.1. Дискретизация расчетной области для анизотропного уравнения.

С целью упрощения записи, для сеточных функций U на $\bar{\Omega}$, а также $\tilde{V}$, $\tilde{W}$ на $\Omega_{1/2}^{(1)}$ и $\Omega_{1/2}^{(2)}$ соответственно введем операторы центральной разностной производной по x и y равенствами

$$\delta_1 U(x_{i-1/2}, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_1}, \quad \delta_1 \tilde{V}(x_i, y_j) = \frac{V_{i+1/2,j} - V_{i-1/2,j}}{h_1};$$

$$\delta_2 U(x_i, y_{j-1/2}) = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_2}, \quad \delta_2 \tilde{W}(x_i, y_j) = \frac{W_{i,j+1/2} - W_{i,j-1/2}}{h_2}.$$

2.3. Случай гладких данных

Пусть в уравнении (2.2) функции p, q, f, а также все функции из условия (2.4) по крайней мере непрерывны, и для последних выполнены условия непрерывного согласования в угловых точках границы Г. В этом случае дискретизация уравнения (2.2) производится аналогично одномерной двухточечной краевой задаче (см. [1, §15.3, п.4]). Для этого определим на сетке Ω сеточную функцию F со значениями $F_{i,j} = f(x_i, y_j)$, а на сетках $\Omega_{1/2}^{(1)}$ и $\Omega_{1/2}^{(2)}$ — сеточные функции $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ со значениями $P_{i-1/2,j} = p(x_{i-1/2}, y_j)$ и $Q_{i,j-1/2} = q(x_i, y_{j-1/2})$ соответственно. Введем анизотропные разностные операторы второго порядка

$$\Lambda_1[U](x_i, y_j) = \frac{1}{h_1}\left(P_{i+1/2,j} \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_1} - P_{i-1/2,j} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_1} \right);$$

$$\Lambda_2[U](x_i, y_j) = \frac{1}{h_2}\left(Q_{i,j+1/2} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_2} - Q_{i,j-1/2} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_2} \right),$$

Тогда значения искомой сеточной функции U находятся из системы пятиточечных разностных уравнений

$$\Lambda_1[U] + \Lambda_2[U] = -F, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{2.5}$$

которая дополняется граничными условиями

$$\begin{aligned} U_{i,0} &= \Phi_{0,i}, \quad U_{i,N_2} = \Phi_{b,i}, \qquad i = 0, \ldots, N_1; \\ U_{0,j} &= \mathrm{X}_{0,j}, \quad U_{N_1,j} = \mathrm{X}_{a,j}, \qquad j = 0, \ldots, N_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\Phi_{0,i} = \varphi_0(x_i)$, $\Phi_{b,i} = \varphi_b(x_i)$, $\mathrm{X}_{0,j} = \chi_0(y_j)$, $\mathrm{X}_{a,j} = \chi_a(y_j)$.

При достаточно гладких данных разностная схема (2.5), (2.6) имеет второй порядок аппроксимации по h_1 и h_2. Она решается с помощью методики, изложенной в работе [3].

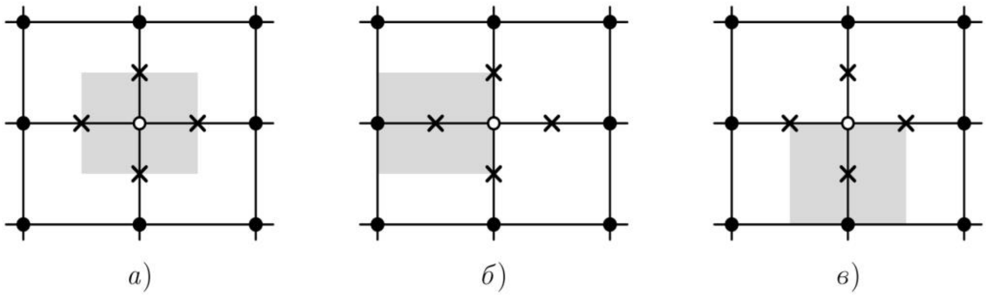

Рис. 2.2. Метод баланса для анизотропного уравнения Пуассона. Незакрашенным кружком выделена точка (x_i, y_j).

2.4. Задача Дирихле с негладкими данными

В случае, когда данные задачи (2.2), (2.3) являются негладкими, т.е. вообще говоря не имеет смысла говорить о значении функции в точке, а решение нельзя понимать в классическом смысле, коэффициенты разностной схемы (2.5), (2.6) необходимо вычислять специальным образом — усреднять известные функции.

Для построения разностной схемы применим *метод баланса* в предположении существования классического решения задачи (2.2), (2.3). Введем функции $v(x,y) = p(x,y)u_x(x,y)$ и $w(x,y) = q(x,y)u_y(x,y)$. Тогда уравнение (2.2) примет вид $v_x + w_y = -f$. Проинтегрируем его по прямоугольнику $G_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ (закрашен сплошным серым цветом на рис. 2.2а):

$$\int\limits_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x,y)\Big|_{x=x_{i-1/2}}^{x=x_{i+1/2}} dy + \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(x,y)\Big|_{y=y_{j-1/2}}^{y=y_{j+1/2}} dx = -\iint\limits_{G_{i,j}} f(x,y)dxdy.$$

Разделив это тождество на h_1h_2 и применяя к интегралам в левой части элементарную формулу центральных прямоугольников, получим приближенное равенство

$$\left[\delta_1\tilde{v}\right](x_i, y_j) + \left[\delta_2\tilde{w}\right](x_i, y_j) \approx -F_{i,j}, \qquad (2.7)$$

где $F_{i,j}$ является средним значением функции $f(x,y)$ на множестве $G_{i,j}$ и вычисляется по формуле

$$F_{i,j} = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{G_{i,j}} f(x,y)dxdy. \qquad (2.8)$$

Выведем аппроксимации для значений $v(x_{i\pm1/2}, y_j)$. Рассмотрим, например, величину $v(x_{i-1/2}, y_j)$. Для этого проинтегрируем равенство

Учебное издание

Казёнкин Константин Олегович
Вестфальский Алексей Евгеньевич
Амосова Ольга Алексеевна

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор издательства
Компьютерная верстка

Подписано в печать **.**.2018 Печать офсетная Формат 60×84/16
Физ. печ. л. 3 Тираж 200 экз. Изд. № **-*** Заказ №

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.