

Расстановка ферзей

Задача

Расставить N ферзей на шахматной доске $N \times N$ так, чтобы ни одна фигура не била другую.

Решение

Переменные

Для начала заведем следующий набор булевых переменных, каждая из которых будет отвечать за расположение ферзей на доске:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клетка } (i, j) \text{ занята ферзем} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Начальное ограничение

Для начала нам следует обозначить, что в каждой строке должен стоять ровно один ферзь:

$$\bigwedge_{i=1}^N \bigvee_{j=1}^N x_{ij}$$

Это ограничение говорит нам о том, что мы должны расставить ровно N ферзей.

Ограничения по строкам, столбцам и диагоналям

Для того, чтобы ферзи не били друг друга, очевидно, что на одну строку должно приходиться не более одного ферзя:

$$\bigwedge_{i=1}^N \bigwedge_{j=1}^N \bigwedge_{k=j+1}^N (\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{ik})$$

Аналогично для столбцов:

$$\bigwedge_{i=1}^N \bigwedge_{j=1}^N \bigwedge_{k=j+1}^N (\bar{x}_{ji} \vee \bar{x}_{ki})$$

Для каждой из главных диагоналей также нужно ввести подобное ограничение:

$$\bigwedge_{k=1-N}^{N-1} \bigwedge_{i_1-j_1=k} \bigwedge_{i_2-j_2=k}^{i_2>i_1} (\bar{x}_{i_1j_1} \vee \bar{x}_{i_2j_2})$$

Аналогично для побочных диагоналей:

$$\bigwedge_{k=2}^{2N} \bigwedge_{i_1+j_1=k} \bigwedge_{i_2+j_2=k}^{i_2>i_1} (\bar{x}_{i_1j_1} \vee \bar{x}_{i_2j_2})$$

Для получения первой расстановки мы должны записать все ограничения через оператор \bigwedge и отправить получившуюся формулу в КНФ в sat-solver.

Получение всех возможных расстановок

После получения первой расстановки мы должны запомнить все x_{ij} из нее и добавить новый дизъюнкт к формуле:

$$\bigvee_{x \in \tilde{X}} \bar{x}, \quad \tilde{X} = \{x_{ij} \mid x_{ij} = 1\}$$

Затем мы снова отправляем в sat-solver формулу с новым дизъюнктом. Получив следующую расстановку, нужно снова проделать те же действия с запоминанием x_{ij} , добавлением нового дизъюнкта и отправкой новой формулы. Продолжать данный цикл следует, пока sat-solver не выведет, что формула не может быть разрешена при любой возможной комбинации переменных.